Téma 6
Spojitý nosník

- Základní vlastnosti spojitého nosníku
- Řešení spojitého nosníku silovou metodou

Katedra stavební mechaniky
Fakulta stavební, VŠB - Technická univerzita Ostrava

Spojitý nosník

Spojitý nosník je staticky neurčitý přímý nosník příčně zatížený.

Má vazby:

a) proti svislému posunu případně,

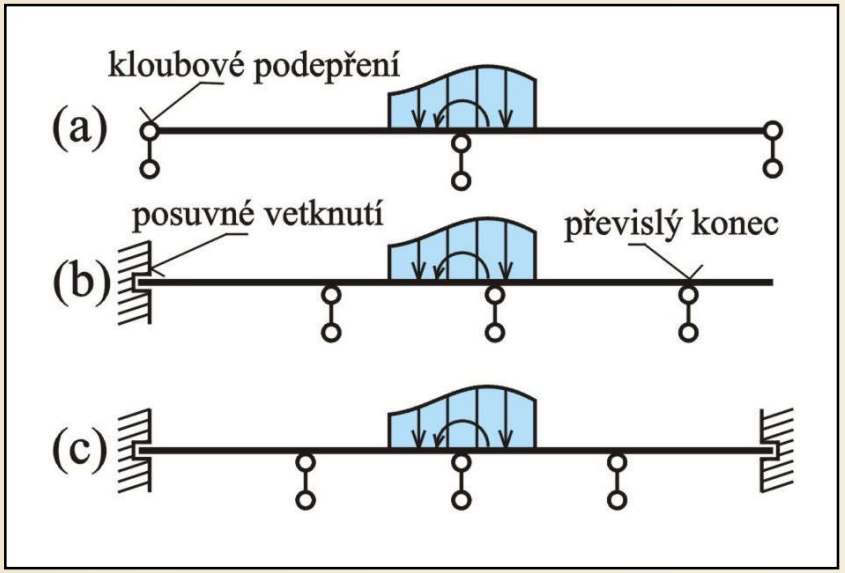
b) vazby(u) proti pootočení v krajních(m) podporových(ém) bodech (u) (posuvné vetknutí).

Stupeň statické neurčitosti:

$n_s = p - 1 + v_k$

p je počet polí

v_k je počet vetknutí $(0, 1, 2)$



Podepření spojitého nosníku v příčné úloze

Obr. 4.1. / str. 95

Spojitý nosník

Stupeň statické neurčitosti

$$s = v - n_v$$

$$v = v_e + v_i$$

v_e ... počet vnějších vazeb soustavy

v_i ... počet vnitřních vazeb soustavy

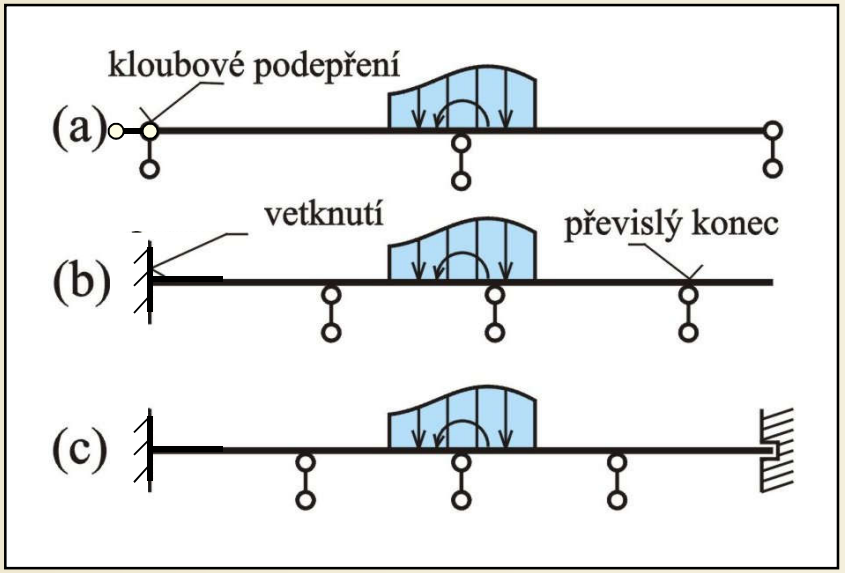
$$n_v = 3.p$$

n_v ... počet stupňů volnosti soustavy

p ... počet prutů v soustavě

$$v_i = 2.n_k$$

n_k ... počet kloubů spojujících 2 pruty



Podepření spojitého nosníku v příčné úloze

Obr. 4.1. / str. 95

Spojitý nosník, odvození třímomentové rovnice

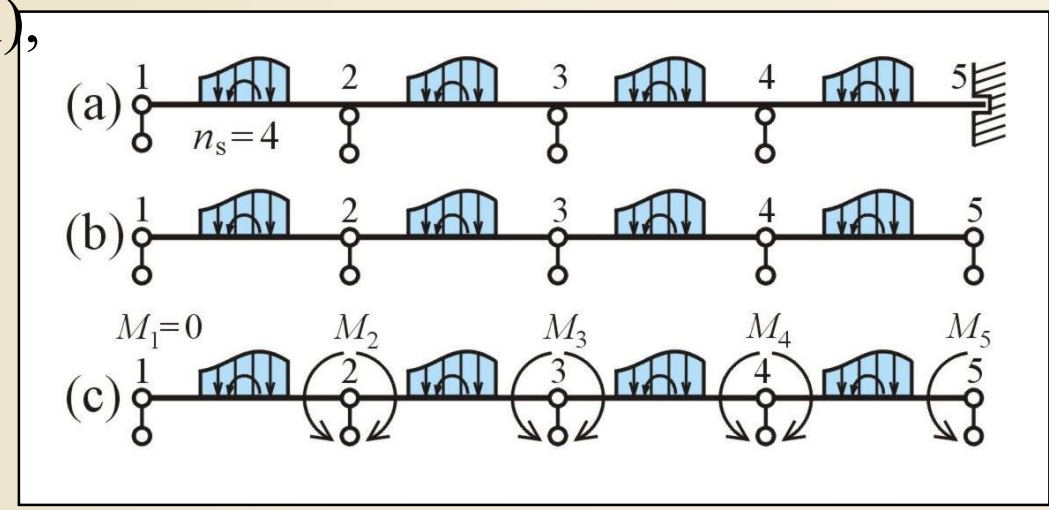
Silová metoda, základní kroky odvození třímomentové rovnice :

1) určení stupně statické neurčitosti n_s ,

2) odebrání n_s vnitřních vazeb (vložení kloubů),

3) nahrazení odebraných vazeb
momentovými interakcemi,
případně reakcemi (u vetknutí),

4) formulace přetvárných
podmínek.

