

# Téma 4

## Pokračování ve staticky neurčitých prutových konstrukcích



# Osnova přednášky

- Silová metoda
- Jednoduchý staticky neurčitý nosník v osově úloze
- Jednostranně vetknutý nosník v příčné úloze
- Oboustranně vetknutý nosník v příčné úloze
- Prostý nosník, jako prvek staticky neurčité konstrukce
- Jednoduchý staticky neurčitý nosník v krutové úloze
- Výpočet deformace jednoduchého staticky neurčitého nosníku

# Jednoduchý staticky neurčitý nosník

Každý jednoduchý staticky neurčitý nosník v prostorové úloze lze rozdělit na 4 jednodušší úlohy:

1. Osová úloha  $n_v=1$
2. Příčná úloha v rovině  $xz$   $n_v=2$
3. Příčná úloha v rovině  $xy$   $n_v=2$
4. Krutová úloha  $n_v=1$

# Jednoduchý staticky neurčitý nosník v osově úloze

$$n_s = v - n_v = 2 - 1 = 1$$

$$X_1 = R_{bx}$$

$$X_1 \cdot \delta_{11} + \delta_{10} = 0$$

$$X_1 = -\frac{\delta_{10}}{\delta_{11}} = R_{bx}$$

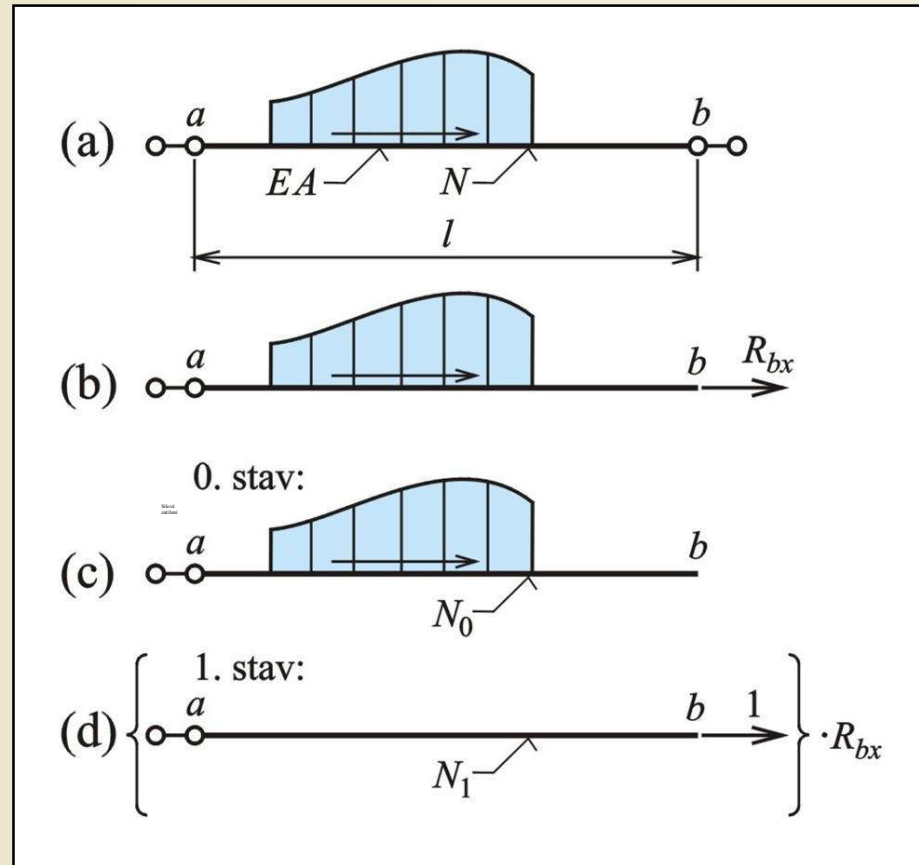
$$\delta_{11} = \int_0^l \frac{N_1 \cdot \bar{N}}{E \cdot A} dx = \frac{1}{E} \int_0^l \frac{1}{A} dx$$

**Silové zatížení**

$$\delta_{10} = \int_0^l \frac{N_0 \cdot \bar{N}}{E \cdot A} dx = \int_0^l \frac{N_0 \cdot N_1}{E \cdot A} dx = \frac{1}{E} \int_0^l \frac{N_0}{A} dx$$

**Oteplení**

$$\delta_{10} = \alpha_t \cdot \Delta t_0 \int_0^l N_1 \cdot dx = \alpha_t \cdot \Delta t_0 \cdot l$$



Silová metoda v osově úloze

Obr. 3.2. / str. 58

# Jednoduchý staticky neurčitý nosník v osově úloze

## Popuštění podpor

Posunutí ve směru osy x  $\bar{u}_a (\rightarrow), \bar{u}_b (\rightarrow)$

Deformační podmínka:  $\delta_{11} \cdot X_1 + \delta_{10} = d_1$

Určení  $\delta_{10}$  a  $d_1$ :

V daném případě ( $X_1$  ve směru osy x):

$\bar{u}_a$  a  $R_{a1}$  mají opačný směr

$$E_e = 0 \Rightarrow \delta_{11} \cdot X_1 + (\bar{R} \cdot \delta) = 0$$

$$\delta_{10} = -(\bar{R} \cdot \delta) = -(R_{a1} \cdot \bar{u}_a) = -(-1 \cdot \bar{u}_a) = \bar{u}_a$$

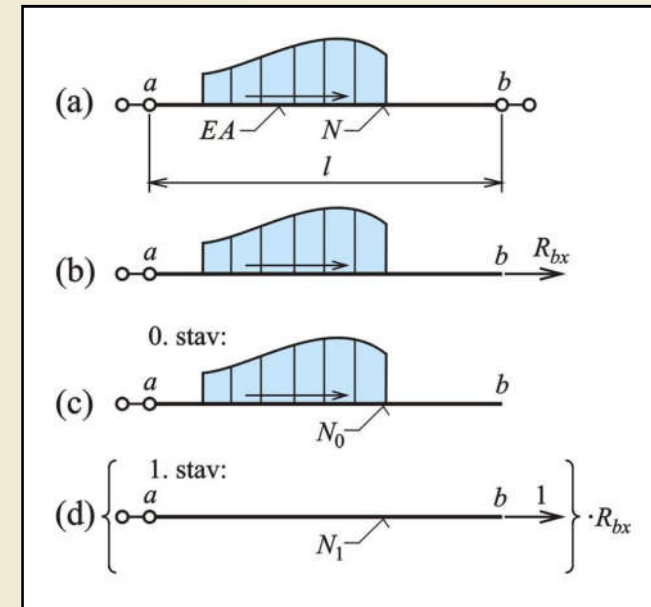
$\bar{u}_b$  a  $X_1$  mají stejný směr

$$d_1 = \bar{u}_b$$

$$\delta_{11} \cdot X_1 + \bar{u}_a = \bar{u}_b$$

$$X_1 = \frac{\bar{u}_b - \bar{u}_a}{\delta_{11}} = R_{bx}$$

$$R_{ax} = R_{ax0} + R_{ax1} \cdot X_1$$



Silová metoda v osově úloze

Obr. 3.2./str.58

# Příklad 3.1

## Silové zatížení

$$EA = 9,681 \cdot 10^5 \text{ kN}$$

$$\text{Deformační podmínka} \quad \delta_{11} \cdot X_1 + \delta_{10} = 0$$

$$R_{a0} = 4,8 \text{ kN} (\leftarrow)$$

$$R_{a1} = 1 (\leftarrow)$$

$$\delta_{11} = \int_0^l \frac{N_1 \cdot \bar{N}}{E \cdot A} dx = \frac{l}{E \cdot A} = \frac{3}{9,681 \cdot 10^5}$$

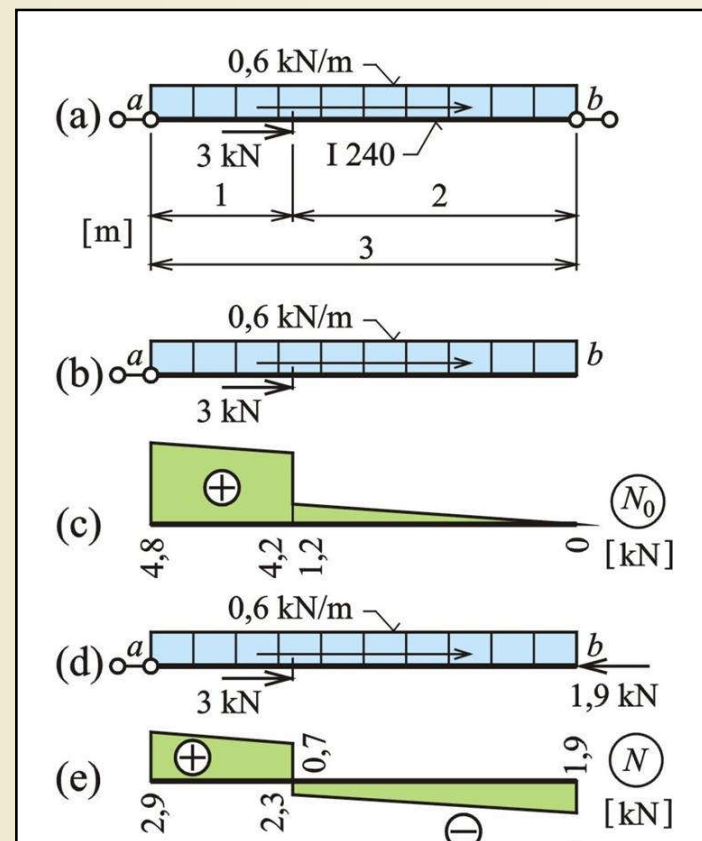
$$\delta_{10} = \int_0^l \frac{N_0 \cdot \bar{N}}{E \cdot A} dx = \frac{1}{9,681 \cdot 10^5} \int_0^3 N_0 \cdot dx$$

