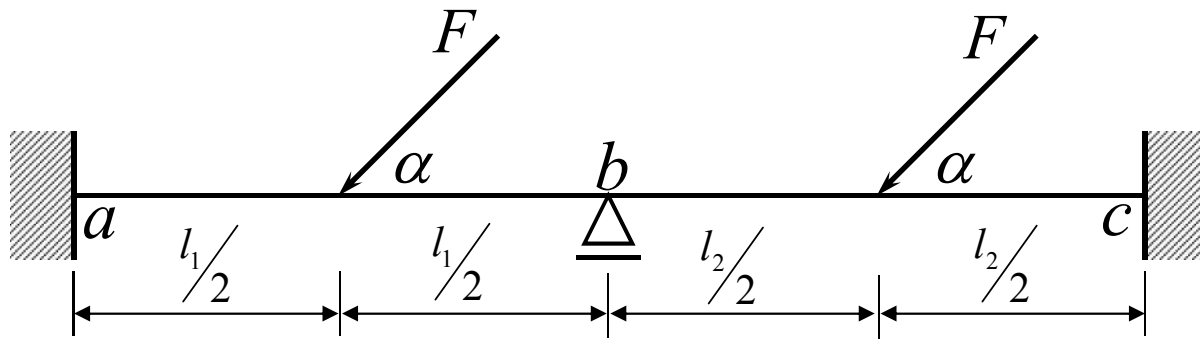




Téma 8 Obecná deformační metoda – podstata metody

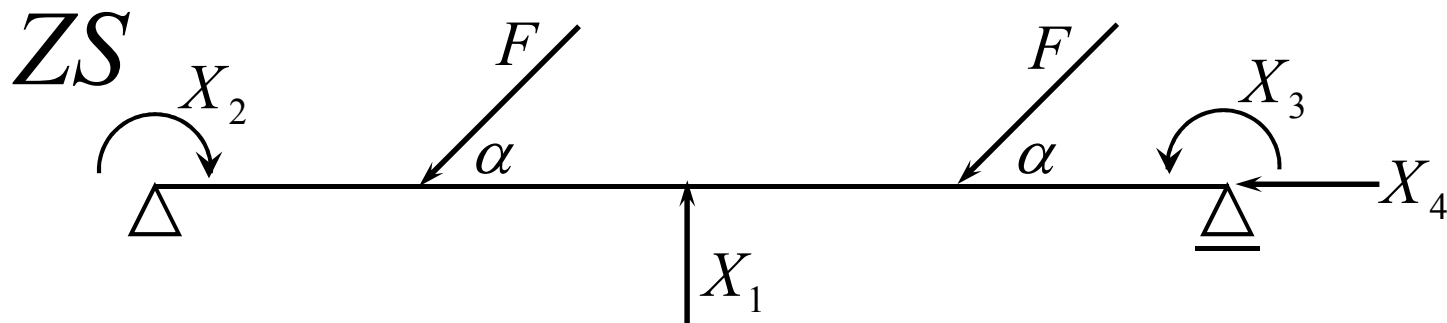
- Výpočtový model rovinné prutové konstrukce
- Stupeň přetvárné neurčitosti rovinné konstrukce

Silová metoda

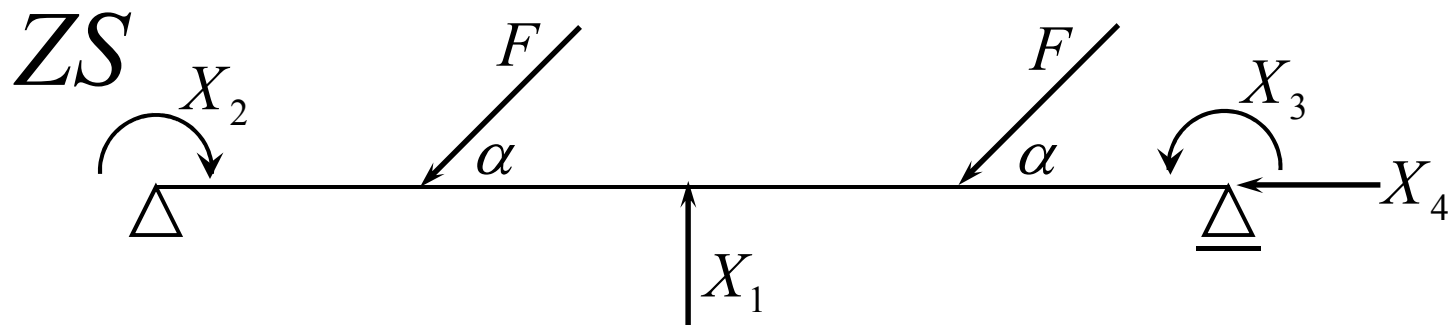


$$n_s = 4 \quad \text{pro } \alpha = 45^\circ \quad \begin{cases} F_x = F \frac{\sqrt{2}}{2} \\ F_z = F \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

(pro $l_1 = l_2$)



Deformační podmínky



$$\delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \delta_{13}X_3 + \delta_{14}X_4 + \delta_{10} = 0$$

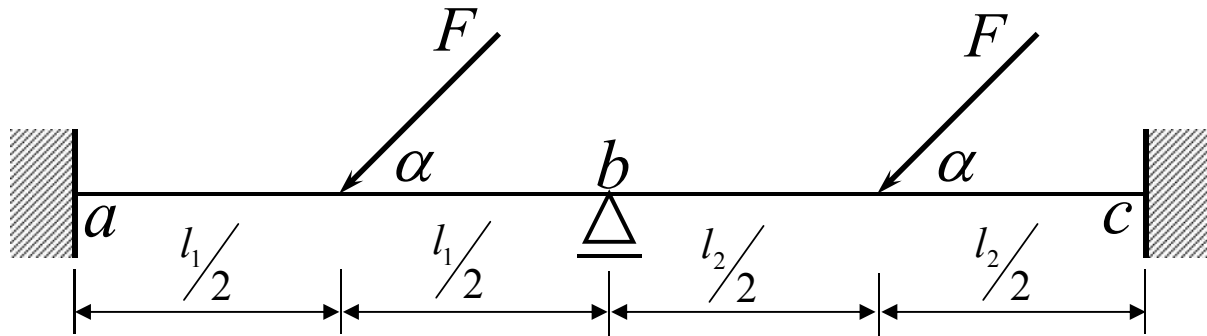
$$\delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \delta_{23}X_3 + \delta_{24}X_4 + \delta_{20} = 0$$

$$\delta_{31}X_1 + \delta_{32}X_2 + \delta_{33}X_3 + \delta_{34}X_4 + \delta_{30} = 0$$

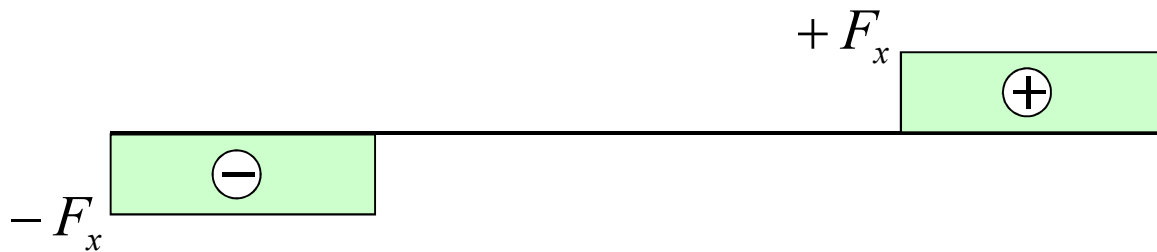
$$\delta_{41}X_1 + \delta_{42}X_2 + \delta_{43}X_3 + \delta_{44}X_4 + \delta_{40} = 0$$

Neznámé – síly, momenty

Řešení



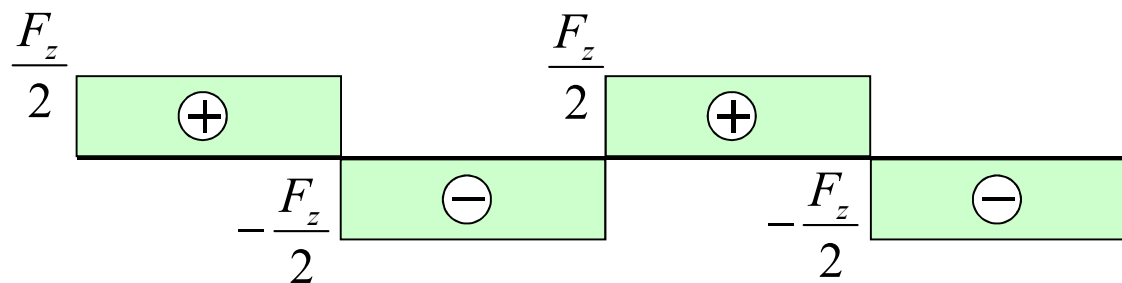
N



$$H_a = F_x (\rightarrow)$$

$$H_b = F_x (\rightarrow)$$

V

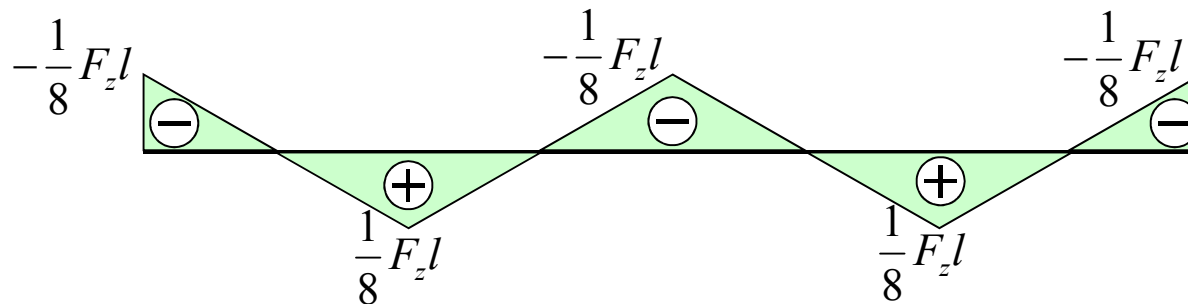


$$R_a = \frac{F_z}{2} (\uparrow)$$

$$R_b = F_z (\uparrow)$$

$$R_c = \frac{F_z}{2} (\uparrow)$$

M



$$M_a = \frac{1}{8} F_z l (\curvearrowright)$$

$$M_c = \frac{1}{8} F_z l (\curvearrowleft)$$

Vznik a vývoj deformační metody

Asger Skovgaard Ostenfeld

- v roce 1926 publikoval práci Die Deformationsmethode

Hardy Cross

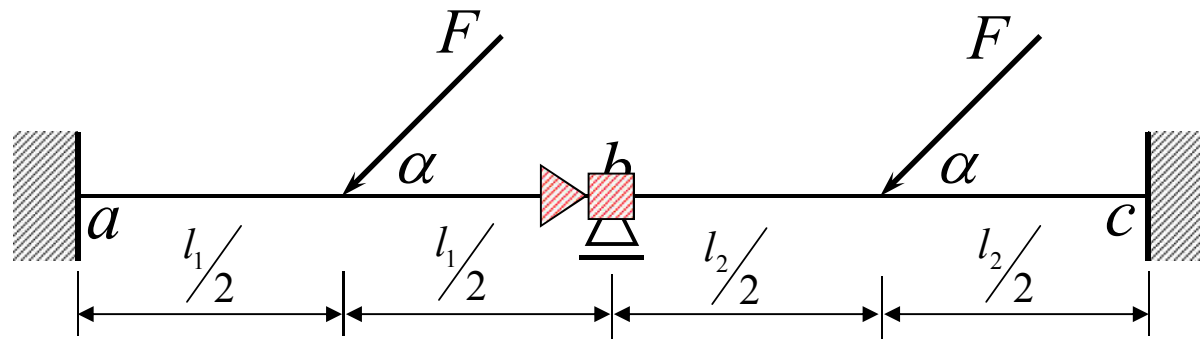
- v roce 1929 publikoval metodu rozdělování momentů

