

# Téma 2

## Deformace staticky určitých prutových konstrukcí - pokračování

- Deformace nosníku v osové úloze
- Deformace rovinně lomeného nosníku v rovinné úloze
- Deformace rovinného kloubového příhradového nosníku
- Deformace přímého nosníku v krutové úloze
- Deformace rovinně zakřiveného nosníku v rovinné úloze

# Deformační zatížení, způsobené oteplením

Silový princip virtuálních prací:

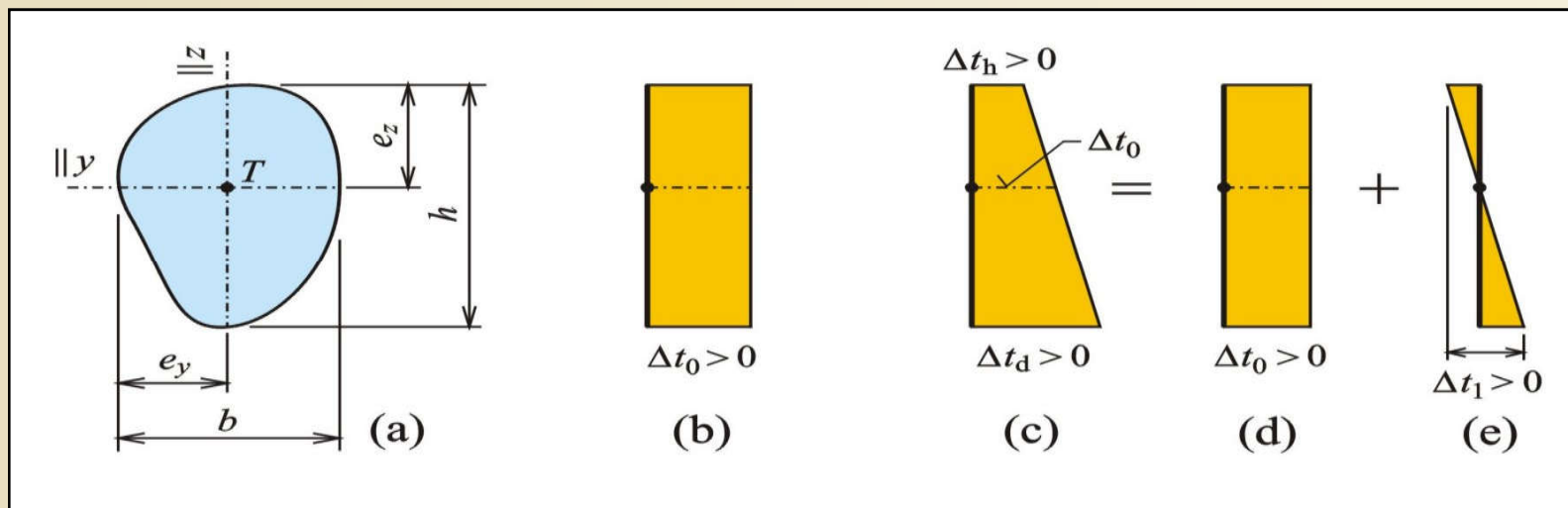
$$\delta = \int_0^l \left\{ \frac{NN}{EA} + \frac{M_y M_y}{EI_y} + \frac{M_z M_z}{EI_z} + \frac{V_z V_z}{GA_z^*} + \frac{V_y V_y}{GA_y^*} + \frac{TT}{GI_t} \right\} dx + \int_0^l \left\{ N \alpha_t \Delta t_0 + M_y \alpha_t \frac{\Delta t_1}{h} + M_z \alpha_t \frac{\Delta t_2}{b} \right\} dx$$

$$\Delta t_0 = \Delta t_h + (\Delta t_d - \Delta t_h) \frac{e_z}{h}$$

$$du = \alpha_t \cdot \Delta t_0 \cdot dx$$

$$\Delta t_1 = \Delta t_d - \Delta t_h$$

$$d\bar{\varphi}_y = \alpha_t \cdot \Delta t_1 \cdot \frac{dx}{h}$$



Rovnoměrné oteplení a rozklad lineárně proměnného oteplení po výšce průřezu

Obr. 2.7. / str. 29

# Deformace nosníku v osově úloze

Silové zatížení

$$\delta = u_e = \frac{1}{E} \int_0^l \frac{N\bar{N}}{A} dx$$

Oteplení

$$\delta = u_e = \alpha_t \Delta t_0 \int_0^l \bar{N} dx = \alpha_t \Delta t_0 A_{\bar{N}}$$

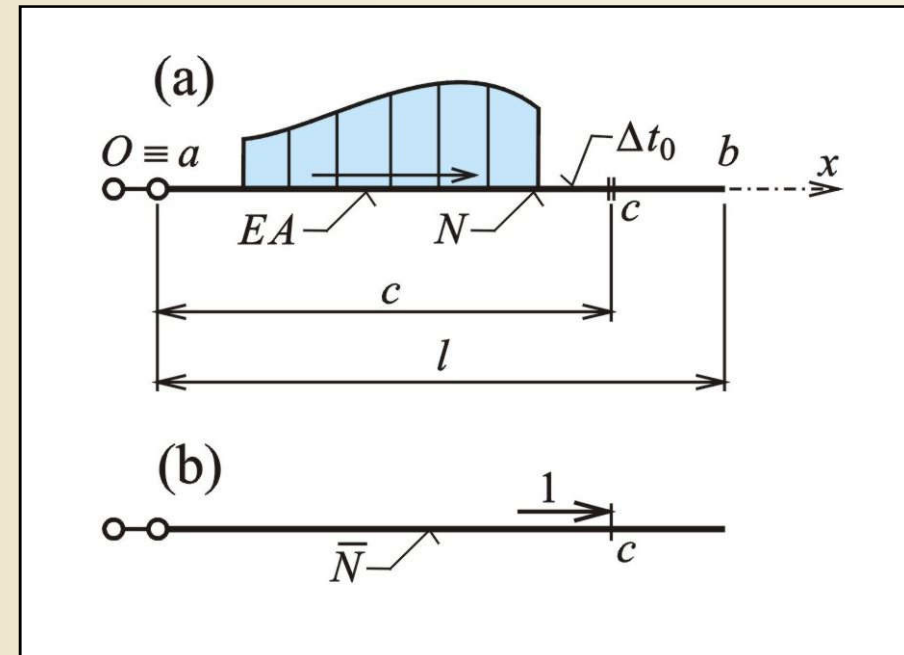
Stálý průřez

Proměnný průřez

Simpsonovo pravidlo

$$\delta = u_e = \frac{1}{EA} \int_0^l N\bar{N} dx = \frac{\pm A_N}{EA}$$

$$\int_0^l f(x) dx \approx [f_0 + 4(f_1 + f_3) + 2f_2 + f_4] \frac{d}{3}$$



Deformace nosníku v osově úloze

Obr. 2.11. / str. 33

## Příklad 2.1

Nutno určit pro silový zatěžovací stav i rovnoměrné ochlazení vodorovný posun  $u_c$

$$A = 64 \text{ mm}^2,$$

$$E = 2,1 \cdot 10^8 \text{ kPa}, \alpha_t = 1,2 \cdot 10^{-5} \text{ K}^{-1}$$

Silový zatěžovací stav:

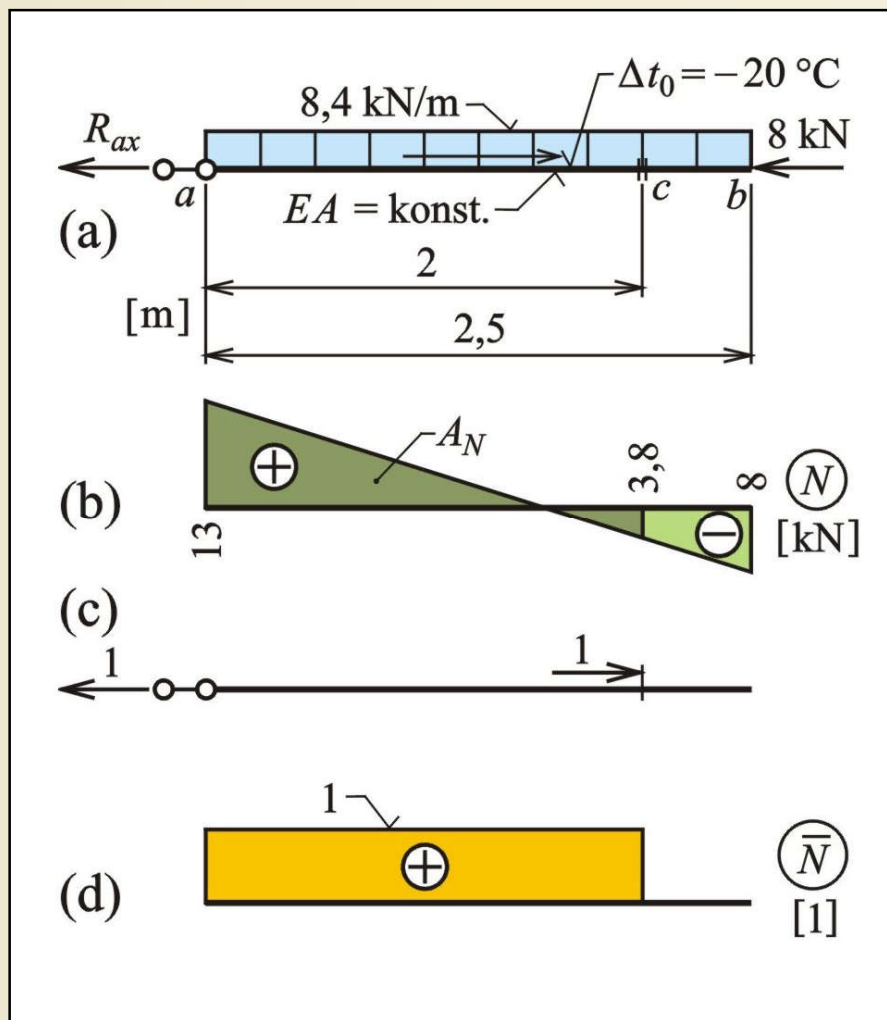
$$R_{ax} - 8,4 \cdot 2,5 + 8 = 0$$

$$R_{ax} = 13 \text{ kN}$$

$$N = 13 - 8,4 \cdot x$$

$$u_c = \int_0^l \frac{N\bar{N}}{EA} dx = \frac{A_N}{EA} =$$

$$= \frac{9,2}{2,1 \cdot 10^8 \cdot 6,4 \cdot 10^{-5}} = 0,000685 \text{ m}$$



Zadání a řešení příkladu 2.1

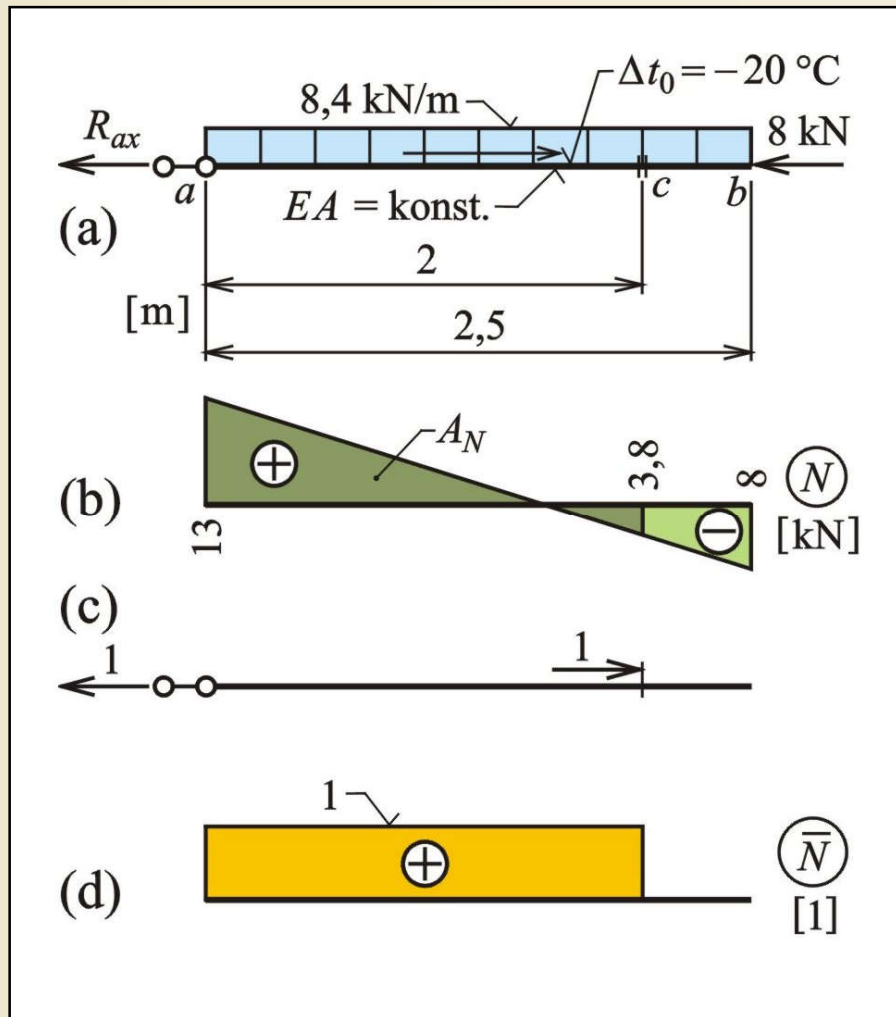
Obr. 2.12. / str. 34

# Příklad 2.1

Posun způsobený ochlazením:

$$u_c = \int_0^l \bar{N} \alpha_t \Delta t_0 dx = \alpha_t \Delta t_0 \int_0^l \bar{N} dx = \alpha_t \Delta t_0 A_{\bar{N}}$$

$$u_c = 1,2 \cdot 10^{-5} \cdot (-20) \cdot 2 = -0,00048 \text{ m} = -0,48 \text{ mm}$$



Zadání a řešení příkladu 2.1

Obr. 2.12. / str. 34

# Deformace přímého nosníku v příčné úloze

Silové zatížení

$$\delta = \frac{1}{E} \int_0^l \frac{M\bar{M}}{I} dx + \frac{1}{G} \int_0^l \frac{V\bar{V}}{A^*} dx$$