$$\delta_{10} = \frac{(4,8 + 4,2) \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} + 1,2 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2}}{9,681 \cdot 10^5} = \frac{5,7}{9,681 \cdot 10^5}$$

$$R_{bx} = X_1 = -\frac{\delta_{10}}{\delta_{11}} = -\frac{5,7}{3} = -1,9 \text{ kN} (\rightarrow)$$

$$R_{bx} = 1,9 \text{ kN} (\leftarrow)$$

$$R_{ax} = R_{ax0} + R_{ax1} \cdot X_1 = 4,8 + 1 \cdot (-1,9) = 2,9 \text{ kN} (\leftarrow)$$



Zadání a řešení příkladu 3.1

Obr. 3.3. / str. 60

## Příklad 3.1

### Oteplení

Na nosník působí oteplení  $\Delta t_0 = 15^\circ\text{C}$ , je konstantní po celé délce

$$EA = 9,681 \cdot 10^5 \text{ kN}, \quad \alpha_t = 1,2 \cdot 10^{-5}, \quad \Delta t_0 = 15^\circ\text{C}$$

$$\text{Deformační podmínka: } \delta_{11} \cdot X_1 + \delta_{10} = 0$$

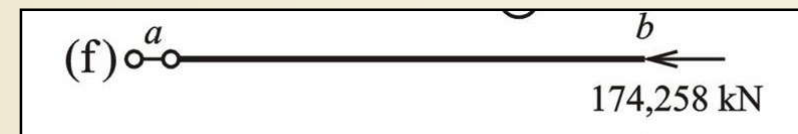
$$\delta_{10} = \int_0^l \overline{N} \cdot \alpha_t \cdot \Delta t_0 \cdot dx = \alpha_t \cdot \Delta t_0 \cdot l = 1,2 \cdot 10^{-5} \cdot 15 \cdot 3 = 5,4 \cdot 10^{-4}$$

$$\delta_{11} = \frac{l}{EA} = \frac{3}{9,681 \cdot 10^5}$$

$$R_{bx} = -\frac{\delta_{10}}{\delta_{11}} = -5,4 \cdot 10^{-4} \cdot \frac{9,681 \cdot 10^5}{3} = -174,258 \text{ kN} (\rightarrow)$$

$$R_{ax} = R_{ax0} + R_{ax1} \cdot X_1 = 0 + 1 \cdot (-174,258) = -174,258 \text{ kN} (\leftarrow)$$

$$R_{ax} = 174,258 \text{ kN} (\rightarrow) \quad R_{bx} = 174,258 \text{ kN} (\leftarrow)$$



Zadání a řešení příkladu 3.1

Obr. 3.3. / str. 60

## Příklad 3.1, popuštění podpor

$$\bar{U}_a = 5 \text{ mm} = 0,005 \text{ m} (\rightarrow)$$

$$\bar{U}_b = 8 \text{ mm} = 0,008 \text{ m} (\rightarrow)$$

Posunutí  $\bar{U}_a$  a reakce  $R_{a1}$  a mají opačný směr

Posunutí a  $\bar{U}_b$  a jednotková síla  $X_1=1$  mají shodný směr

$$\text{Přetvárná podmínka:} \quad \delta_{11} \cdot X_1 + \delta_{10} = d_1$$

$$\delta_{11} = \frac{l}{EA} = \frac{3}{9,681 \cdot 10^5}$$

$$\delta_{10} = -\sum (\bar{R} \cdot \delta) = -(\bar{R}_{ax1} \cdot \bar{u}_a) = -(-1 \cdot \bar{u}_a) = \bar{u}_a = 0,005$$

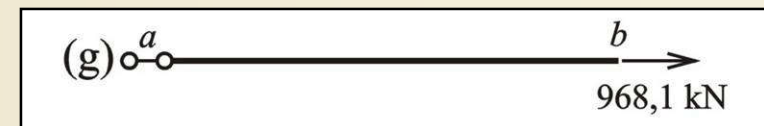
$$d_1 = \bar{u}_b = 0,008$$

$$R_{bx} = X_1 = \frac{\bar{u}_b - \bar{u}_a}{\delta_{11}} = \frac{0,008 - 0,005}{\frac{3}{9,681 \cdot 10^5}} = 968,1 \text{ kN} (\rightarrow)$$

$$R_{ax} + R_{bx} = 0$$

$$R_{ax} = -R_{bx} = -968,1 \text{ kN} (\rightarrow)$$

$$R_{ax} = 968,1 \text{ kN} (\leftarrow) \quad R_{bx} = 968,1 \text{ kN} (\rightarrow)$$



Zadání a řešení příkladu 3.1

Obr. 3.1 /str. 68



# Příčně zatížené staticky neurčité nosníky

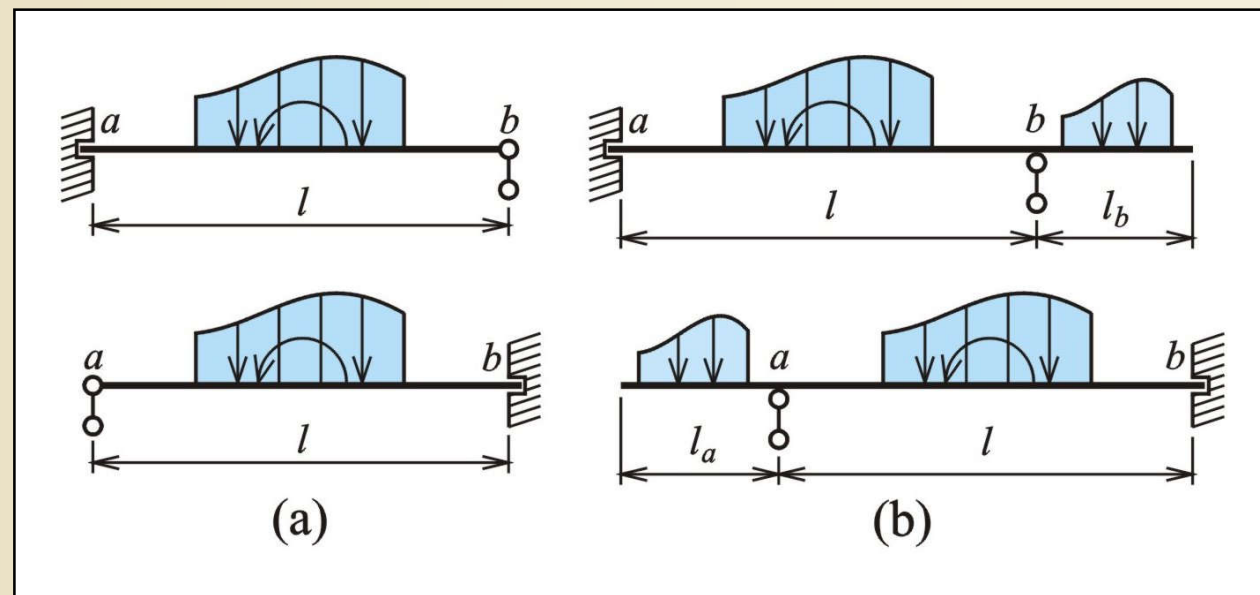
Stupeň statické neurčitosti :  $n_s = v - n_v = 3 - 2 = 1$