Václav Dašek, akademik

- metoda rozdělování sil a momentů

Rozvoj DM spojen s rozvojem počítačů od 60. let minulého století

Deformační metoda



$$u_a = w_a = \varphi_a = 0$$

$$u_b \neq 0 \quad w_b = 0 \quad \varphi_b \begin{cases} = 0 \dots l_1 = l_2 = l \\ \neq 0 \dots l_1 \neq l_2 \end{cases}$$

$$u_c = w_c = \varphi_c = 0$$

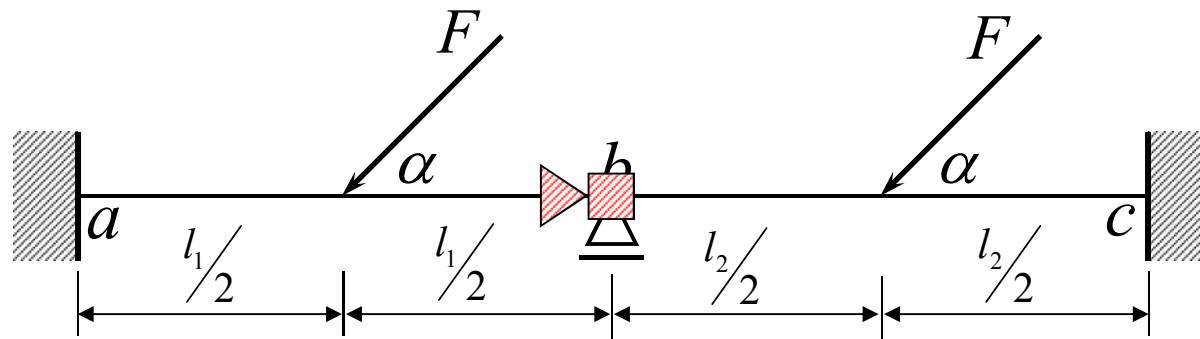
Přetvárná neurčitost:

$$n_p = 1 \quad (u_b) \dots l_1 = l_2 = l$$

$$n_p = 2 \quad (u_b, \varphi_b) \dots l_1 \neq l_2$$

Vyplývá z fiktivních vazeb

Silové podmínky



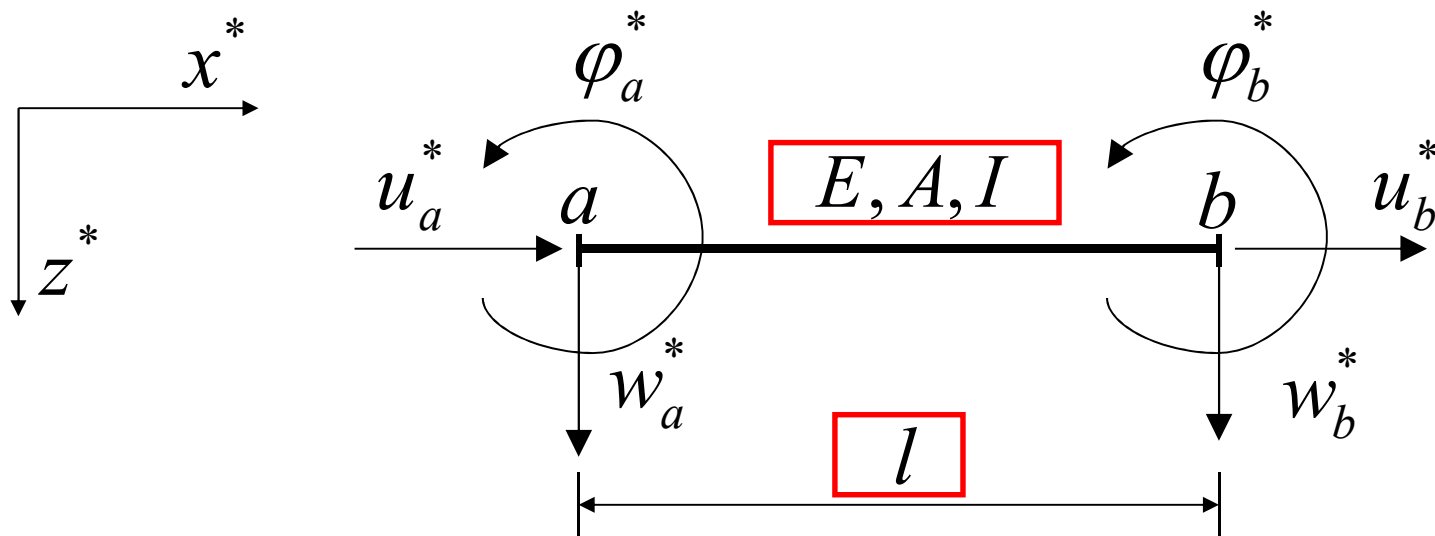
$$\sum F_{i,x,b} = 0 \Rightarrow u_b = ?$$

$$\sum M_{i,b} = 0 \Rightarrow \varphi_b = ? \text{ (pro } n_p = 2)$$

Neznámé – posuny, pootočení

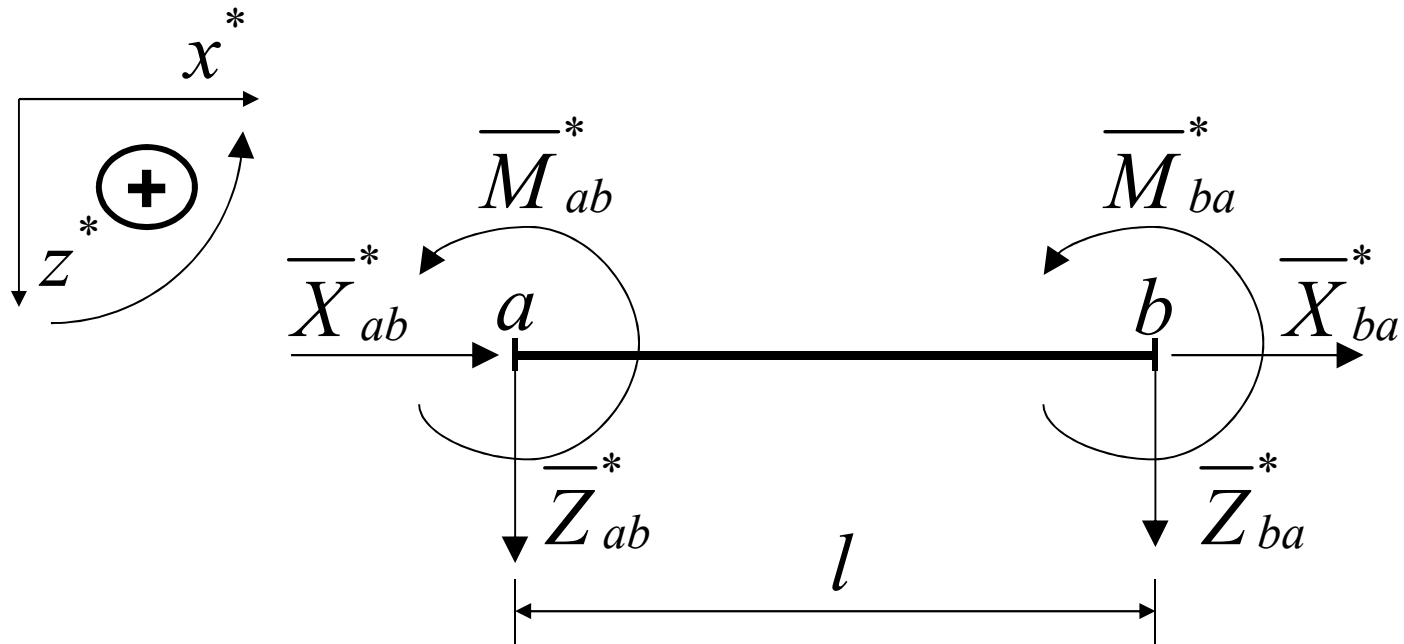
Vstupy a neznámé obecné deformační metody (ODM)

- Prut oboustranně monoliticky připojený a prut konstantního průřezu
 - E ... modul pružnosti
 - A ... plocha průřezu
 - I ... moment setrvačnosti
 - l ... délka prutu



Neznámé – posuny, pootočení

Znaménková konvence ODM



Neznámé – posuny, pootočení

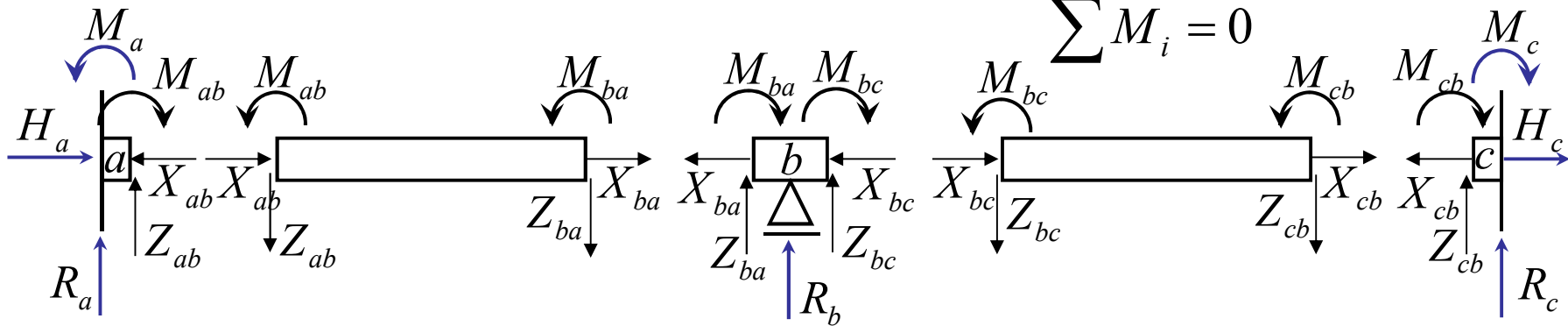
Podmínky rovnováhy

- Ve styčnicku i musí být splněny
- 3 podmínky rovnováhy:

$$\sum F_{xi} = 0 \quad i = a, b, c$$

$$\sum F_{zi} = 0$$

$$\sum M_i = 0$$



Ve styčnicku vždy stejně velké síly jako na konci přilehlého prutu, ale opačného směru.

Princip superpozice

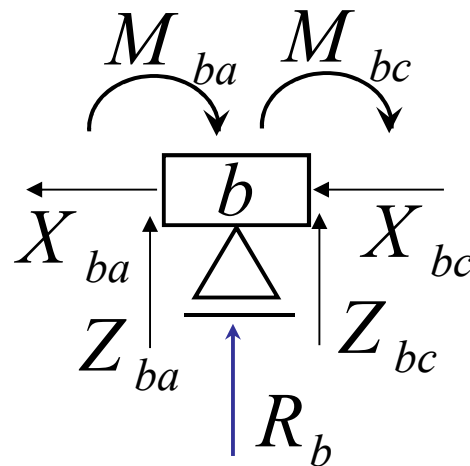
- Sílové účinky v uzlech:

- primární stav (reakce vyjmutých prutů)
- sekundární stav (vliv u a φ ve styčnicku)

$$X_{ba} = \bar{X}_{ba} + \hat{X}_{ba}$$

$$\bar{X}_{ba}$$

$$\hat{X}_{ba}$$



$$X_{ba} = \bar{X}_{ba} + \hat{X}_{ba}$$

$$Z_{ba} = \bar{Z}_{ba} + \hat{Z}_{ba},$$

$$M_{ba} = \bar{M}_{ba} + \hat{M}_{ba}$$

$$\sum F_{xi} = 0 \quad i = b$$

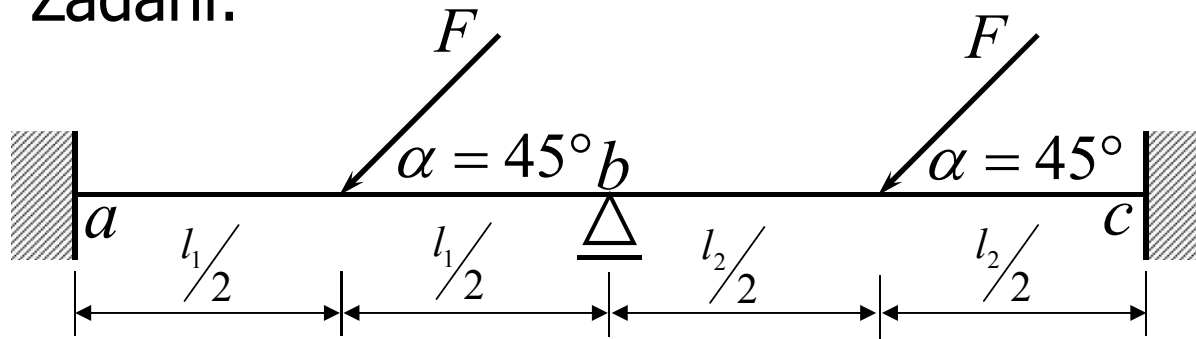
$$\sum F_{zi} = 0$$

$$\sum M_i = 0$$

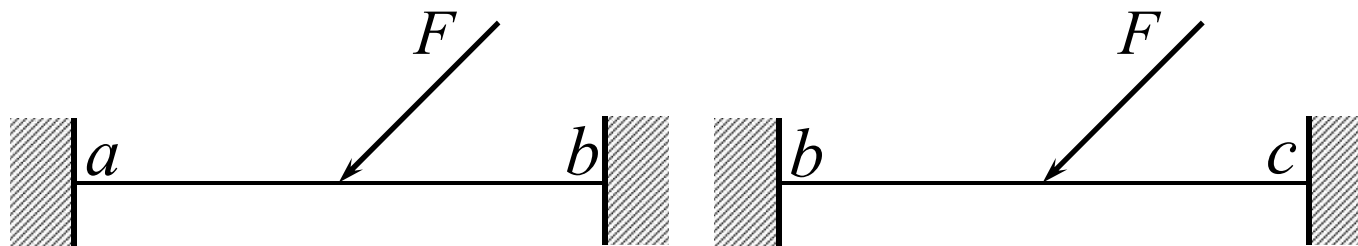
Primární stav

Primární koncové síly jsou reakce na vyjmutém nosníku.