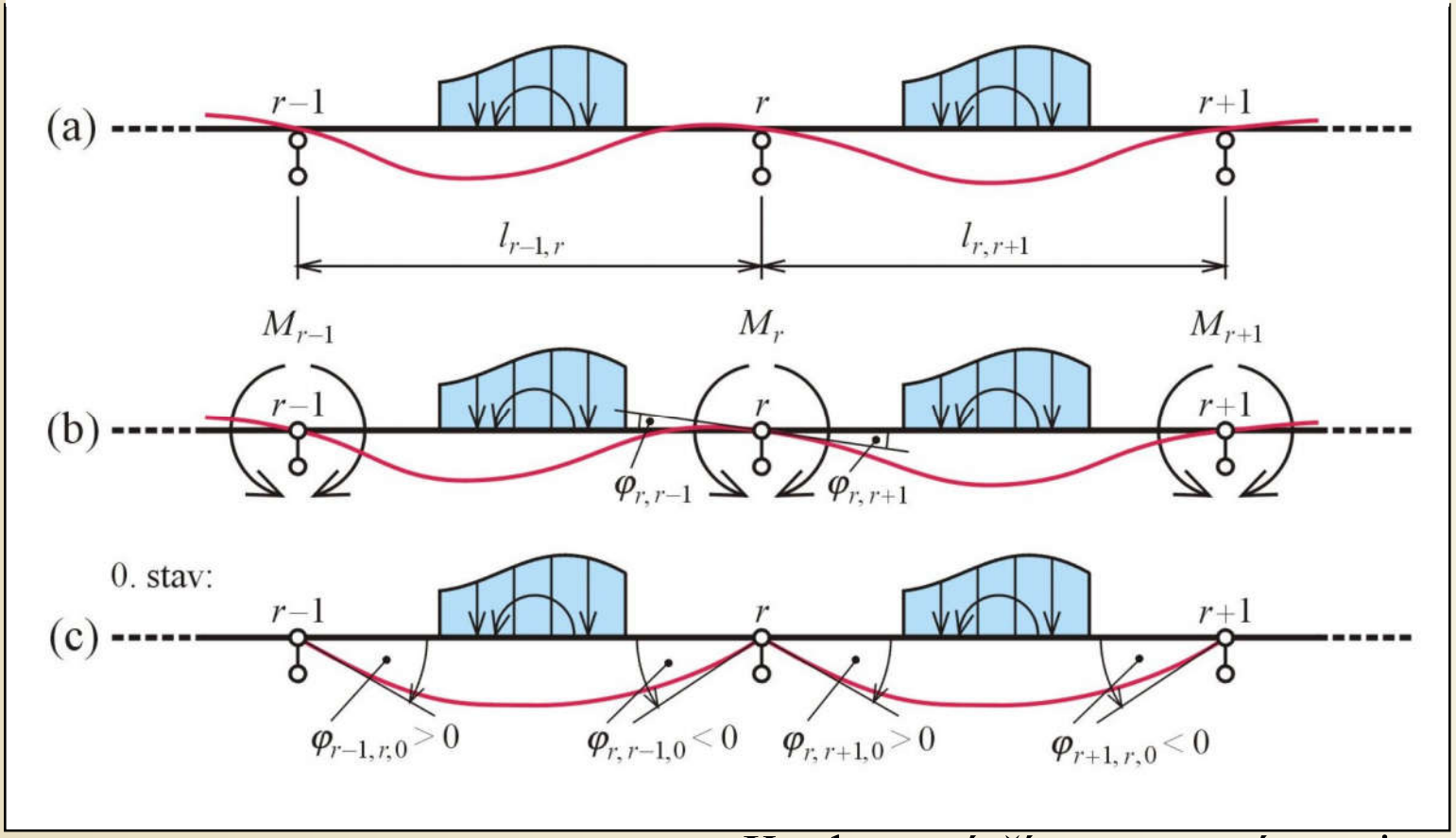


První tři kroky silové metody při řešení spojitého nosníku

Obr. 4.2. / str. 97

Odvození třímomentové rovnice

Přetvárná podmínka : $\varphi_{r,r-1} = \varphi_{r,r+1}$



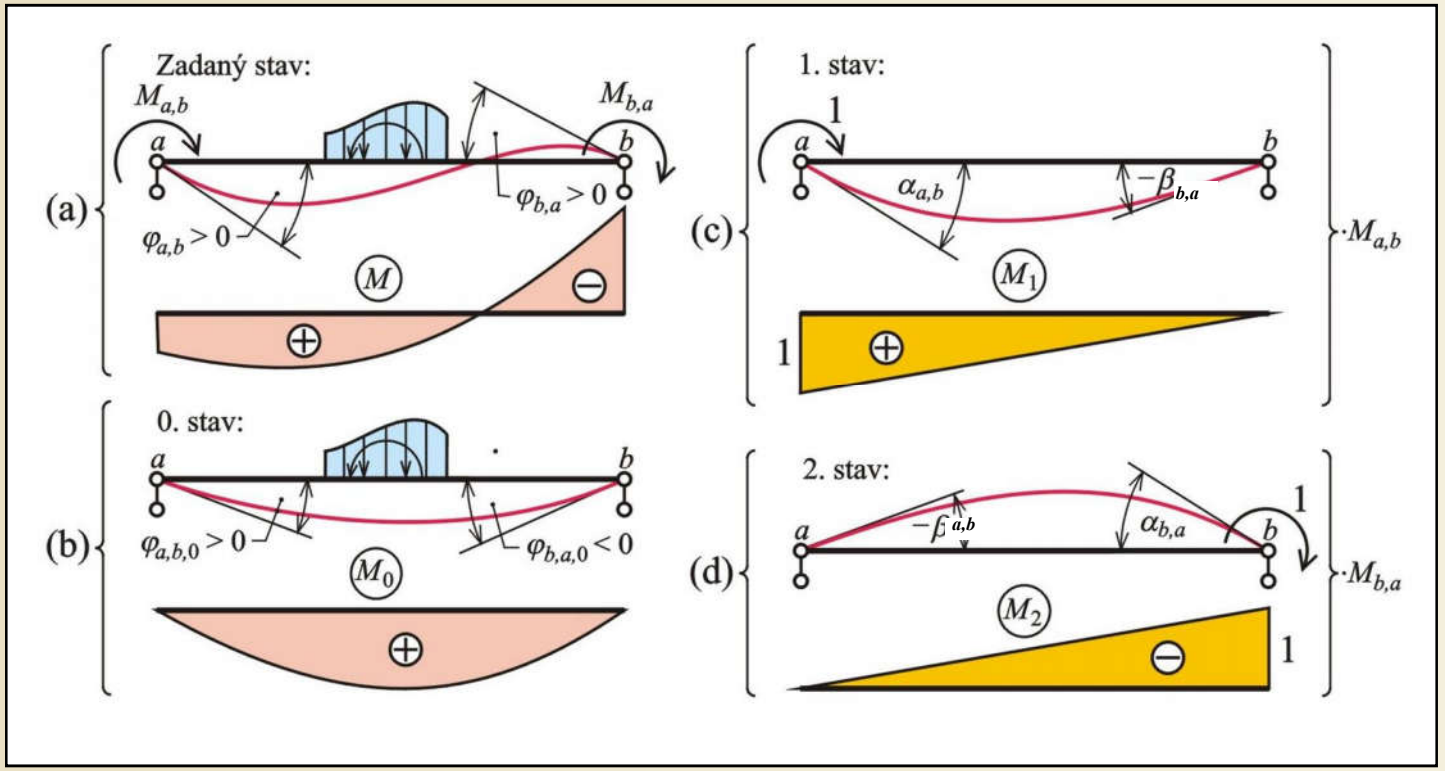
K odvození třímomentové rovnice

Obr. 4.3. / str. 97

Výpočet koncových pootočení

Pro pravotočivý směr potočení je :

$$\varphi_{a,b} = \varphi_{a,b,0} + M_{a,b} \cdot \alpha_{a,b} - M_{b,a} \cdot \beta_{a,b} \qquad \varphi_{b,a} = \varphi_{b,a,0} - M_{a,b} \cdot \beta_{b,a} + M_{b,a} \cdot \alpha_{b,a}$$

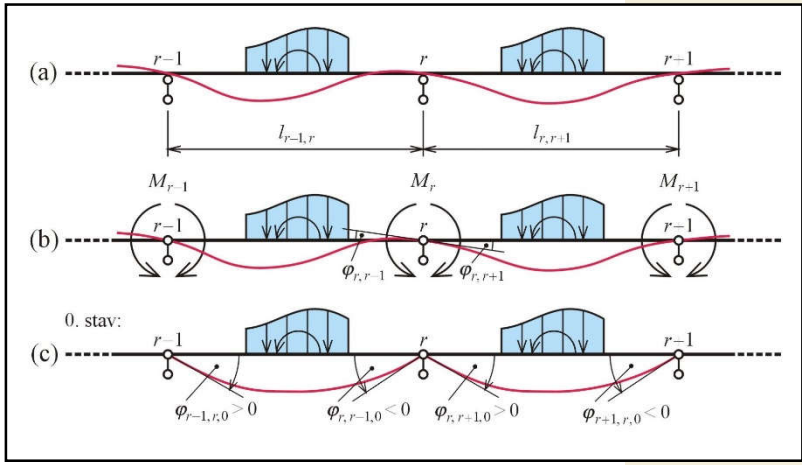


Koncové deformace prostého nosníku

Obr. 3.7. / str. 64

Odvození třímomentové (Clapeyronovy) rovnice

Platí, viz obr. 4.3. : $\varphi_{r,r-1} = \varphi_{r,r+1}$

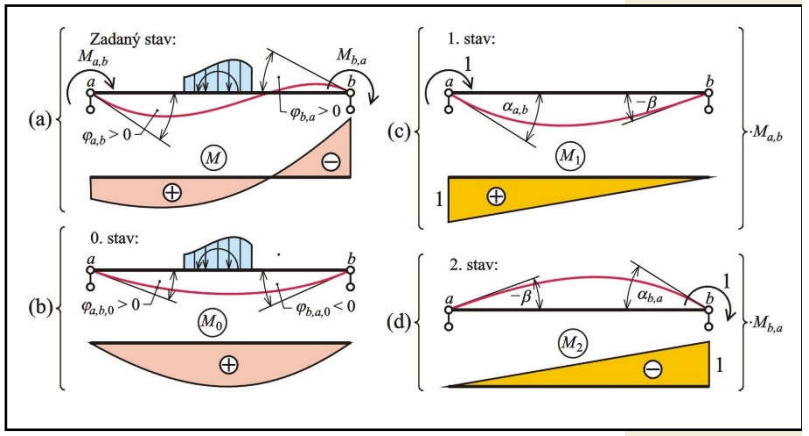


Pro levé pole (r - 1, r), respektive (a, b) je :

$$\varphi_{b,a} = \varphi_{b,a,0} - M_{a,b} \cdot \beta_{b,a} + M_{b,a} \cdot \alpha_{b,a}$$

$$\varphi_{b,a} = \varphi_{\mathrm{r,r\text{-}1}}, \alpha_{\mathrm{b,a}} = \alpha_{\mathrm{r,r\text{-}1}}, \beta_{\mathrm{b,a}} = \beta_{\mathrm{r,r\text{-}1}}, M_{b,a} = -M_r, \; M_{a,b} = M_{r-1}$$

$$\varphi_{r,r-1} = \varphi_{r,r-1,0} - M_{r-1} \cdot \beta_{r,r-1} - M_r \cdot \alpha_{r,r-1}$$