Přetvárná podmínka pro zatížení silové a zatížení změnou teploty :

$$\delta_{11} \cdot X_1 + \delta_{10} = 0$$

Přetvárná podmínka pro zatížení popuštěním podpor :

$$\delta_{11} \cdot X_1 + \delta_{10} = d_1$$



Jednostranně vetknuté staticky neurčité nosníky

Obr. 3.10. / str. 68

# Oboustranně vetknutý nosník v příčné úloze

$$n_s = v - n_v = 4 - 2 = 2$$

Přetvárné podmínky pro silové zatížení  
a zatížení změnou teploty:

$$\delta_{11} \cdot X_1 + \delta_{12} \cdot X_2 + \delta_{10} = 0$$

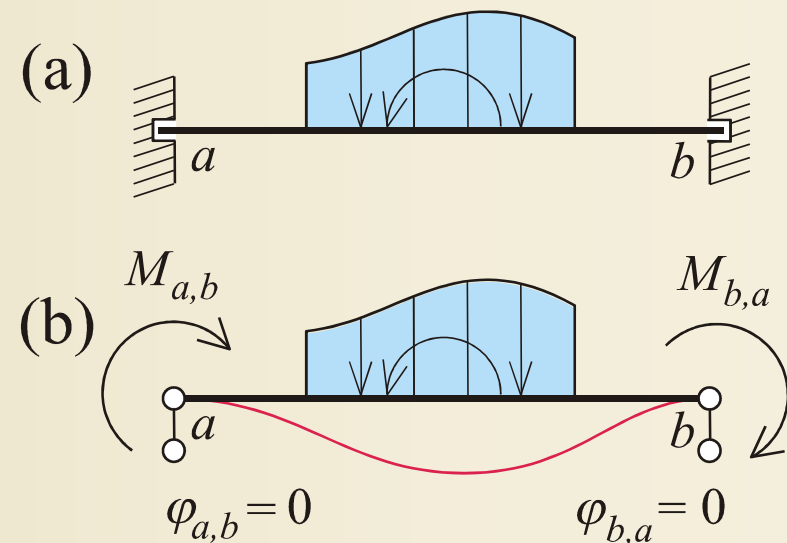
$$\delta_{21} \cdot X_1 + \delta_{22} \cdot X_2 + \delta_{20} = 0$$

$$X_1 = M_{ab} \quad X_2 = M_{ba}$$

Přetvárné podmínky pro zatížení  
popuštěním podpor:

$$\delta_{11} \cdot X_1 + \delta_{12} \cdot X_2 + \delta_{10} = d_1$$

$$\delta_{21} \cdot X_1 + \delta_{22} \cdot X_2 + \delta_{20} = d_2$$



Silová metoda - příčné zatížený oboustranně  
vetknutý nosník, obr.3.20, str. 78

# Příklad 3.8, str. 80, obr.3.8

Nosník z profilu I 200 je zatížen:

- silově dle obr. (a)
- lineárním oteplením  $\Delta t_1 = 15^\circ \text{K}$  dle obr. (e)
- popuštěním podpor dle obr.(h)

Přetvárné podmínky pro zatížení silové a změnou teploty:

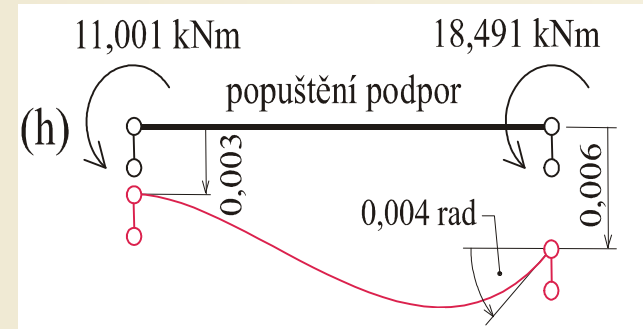
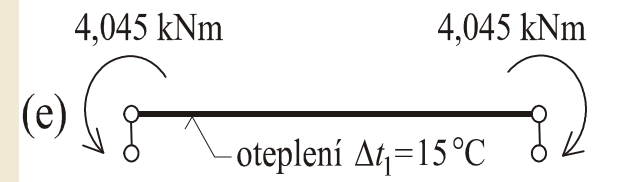
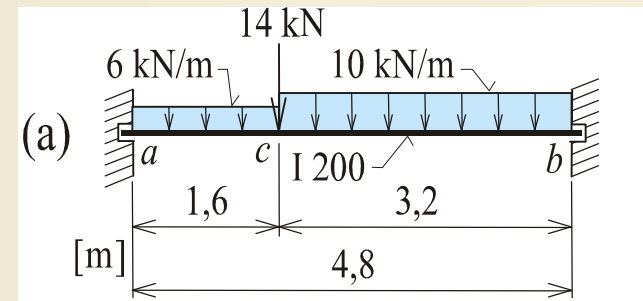
$$\delta_{11} \cdot X_1 + \delta_{12} \cdot X_2 + \delta_{10} = 0$$

$$\delta_{21} \cdot X_1 + \delta_{22} \cdot X_2 + \delta_{20} = 0$$

Přetvárné podmínky pro zatížení popuštěním podpor:

$$\delta_{11} \cdot X_1 + \delta_{12} \cdot X_2 + \delta_{10} = d_1$$

$$\delta_{21} \cdot X_1 + \delta_{22} \cdot X_2 + \delta_{20} = d_2$$



Zadání a řešení příkladu 3.8, str. 80

## Příklad 3.8, str. 80, obr.3.8 – řešení, silové zatížení

### Silové zatížení

Základní staticky určitá soustava: prostý nosník dvojklobově uložený

Staticky neurčitě veličiny:  $X_1 = M_{ab}$   $X_2 = -M_{ba}$

„0“ zatěžovací stav:

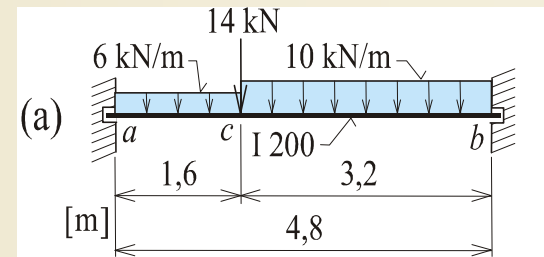
Výpočet reakcí  $R_{az0}$ ,  $R_{bz0}$ :

Průběh momentu  $M_0$ :

$$q_1 = 6 \text{ kN/m}$$

$$q_2 = 10 - 6 = 4 \text{ kN/m}$$

Lze též napsat:



$$R_{az0} = (6 \cdot 1,6 \cdot 4 + 14 \cdot 3,2 + 10 \cdot 3,2 \cdot 1,6) / 4,8 = 28 \text{ kN}$$

$$R_{bz0} = (10 \cdot 3,2 \cdot 3,2 + 14 \cdot 1,6 + 6 \cdot 1,6 \cdot 0,8) / 4,8 = 27,6 \text{ kN}$$

$$M_0(x) = R_{az0} \cdot x - q_1 \cdot \frac{x^2}{2} \quad \text{pro } 0 \leq x \leq 1,6$$

$$M_0(x) = R_{az0} \cdot x - q_1 \cdot \frac{x^2}{2} - F \cdot (x - x_F) - q_2 \cdot \frac{(x - x_F)^2}{2}$$

$$\text{pro } 1,6 \leq x \leq 4,8$$

$$M_0 = M_{Ra0} - M_{q10} - M_{F0} - M_{q20}$$

$$\text{kde } M_{Ra0} = R_{az0} \cdot x \quad M_{q10} = q_1 \cdot \frac{x^2}{2} \quad \text{pro } 0 \leq x \leq l$$

$$M_{F0} = F \cdot (x - x_F) \quad M_{q20} = q_2 \cdot \frac{(x - x_F)^2}{2} \quad \text{pro } x_F \leq x \leq l$$

## Příklad 3.8, str. 80, obr.3.8 – řešení, silové zatížení

1. zatěžovací stav

$$M_1 = \frac{l-x}{l} \quad R_{a1} = -\frac{1}{l} \quad R_{b1} = \frac{1}{l}$$

2. zatěžovací stav

$$M_2 = -\frac{x}{l} \quad R_{a2} = \frac{1}{l} \quad R_{b2} = -\frac{1}{l}$$

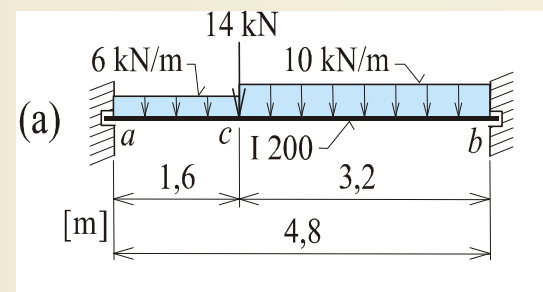
Výpočet deformačních součinitelů

$$\delta_{11} = \alpha_{ab} = \int_0^l \frac{M_1 \cdot M_1}{E \cdot I} dx = \frac{l}{3EI} = \frac{4,8}{3EI} = \frac{1,6}{EI}$$

$$\delta_{22} = \alpha_{ba} = \int_0^l \frac{M_2 \cdot M_2}{E \cdot I} dx = \frac{l}{3EI} = \frac{1,6}{EI}$$

$$\delta_{12} = \beta_{ab} = \beta = \int_0^l \frac{M_1 \cdot M_2}{E \cdot I} dx = \frac{l}{6EI} = \frac{4,8}{6EI} = \frac{0,8}{EI}$$

$$\delta_{21} = \beta_{ba} = \beta = \int_0^l \frac{M_2 \cdot M_1}{E \cdot I} dx = \frac{l}{6EI} = \frac{0,8}{EI}$$



$$\delta_{11} \cdot X_1 + \delta_{12} \cdot X_2 + \delta_{10} = 0$$

$$\delta_{21} \cdot X_1 + \delta_{22} \cdot X_2 + \delta_{20} = 0$$

Pro konstantní a neměnný průřez  $\alpha_{ab} = \alpha_{ba} = \alpha$

$\alpha, \beta$  základní deformační úhly prostého nosníku

## Příklad 3.8, str. 80, obr.3.8 – řešení, silové zatížení

Výpočet deformačních součinitelů  $\delta_{10}$ ,  $\delta_{20}$

$$\delta_{10} = \int_0^l \frac{M_0 M_1}{EI} dx = \frac{1}{EI} \int_0^l (M_{R_a0} - M_{q_10} - M_{F0} - M_{q_20}) \cdot M_1 \cdot dx$$

$$\delta_{20} = \int_0^l \frac{M_0 M_2}{EI} dx = \frac{1}{EI} \int_0^l (M_{R_a0} - M_{q_10} - M_{F0} - M_{q_20}) \cdot M_2 \cdot dx$$

Integraci lze provést : 1) analyticky,

2) pomocí Veršcaginova pravidla,

3) pomocí tabulky 2.2 .