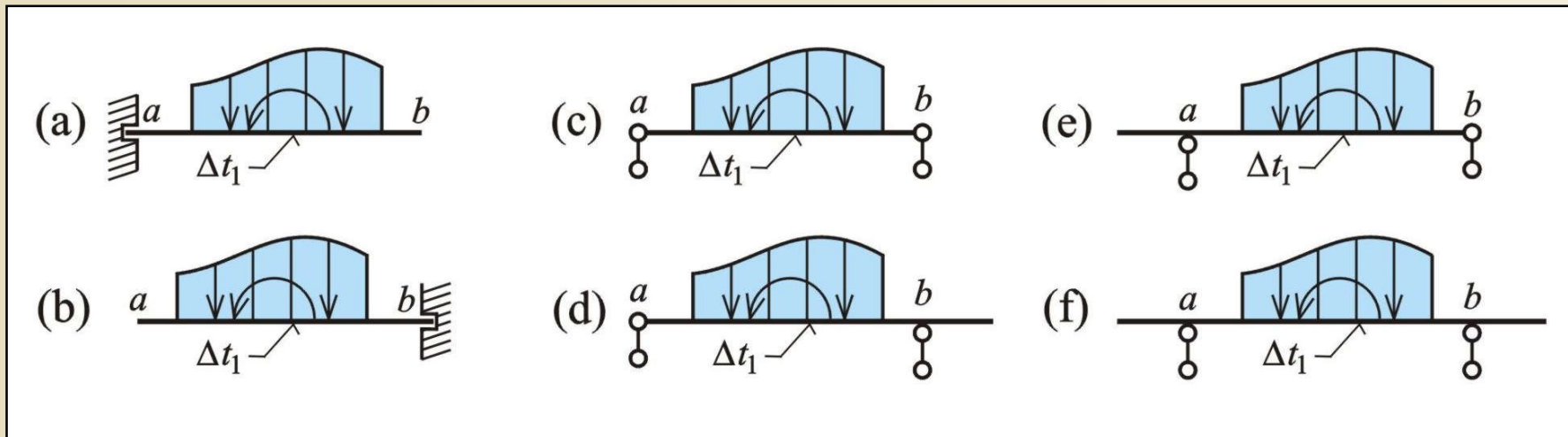
Stálý průřez

$$\delta = \frac{1}{EI} \int_0^l M\bar{M} dx + \frac{1}{GA^*} \int_0^l V\bar{V} dx$$

Oteplení

$$\delta = \alpha_t \Delta t_1 \int_0^l \frac{\bar{M}}{h} dx$$

Redukovaná plocha  $A^* = \frac{A}{\kappa}$   $\kappa = 1,2$  pro obdélník  
 $\kappa = 35/27$  pro kruh



Druhy přímých nosníků v příčné úloze

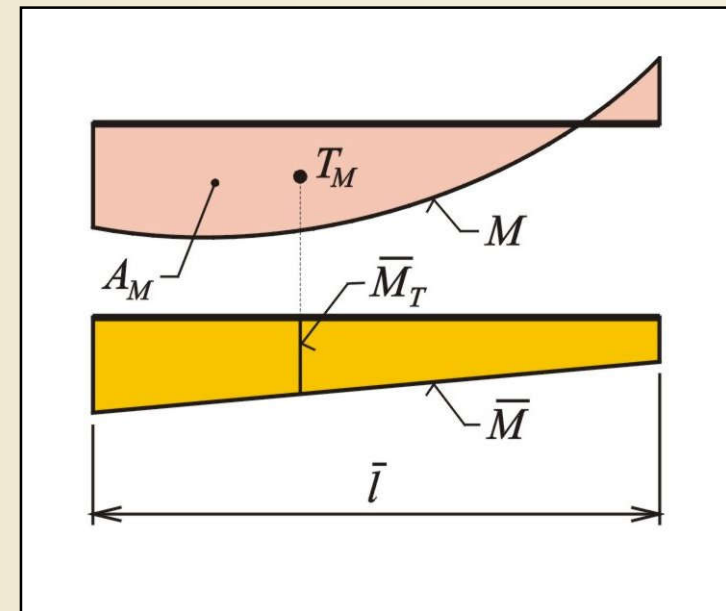
Obr. 2.14. / str. 36

# Vereščaginovo pravidlo

## Pomůcka pro výpočet integrálu

Integrál ze součinu dvou momentových funkcí, z nichž první  $M$  je hladká a spojitá a druhá  $M$  je lineární, je roven součinu plochy  $A_M$  prvního momentového obrazce a pořadnice  $\bar{M}_T$  druhého momentové obrazce v místě těžiště  $T_M$  prvního momentového obrazce.

$$\int_0^l M \bar{M} dx = A_M \cdot \bar{M}_T$$

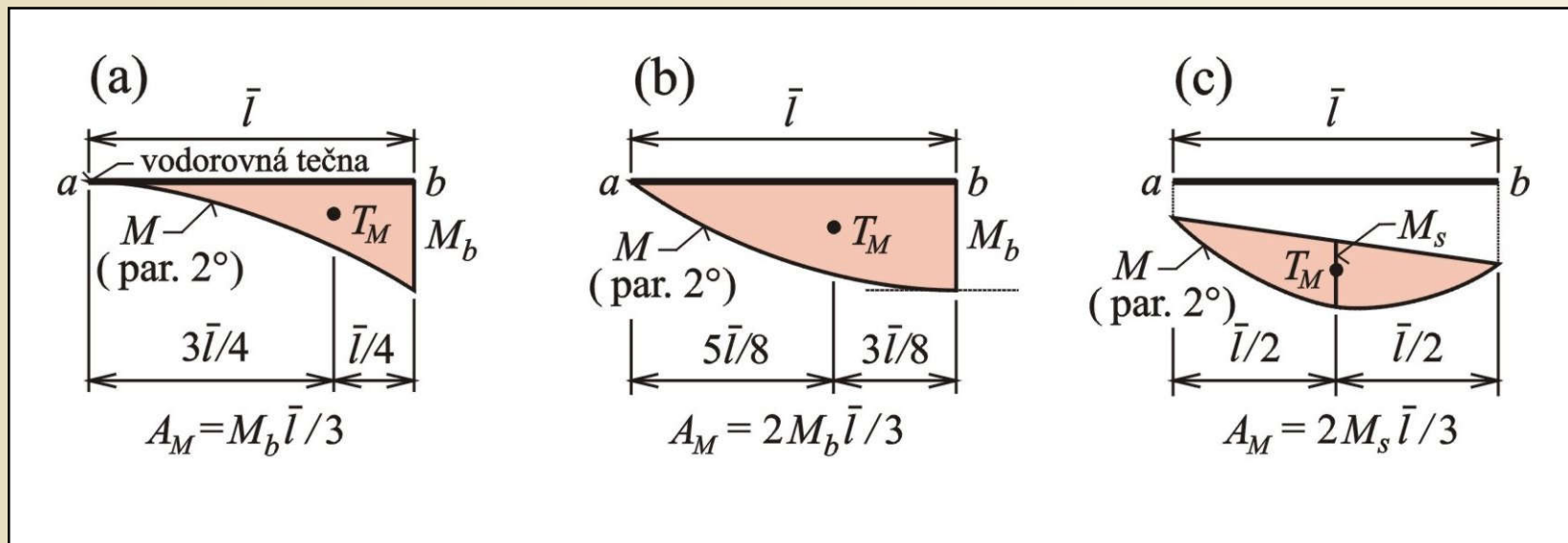


Vereščaginovo pravidlo

Obr. 2.15. / str. 37



# Vereščaginovo pravidlo



Poloha těžiště parabolické části momentových  
obrazců pro použití Vereščaginova pravidla  
Obr. 2.16. / str. 38