Pro pravé pole (r, r + 1), respektive (a, b) je :

$$\varphi_{a,b} = \varphi_{a,b,0} + M_{a,b} \cdot \alpha_{b,a} - M_{b,a} \cdot \beta_{b,a}$$

$$\varphi_{a,b} = \varphi_{\mathrm{r,r+1}}, \alpha_{\mathrm{a,b}} = \alpha_{\mathrm{r,r+1}}, \beta_{\mathrm{a,b}} = \beta_{\mathrm{r,r+1}}, M_{a,b} = M_r, \; M_{b,a} = -M_{r+1}$$

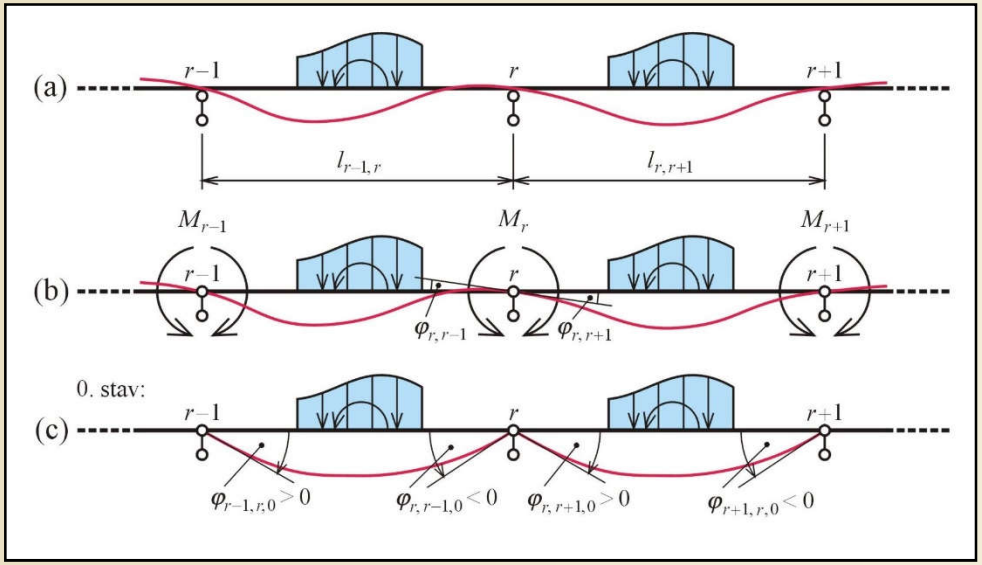
$$\varphi_{r,r+1} = \varphi_{r,r+1,0} + M_r \cdot \alpha_{r,r+1} + M_{r+1} \cdot \beta_{r,r+1}$$

Po dosazení do $\varphi_{r,r-1} = \varphi_{r,r+1}$ a úpravě :

$$\varphi_{r,r-1,0} - M_{r-1} \cdot \beta_{r,r-1} - M_r \cdot \alpha_{r,r-1} = \varphi_{r,r+1,0} + M_r \cdot \alpha_{r,r+1} + M_{r+1} \cdot \beta_{r,r+1}$$

$$M_{r-1} \cdot \beta_{r,r-1} + M_r \cdot (\alpha_{r,r-1} + \alpha_{r,r+1}) + M_{r+1} \cdot \beta_{r,r+1} + \varphi_{r,r+1,0} - \varphi_{r,r-1,0} = 0$$

Odvození třímomentové (Clapeyronovy) rovnice



$$M_{r-1} \cdot \beta_{r,r-1} + M_r \cdot (\alpha_{r,r-1} + \alpha_{r,r+1}) + M_{r+1} \cdot \beta_{r,r+1} + \varphi_{r,r+1,0} - \varphi_{r,r-1,0} = 0$$

Poznámky:

- **počet rovnic odpovídá stupni statické neurčitosti n_s,**
- **v každé rovnici jsou maximálně 3 neznámé ohybové momenty.**

Odvození třímomentové rovnice

Nosník na obr. 4.4(c) je jednou staticky neurčitý. $M_1 = 0,\ M_3 = 0,\ M_r = M_2.$

Sestaví se pouze 1 rovnice : $M_2 \cdot (\alpha_{1,2} + \alpha_{2,1}) + \varphi_{2,3,0} - \varphi_{2,1,0} = 0$

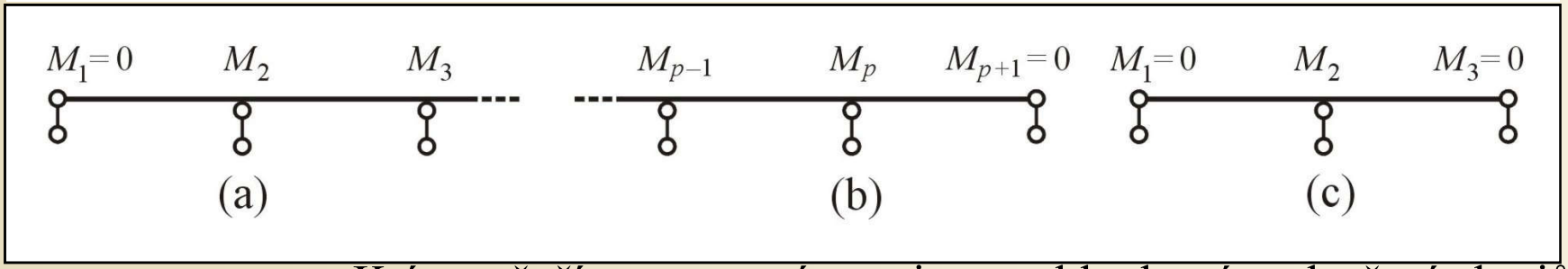
Spojitý nosník daný spojením obr. 4.4.(a) a 4.4.(b) je p - krát staticky neurčitý

$M_1 = M_{p+1} = 0,$ počet rovnic je $p.$

Pro levý okraj nosníku je : $M_2 \cdot (\alpha_{2,1} + \alpha_{2,3}) + M_3 \cdot \beta_{2,3} + \varphi_{2,3_0} - \varphi_{2,1,0} = 0$

Pro pravý okraj nosníku je : $M_{p-1} \cdot \beta_{p-1,p} + M_p \cdot (\alpha_{p,p-1} + \alpha_{p,p+1}) + \varphi_{p,p+1_0} - \varphi_{p,p-1,0} = 0$

Pro podporu r : $M_{r-1} \cdot \beta_{r-1,r} + M_r \cdot (\alpha_{r,r-1} + \alpha_{r,r+1}) + M_{r+1} \cdot \beta_{r,r+1} + \varphi_{r,r+1_0} - \varphi_{r,r-1,0} = 0$