Zadání:

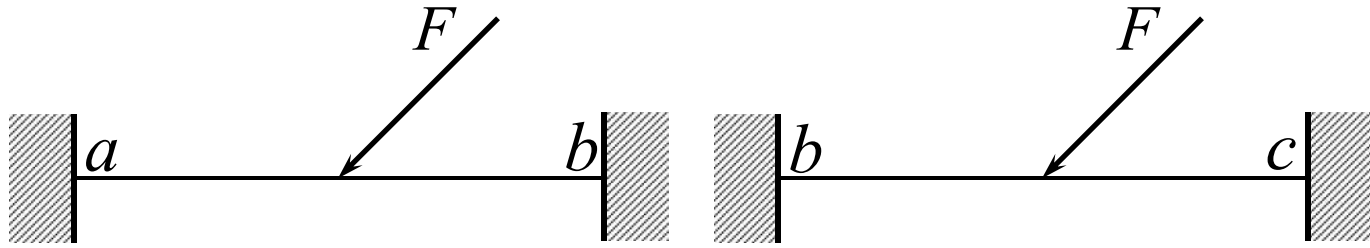
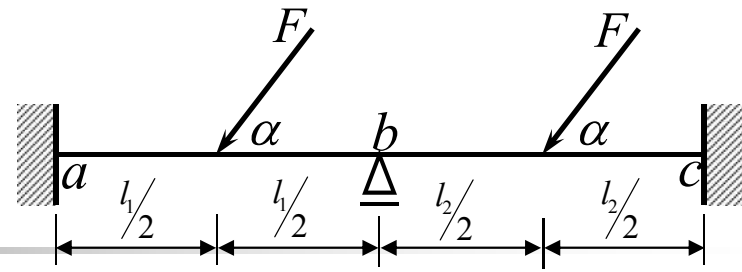


Primární stav, po vložení fiktivních vazeb:

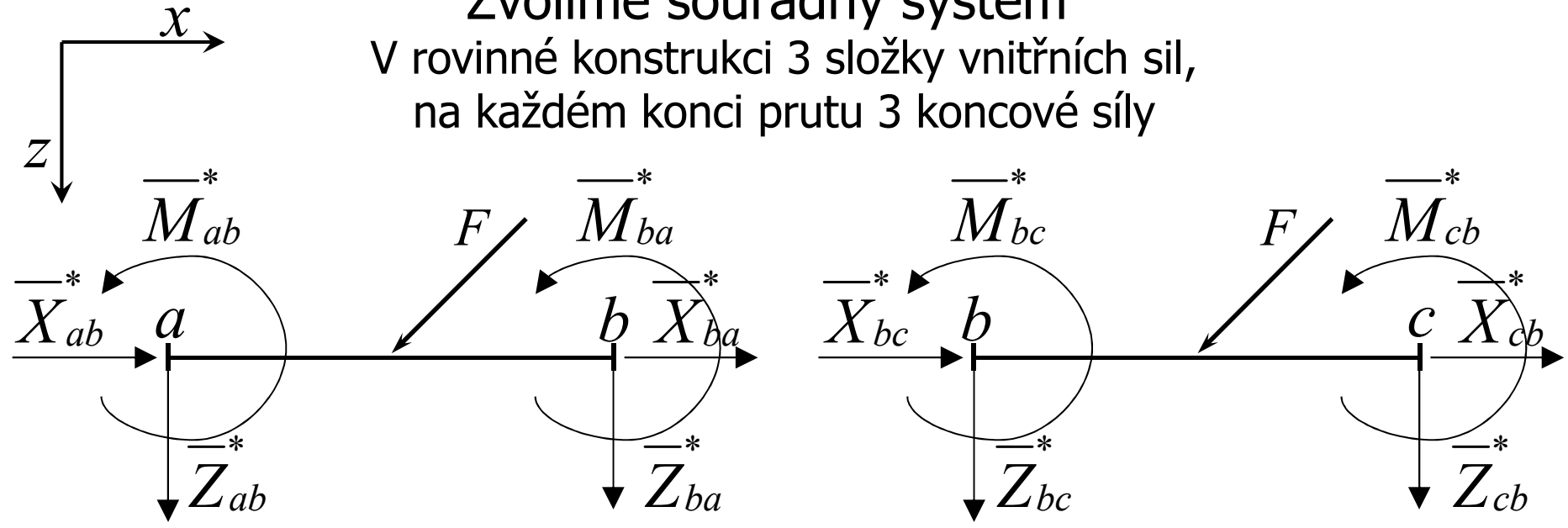


Fiktivní vazby neumožňují určit posunutí u_b a pootočení φ_b

Primární stav

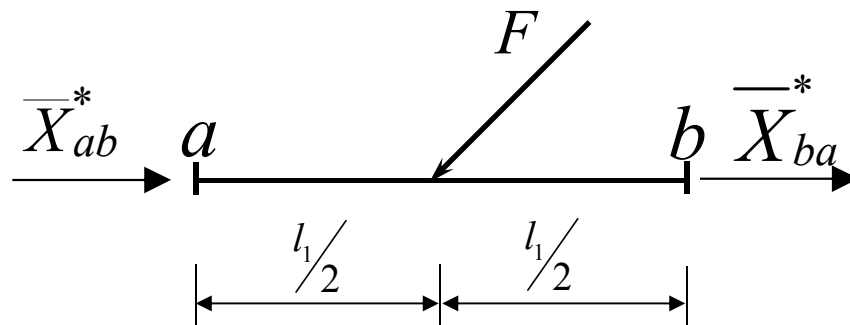


Zvolíme souřadný systém
V rovinné konstrukci 3 složky vnitřních sil,
na každém konci prutu 3 koncové síly



Pozor na konvence a značení koncových sil

Primární stav – směr x

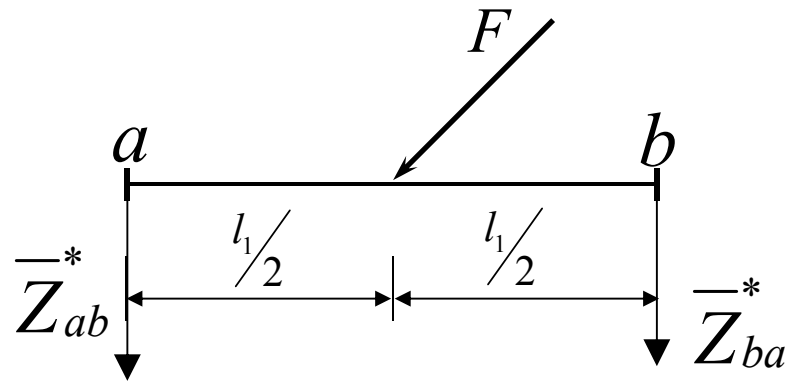


Primární koncové síly řešíme obecně ***silovou metodou***:

$$\overline{X}_{ab}^* = \frac{F_x}{2} \quad \overline{X}_{ba}^* = \frac{F_x}{2}$$

Symetrie zde vede ke zjednodušení.

Primární stav – směr z

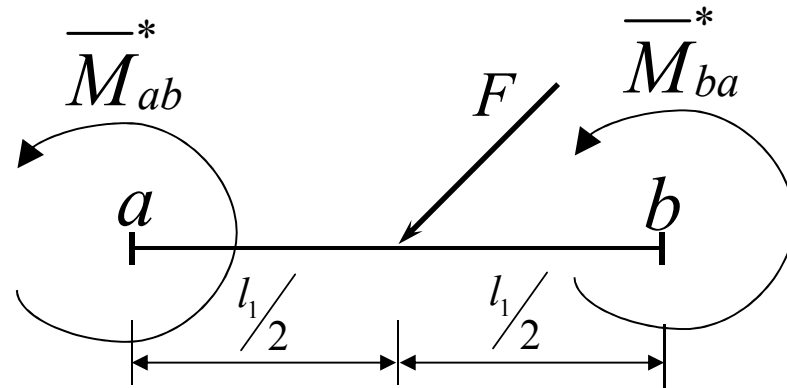


Primární koncové síly řešíme obecně ***silovou metodou***:

$$\bar{Z}_{ab}^* = -\frac{F_z}{2} \quad \bar{Z}_{ba}^* = -\frac{F_z}{2}$$

Symetrie zde vede ke zjednodušení.

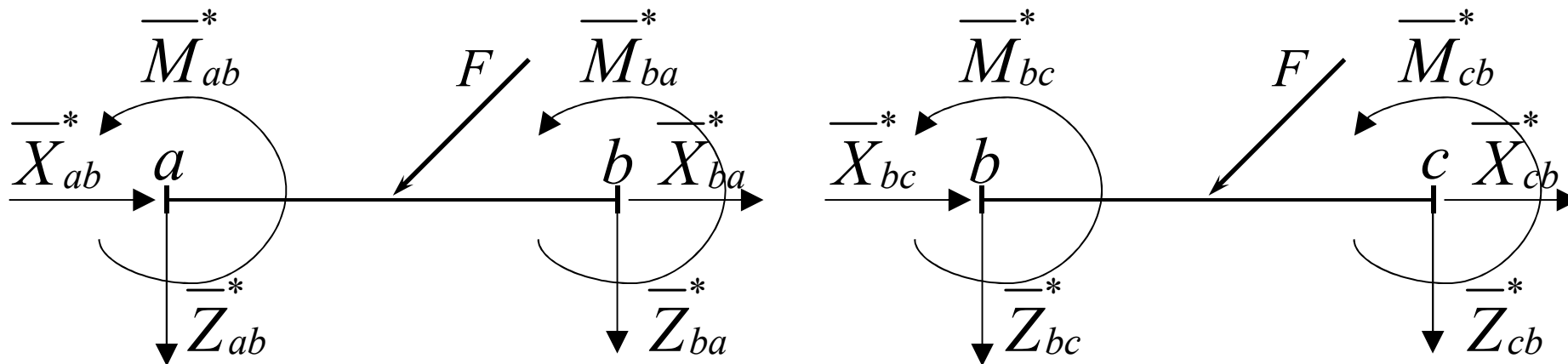
Primární stav – rotace kolem osy y



Primární koncové síly řešíme obecně ***silovou metodou***:

$$\overline{M}_{ab}^* = \frac{F_z l}{8} \quad \overline{M}_{ba}^* = -\frac{F_z l}{8}$$

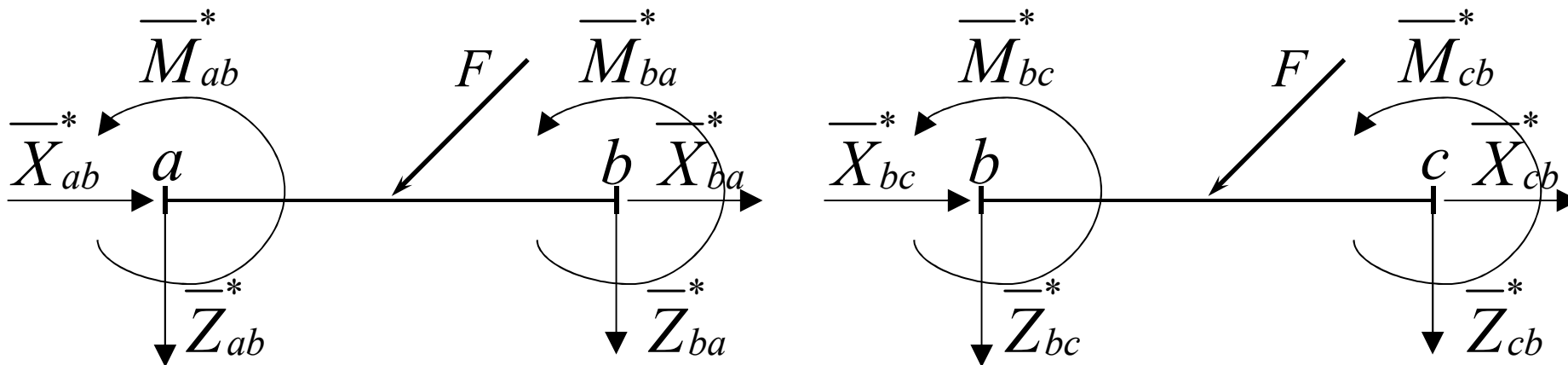
Primární stav



Primární koncové síly řešíme ***silovou metodou***:

$$\overline{X}_{ab}^* = \frac{F_x}{2} \quad \overline{X}_{ba}^* = \frac{F_x}{2}$$

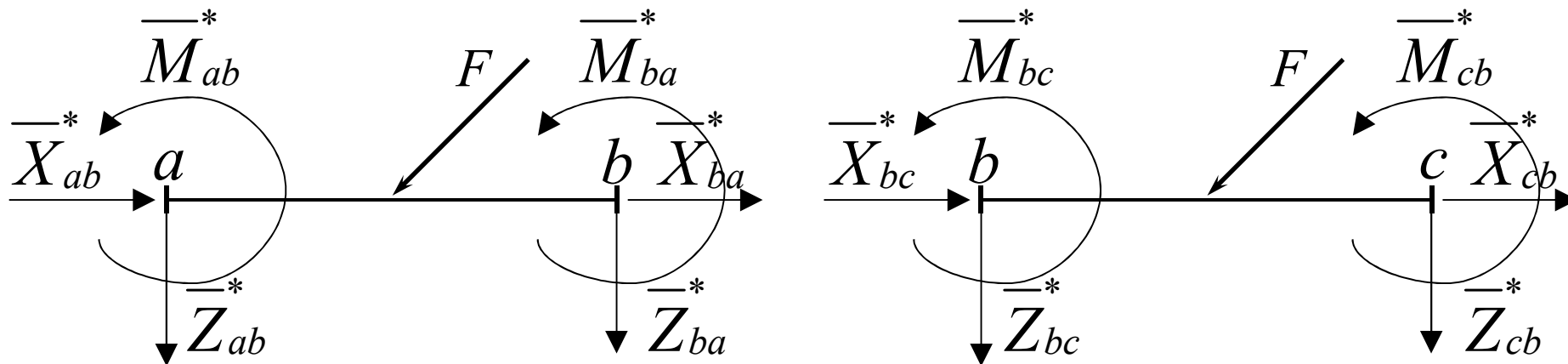
Primární stav



Primární koncové síly řešíme ***silovou metodou***:

$$\overline{Z}_{ab}^* = -\frac{F_z}{2} \quad \overline{Z}_{ba}^* = -\frac{F_z}{2}$$