V daném případě je :

$$\delta_{10} = \frac{60,30222}{EI}$$

$$\delta_{20} = \frac{58,14044}{EI}$$

## Příklad 3.8, str. 80, obr.3.8 – řešení, silové zatížení

Řešením lineárních rovnic po dosazení je:

$$X_1 = -26,02667 \text{ kNm}$$

$$X_2 = -23,32444 \text{ kNm}$$

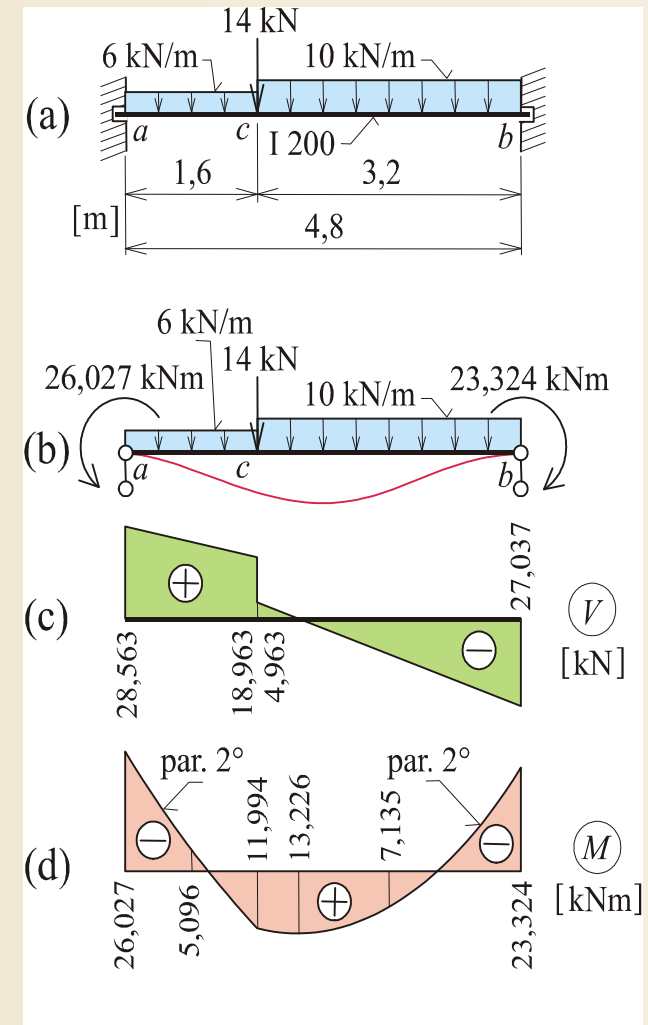
Reakce :

$$R_a = R_{a0} + R_{a1} \cdot X_1 + R_{a2} \cdot X_2$$

$$R_a = 28 + \frac{-26,0266}{-4,8} - \frac{23,3244}{4,8} = 28,563 \text{ kN}$$

$$R_b = R_{b0} + R_{b1} \cdot X_1 + R_{b2} \cdot X_2$$

$$R_b = 27,6 + \frac{-26,0266}{4,8} + \frac{-23,3244}{-4,8} = 27,037 \text{ kN}$$



Zadání a řešení příkladu 3.8, obr. 3.21, str. 80

## Příklad 3.8, str. 80, obr.3.8 – zatížení změnou teploty

Lineární oteplení po výšce průřezu  $\Delta t_1 = 15^\circ C$

Jde o symetrickou úlohu, proto  $X_1 = X_2 = X$

Řešení dvou lineárních rovnic lze redukovat na jedinou ve tvaru :

$$(\delta_{11} + \delta_{12}) \cdot X = -\delta_{10}$$

$$\delta_{10} = \int_0^l \alpha_t \cdot \Delta t_1 \frac{M_1}{h} dx = 1,2 \cdot 10^{-5} \cdot \frac{15}{0,2} \cdot \int_0^{4,8} \frac{l-x}{l} dx = 216 \cdot 10^{-5}$$

$$X = -\frac{\delta_{10}}{\delta_{11} + \delta_{12}} = -\frac{216 \cdot 10^{-5}}{\frac{1,6}{EI} + \frac{0,8}{EI}} = -\frac{216 \cdot 10^{-5}}{2,4} \cdot EI = -4,0446 \text{ kNm}$$

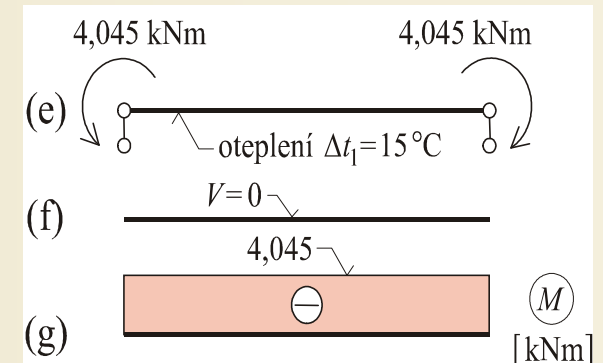
Za  $EI$  dosazeno  $EI = 4494 \text{ kNm}^2$

Reakce  $R_{az} = R_{bz} = 0$ ,

$$R_{az} = R_{az0} + R_{az1} \cdot X + R_{az2} \cdot X = 0 + X \cdot \left( \frac{1}{-4,8} + \frac{1}{4,8} \right) = 0$$

$$\delta_{11} \cdot X_1 + \delta_{12} \cdot X_2 + \delta_{10} = 0$$

$$\delta_{21} \cdot X_1 + \delta_{22} \cdot X_2 + \delta_{20} = 0$$



Zadání a řešení příkladu 3.8, obr. 3.21, str. 80



## Příklad 3.8, str. 80, obr.3.8 – zatížení poklesem podpor

Deformační podmínky:  $\delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \delta_{10} = d_1$

$$\delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \delta_{20} = d_2$$

Pro zvolenou ZS je:  $d_1 = 0$ ,  $d_2 = 0,004$  ( $X_1$  a  $\varphi_b$  mají stejný směr)

$$\delta_{10} = -\sum (R\delta) = -(R_{a1} \cdot w_a + R_{b1} \cdot w_b) = -\left(\frac{w_a}{4,8} - \frac{w_b}{4,8}\right) = -\frac{0,003 - 0,006}{4,8} = 6,25 \cdot 10^{-4}$$

$$\delta_{20} = -\sum (R\delta) = -(R_{a2} \cdot w_a + R_{b2} \cdot w_b) = -\left(-\frac{w_a}{4,8} + \frac{w_b}{4,8}\right) = \frac{0,003 - 0,006}{4,8} = -6,25 \cdot 10^{-4}$$

Po dosazení:

$$\frac{1,6}{4494} X_1 + \frac{0,8}{4494} X_2 = d_1 - \delta_{10} = -6,25 \cdot 10^{-4}$$

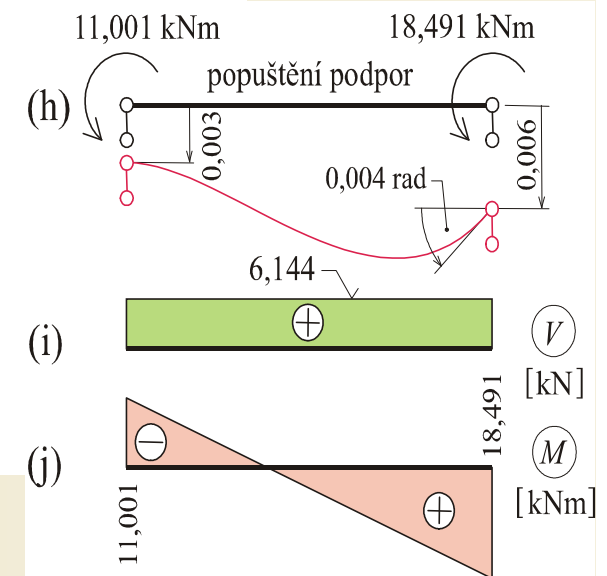
$$\frac{0,8}{4494} X_1 + \frac{1,6}{4494} X_2 = d_2 - \delta_{20} = 0,004 + 6,25 \cdot 10^{-4} = 4,625 \cdot 10^{-4}$$