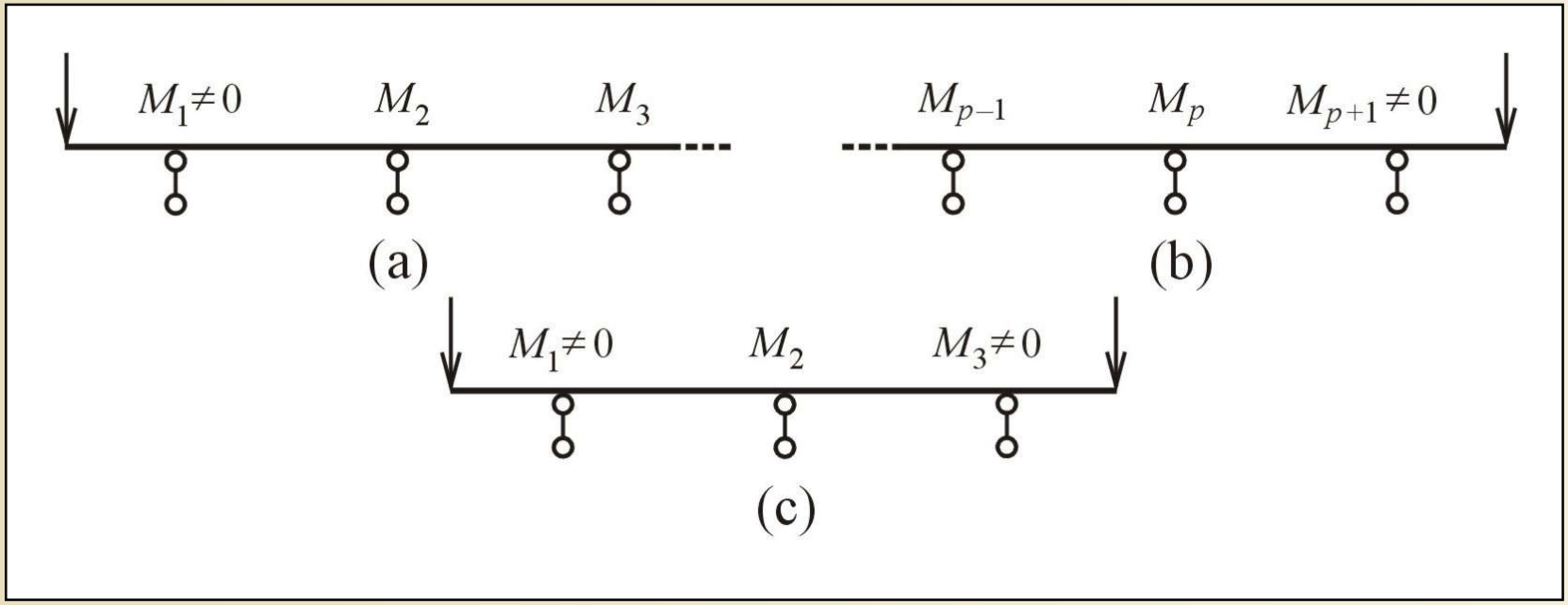


K úpravě třímomentové rovnice pro kloubové podepření okrajů

Obr. 4.4. / str. 98

Odvození třímoment. rovnice, nosník s převislými konci

Ohybové momenty nosníku nad krajními podporami jsou při zatížení převislých konců nenulové (při daném zatížení dle obr. 4.5. záporné). Lze je určit ze zatížení převislých konců.



K úpravě třímomentové rovnice pro převislé konce

Obr. 4.5. / str. 99

Odvození třímomentové rovnice, vetknutí

V místech vetknutí jsou pootočení nulová, ohybové momenty M_1 a M_{p+1} nenulové. Lze je určit z řešení třímomentových rovnic.

Přetvárná podmínka pro vetknutí na pravé straně je:

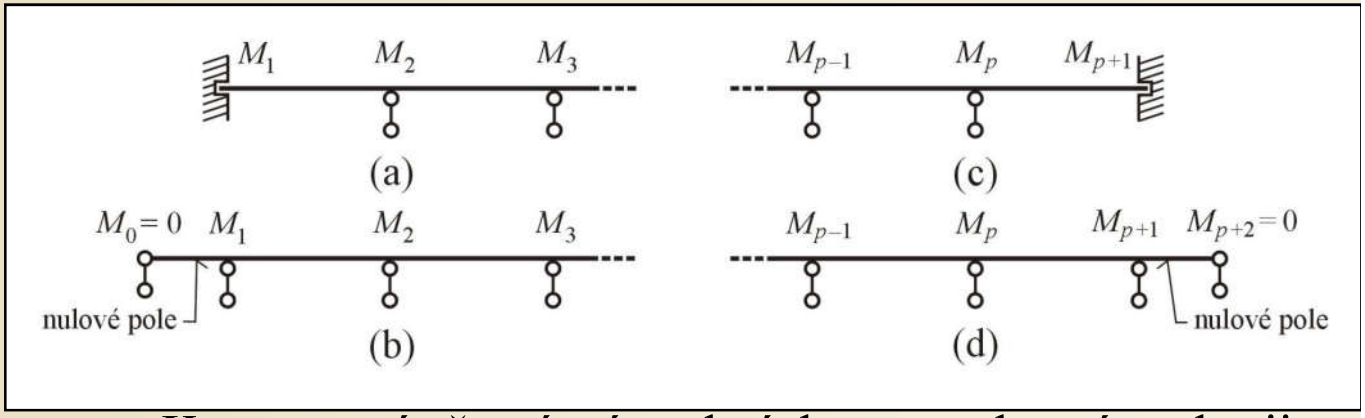
$$M_1 \cdot \alpha_{1,2} + M_2 \cdot \beta_{1,2} + \varphi_{1,2,0} = 0$$

Stejnou podmínku dostaneme při zavedení tzv. nulového pole (b) a dosazení:

$$\alpha_{1,0} = \beta_{1,0} = \varphi_{1,0,0} = 0 \qquad M_0 \cdot \beta_{1,0} + M_1 \cdot (\alpha_{1,0} + \alpha_{1,2}) + M_2 \cdot \beta_{1,2} + \varphi_{1,2,0} - \varphi_{1,0,0} = 0$$

Na pravé straně je obdobně:

$$M_p \cdot \beta_{p+1,p} + M_{p+1} \cdot \alpha_{p+1,p} - \varphi_{p+1,p,0} = 0, \text{ je zde } \alpha_{\mathrm{p+1,p+2}} = \beta_{p+1,p+2} - \varphi_{p+1,p+2,0} = 0$$



K sestavení přetvárné podmínky na vetknutém okraji

Obr. 4.6. / str. 100

Třímomentová rovnice pro průřez po polích proměnný

V rovnici $M_{r-1} \cdot \beta_{r-1,r} + M_r \cdot (\alpha_{r,r-1} + \alpha_{r+1,r}) + M_{r+1} \cdot \beta_{r,r+1} + \varphi_{r,r+1,0} - \varphi_{r,r-1,0} = 0$

je pro neměměprůrůř v každém poli :

$$\alpha_{r,r+1} = \frac{l_{r,r+1}}{3 \cdot E \cdot I_{r,r+1}}, \alpha_{r,r-1} = \frac{l_{r,r-1}}{3 \cdot E \cdot I_{r,r-11}}, \beta_{r,r+1} = \frac{l_{r,r+1}}{6 \cdot E \cdot I_{r,r+1}}, \beta_{r,r-1} = \frac{l_{r,r-1}}{6 \cdot E \cdot I_{r,r-1}}$$

Po úpravě :

$$M_{r-1} \cdot \frac{l_{r-1,r}}{I_{r-1,r}} + 2 \cdot M_r \cdot (\frac{l_{r,r-1}}{I_{r,r-1}} + \frac{l_{r+1,r}}{I_{r+1,r}}) + M_{r+1} \cdot \frac{l_{r,r+1}}{I_{r,r+1}} + 6 \cdot E \cdot (\varphi_{r,r+1,0} - \varphi_{r,r-1,0}) = 0$$

Označz- li se $Z_{r,r-1} = -\frac{6 \cdot E \cdot I_{r,r-1}}{l_{r,r-1}} \cdot \varphi_{r,r-1,0}$, $Z_{r,r+1} = \frac{6 \cdot E \cdot I_{r,r+1}}{l_{r,r+1}} \cdot \varphi_{r,r+1,0}$ je :

$$M_{r-1} \cdot \frac{l_{r-1,r}}{I_{r-1,r}} + 2 \cdot M_r \cdot (\frac{l_{r,r-1}}{I_{r,r-1}} + \frac{l_{r+1,r}}{I_{r+1,r}}) + M_{r+1} \cdot \frac{l_{r,r+1}}{I_{r,r+1}} + Z_{r,r-1,0} \cdot \frac{l_{r,r-1}}{I_{r,r-1}} + Z_{r,r+1,0} \cdot \frac{l_{r,r+1}}{I_{r,r+1}} = 0$$

Třímomentová rovnice pro konstantní průřez celého spojitého nosníku

Předpoklad :

v celém nosníku je neměnný průřez z hlediska materiálového i geometrického, tj. $E \cdot I = konst.$

Třímomentová rovnice pak má tvar :

$$M_{r-1} \cdot l_{r,r-1} + M_r \cdot (l_{r,r-1} + l_{r,r+1}) + M_{r+1} \cdot l_{r,r+1} + Z_{r,r-1} \cdot l_{r,r-1} + Z_{r,r+1} \cdot l_{r,r+1} = 0$$