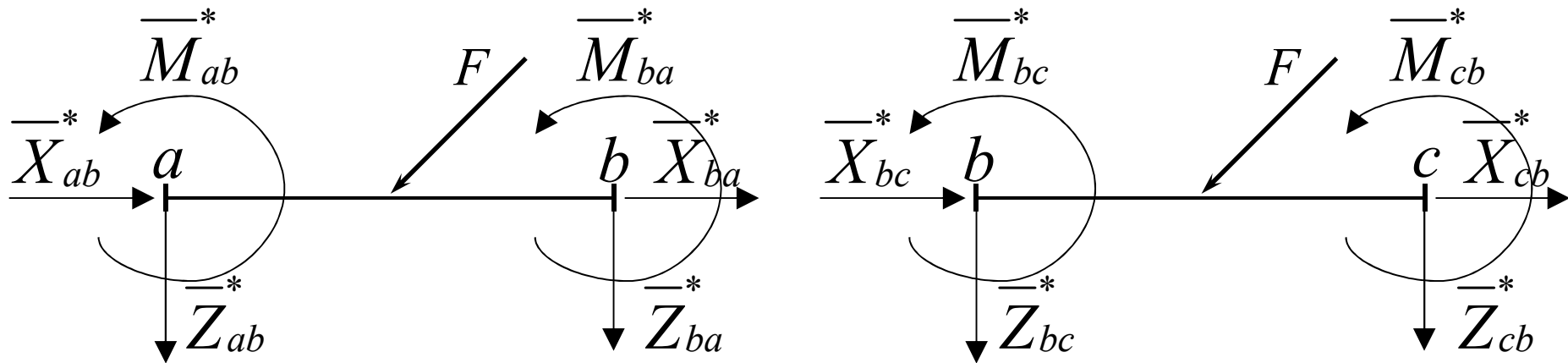
Primární stav



Primární koncové síly řešíme ***silovou metodou***:

$$\overline{M}_{ab}^* = \frac{1}{8} F_z l \quad \overline{M}_{ba}^* = -\frac{1}{8} F_z l$$

Primární stav



Primární koncové síly řešíme **silovou metodou**:

$$\overline{X}_{ab}^* = \frac{F_x}{2} \quad \overline{X}_{ba}^* = \frac{F_x}{2}$$

$$\overline{Z}_{ab}^* = -\frac{F_z}{2} \quad \overline{Z}_{ba}^* = -\frac{F_z}{2}$$

$$\overline{M}_{ab}^* = \frac{1}{8} F_z l \quad \overline{M}_{ba}^* = -\frac{1}{8} F_z l$$

$$\overline{X}_{bc}^* = \frac{F_x}{2} \quad \overline{X}_{cb}^* = \frac{F_x}{2}$$

$$\overline{Z}_{bc}^* = -\frac{F_z}{2} \quad \overline{Z}_{cb}^* = -\frac{F_z}{2}$$

$$\overline{M}_{bc}^* = \frac{1}{8} F_z l \quad \overline{M}_{cb}^* = -\frac{1}{8} F_z l$$

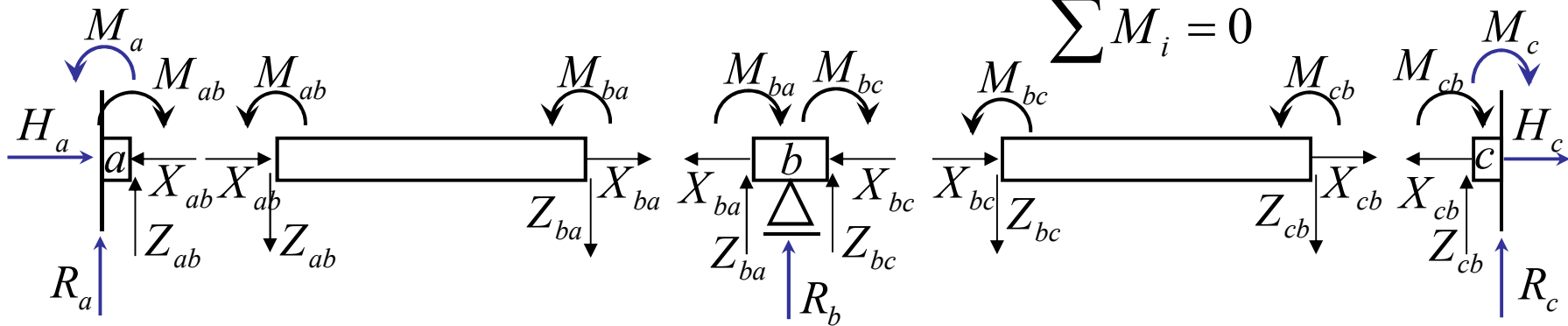
Podmínky rovnováhy

- Ve styčnicku i musí být splněny
- 3 podmínky rovnováhy:

$$\sum F_{xi} = 0 \quad i = a, b, c$$

$$\sum F_{zi} = 0$$

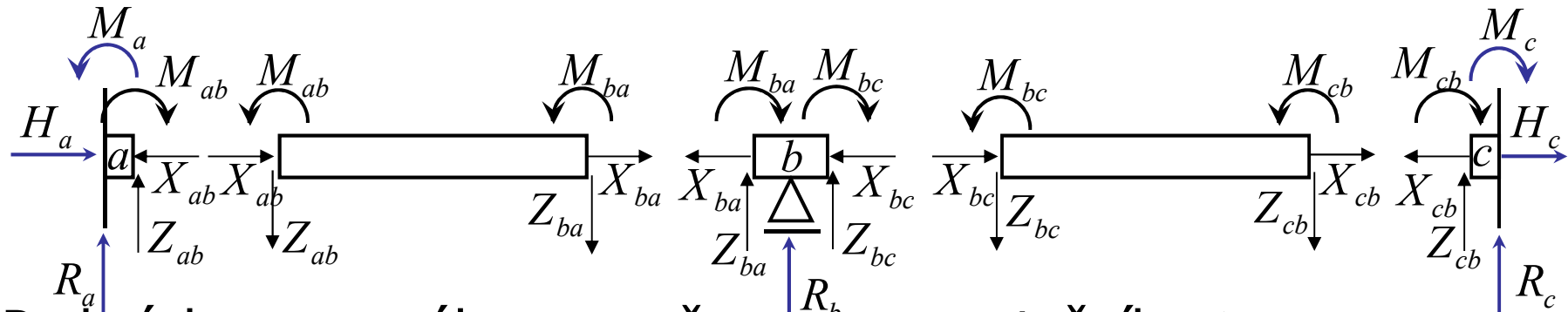
$$\sum M_i = 0$$



Ve styčnicku vždy stejně velké síly jako na konci přilehlého prutu, ale opačného směru.

Podmínky rovnováhy ve styčnicku b

ve směru osy x



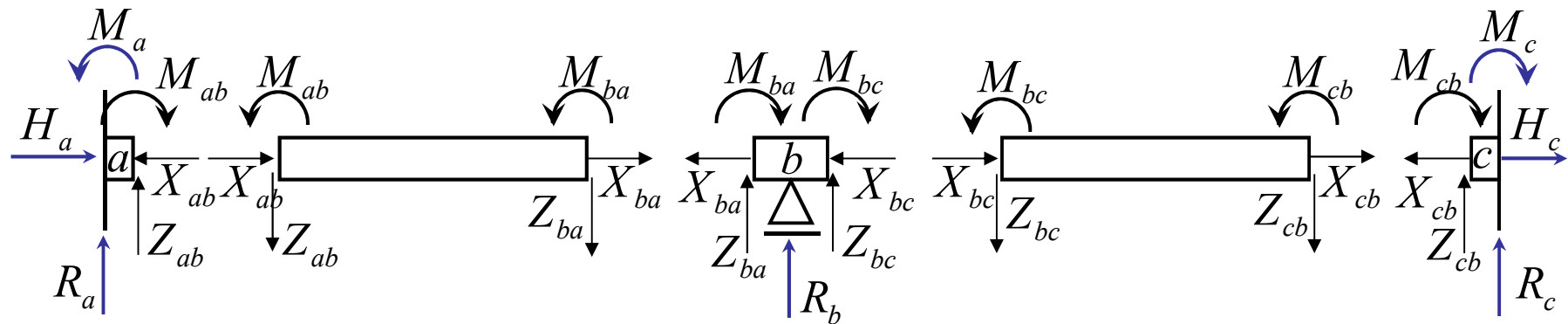
Podmínka rovnováhy ve směru osy x ve styčnicku b :

$$\sum F_{xb} = 0 \dots -X_{ba} - X_{bc} = 0$$

Primární koncové síly $\bar{X}_{ba} = \frac{F_x}{2}$ a $\bar{X}_{bc} = \frac{F_x}{2}$ nezajistí rovnováhu.

Podmínky rovnováhy ve styčnicku b

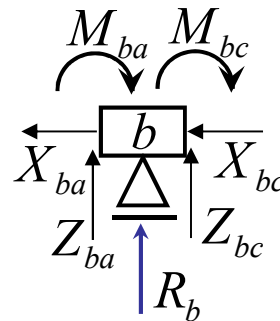
ve směru osy x



Vycházíme s interakce mezi prutem a styčnickem.

Podmínky rovnováhy ve styčnicku b

ve směru osy x



$$\sum F_{xb} = 0 \dots -X_{ba} - X_{bc} = 0$$

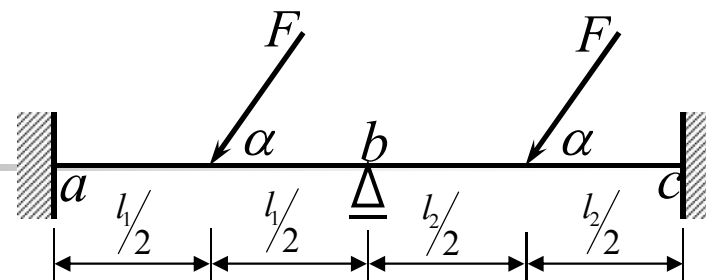
Musí zde působit **sekundární koncové síly**, které jsou funkcí přetvoření konců prutů.

$$X_{ba} = \bar{X}_{ba} + \hat{X}_{ba}$$

$$X_{bc} = \bar{X}_{bc} + \hat{X}_{bc}$$

Sekundární stav

- Výpočet sekundárních koncových sil



$$\hat{X}_{ab} \left(\hat{X}_{ba} \right), \hat{X}_{bc} \left(\hat{X}_{cb} \right)$$



Dle Hookova zákona pro $EA = \text{konst.}$:

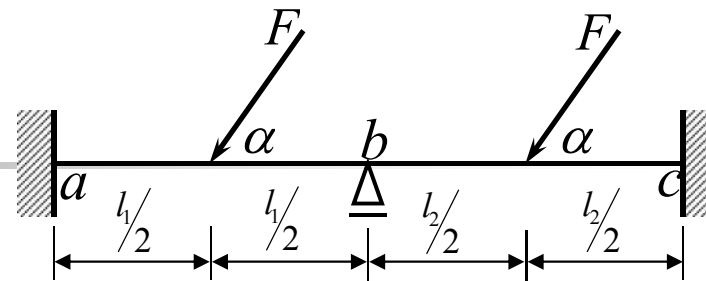
$$\Delta l = \frac{N \cdot l}{EA}$$

$$\Delta l = u_b - u_a = \frac{l_{ab} \cdot \hat{X}_{ba}}{EA} = -\frac{l_{ab} \cdot \hat{X}_{ab}}{EA}$$

$$-\hat{X}_{ab} = \hat{X}_{ba} = \frac{EA}{l_{ab}} (u_b - u_a)$$

Sekundární stav

- Výpočet sekundárních koncových sil



$$\hat{X}_{ab} \begin{pmatrix} \hat{X}_{ba} \end{pmatrix}, \hat{X}_{bc} \begin{pmatrix} \hat{X}_{cb} \end{pmatrix}$$



$$-\hat{X}_{ab} = \hat{X}_{ba} = \frac{EA}{l_{ab}} (u_b - u_a)$$

Obdobně $\hat{X}_{cb} = -\hat{X}_{bc} = \frac{EA}{l_{bc}} (u_c - u_b)$

V našem případě: $u_a = u_c = 0$, $l_{ab} = l_{bc} = l_1 = l_2 = l$

Po úpravě: $X_{ba} = X_{bc} = \frac{EA}{l} u_b$

Výsledný stav, výpočet přetvoření u_b

Je dán superpozicí primárního a sekundárního stavu
Po dosazení do podmínky rovnováhy v ose x :