Řešením rovnic je:  $X_1 = M_{ab} = -11,001 \text{ kN}$   $X_2 = -M_{ab} = 18,491 \text{ kNm}$

$$R_{ab} = R_{ab0} + R_{ab1} \cdot X_1 + R_{ab2} \cdot X_2 = 0 + \frac{(-11,001)}{-4,8} + \frac{(18,491)}{4,8} = 6,144 \text{ kN}$$

Řešení, viz obr. 3.21(i), 3.21(j)

Zadání a řešení příkladu 3.8, obr. 3.21, str. 80

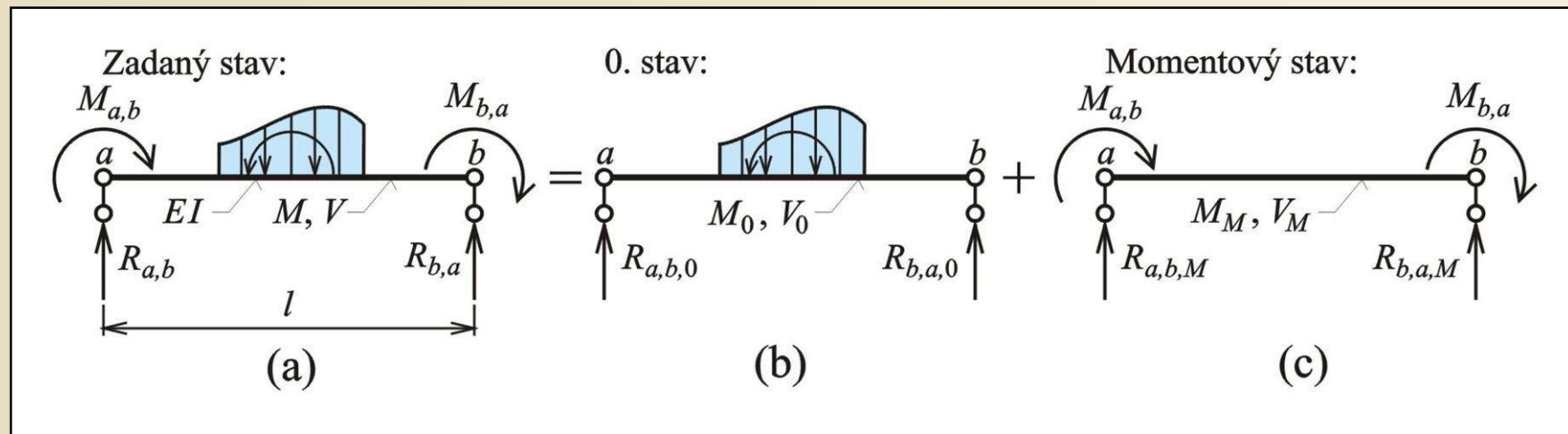


# Tabulka 3.2

Vzorce pro koncové momenty  
vetknutí nosníku se stálým  
průřezem

$I = \text{konst.}$ 				
	$-\frac{3}{16} Pl$	$+\frac{3}{16} Pl$	$-\frac{1}{8} Pl$	$+\frac{1}{8} Pl$
	$-\frac{P}{2l^2} ab(l+b)$	$+\frac{P}{2l^2} ab(l+a)$	$-\frac{P}{l^2} ab^2$	$+\frac{P}{l^2} a^2b$
	$-\frac{3Pa(l-a)}{2l}$	$+\frac{3Pa(l-a)}{2l}$	$-\frac{Pa(l-a)}{l}$	$+\frac{Pa(l-a)}{l}$
	$-\frac{1}{8} ql^2$	$+\frac{1}{8} ql^2$	$-\frac{1}{12} ql^2$	$+\frac{1}{12} ql^2$
	$-\frac{q}{8l^2} a^2(l+b)^2$	$+\frac{q}{8l^2} a^2(2l^2-a^2)$	$-\frac{q}{12l^2} a^2(l^2+2bl+3b^2)$	$+\frac{q}{12l^2} a^3(l+3b)$
	$-\frac{q}{8l^2} b^2(2l^2-b^2)$	$+\frac{q}{8l^2} b^2(l+a)^2$	$-\frac{q}{12l^2} b^3(l+3a)$	$+\frac{q}{12l^2} b^2(l^2+2al+3a^2)$
	$-\frac{1}{15} ql^2$	$+\frac{7}{120} ql^2$	$-\frac{1}{20} ql^2$	$+\frac{1}{30} ql^2$
	$-\frac{7}{120} ql^2$	$+\frac{1}{15} ql^2$	$-\frac{1}{30} ql^2$	$+\frac{1}{20} ql^2$
	$-\frac{q}{8l} l^3 - 2a^2l + a^3$	$+\frac{q}{8l} l^3 - 2a^2l + a^3$	$-\frac{q}{12l} l^3 - 2a^2l + a^3$	$+\frac{q}{12l} l^3 - 2a^2l + a^3$
	$-\frac{M}{2l^2} l^2 - 3b^2$	$-\frac{M}{2l^2} l^2 - 3a^2$	$-\frac{M}{l^2} b(2l-3b)$	$-\frac{M}{l^2} a(2l-3a)$
oteplení $\Delta t_1 = \text{konst.}$ $\alpha, h$	$-\frac{3EI\alpha_1\Delta t_1}{2h}$	$+\frac{3EI\alpha_1\Delta t_1}{2h}$	$-\frac{EI\alpha_1\Delta t_1}{h}$	$+\frac{EI\alpha_1\Delta t_1}{h}$

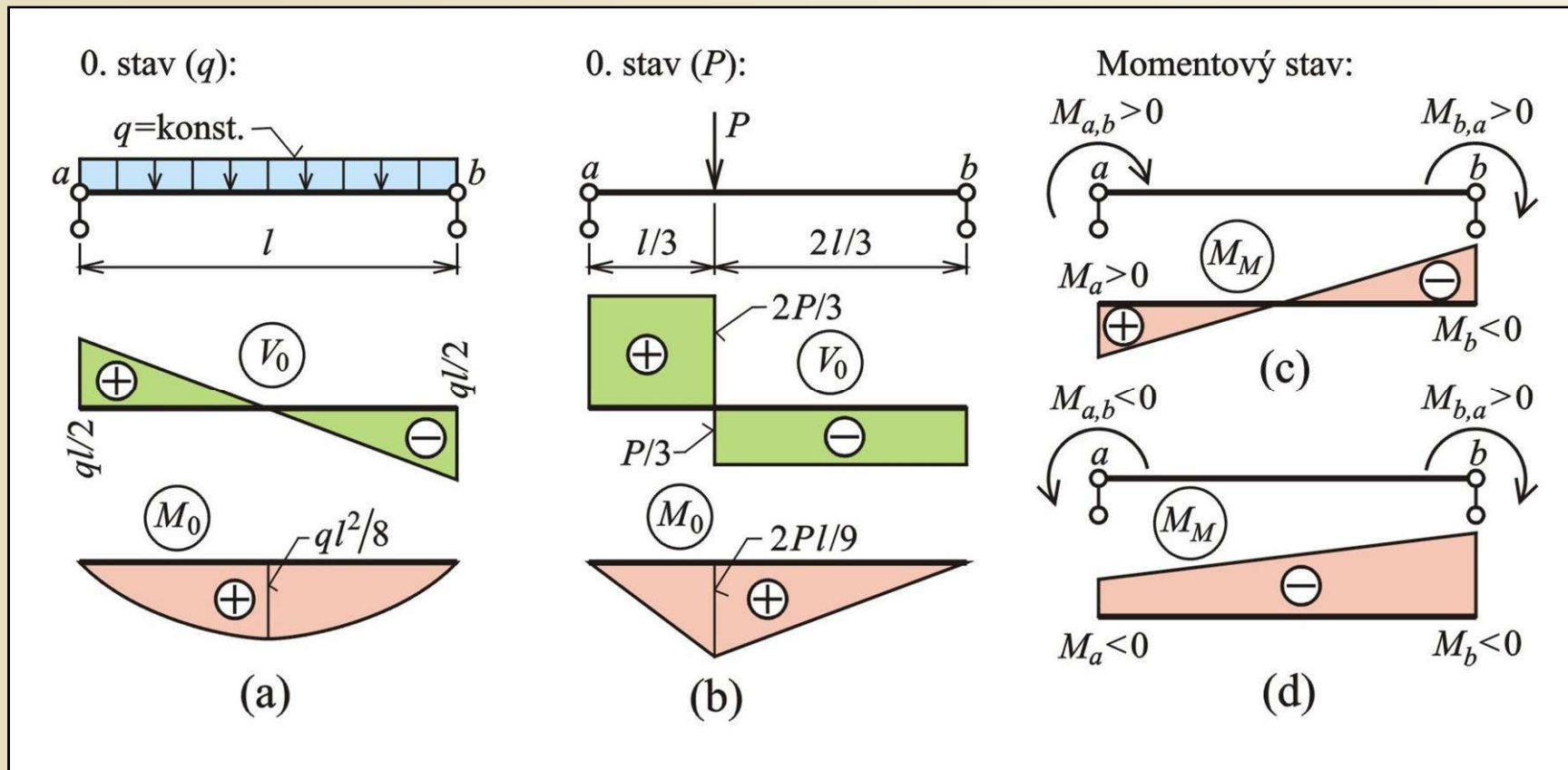
# Prostý nosník jako prvek staticky neurčité konstrukce