Zatěžovací členy Tab. 4.1

Vzorce pro zatěžovací členy třímomentových rovnic

Pro zatěžovací členy při silové zatížení a zatížení změnou teploty platí :

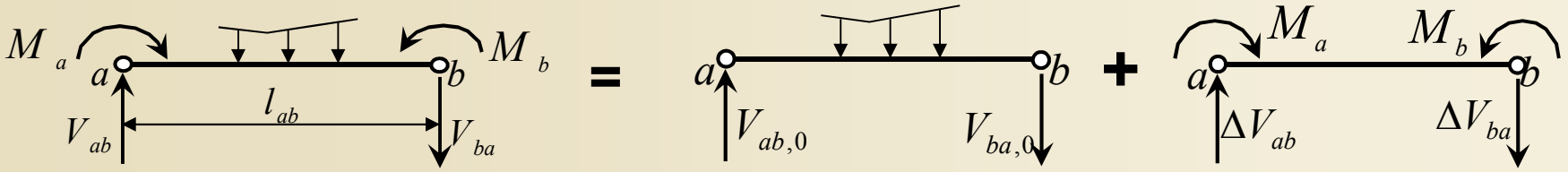
$$Z_{a,b} = \frac{6 \cdot E \cdot I_{a,b}}{l_{a,b}} \cdot \varphi_{a,b,0}$$

$$Z_{b,a} = -\frac{6 \cdot E \cdot I_{a,b}}{l_{a,b}} \cdot \varphi_{b,a,0}$$

Pootočení $\varphi_{a,b,0}$ a $\varphi_{b,a,0}$ se určí na prostém nosníku

	$Z_{a,b}$	$Z_{b,a}$
I = konst.		
P, $l/2$, $l/2$	$+\frac{3}{8}Pl$	$+\frac{3}{8}Pl$
P, a, b	$+P\frac{ab\,(l+b)}{l^2}$	$+P\frac{ab\,(l+a)}{l^2}$
P, P, a, a	$+P\frac{3a\,(l-a)}{l}$	$+P\frac{3a\,(l-a)}{l}$
q	$+\frac{1}{4}ql^2$	$+\frac{1}{4}ql^2$
q, a, b	$+q\frac{a^2(l+b)^2}{4l^2}$	$+q\frac{a^2(2l^2-a^2)}{4l^2}$
q, a, b	$+q\frac{b^2(2l^2-b^2)}{4l^2}$	$+q\frac{b^2(l+a)^2}{4l^2}$
q	$+\frac{2}{15}ql^2$	$+\frac{7}{60}ql^2$
q	$+\frac{7}{60}ql^2$	$+\frac{2}{15}ql^2$
q, a, a	$+q\frac{l^3-2a^2l+a^3}{4l}$	$+q\frac{l^3-2a^2l+a^3}{4l}$
M, a, b	$+M\frac{l^2-3b^2}{l^2}$	$-M\frac{l^2-3a^2}{l^2}$
oteplení Δt_1 = konst., α_t, h	$+\frac{3EI\alpha_t\Delta t_1}{h}$	$+\frac{3EI\alpha_t\Delta t_1}{h}$

Složky vnitřních sil spojitého nosníku



Nosník a-b je polem spojitého nosníku. Je zatížen jako prostý nosník:

a) v poli a-b b) ohybovými momenty nad podporami

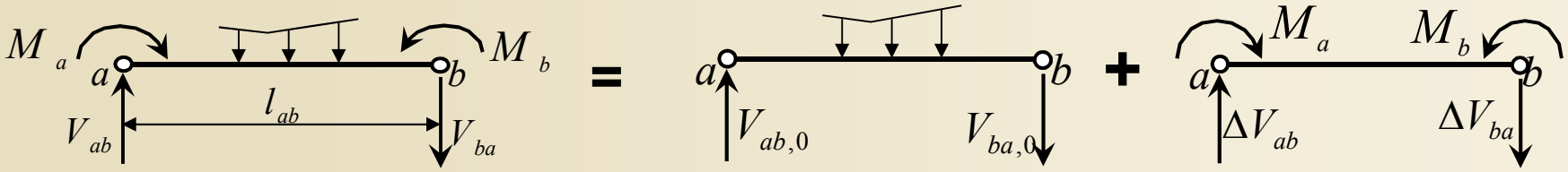
Pro posouvající síly platí:

$$\Delta V_{a,b} \cdot l_{a,b} + M_a - M_b = 0 \Rightarrow \Delta V_{a,b} = \frac{M_b - M_a}{l_{a,b}} \qquad V_{a,b} = V_{a,b,0} + \Delta V_{a,b} = V_{a,b,0} + \frac{M_b - M_a}{l_{a,b}}$$

$$\Delta V_{b,a} \cdot l_{a,b} + M_a - M_b = 0 \Rightarrow \Delta V_{b,a} = \frac{M_b - M_a}{l_{a,b}} \qquad V_{b,a} = V_{b,a,0} + \Delta V_{b,a} = V_{b,a,0} + \frac{M_b - M_a}{l_{a,b}}$$

$$V_x = V_{x,0} + \Delta V_{b,a} = V_{x,0} + \frac{M_b - M_a}{l_{a,b}}$$

Složky vnitřních sil spojitého nosníku



Pro nosník r-1, r (místo a-b) lze zapsat:

$$V_{r-1,r} = V_{r-1,r,0} + \Delta V_{r-1,r} = V_{r-1,r,0} + \frac{M_r - M_{r-1}}{l_{r-1,r}}$$

$$V_{r,r-1} = V_{r,r-1,0} + \Delta V_{r,r-1} = V_{r,r-1,0} + \frac{M_r - M_{r-1}}{l_{r-1,r}}$$

$$V_x = V_{x,0} + \Delta V_{r,r-1} = V_{x,0} + \frac{M_r - M_{r-1}}{l_{r-1,r}}$$

Pro nosník r, r+1 (místo a-b) lze zapsat:

$$V_{r,r+1} = V_{r,r+1,0} + \Delta V_{r,r+1} = V_{r,r+1,0} + \frac{M_{r+1} - M_r}{l_{r,r+1}}$$

$$V_{r+1,r} = V_{r+1,0} + \Delta V_{r+1,r} = V_{r+1,r,0} + \frac{M_{r+1} - M_r}{l_{r,r+1}}$$

$$V_x = V_{x,0} + \Delta V_{r+1,r} = V_{x,0} + \frac{M_{r+1} - M_r}{l_{r,r+1}}$$

Reakce spojitého nosníku

Podpora r :

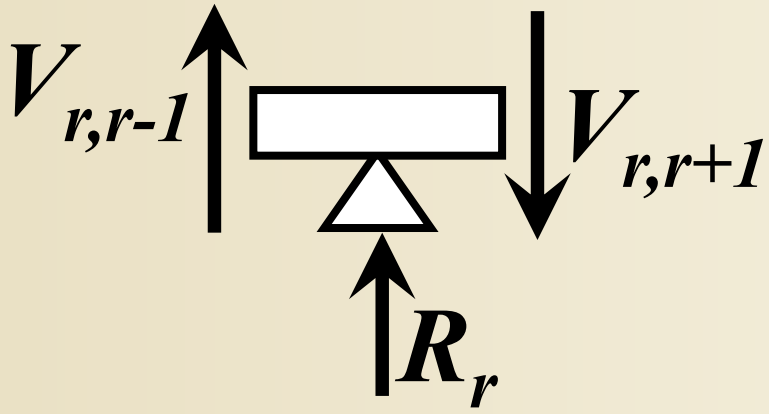
a) na levé straně pole r - 1, r

b) na pravé straně pole r, r + 1

V nosníku je v bodě r ohybový moment M_r a svislá reakce R_r.