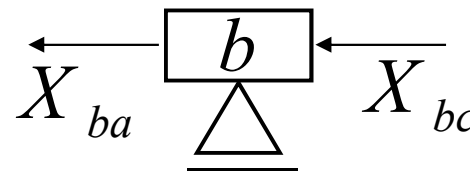
$$-X_{ba} - X_{bc} = 0, \quad X_{ba} = \overline{X}_{ba} + \hat{X}_{ba}, \quad X_{bc} = \overline{X}_{bc} + \hat{X}_{bc}$$

$$-\overline{X}_{ba} - \hat{X}_{ba} - \overline{X}_{bc} - \hat{X}_{bc} = 0$$

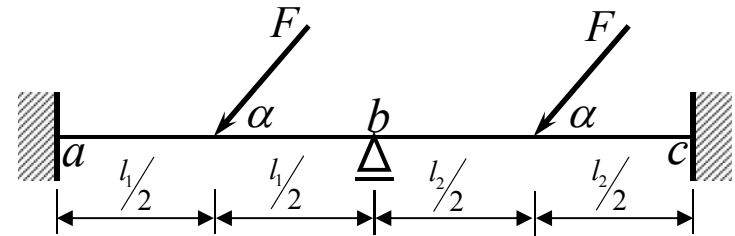
$$-\frac{F_x}{2} - \frac{EA}{l}u_b - \frac{F_x}{2} - \frac{EA}{l}u_b = 0$$

$$-2u_b \frac{EA}{l} = F_x$$

$$u_b = -\frac{F_x l}{2EA}$$



Koncové síly a reakce ve směru osy x

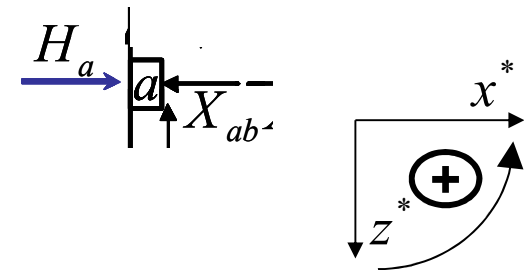


Koncové síly

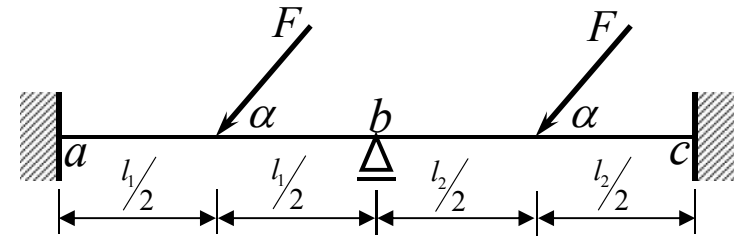
$$X_{ab} = \overline{X}_{ab} + \hat{X}_{ab} = \frac{F_x}{2} - \frac{EA}{l} u_b = \frac{F_x}{2} - \frac{EA}{l} \left(-\frac{F_x l}{2EA} \right) = F_x$$

Reakce

$$H_a - X_{ab} = 0 \Rightarrow H_a = X_{ab} = F_x (\rightarrow)$$



Koncové síly a reakce ve směru osy x



Koncové síly

$$X_{ab} = \bar{X}_{ab} + \hat{X}_{ab} = \frac{F_x}{2} - \frac{EA}{l} u_b = \frac{F_x}{2} - \frac{EA}{l} \left(-\frac{Fl}{2EA} \right) = F_x$$

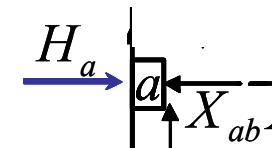
$$X_{ba} = \bar{X}_{ba} + \hat{X}_{ba} = \frac{F_x}{2} + \frac{EA}{l} u_b = \frac{F_x}{2} + \frac{EA}{l} \left(-\frac{Fl}{2EA} \right) = 0$$

$$X_{bc} = \bar{X}_{bc} + \hat{X}_{bc} = \frac{F_x}{2} + \frac{EA}{l} u_b = \frac{F_x}{2} + \frac{EA}{l} \left(-\frac{Fl}{2EA} \right) = 0$$

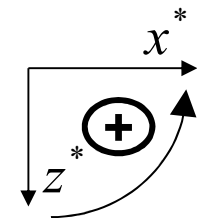
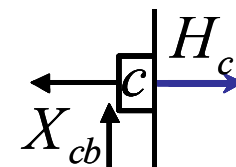
$$X_{cb} = \bar{X}_{cb} + \hat{X}_{cb} = \frac{F_x}{2} - \frac{EA}{l} u_b = \frac{F_x}{2} - \frac{EA}{l} \left(-\frac{Fl}{2EA} \right) = F_x$$

Reakce

$$H_a - X_{ab} = 0 \Rightarrow H_a = X_{ab} = F_x (\rightarrow)$$

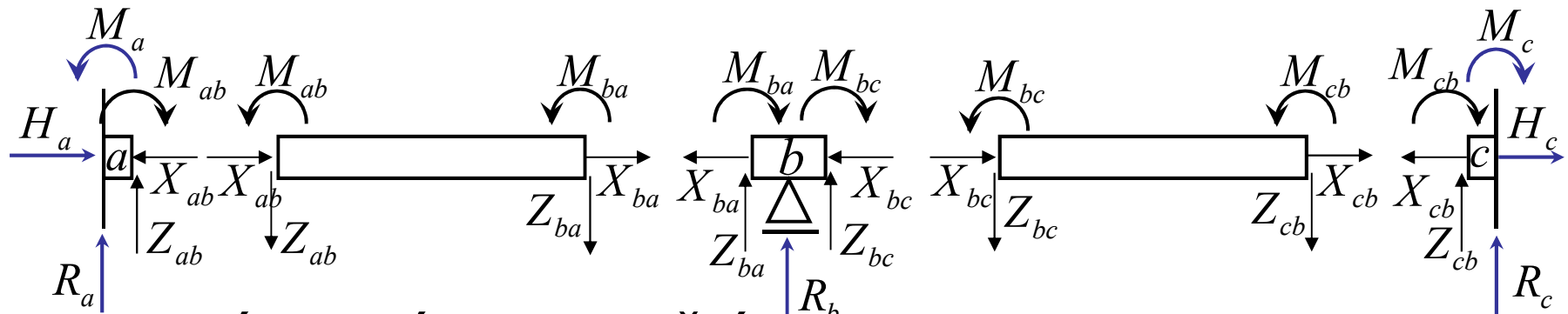


$$H_c - X_{cb} = 0 \Rightarrow H_c = X_{cb} = F_x (\rightarrow)$$



Podmínky rovnováhy ve styčnicku b

momentová podmínka



Momentová podmínka ve styčnicku b :

$$\sum M_b = 0 \dots -M_{ba} - M_{bc} = 0$$

Primární koncové momenty zajistí pro $l_{ab} = l_{bc} = l$ rovnováhu:

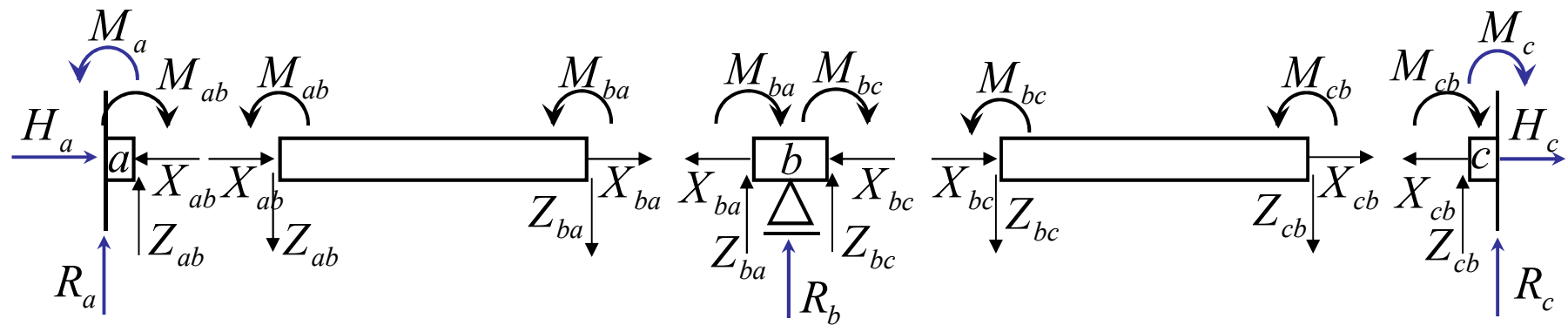
$$\overline{M}_{ba} = -\frac{1}{8} F_z l, \quad \overline{M}_{bc} = \frac{1}{8} F_z l, \quad \overline{M}_{ba} + \overline{M}_{bc} = 0$$

Sekundární koncové momenty jsou v daném případě nulové

$$M_{ba} = \overline{M}_{ba} + \hat{M}_{ba} = \overline{M}_{ba}, \quad M_{bc} = \overline{M}_{bc} + \hat{M}_{bc} = \overline{M}_{bc}$$

Neplatí pro rozdílné délky l_{ab} a l_{bc}

Podmínky rovnováhy, reakce ve styčnicku a



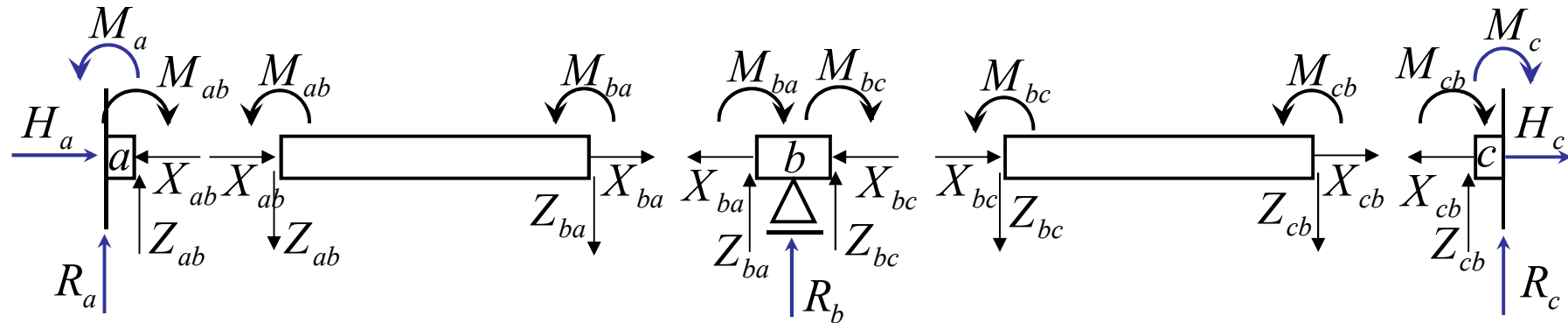
Pro $l_{ab} = l_{bc}$ při daném zatížení jsou všechny sekundární koncové síly \hat{Z}_{ij} a \hat{M}_{ij} nulové.

Ve styčnicku a platí:

$$-R_a - Z_{ab} = -R_a - \bar{Z}_{ab} = 0 \quad \Rightarrow \quad R_a = -\bar{Z}_{ab} = \frac{F_z}{2}$$

$$M_a - M_{ab} = M_a - \bar{M}_{ab} = 0 \quad \Rightarrow \quad M_a = \bar{M}_{ab} = \frac{1}{8} F_z l^2$$

Podmínky rovnováhy reakce ve styčnicku b ve směru osy z



Ve styčnicku b platí:

$$-Z_{ba} - R_b - Z_{bc} = -\bar{Z}_{ba} - R_b - \bar{Z}_{bc} = 0$$

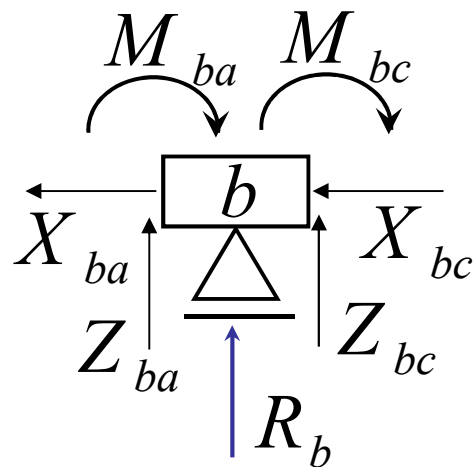
$$\Rightarrow R_b = -\bar{Z}_{ba} - \bar{Z}_{bc} = \frac{F_z}{2} + \frac{F_z}{2} = F_z$$

$$M_{ba} + M_{bc} = \bar{M}_{ba} + \bar{M}_{bc} = -\frac{1}{8}F_z l + \frac{1}{8}F_z l = 0$$

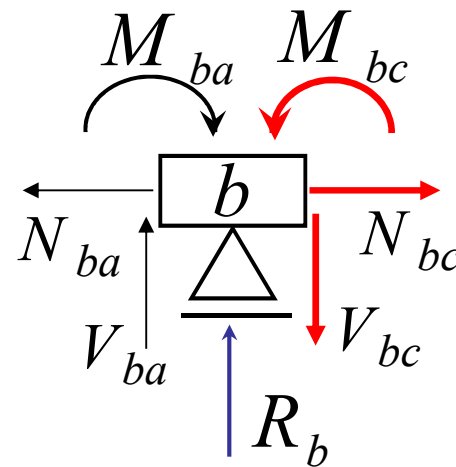
Moment M_b je nenulový $M_b = -\frac{F_z l^2}{8}$