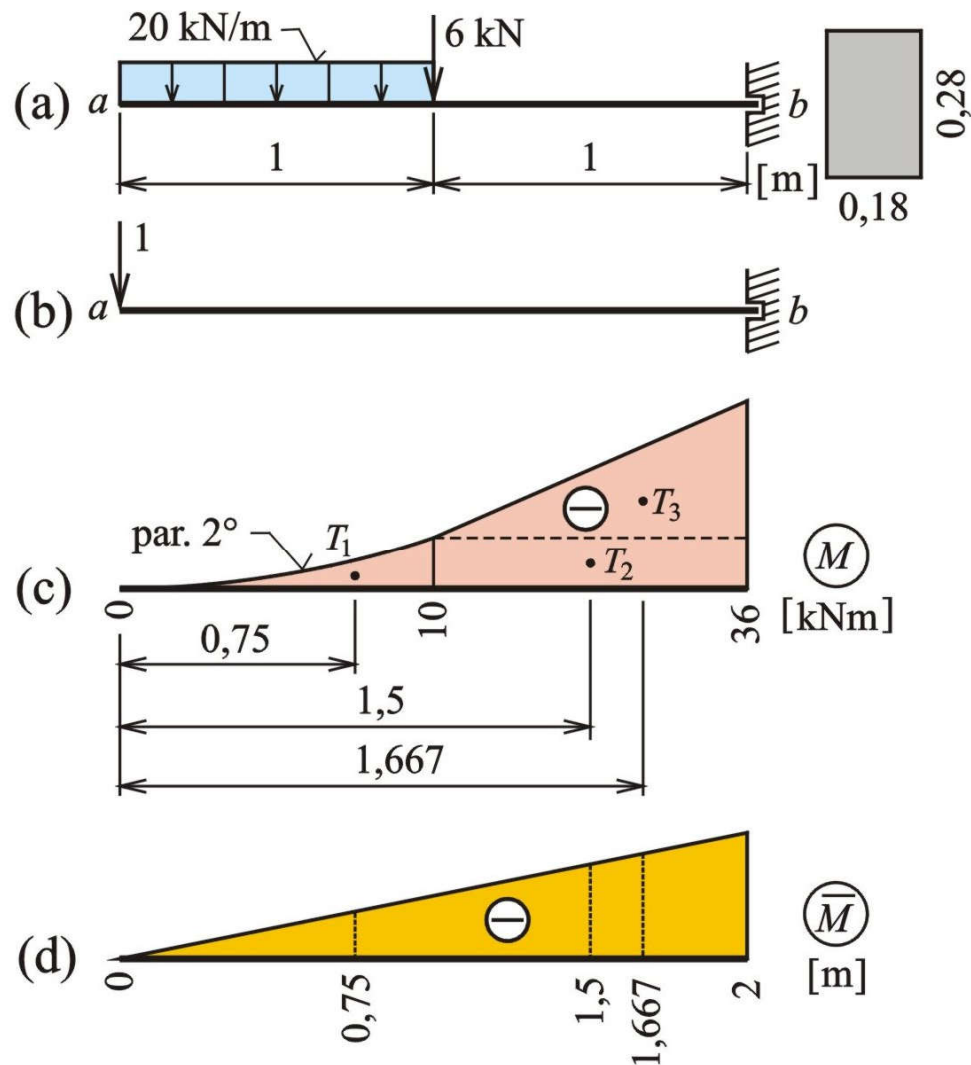
## Příklad 2.3

S využitím Vereščaginova pravidla určete svislý průhyb  $\delta = w_a$ .

Železobetonová konzola

$$E = 2,2 \cdot 10^7 \text{ kPa}$$

Možno zanedbat práci posouvajících sil.



Zadání a řešení příkladu 2.3

Obr. 2.17. / str. 38

## Příklad 2.3

$$EI = E \frac{bh^3}{12} = 2,2 \cdot 10^7 \cdot 0,18 \cdot \frac{0,28^3}{12} =$$

$$= 7,24416 \cdot 10^3 \text{ kNm}^2$$

$$w_a = \int_0^2 \frac{M\bar{M}}{EI} dx = \frac{1}{EI} (S_1 + S_2 + S_3) =$$

$$= \frac{2,5 + 15 + 21,667}{7,24416 \cdot 10^3} = 0,005407 \text{ m}$$

$$S_1 = \int_0^1 M\bar{M} dx = A_{M1} \bar{M}_1 =$$

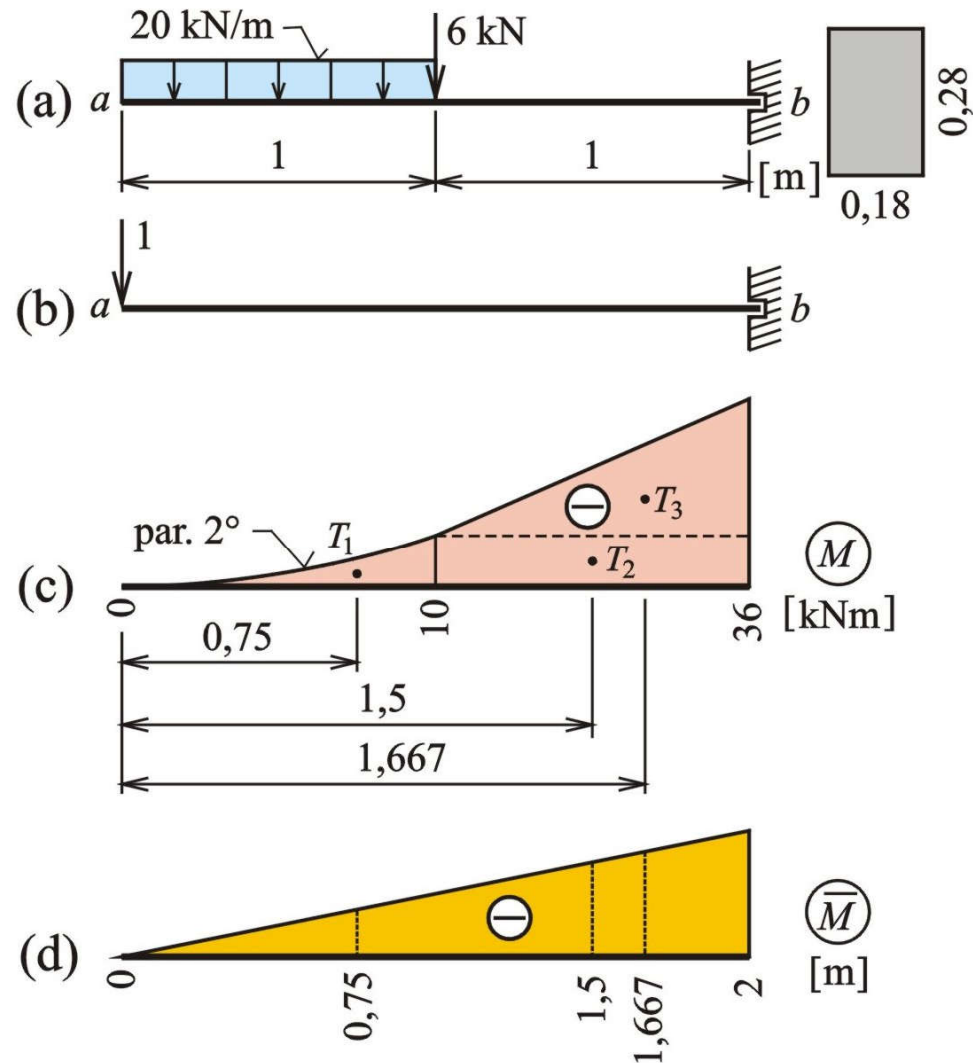
$$= -3,333 \cdot (-0,75) = 2,5 \text{ kNm}^3$$

$$S_2 = \int_1^2 M\bar{M} dx = A_{M2} \bar{M}_2 =$$

$$= -10 \cdot (-1,5) = 15 \text{ kNm}^3$$

$$S_3 = \int_0^1 M\bar{M} dx = A_{M3} \bar{M}_3 =$$

$$= -13 \cdot (-1,667) = 21,667 \text{ kNm}^3$$



Zadání a řešení příkladu 2.3

Obr. 2.17. / str. 38

## Příklad 2.4

Výpočet příkladu 2.3 s uvažováním práce posouvajících sil.