Pro R_r vyplývá z podmínky rovnováhy : $R_r + V_{r,r-1} - V_{r,r+1} = 0$

$$R_r = -V_{r,r-1} + V_{r,r+1}$$



Zatěžovací členy při poklesu podpor

Třímomentová rovnice pro průřez po polích proměnný :

$$M_{r-1}\frac{l_{r-1,r}}{I_{r-1,r}}+M_r\cdot 2\cdot\left(\frac{l_{r-1,r}}{I_{r-1,r}}+\frac{l_{r,r+1}}{I_{r,r+1}}\right)+M_r\frac{l_{r,r+1}}{I_{r,r+1}}+6\cdot E\cdot\left(\varphi_{r,r+1,0}-\varphi_{r,r-1,0}\right)=0$$

Při svislém posunu podpor $\overline{w}_r$ $(\downarrow)$ je :

$$\varphi_{r,r+1,0}=\frac{\overline{w}_{r+1}-\overline{w}_r}{l_{r,r+1}}\qquad \varphi_{r,r-1,0}=\frac{\overline{w}_r-\overline{w}_{r-1}}{l_{r,r-1}}$$

$$M_{r-1}\frac{l_{r-1,r}}{I_{r-1,r}}+M_r\cdot 2\cdot\left(\frac{l_{r-1,r}}{I_{r-1,r}}+\frac{l_{r,r+1}}{I_{r,r+1}}\right)+M_r\frac{l_{r,r+1}}{I_{r,r+1}}+6\cdot E\cdot\left(\frac{\overline{w}_{r+1}-\overline{w}_r}{l_{r,r+1}}-\frac{\overline{w}_r-\overline{w}_{r-1}}{l_{r,r-1}}\right)=0$$

Při pravotočivém pootočení levé podpory "1" ve vetknutí $\overline{\varphi}_1$ je :

$$M_1\cdot 2\cdot\frac{l_{1,2}}{I_{1,2}}+M_2\frac{l_{1,2}}{I_{1,2}}+6\cdot E\cdot\frac{\overline{w}_2-\overline{w}_1}{l_{2,1}}=6\cdot E\cdot\overline{\varphi}_1$$

Při pravotočivém pootočení pravé podpory "$(p+1)$" ve vetknutí $\overline{\varphi}_{p+1}$ je :

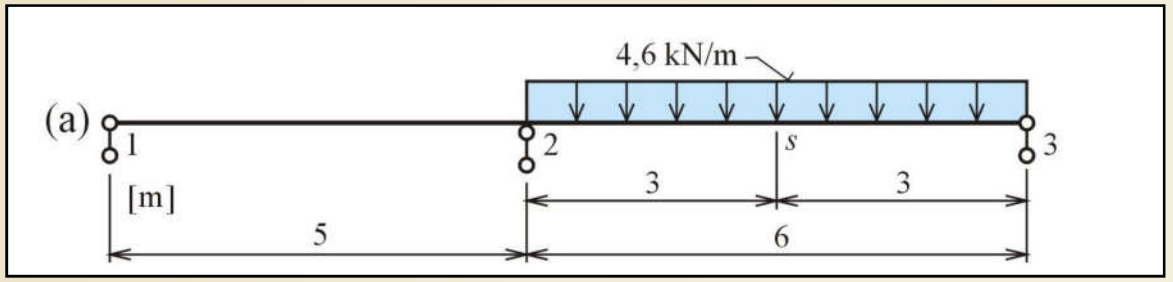
$$M_p\frac{l_{p,p+1}}{I_{p,p+1}}+M_{p+1}\cdot 2\cdot\frac{l_{p,p+1}}{I_{p,p+1}}+6\cdot E\cdot\left(-\frac{\overline{w}_{p+1}-\overline{w}_p}{l_{p.p+1}}\right)=-6\cdot E\cdot\overline{\varphi}_{p+1}$$

Příklad 4.2

Zadání :

$$I_{1,2} = 1{,}2 \cdot 10^{-3} m^4$$

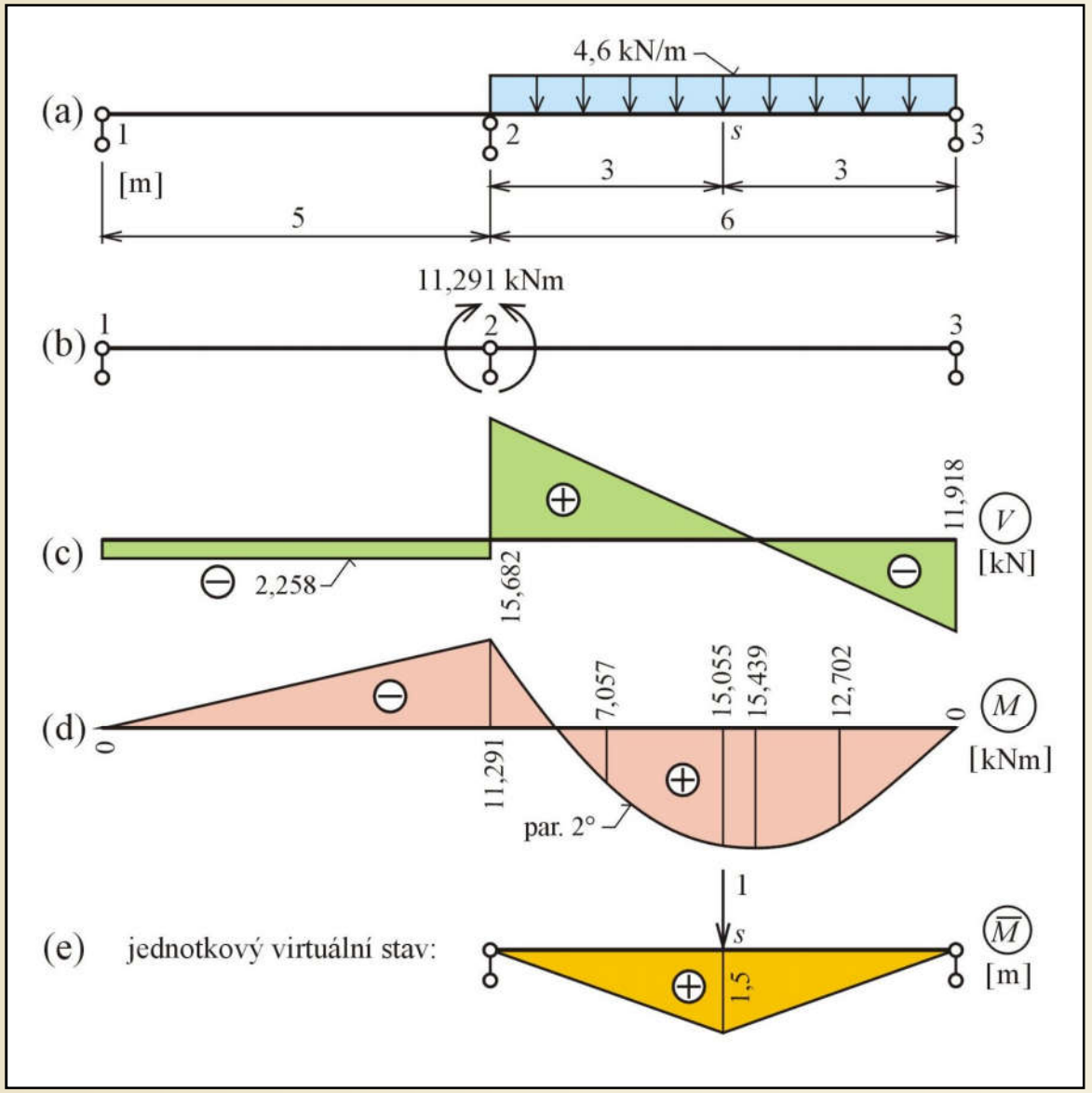
$$E_{1,2} = 2{,}4 \cdot 10^{-4} kPa$$



Zadání příkladu 4.2
Obr. 4.9. / str. 109

$$M_a \cdot \frac{l_1}{EI_1} + 2 \cdot M_b \cdot \left(\frac{l_1}{EI_1} + \frac{l_2}{EI_2} \right) + M_c \cdot \frac{l_2}{EI_2} + Z_{ba} \cdot \frac{l_1}{EI_1} + Z_{bc} \cdot \frac{l_2}{EI_2} = 0$$