Vnitřní síly nad podporou b

ODM



Konvence N,V,M



$$N_{ba} = X_{ba}$$

$$V_{ba} = Z_{ba}$$

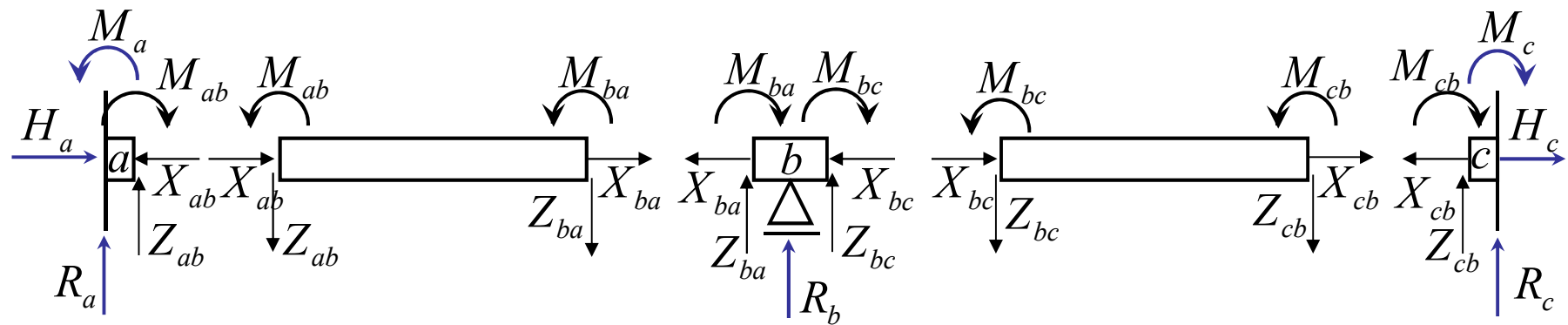
$$M_b = M_{ba}$$

$$N_{bc} = -X_{bc}$$

$$V_{bc} = -Z_{bc}$$

$$M_b = -M_{bc}$$

Podmínky rovnováhy, reakce ve styčnicku c



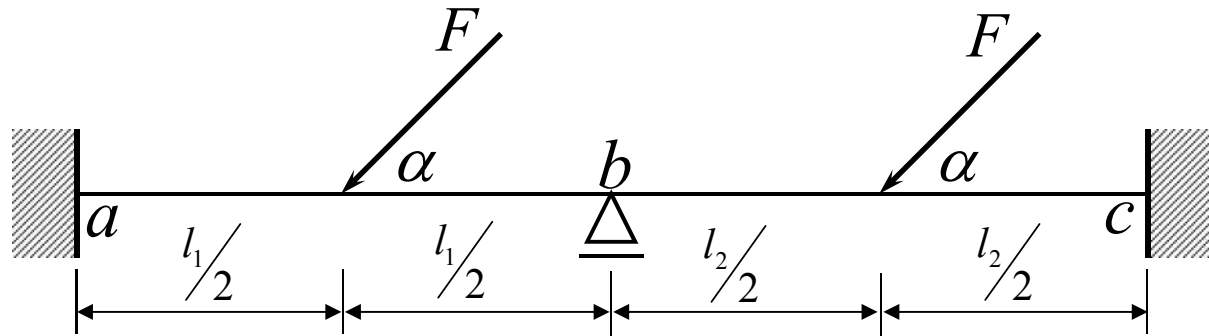
Ve styčnicku c platí: $-R_c - Z_{cb} = -R_c - \bar{Z}_{cb} = 0$

$$\Rightarrow R_c = -\bar{Z}_{cb} = \frac{F_z}{2}$$

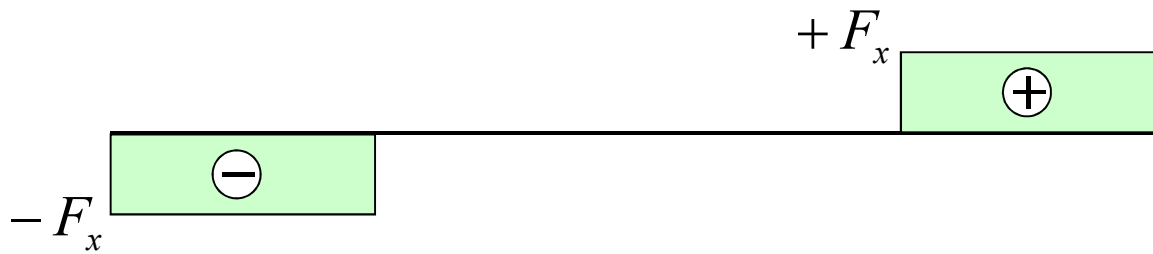
$$-M_c - M_{cb} = -M_c - \bar{M}_{cb} = 0$$

$$\Rightarrow M_c = -\bar{M}_{cb} = \frac{1}{8} F_z l^2$$

Řešení



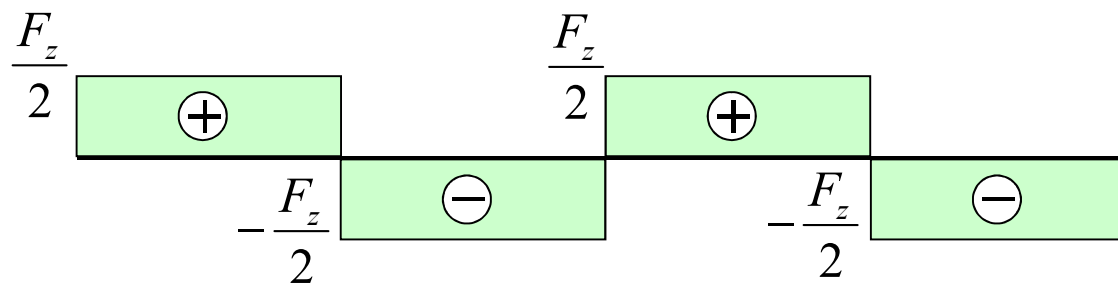
N



$$H_a = F_x (\rightarrow)$$

$$H_b = F_x (\rightarrow)$$

V

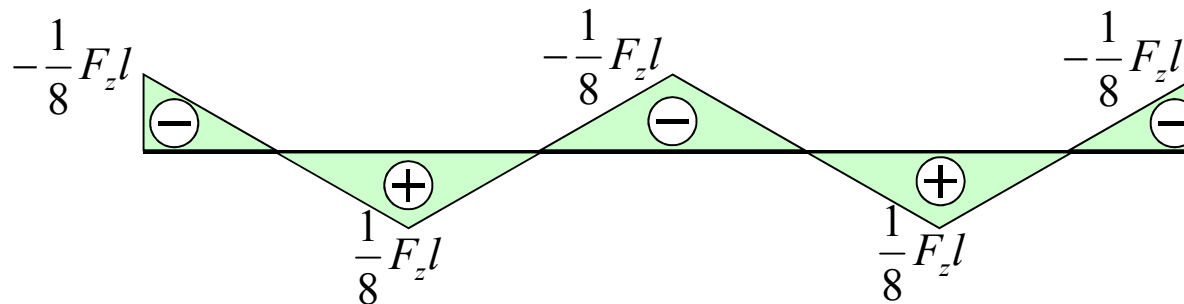


$$R_a = \frac{F_z}{2} (\uparrow)$$

$$R_b = F_z (\uparrow)$$

$$R_c = \frac{F_z}{2} (\uparrow)$$

M

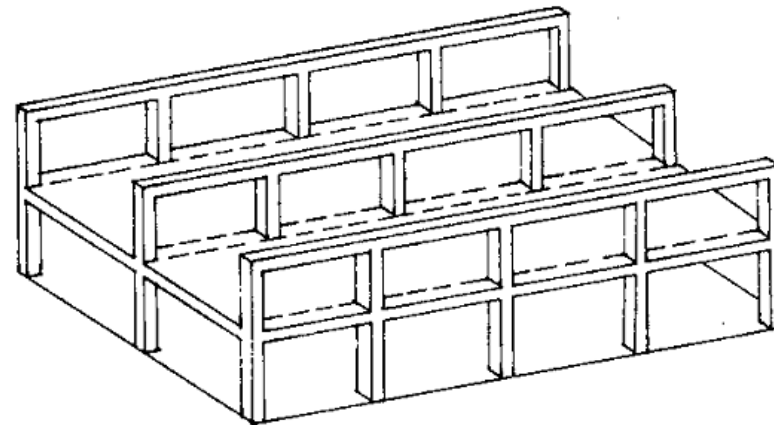
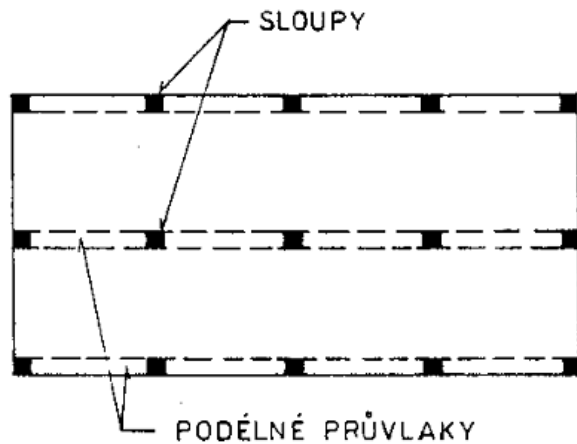


$$M_a = \frac{1}{8} F_z l (\curvearrowright)$$

$$M_c = \frac{1}{8} F_z l (\curvearrowright)$$

Konstrukční systém a nosná funkce

■ Skeletový systém podélný



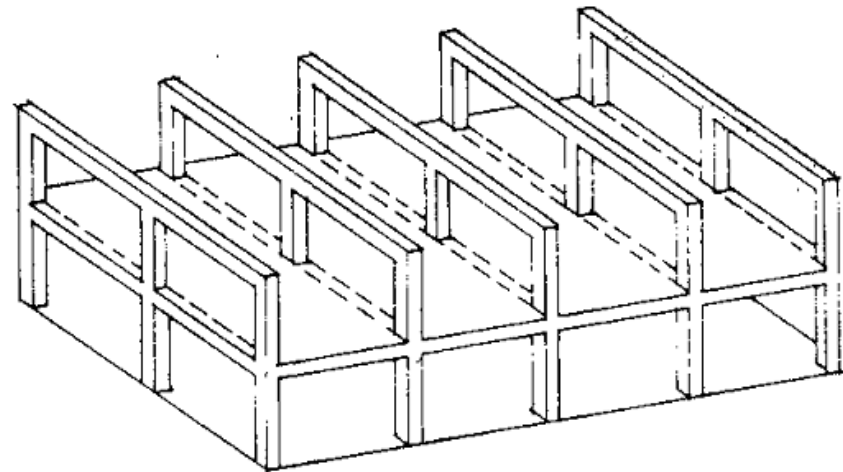
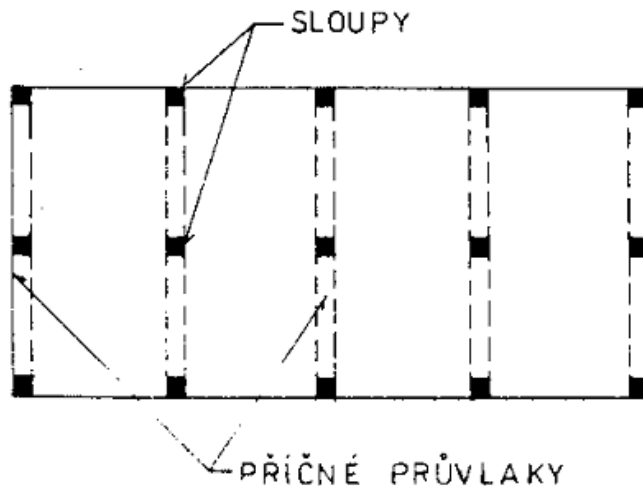
Obr. 9 Skeletový systém s podélnými rámy

Matoušková, D. Pozemní stavitelství I, VUT Brno

- Nízká tuhost, vhodné pro nižší budovy,
- Omezená řešení fasády, zastínění místností,
- Podélné instalace.

Konstrukční systém a nosná funkce

■ Skeletový systém příčný

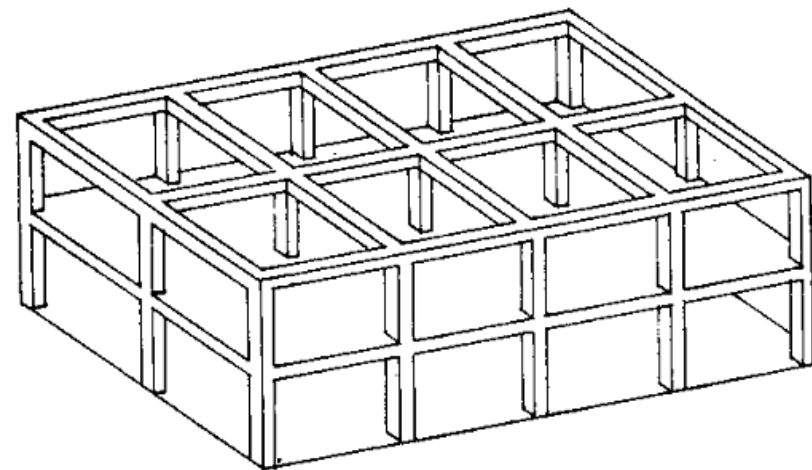
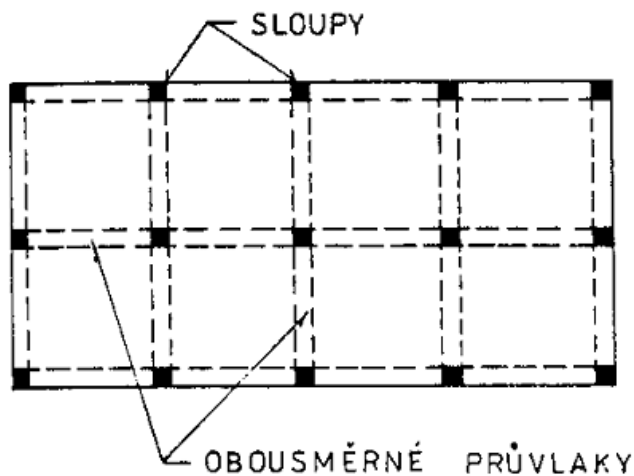


Matoušková, D. Pozemní stavitelství I, VUT Brno

- Vyšší tuhost, vhodné pro vyšší budovy,
- Variabilní řešení fasády, prosvětlené místnosti,
- Komplikace při provádění podélných instalací.

Konstrukční systém a nosná funkce

■ Skeletový systém obousměrný



Obr. 11 Skeletový systém s obousměrnými rámy

Matoušková, D. Pozemní stavitelství I, VUT Brno

- Vysoká tuhost, vhodné pro vysoké budovy,
- Omezené řešení fasády, zastínění místností,
- Komplikace při provádění podélných instalací.

Konstrukční systém a nosná funkce

- Skeletový systém obousměrný



Sherwood residence, Saigon, Vietnam

Konstrukční systém a nosná funkce

- Skeletový systém obousměrný
 - mimo středně zatížené sloupy v přízemí



Sherwood residence, Saigon, Vietnam.