Prostý nosník jako prvek a jeho rozklad na dílčí stavy

Obr. 3.4. / str. 61

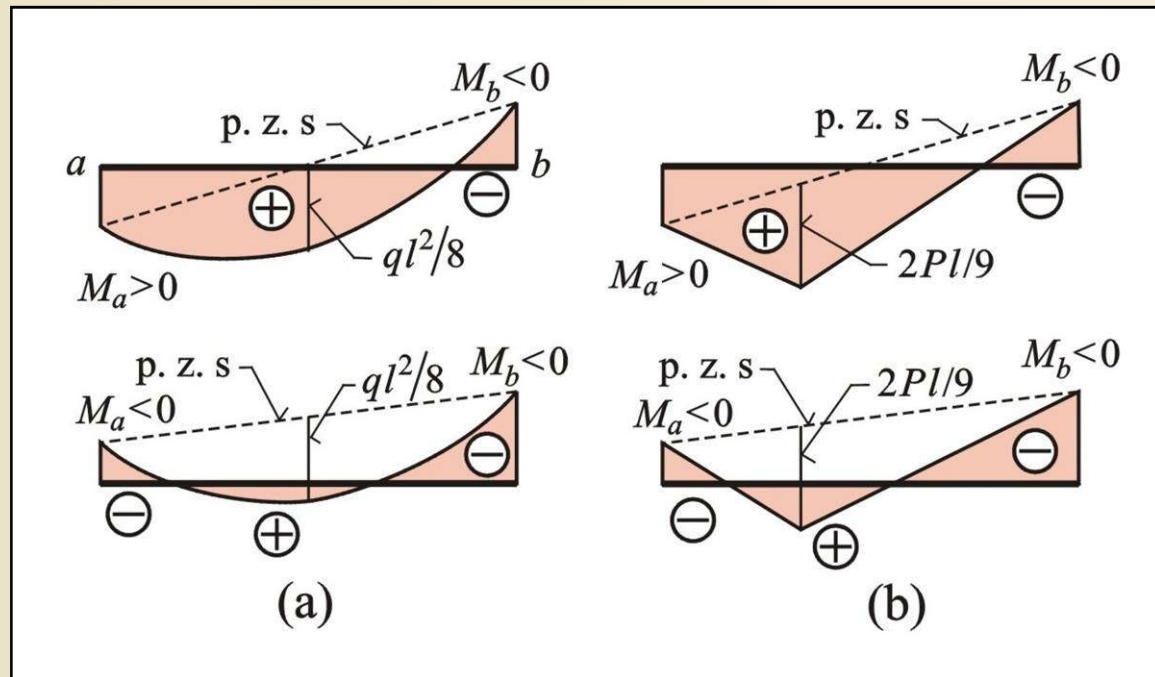
# Prostý nosník jako prvek staticky neurčité konstrukce, průběhy složek vnitřních sil



Průběhy vnitřních sil v 0. stavu a v momentovém stavu

Obr. 3.5. / str. 62

# Prostý nosník jako prvek staticky neurčité konstrukce, superpozice průběhu ohybového momentu



Superpozice průběhů  $M$  s přemístěnou základní stranou

Obr. 3.6. / str. 63

# Jednoduchý staticky neurčitý nosník v krutové úloze

Stupeň statické neurčitosti :

$$n_s = \nu - n_v = 2 - 1 = 1$$

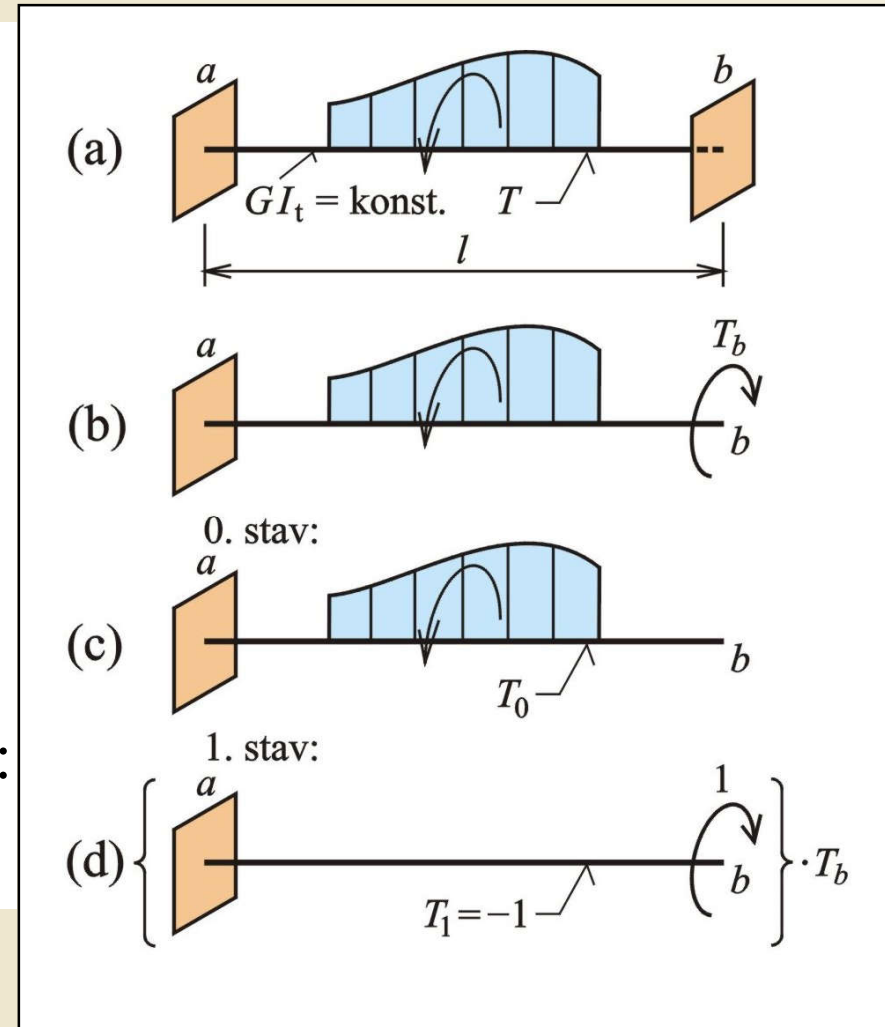
Deformační podmínka

a) pro silové zatížení :

$$\delta_{11} \cdot X_1 + \delta_{10} = 0$$

b) pro zatížení popuštěním podpor :

$$\delta_{11} \cdot X_1 + \delta_{10} = d_1$$



Silová metoda v krutové úloze

Obr. 3.24. / str. 85

# Výpočet deformace staticky neurčitého nosníku

## Silový zatěžovací stav

### Redukční věta:

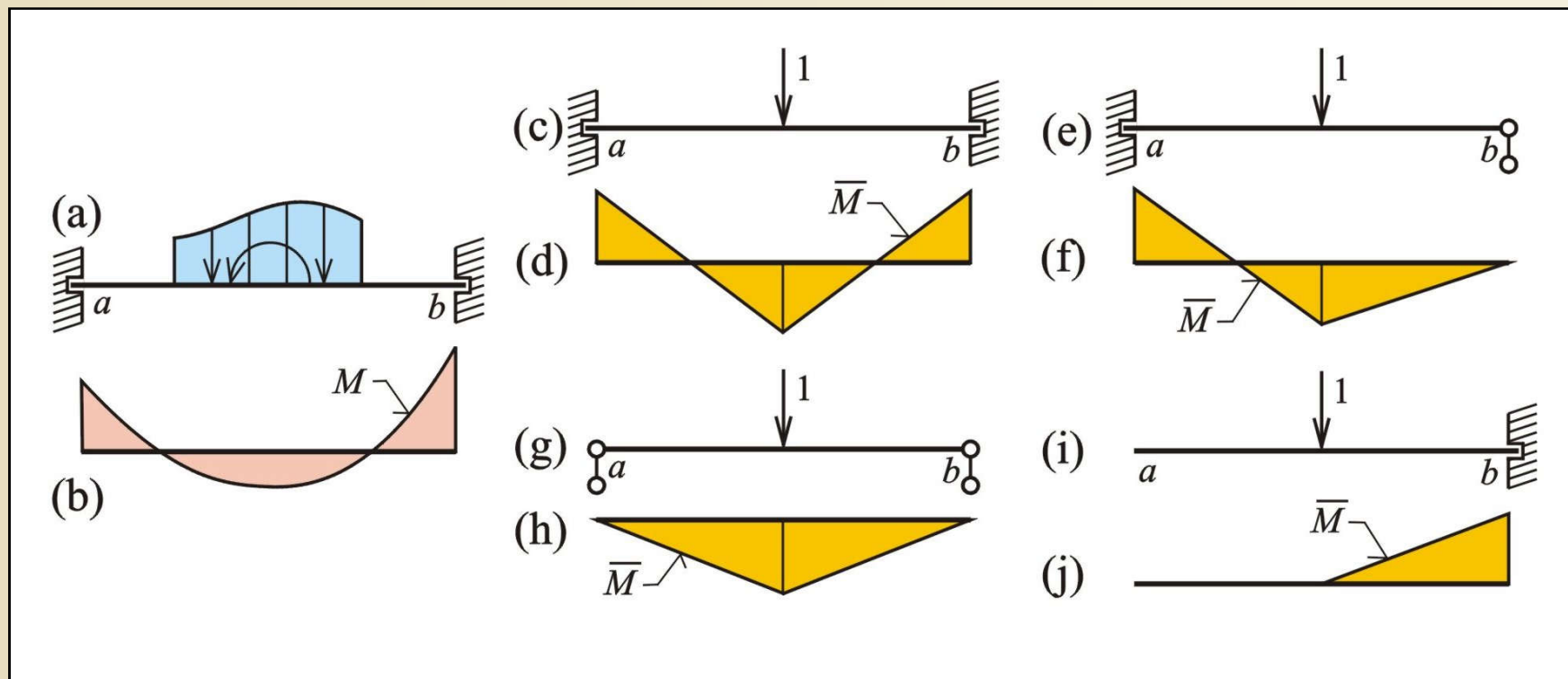
Jednotkový virtuální stav, sloužící k výpočtu deformace, staticky neurčitého nosníku ( $n_s$ ) může být vytvořen:

- na původním staticky neurčitém nosníku,
- na staticky neurčitém nosníku s  $n_{sj} < n_s$ , (odebráno méně než  $n_s$  vazeb),
- na staticky určitém nosníku (odebráno  $n_s$  vazeb).

Redukční větu lze použít pro výpočet deformace libovolné staticky neurčité konstrukce při silovém zatížení.

# Výpočet deformace - silový zatěžovací stav

Příklady volby virtuálního zatěžovacího stavu pro výpočet posunutí středu oboustranně vetknutého nosníku.



Příklady aplikace redukční věty

Obr. 3.26. / str. 89



## Zdůvodnění redukční věty

Na libovolné staticky neurčitě konstrukci lze odstranit přebytečné vazby a nahradit jejich účinek silami nebo momenty.

Na stejné, tj. staticky určité konstrukci, lze pak určit virtuální stav konstrukce pro výpočet deformace při využití principu virtuálních sil.

Pokud se virtuální stav konstrukce určí na staticky neurčitě konstrukci, pak jej lze při využití principu superpozice považovat za výsledný stav na staticky určité konstrukci v řadě dílčích zatěžovacích stavů odpovídajících stupni statické neurčitosti, kdy nahrazujeme odstraněné vazby jejich účinkem.

Účinek virtuálních sil a momentů nahrazujících vazby je nulový, neboť umožňují vypočítat v místě vazby nulovou deformaci odpovídající nahrazené vazbě.

# Výpočet deformace-silový zatěž. stav-příklad 3.12

Vypočtete průhyb nosníku v bodě s.

Nosník je na obr. 3.27.

Průběh M vypočten s využitím tabulky 3.2, viz. obr. 3.27(b).

Virtuální jednotkový stav zvolen na obr. 3.27 (c).

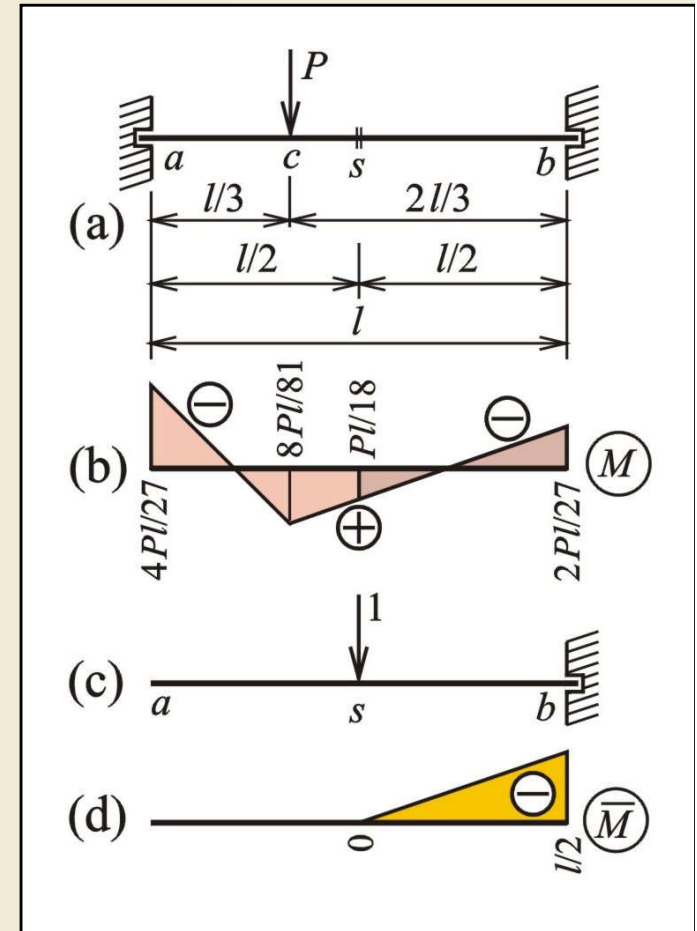
$$w_s = \int_0^l \frac{M \cdot \bar{M}}{E \cdot I} dx = \frac{1}{E \cdot I} \int_0^l M \cdot \bar{M} \cdot dx = \frac{5 \cdot Pl^3}{1296 \cdot E \cdot I}$$

Integrál s využitím obr. 3.12 (b) a (d) lze řešit :

a) analyticky

b) dle Vereščaginova pravidla

c) dle tabulky 2.2



Zadání a řešení příkladu 3.12

Obr. 3.27. / str. 89

# Výpočet deformace-silový zatěž. stav-příklad 3.12

Výpočet s využitím Vereščajinova pravidla:

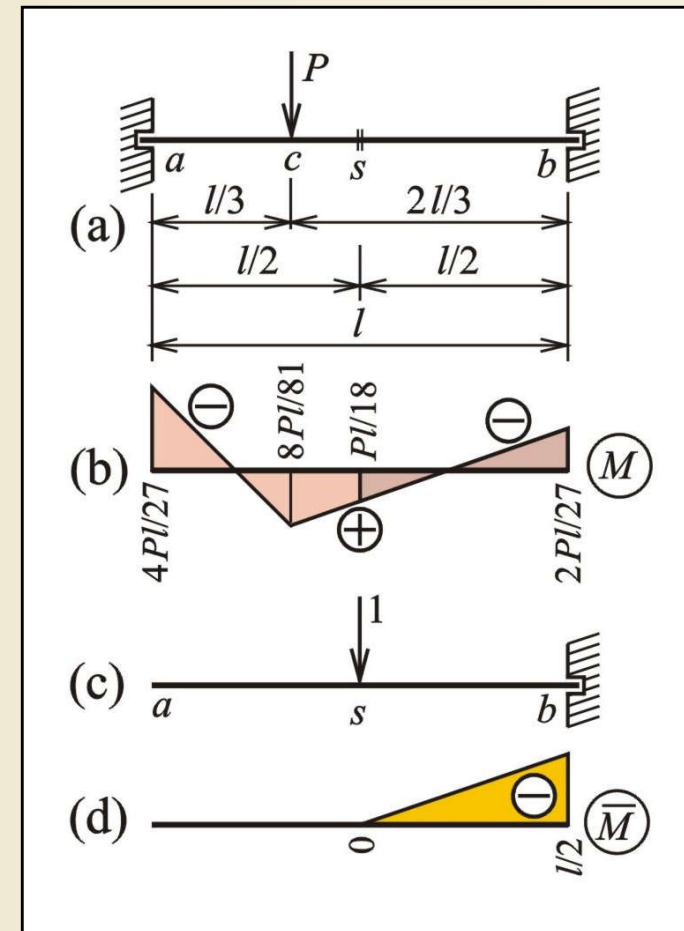
$$w_s = \int_0^l \frac{M \cdot \bar{M}}{E \cdot I} dx = \frac{1}{E \cdot I} \int_0^l M \cdot \bar{M} \cdot dx$$

$$w_s = \frac{1}{E \cdot I} (A_{M1} \cdot \bar{M}_{T1} + A_{M2} \cdot \bar{M}_{T2}) =$$

$$w_s = \frac{1}{E \cdot I} \left( -\frac{Pl}{18} \cdot \frac{l}{2} \cdot \frac{l}{4} + \frac{7Pl}{54} \cdot \frac{l}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{l}{2} \right)$$

$$w_s = \frac{1}{E \cdot I} \left( -\frac{Pl^3}{18 \cdot 8} + \frac{7Pl^3}{3 \cdot 18 \cdot 12} \right)$$

$$w_s = \frac{1}{E \cdot I} \frac{(-9 + 14) \cdot Pl^3}{3 \cdot 18 \cdot 12} = \frac{5Pl^3}{1296 \cdot EI}$$



Zadání a řešení příkladu 3.12

Obr. 3.27. / str. 89

# Výpočet deformace – zatížení změnou teploty

Výsledná deformace je dána superpozicí:

- a) pružné deformace  $w_{pr}$
- b) deformace vyvolané změnou teploty  $w_t$  na základní staticky určité konstrukci

$$W = W_{pr} + W_t$$

U jednoduchého staticky neurčitého nosníku konstantního průřezu jsou při konstantní změně teploty po délce nosníku:

- a) v osově úloze ( $\Delta t_0$ ),
- b) v příčné úloze při oboustranném vetknutí ( $\Delta t_1$ )
- c) v krutové úloze (změna teploty se neprojevuje)

deformace nulové, superponované deformace se ad a) a b) vyruší.