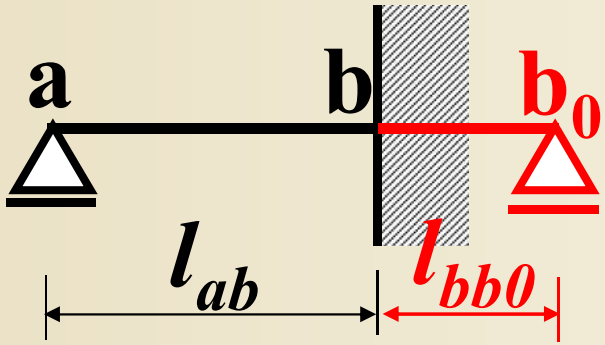
Příklad 4.2



Zadání a řešení příkladu 4.2

Obr. 4.9. / str. 109

Vetknutí vpravo

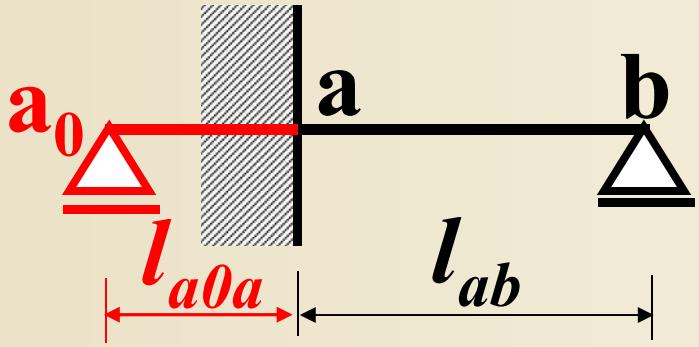


$$M_a \cdot l_{ab} + 2 \cdot M_b \cdot (l_{ab} + l_{bb0}) + M_{b0} \cdot l_{bb0} + Z_{ba} \cdot l_{ab} + Z_{bb0} \cdot l_{bb0} = 0$$

$$M_a \cdot l_{ab} + 2 \cdot M_b \cdot (l_{ab} + 0) + 0 + Z_{ba} \cdot l_{ab} + 0 = 0$$

$$M_a \cdot l_{ab} + 2 \cdot M_b \cdot l_{ab} + Z_{ba} \cdot l_{ab} = 0$$

Vetknutí vlevo

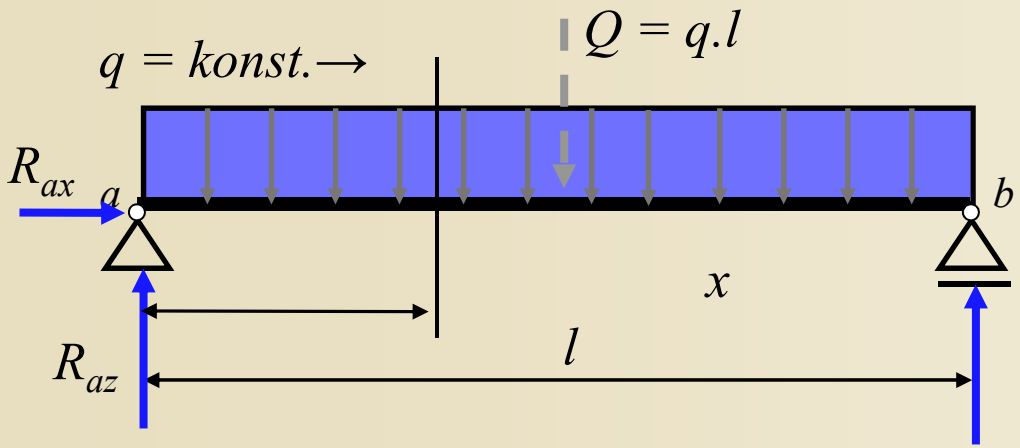


$$M_{a0} \cdot l_{a0a} + 2 \cdot M_a \cdot (l_{a0a} + l_{ab}) + M_b \cdot l_{ab} + Z_{aa0} \cdot l_{a0a} + Z_{ab} \cdot l_{ab} = 0$$

$$0 + 2 \cdot M_a \cdot (0 + l_{ab}) + M_b \cdot l_{ab} + 0 + Z_{ab} \cdot l_{ab} = 0$$

$$2 \cdot M_a \cdot l_{ab} + M_b \cdot l_{ab} + Z_{ab} \cdot l_{ab} = 0$$

Vliv rozpětí na průhyb



Zadání :

$h = 0{,}1m$

$E = 27 \cdot 10^6 kPa$

$\rho = 2500\ kgm^{-3}$

$q = 3\ kNm^{-2}$

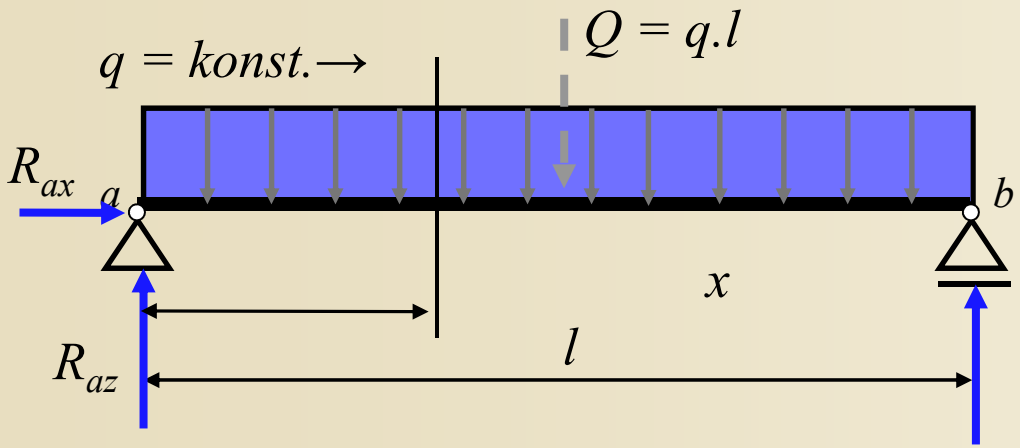
$l = 6\ (1.5 - 10)\ m$

$w_{\lim} = 1/250$

$I_y =$

$\boldsymbol{p = g + q}$

Vliv rozpětí na průhyb



$$\delta = \frac{1}{EI}\int_0^l M\overline{M}\,\mathrm{d}x + \frac{1}{GA^*}\int_0^l V\overline{V}\,\mathrm{d}x$$

Vliv posouvajících sil zanedbáme.

Zadání :