Základní postup u deformační metody

1. Určí se stupeň přetvárné neurčitosti (odpovídá počtu neznámých přetvoření a řešených rovnic)
2. Vypočtou se primární koncové síly každého prutu
3. Sestaví se podmínky rovnováhy v uzlech (koncové síly prutů – sekundární – se vyjádří pomocí parametrů deformace)
4. Řešením rovnic se určí parametry deformace (pootočení, posunutí)
5. Parametry deformace umožňují vypočíst sekundární koncové síly
6. Vypočtou se celkové koncové síly v uzlech jako součet primárních a sekundárních koncových sil a z nich reakce a složky vnitřních sil v jednotlivých prutech
7. Provede se kontrola správnosti řešení pomocí tří statických podmínek rovnováhy celku

Varianty deformační metody

- Obecná deformační metoda ODM, zanedbává vliv posouvajících sil na přetvoření konstrukce, počítá se změnou délky prutu způsobenou normálovými silami
- Zjednodušená deformační metoda ZDM, zanedbává vliv normálových a posouvajících sil na přetvoření konstrukce (nepočítá se změnou délky prutu, výjimkou je změna délky prutu způsobena změnou teploty)

Výpočtový model rovinného rámu

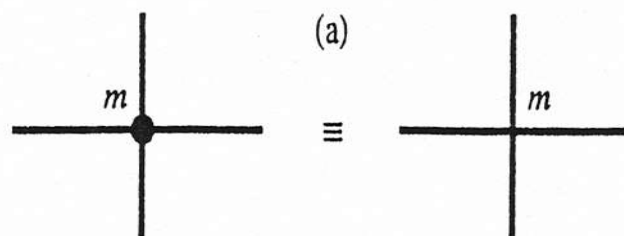
Idealizuje se

tvar: tvořený střednicemi prutů (přisouzeny geometrické a průřezové charakteristiky a vlastnosti materiálu)

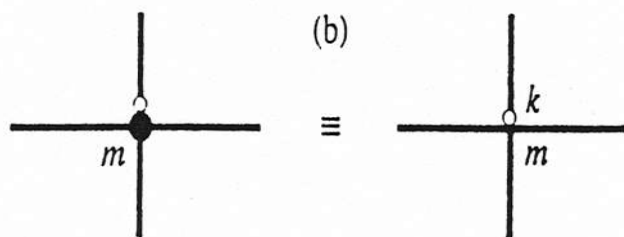
styk prutů: - styčníky monolitické (rámové)
- kloubové (nerámové)

styk prutů a vnějších vazeb
zatížení (silové, deformační)

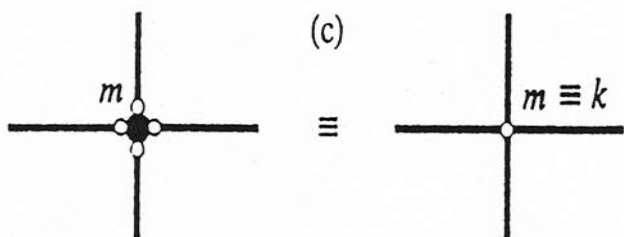
Styčníky (uzly) rovinné prutové konstrukce



(a) Monolitický (rámový) styčník



**(b) Rámový styčník s kloubově
připojeným prutem**

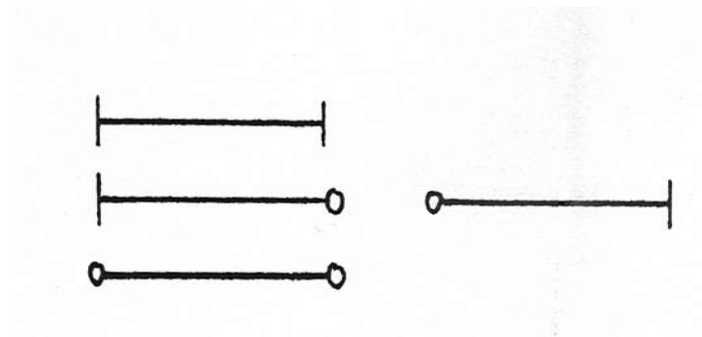


(c) Kloubový (nerámový) styčník

Pruty a styčníky rovinné stavební konstrukce

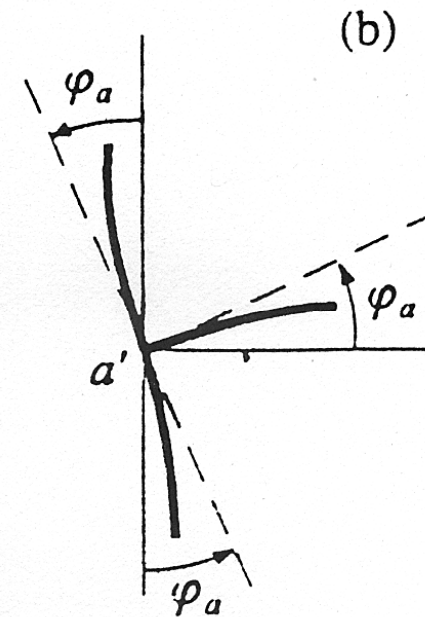
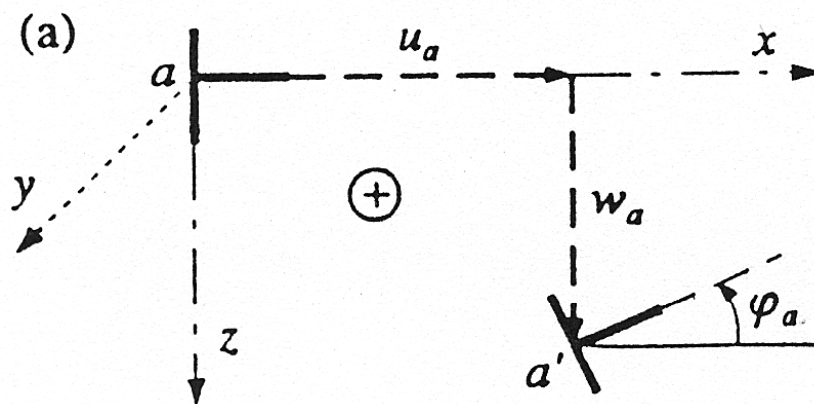
Oboustranně monoliticky připojený
Jednostranně kloubově připojený
Oboustranně kloubově připojený

Styčník: - volný (nepodepřený)
- podepřený (vázaný)

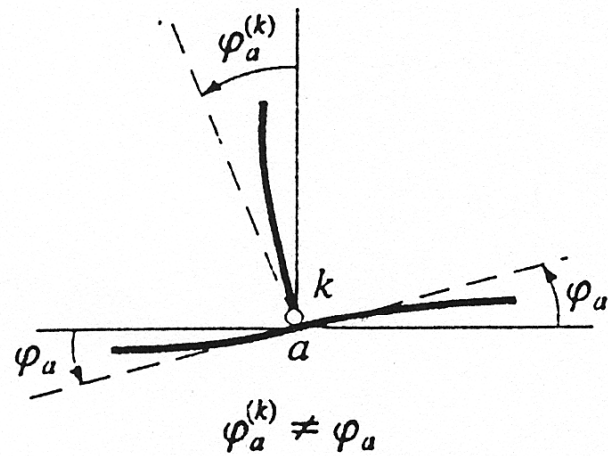


Pruty a styčníky rovinné stavební konstrukce

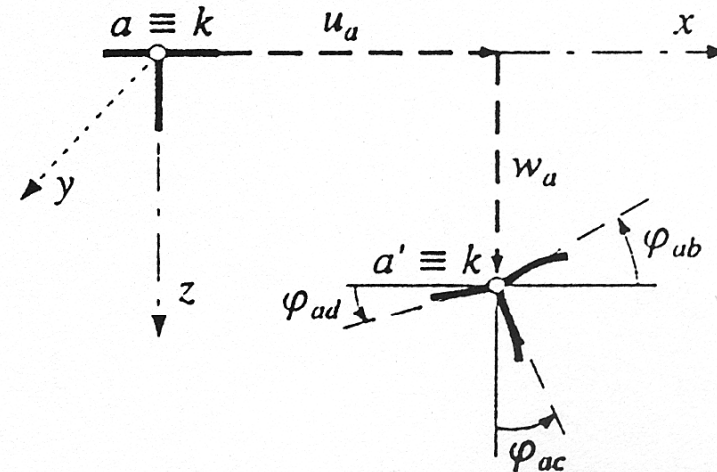
Každý volný (nepodepřený) styčník má tři složky přemístění