Tento poznatek nelze zobecňovat. Např. u jednostranně vetknutého nosníku již tomu tak není.

# Výpočet deformace – zatížení změnou teploty

## Příklad 3.13

Nosník dle 3.28 je zatížen změnou teploty.  
Vypočtete průhyb v bodě c.

Řešení:  $EI = 4494 \text{ kNm}^2$

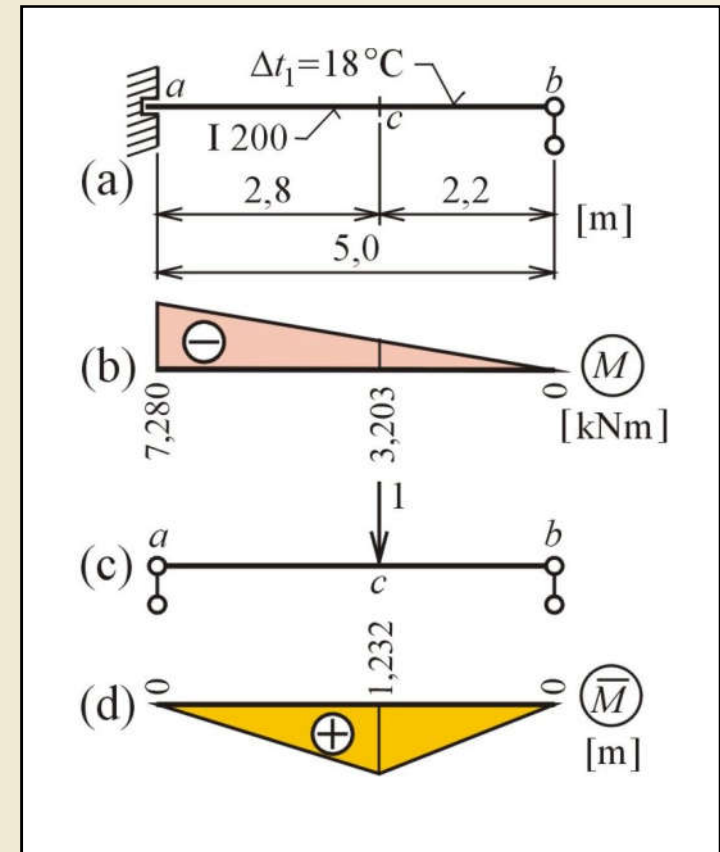
$$w_c = w_{pr} + w_t$$

$$w_{pr} = \frac{1}{EI} \cdot \left( \frac{1,232 \cdot 2,8}{2} \cdot 4,562 + \frac{1,232 \cdot 2,135 \cdot 2,2}{2} \right) / 4494$$

$$w_{pr} = 2,395 \cdot 10^{-3} \text{ m}$$

$$w_t = \int_0^l \frac{\alpha_t \cdot \Delta t_1 \bar{M}}{h} dx = \frac{1,2 \cdot 10^{-5} \cdot 18 \cdot 5 \cdot 1,232}{0,2 \cdot 2} = 3,326 \cdot 10^{-3} \text{ m}$$

$$w_c = -2,395 \cdot 10^{-3} + 3,326 \cdot 10^{-3} = 0,931 \cdot 10^{-3} \text{ m}$$



Zadání a řešení příkladu 3.13

Obr. 3.28. / str. 90

## Výpočet deformace – popuštění podpor

Výsledná deformace je dána superpozicí:

a) pružné deformace  $w_{pr}$

b) Přemístěním základního staticky určitého nosníku (konstrukce) jako tuhého tělesa.

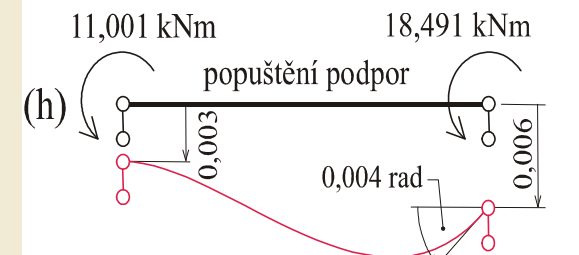
$$w = w_{pr} + w_p$$

## Výpočet deformace – popuštění podpor, příklad 3.14

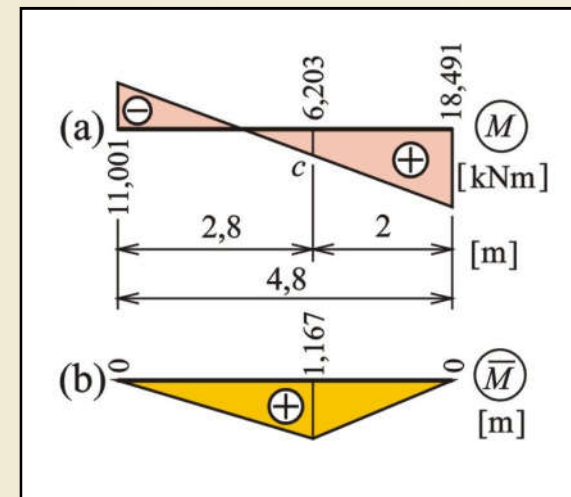
Vypočtete svislý průhyb v bodě c oboustranně vetknutého nosníku z př. 3.8 se zadaným popuštěním podpor dle obr. 3.21 (h), je-li již znám průběh ohybového momentu dle obr. 3.29 (a).

Pro výpočet posunutí nosníku jako tuhého tělesa i pro výpočet pružné deformace umístíme do bodu c svislou virtuální sílu o velikosti 1.

Průběh virtuálního momentu je na obr. 3.29 (b).



Příklad 3.8, obr. 3.21



Zadání příkladu 3.14

Obr. 3.29. / str. 91

## Výpočet deformace – popuštění podpor, příklad 3.14

Výpočet posunutí  $w_p$  jako tuhého tělesa lze vypočítat při použití principu virtuálních prací

$$w_p = -\sum (\bar{R} \cdot \delta) = -(\bar{R}_{a1} \cdot w_a + \bar{R}_{b1} \cdot w_b) =$$

$$- \left( -\frac{2}{4,8} \cdot 0,003 - \frac{2,8}{4,8} \cdot 0,006 \right)$$

$$w_p = 4,75 \cdot 10^{-3} \text{ m}$$

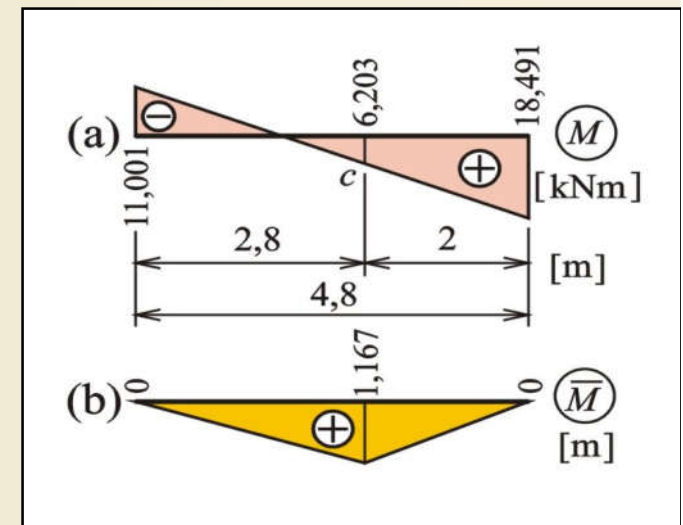
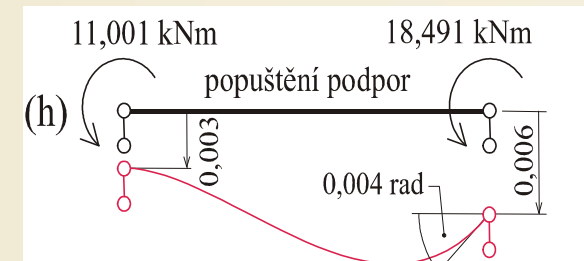
Pružné posunutí  $w_{pr}$  se vypočte známými postupy (viz učebnice):

$$w_{pr} = 2,844 \cdot 10^{-3} \text{ m}$$

Celkové posunutí je dáno součtem:

$$w_c = w_p + w_{pr}$$

$$w_c = 4,75 \cdot 10^{-3} + 2,844 \cdot 10^{-3} = 7,594 \cdot 10^{-3} \text{ m}$$



Zadání příkladu 3.14

Obr. 3.29. / str. 91