$$w'_c = \int_0^2 \frac{V\bar{V}}{GA^*} dx = \frac{1}{GA^*} (S_1 + S_2)$$

$$A^* = \frac{bh}{\kappa} = \frac{0,18 \cdot 0,28}{1,2} = 0,042 \text{ m}^2$$

$$GA^* = 9,24 \cdot 10^6 \cdot 0,042 = 3,8808 \cdot 10^5 \text{ kN}$$

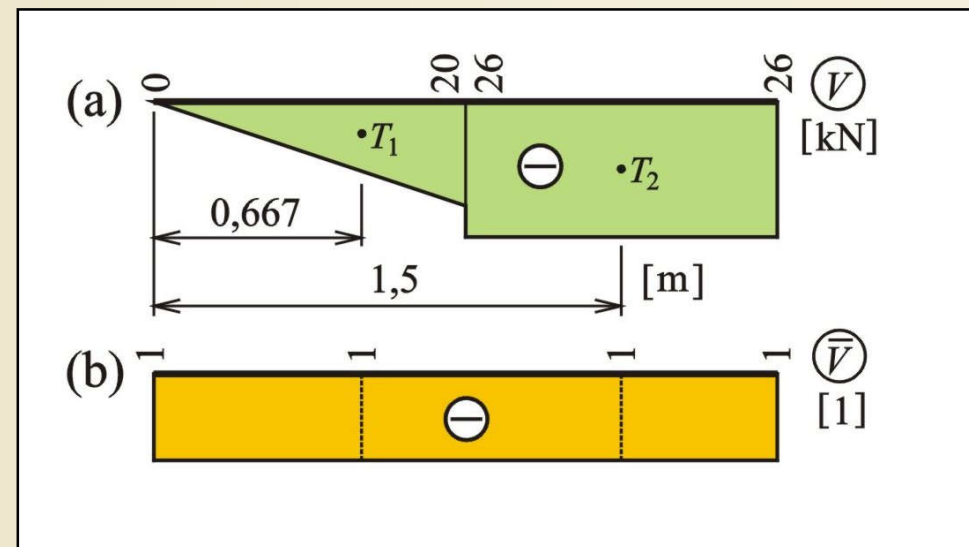
$$S_1 = A_{V,1} \bar{V} = -\frac{20 \cdot 1}{2} \cdot (-1) = 10 \text{ kNm}$$

$$S_2 = A_{V,2} \bar{V} = -26 \cdot 1 \cdot (-1) = 26 \text{ kNm}$$

$$w'_c = \frac{10 + 26}{3,8808 \cdot 10^5} = 9,276 \cdot 10^{-5} \text{ m} = 0,093 \text{ mm}$$

$$\frac{w'_c}{w} \cdot 100 = \frac{0,093}{5,407} \cdot 100 = 1,7 \%$$

Železobetonová konzola  
 $G = 9,24 \cdot 10^6 \text{ kPa}$



Reálné a virtuální posouvající síly konzoly z příkladu 2.3

Obr. 2.18. / str. 39

# Tabulka 2.2

Vzorce pro výpočet integrálů

$$\int_0^l M \bar{M} dx$$

	$\bar{M}$	$\bar{M}$	$\bar{M}_a$	0	0	$\bar{M}_b$	$\bar{M}_a$	$\bar{M}_b$
	$M \bar{M} l$	$\frac{1}{2} M \bar{M}_a l$	$\frac{1}{2} M \bar{M}_b l$	$\frac{1}{2} M (\bar{M}_a + \bar{M}_b) l$				
	$\frac{1}{2} M_a \bar{M} l$	$\frac{1}{3} M_a \bar{M}_a l$	$\frac{1}{6} M_a \bar{M}_b l$	$\frac{1}{6} M_a (2\bar{M}_a + \bar{M}_b) l$				
	$\frac{1}{2} M_b \bar{M} l$	$\frac{1}{6} M_b \bar{M}_a l$	$\frac{1}{3} M_b \bar{M}_b l$	$\frac{1}{6} M_b (\bar{M}_a + 2\bar{M}_b) l$				
	$\frac{1}{2} (M_a + M_b) \bar{M} l$	$\frac{1}{6} (2M_a + M_b) \bar{M}_a l$	$\frac{1}{6} (M_a + 2M_b) \bar{M}_b l$	$\frac{1}{6} [(2M_a + M_b) \bar{M}_a + (M_a + 2M_b) \bar{M}_b] l$				
	$\frac{2}{3} M_s \bar{M} l$	$\frac{1}{3} M_s \bar{M}_a l$	$\frac{1}{3} M_s \bar{M}_b l$	$\frac{1}{3} M_s (\bar{M}_a + \bar{M}_b) l$				
	$\frac{1}{3} M_a \bar{M} l$	$\frac{1}{4} M_a \bar{M}_a l$	$\frac{1}{12} M_a \bar{M}_b l$	$\frac{1}{12} M_a (3\bar{M}_a + \bar{M}_b) l$				
	$\frac{1}{3} M_b \bar{M} l$	$\frac{1}{12} M_b \bar{M}_a l$	$\frac{1}{4} M_b \bar{M}_b l$	$\frac{1}{12} M_b (\bar{M}_a + 3\bar{M}_b) l$				
	$\frac{1}{6} (M_a + 4M_s + M_b) \bar{M} l$	$\frac{1}{6} (M_a + 2M_s) \bar{M}_a l$	$\frac{1}{6} (2M_s + M_b) \bar{M}_b l$	$\frac{1}{6} [(M_a + 2M_s) \bar{M}_a + (2M_s + M_b) \bar{M}_b] l$				

str. 41

# Tabulka 2.3

Lokální deformace konzoly a prostého nosníku stálého průřezu

str. 42

	$w_b > 0$		$w_c > 0$		$\phi_a > 0$		$\phi_b < 0$
	$\frac{Pl^3}{3EI}$		$\frac{Pl^3}{48EI}$	$\frac{Pl^2}{16EI}$	$\frac{Pl^2}{16EI}$	$\frac{Pl^2}{16EI}$	$-\frac{Pl^2}{16EI}$
	$\frac{Pa^2(3l-a)}{6EI}$		$\frac{Pa(3l^2-4a^2)}{48EI}$	$\frac{Pab(l+b)}{6EI}$	$\frac{Pab(l+a)}{6EI}$	$-\frac{Pab(l+a)}{6EI}$	
	$\frac{ql^4}{8EI}$		$\frac{5ql^4}{384EI}$	$\frac{ql^3}{24EI}$	$\frac{ql^3}{24EI}$	$-\frac{ql^3}{24EI}$	
	$\frac{ql^4}{30EI}$		$\frac{5ql^4}{768EI}$	$\frac{8ql^3}{360EI}$	$\frac{7ql^3}{360EI}$	$-\frac{7ql^3}{360EI}$	
	$\frac{11ql^4}{120EI}$		$\frac{Ml^2}{16EI}$	$\frac{Ml}{3EI}$	$\frac{Ml}{3EI}$	$-\frac{Ml}{6EI}$	