$h = 0{,}1m$

$E = 27\cdot 10^6\, kPa$

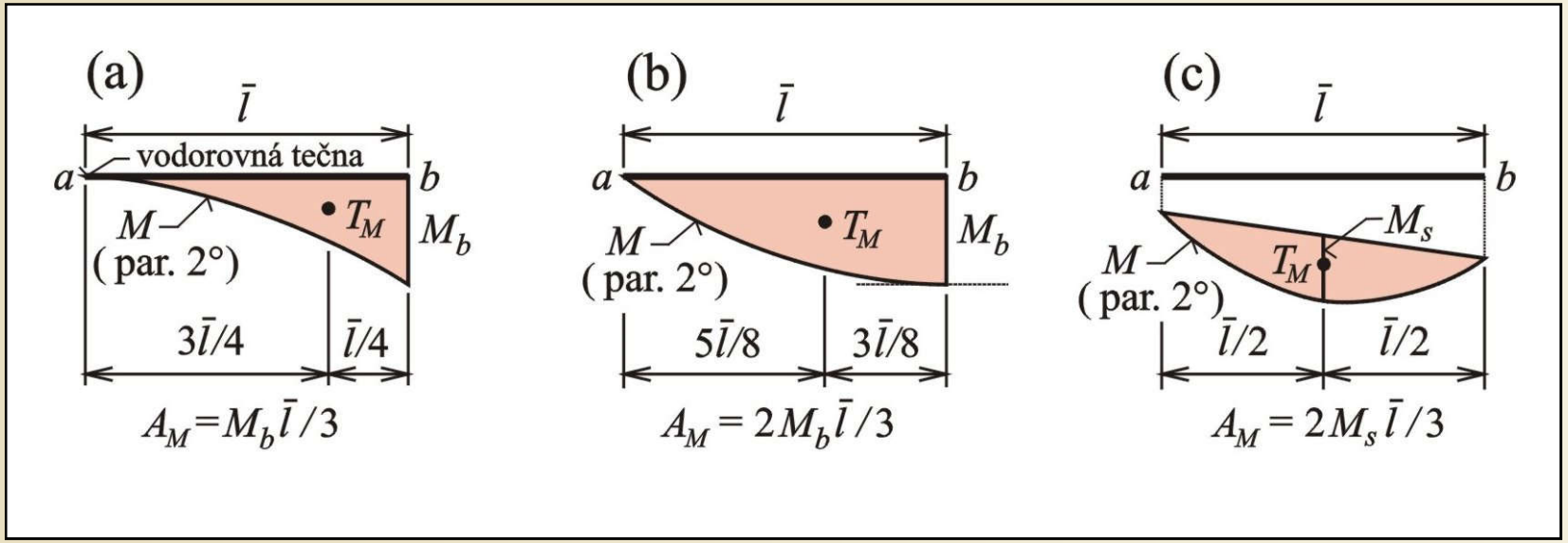
$\rho = 2500\ kgm^{-3}$

$q = 3\ kNm^{-2}$

$l = 6\ (1.5 - 10)\ m$

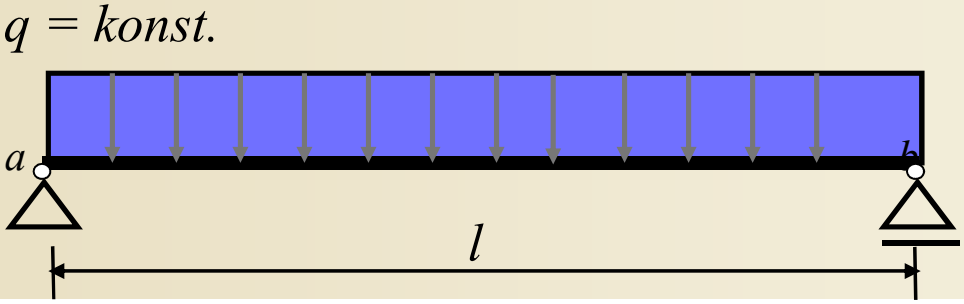
$w_{\lim} = 1/250$

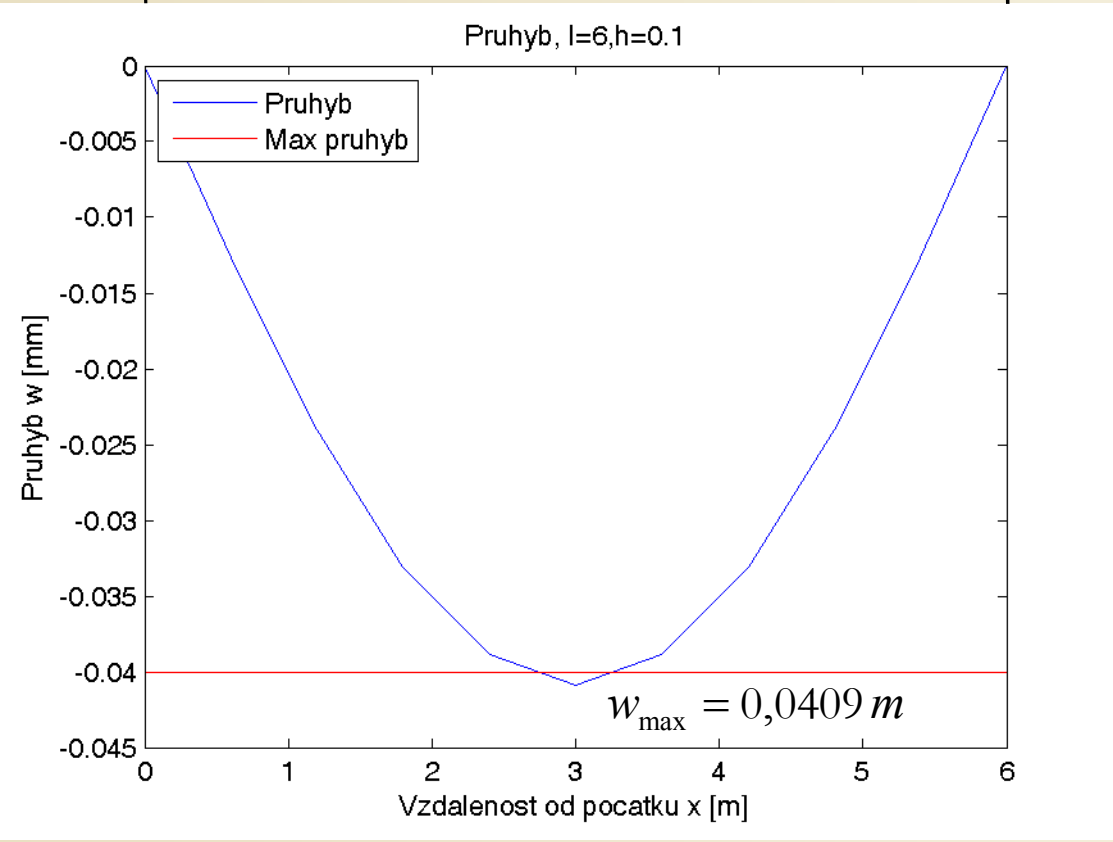
Vereščaginovo pravidlo



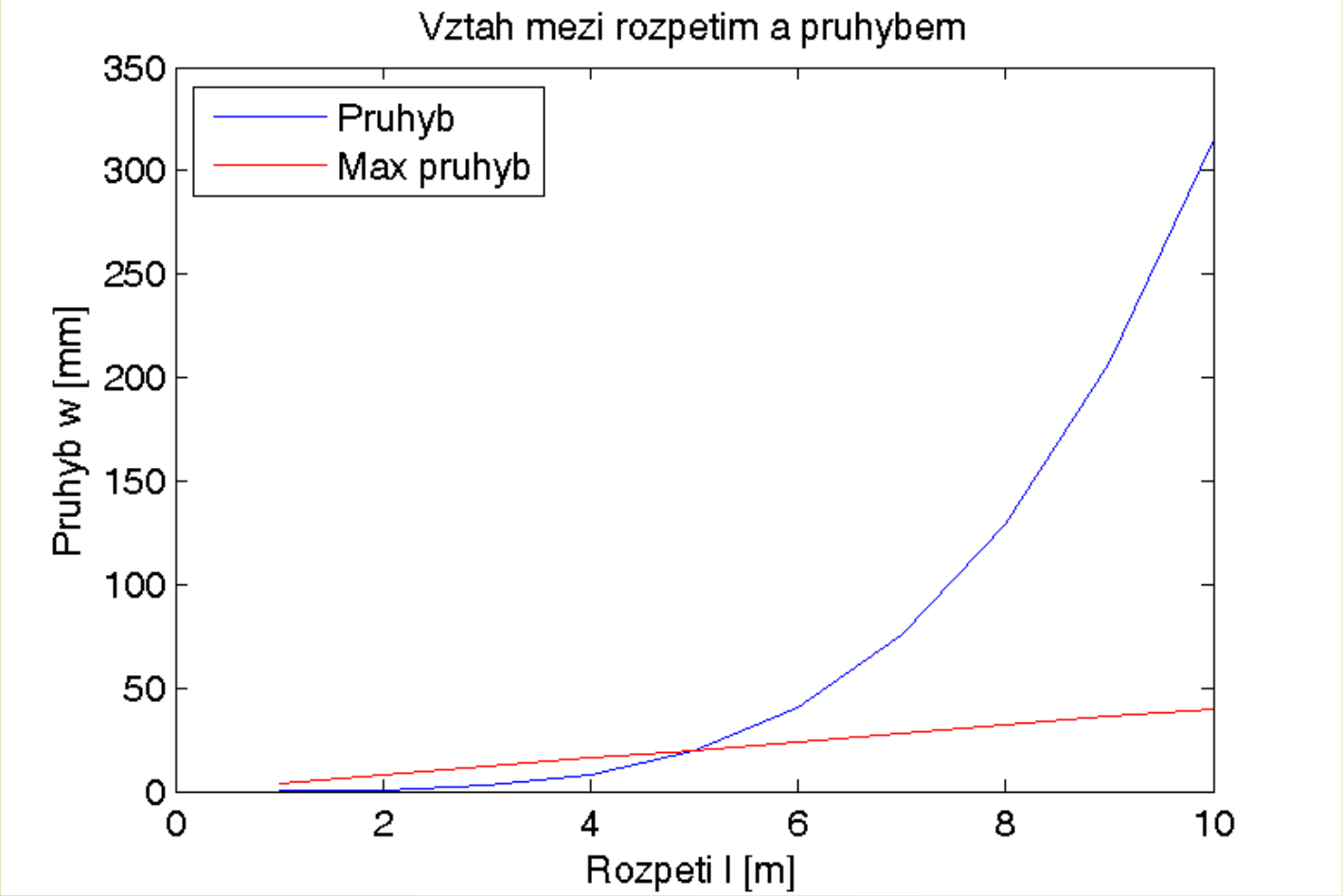
Poloha těžiště parabolické části momentových obrazců pro použití Vereščaginova pravidla
Obr. 2.16. / str. 38

Průhyb pro l = 6 m





Průhyb pro l=1,5 – 10 m



Donau-wald bridge, Winzer, Německo

Donau-wald bridge, Winzer, Německo

Bogenberg bridge, Bogen, Německo

Kingstone Bridge, Glasgow, Skotsko

Kingstone Bridge, Glasgow, Skotsko

Kingstone Bridge, Glasgow, Skotsko

Nuselský most, Praha

Nuselský most, Praha

Stavba dálnice D47, Ostrava

Stavba dálnice D47, Ostrava

Stavba dálnice D47, Ostrava

Výzkumné energetické centrum, VŠB-TU Ostrava

Výzkumné energetické centrum, VŠB-TU Ostrava

Výzkumné energetické centrum, VŠB-TU Ostrava

Výzkumné energetické centrum, VŠB-TU Ostrava