Různá připojení prutů a jejich vliv na přemístění

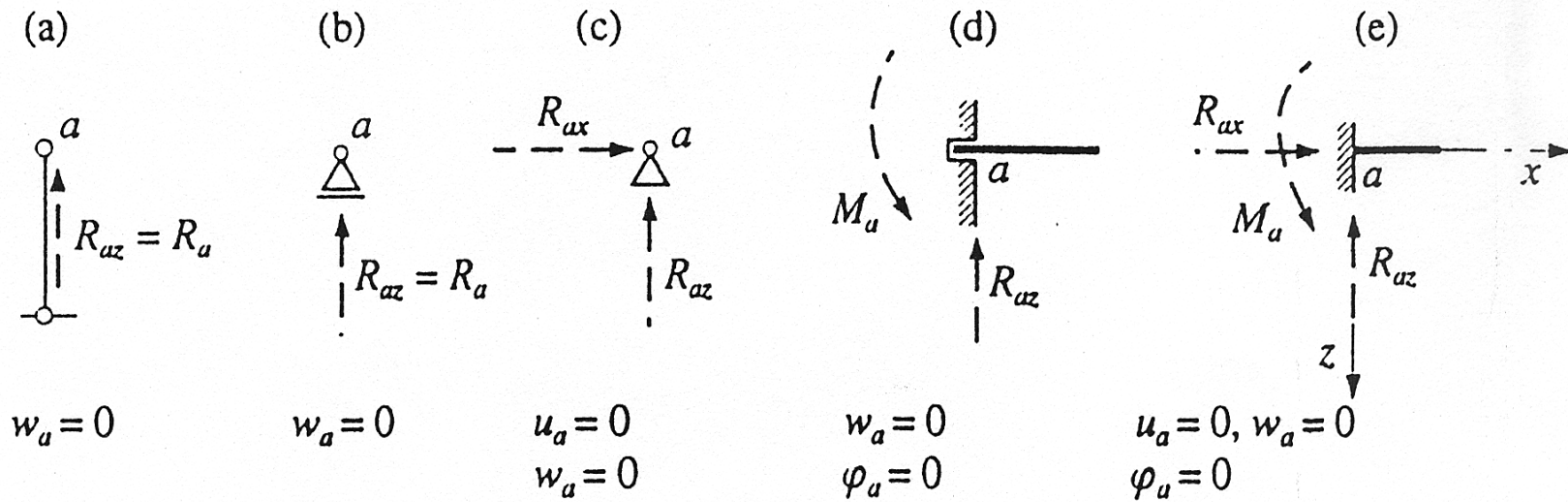


Obr. 10.3. Připojení prutu kloubem k monolitickému styčníku



Obr. 10.4. Dvě složky přemístění kloubového styčníku

Vnější vazby prutové soustavy



Výpočtový model rovinné prutové konstrukce

Stupeň přetvárné neurčitosti: $n_p = 3t + 2k + p - p_v$

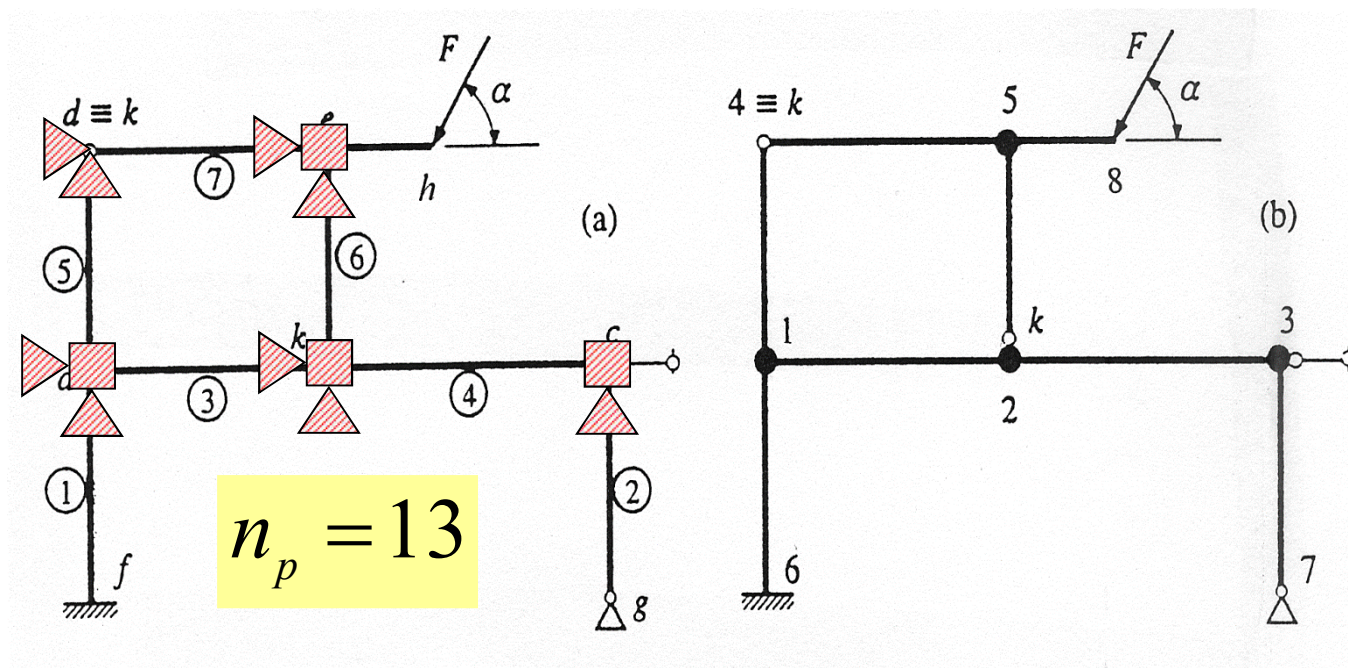
t počet monolitických styčníků

k počet kloubových styčníků

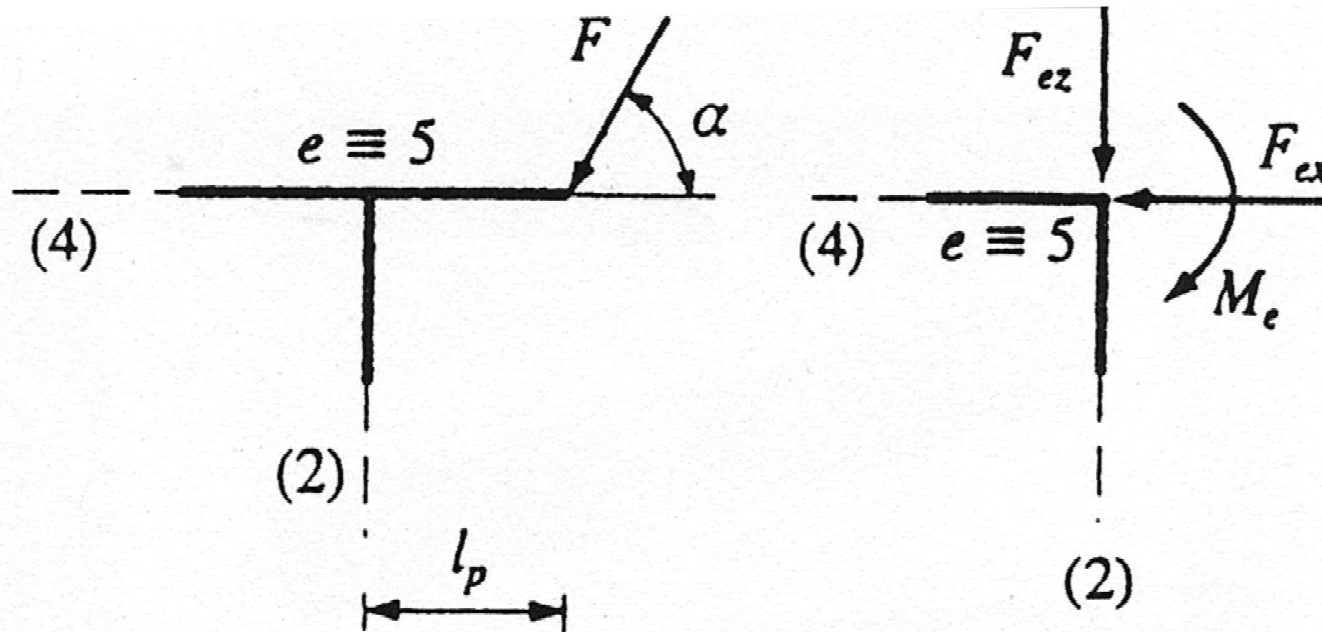
p počet jednoduchých kloubových podepření

p_v počet vnějších vazeb umístěných u styčníků

$$n_p = 3 \cdot 4 + 2 \cdot 1 + 1 \cdot 0 - 1 \cdot 1 = 13$$



Vliv převislého konce na styčník prutové soustavy



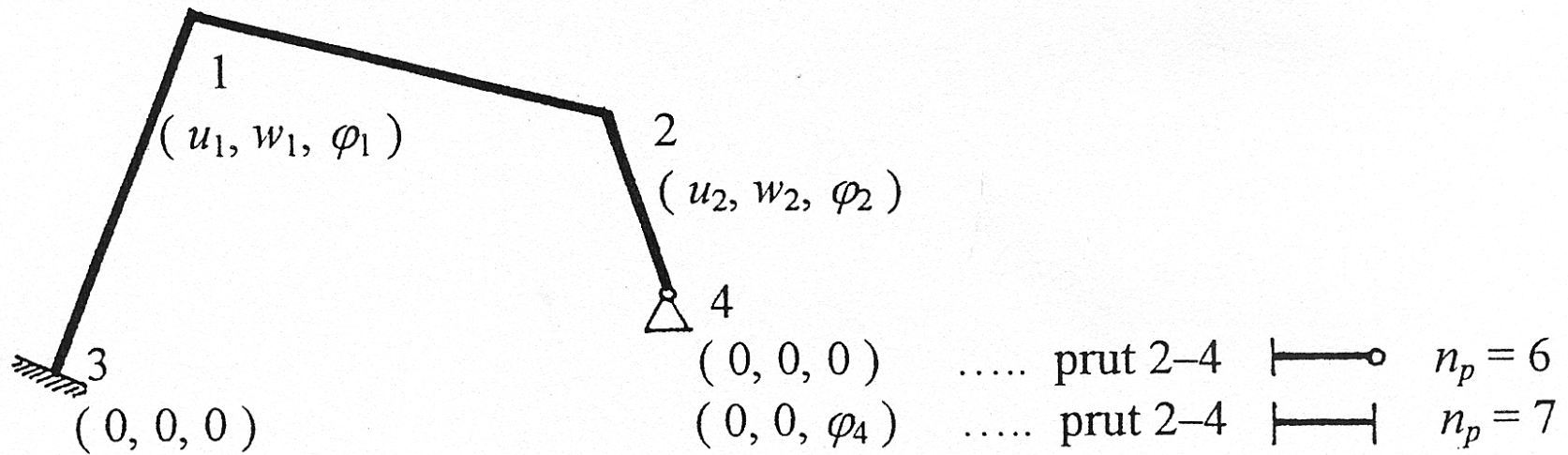
Síla F působící na převislém konci je ekvivalentní silám a momentu působícím ve styčnicku

Počet neznámých parametrů deformace pro různá připojení prutů

Případ připojení	Schéma připojení	Popis připojení	Neznámé parametry deformace	
			počet	druh
1		monolitický styčník	3	u, w, φ
2		kloubový styčník	2	u, w
3		monolitický styčník podepřený kyvným prutem	2	w, φ
4		kloubový styčník podepřený kyvným prutem	1	u
5		monolitický styčník podepřený pevným kloubem	1	φ
6		monolitický styčník vetknutý	0	–
7		vetknutí	0	–
8		* neposuvný kloub	1	φ
			2	–
9		* posuvný kloub	1	u, φ
			2	u

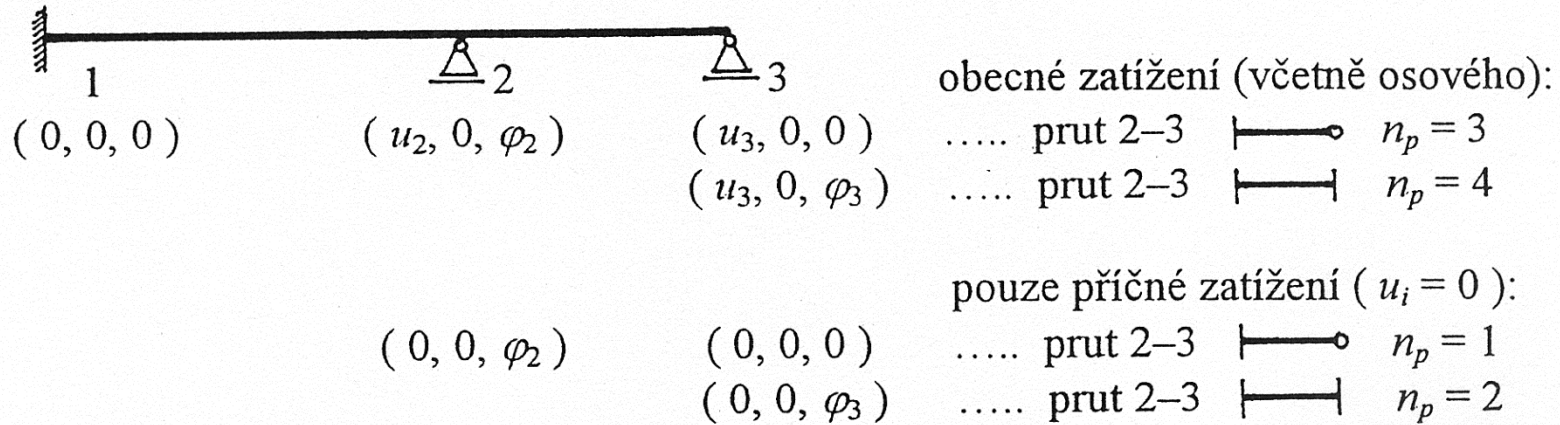
Příklady výpočtových modelů

Příklad 1

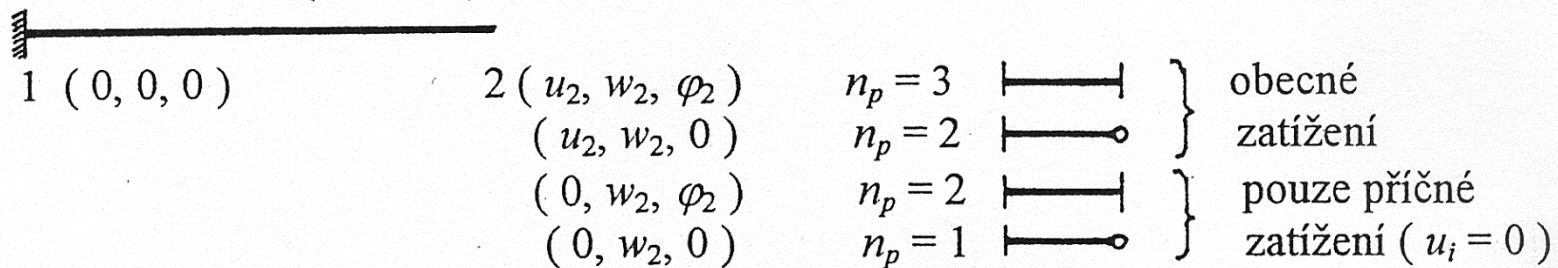


Příklady výpočtových modelů

Příklad 2

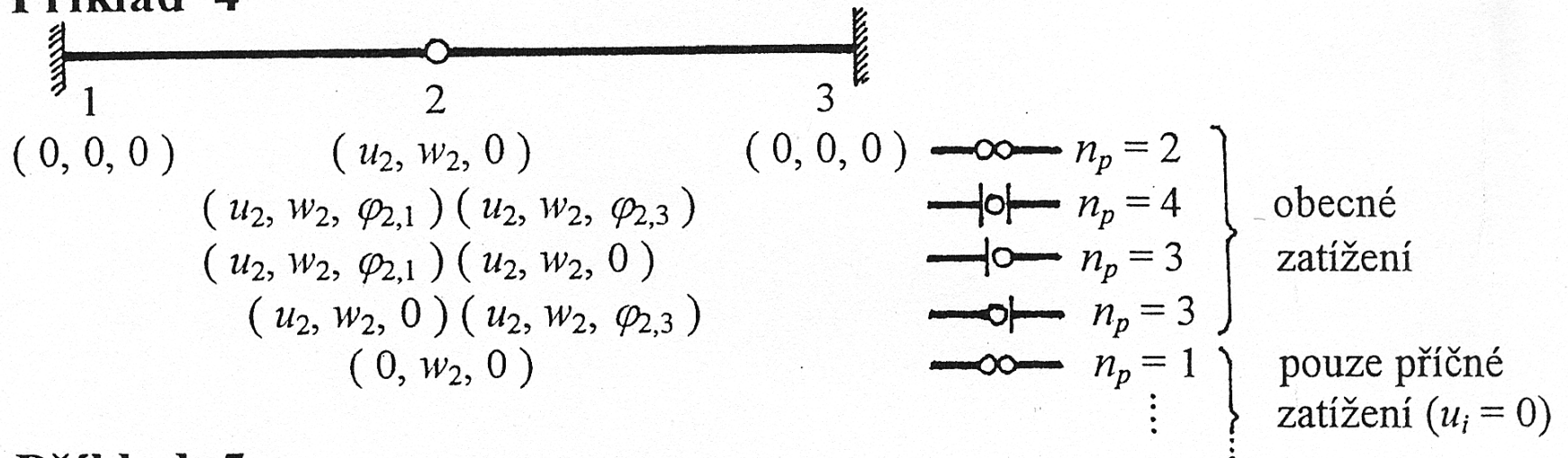


Příklad 3 (staticky určitá konzola)

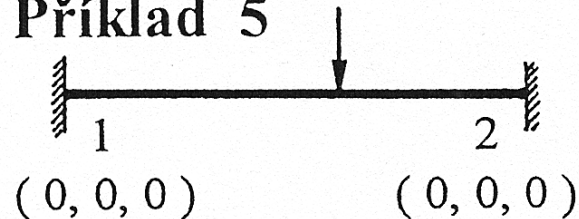


Příklady výpočtových modelů

Příklad 4



Příklad 5



Základní případ – přetvárně určitá soustava
 (nelze řešit deformační metodou);
 řešit lze jedině po umělém zásahu, např.
 vložení nadbytečného styčnicku (nejlépe pod sílu)

Použitá literatura

- [1] Kadlčák, J., Kytýr, J., Statika stavebních konstrukcí II. Staticky neurčité prutové konstrukce. Učebnice, druhé vydání. VUTIUM, Brno 2004.