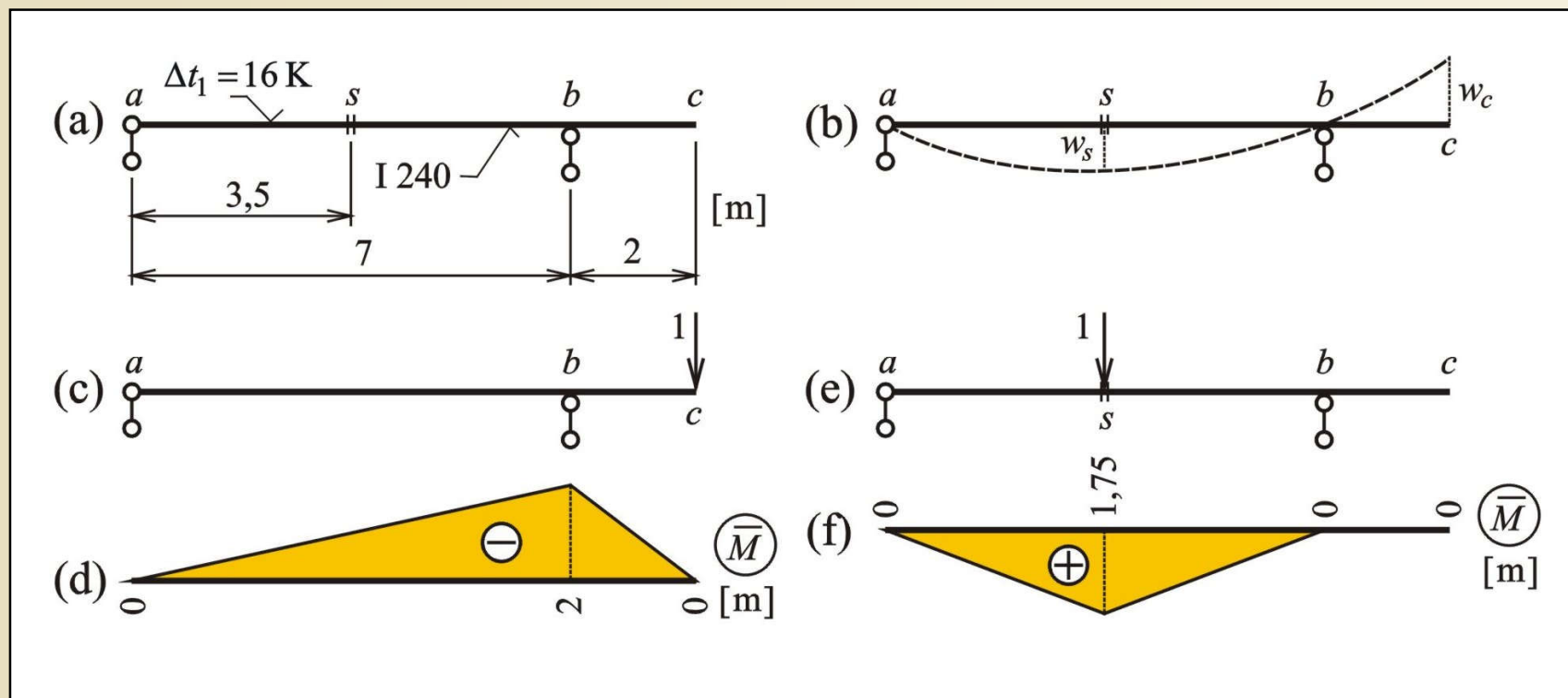
## Příklad 2.6

Lineární oteplení po výšce průřezu.

Nutno určit průhyb  $w_c$  a  $w_s$ .

Ocel  $\alpha_t = 1,2 \cdot 10^{-5} \text{ K}^{-1}$        $h = 0,24 \text{ m}$

$$\delta = \frac{\alpha_t \Delta t_1}{h} \int_0^l \bar{M} dx = \frac{\alpha_t \Delta t_1}{h} A_{\bar{M}}$$



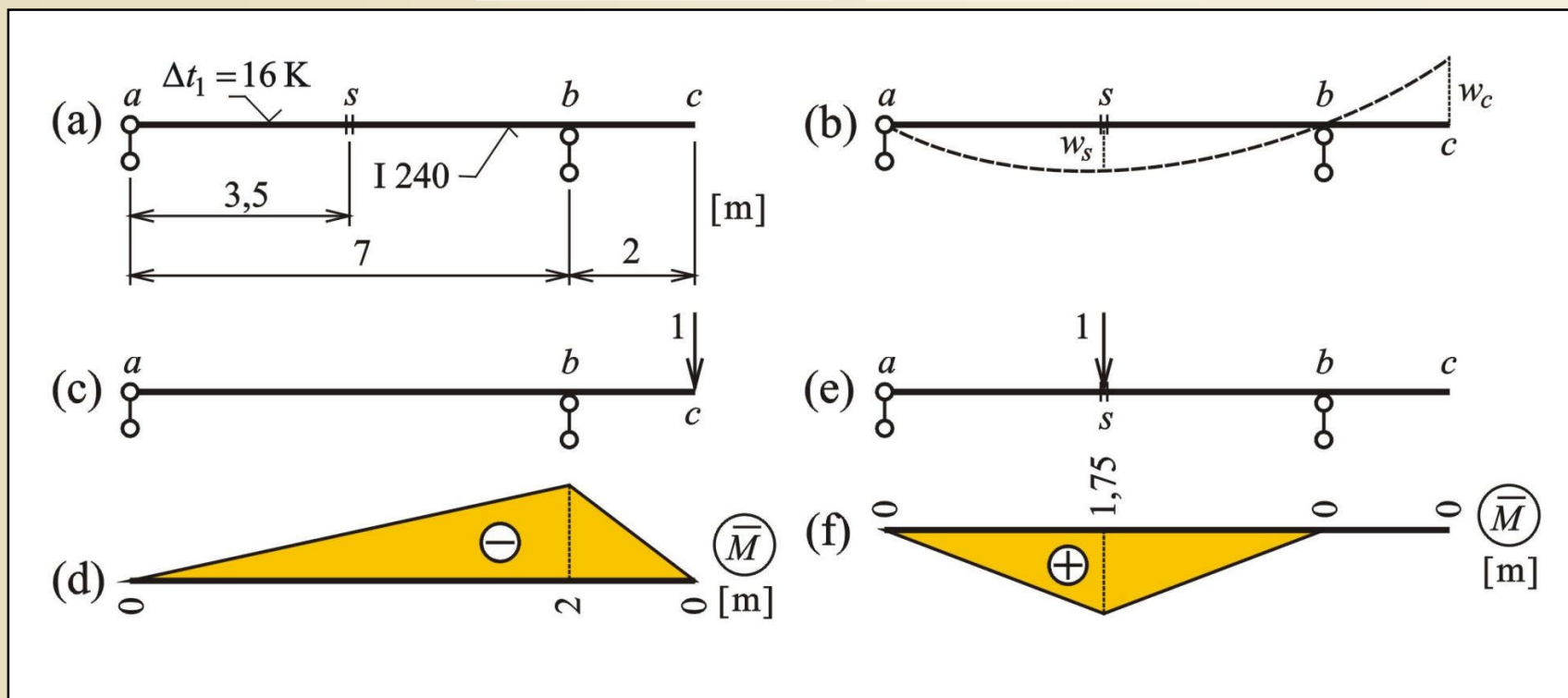
Zadání a řešení příkladu 2.6

Obr. 2.20. / str. 43

## Příklad 2.6

$$w_c = \int_0^9 \frac{\alpha_t \Delta t_1 \bar{M}}{h} dx = \frac{\alpha_t \Delta t_1}{h} \int_0^9 \bar{M} dx = \frac{\alpha_t \Delta t_1}{h} A_{\bar{M}c} \quad w_c = \frac{1,2 \cdot 10^{-5} \cdot 16 \cdot (-9)}{0,24} = -0,0072 \text{ m} = -7,2 \text{ mm}$$

$$A_{\bar{M}c} = -\frac{9 \cdot 2}{2} = -9 \quad w_s = \frac{\alpha_t \Delta t_1}{h} A_{\bar{M}s} \quad A_{\bar{M}s} = \frac{7 \cdot 1,75}{2} = 6,125 \quad w_s = \frac{1,2 \cdot 10^{-5} \cdot 16 \cdot 6,125}{0,24} = 0,0049 \text{ m} = 4,9 \text{ mm}$$



Zadání a řešení příkladu 2.6

Obr. 2.20. / str. 43



# Deformace přímého nosníku v krutové úloze

Silový virtuální stav

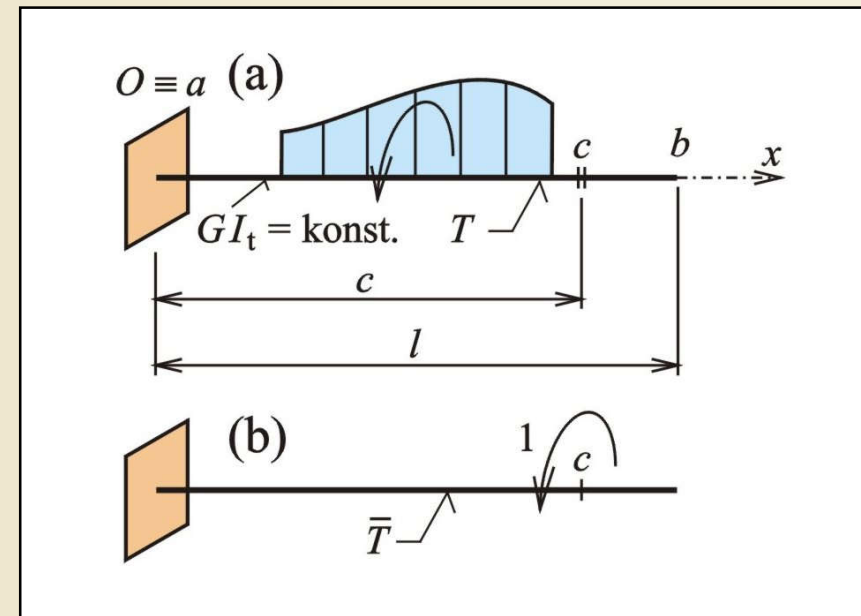
Krutové pootočení

$$g_c = \int_0^l \frac{T\bar{T}}{GI_t} dx = \frac{1}{GI_t} \int_0^l T\bar{T} dx = \frac{\pm A_T}{GI_t}$$

G modul pružnosti ve smyku

$I_t$  moment tuhosti průřezu v kroucení

$A_T$  plocha obrazce kroučících momentů na části nosníku s  $T = \pm 1$



Deformace nosníku v krutové úloze

Obr. 2.22. / str. 45

## Příklad 2.8

Metodou jednotkových sil nutno určit krutové pootočení pravého konce  $b$

Ocel -  $G = 8,1 \cdot 10^7$  kPa

$$I_t = I_p = \frac{\pi}{2} (r_2^4 - r_1^4) =$$

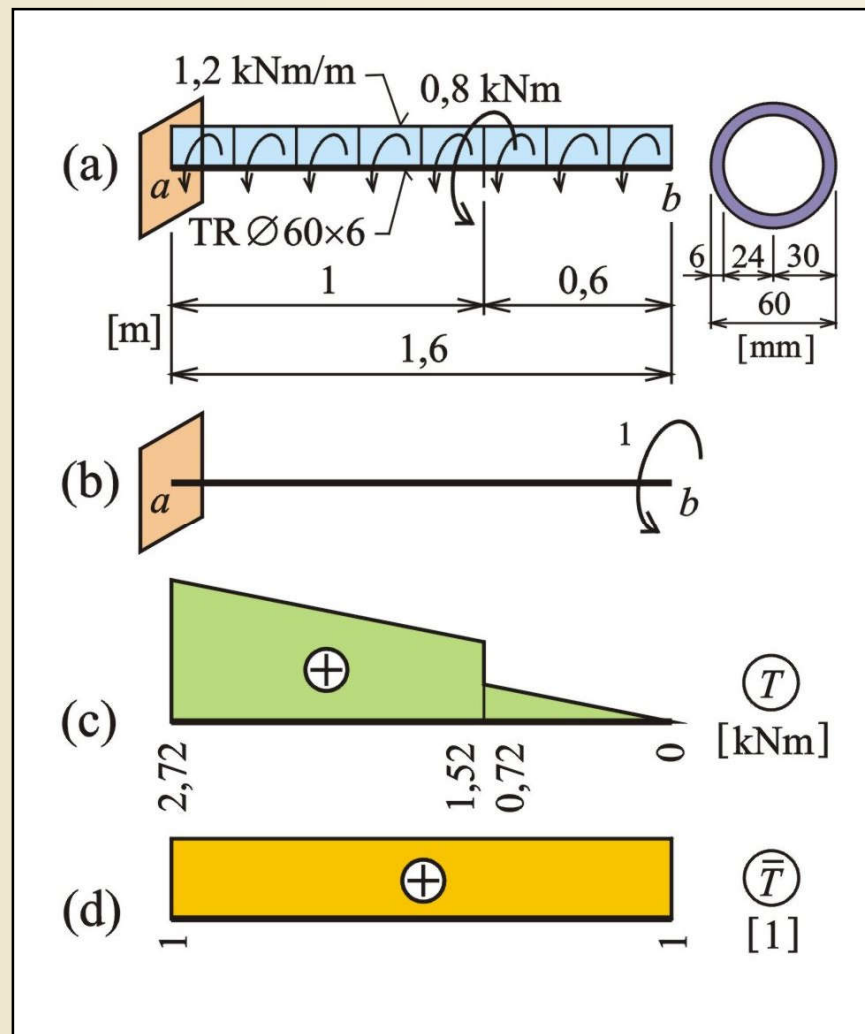
$$= \frac{\pi}{2} \cdot (30^4 - 24^4) = 7,5119 \cdot 10^5 \text{ mm}^4$$

$$GI_t = 8,1 \cdot 10^7 \cdot 7,5119 \cdot 10^{-7} = 60,8466 \text{ kNm}^2$$

$$\vartheta = \int_0^l \frac{T\bar{T}}{GI_t} dx = \frac{1}{GI_t} \int_0^l T\bar{T} dx = \frac{A_T}{GI_t}$$

$$A_T = \frac{1}{2} \cdot (2,72 + 1,52) \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 0,72 \cdot 0,6 = 2,336 \text{ kNm}^2$$

$$\vartheta_b = \frac{2,336}{60,8466} = 0,0384 \text{ rad} = 2,20^\circ$$



Zadání a řešení příkladu 2.8

Obr. 2.23. / str. 45

# Deformace rovinně lomeného nosníku v rovinné úloze

$$\delta = \sum_{j=1}^m \left\{ \frac{1}{E} \int_0^{l_j} \frac{N\bar{N}}{A_j} dx_j + \frac{1}{E} \int_0^{l_j} \frac{M\bar{M}}{I_j} dx_j + \frac{1}{G} \int_0^{l_j} \frac{V\bar{V}}{A_j^*} dx_j \right\}$$

U staticky určitých případů se zanedbává práce posouvajících a normálových sil

$$\delta = \frac{1}{E} \sum_{j=1}^m \int_0^{l_j} \frac{M\bar{M}}{I_j} dx_j$$

Tři lokální složky deformace:  $u$ ,  $v$  a  $\varphi$

V bodě  $c$   $\delta_c = \sqrt{w_c^2 + u_c^2}$   $\tan \alpha = \frac{u_c}{w_c}$

Stálý průřez

$$\delta = \frac{1}{E} \sum_{j=1}^m \frac{1}{I_j} \int_0^{l_j} M\bar{M} dx_j$$

Oteplení

$$\delta = \alpha_t \sum_{j=1}^m \left\{ \Delta t_{0,j} \int_0^{l_j} \bar{N} dx_j + \Delta t_{1,j} \int_0^{l_j} \frac{\bar{M}}{h_j} dx_j \right\}$$

# Příklad 2.9

Nutno určit

$u_d$ ,  $w_d$ ,  $\alpha$  a  $\delta_d$

Ocel

$$I_1 = 16 \cdot 10^{-5} \text{ m}^4$$

$$I_2 = 3,8 \cdot 10^{-5} \text{ m}^4$$

$$I_3 = 9,2 \cdot 10^{-5} \text{ m}^4$$

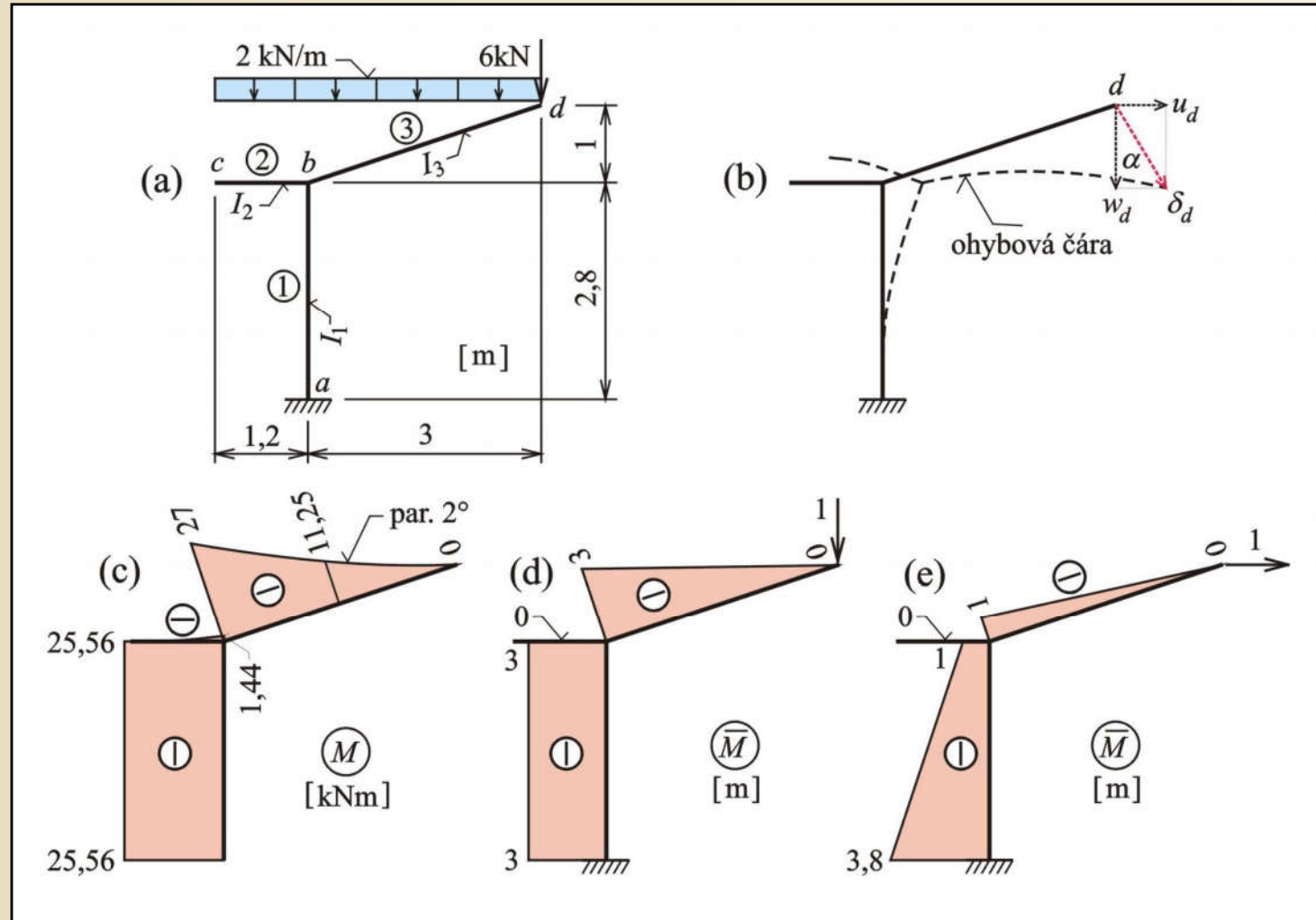
$$E = 2,1 \cdot 10^8 \text{ kPa}$$

Délky prutů:

$$l_1 = 2,8 \text{ m}$$

$$l_2 = 1,2 \text{ m}$$

$$l_3 = \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10} = 3,162 \text{ m}$$



Zadání a řešení příkladu 2.9

Obr. 2.24. / str. 47

# Příklad 2.9, výpočet Vereščaginovým pravidlem

$$w_d = \sum_{j=1}^3 \int_0^{l_j} \frac{M \bar{M}}{EI_j} dx_j = \frac{1}{E} \left( \int_0^{l_1} \frac{M_1 \bar{M}_1}{I_1} dx_1 + \int_0^{l_3} \frac{M_3 \bar{M}_3}{I_3} dx_3 \right)$$

$$w_d = \frac{1}{E} \left( \frac{25,56 \cdot 2,8 \cdot 3}{16 \cdot 10^{-5}} + \frac{9 \cdot 3,162 \cdot \frac{3}{4} \cdot 3 + \frac{18 \cdot 3,162 \cdot 2}{2} \cdot \frac{3}{3}}{9,2 \cdot 10^{-5}} \right)$$

$$w_d = \frac{1}{2,1 \cdot 10^8} \cdot \left( \frac{214,704}{16 \cdot 10^{-5}} + \frac{78,26}{9,2 \cdot 10^{-5}} \right) = 10,441 \cdot 10^{-3} \text{ m}$$

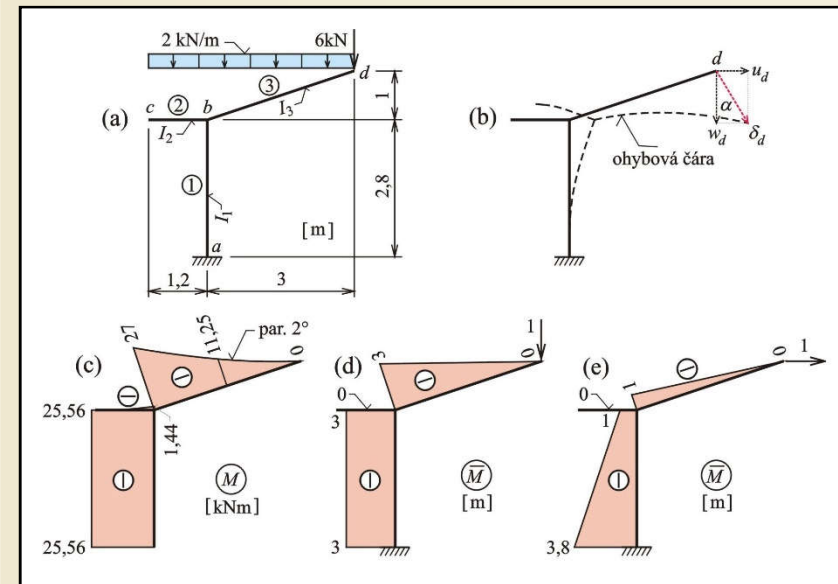
$$u_d = \sum_{j=1}^3 \int_0^{l_j} \frac{M \bar{M}}{EI_j} dx_j = \frac{1}{E} \left( \int_0^{l_1} \frac{M_1 \bar{M}_1}{I_1} dx_1 + \int_0^{l_3} \frac{M_3 \bar{M}_3}{I_3} dx_3 \right)$$

$$u_d = \frac{1}{E} \left( \frac{25,56 \cdot 2,8 \cdot \frac{3,8+1}{2}}{16 \cdot 10^{-5}} + \frac{9 \cdot 3,162 \cdot \frac{3}{4} \cdot 1 + \frac{18 \cdot 3,162 \cdot 2}{2} \cdot \frac{1}{3}}{9,2 \cdot 10^{-5}} \right)$$

$$u_d = \frac{1}{2,1 \cdot 10^8} \cdot \left( \frac{171,763}{16 \cdot 10^{-5}} + \frac{26,087}{9,2 \cdot 10^{-5}} \right) = 6,462 \cdot 10^{-3} \text{ m}$$

$$\delta_d = \sqrt{(u_d^2 + w_d^2)} = \sqrt{(10,441^2 + 6,462^2)} \cdot 10^{-3} = 12,279 \cdot 10^{-3} \text{ m}$$

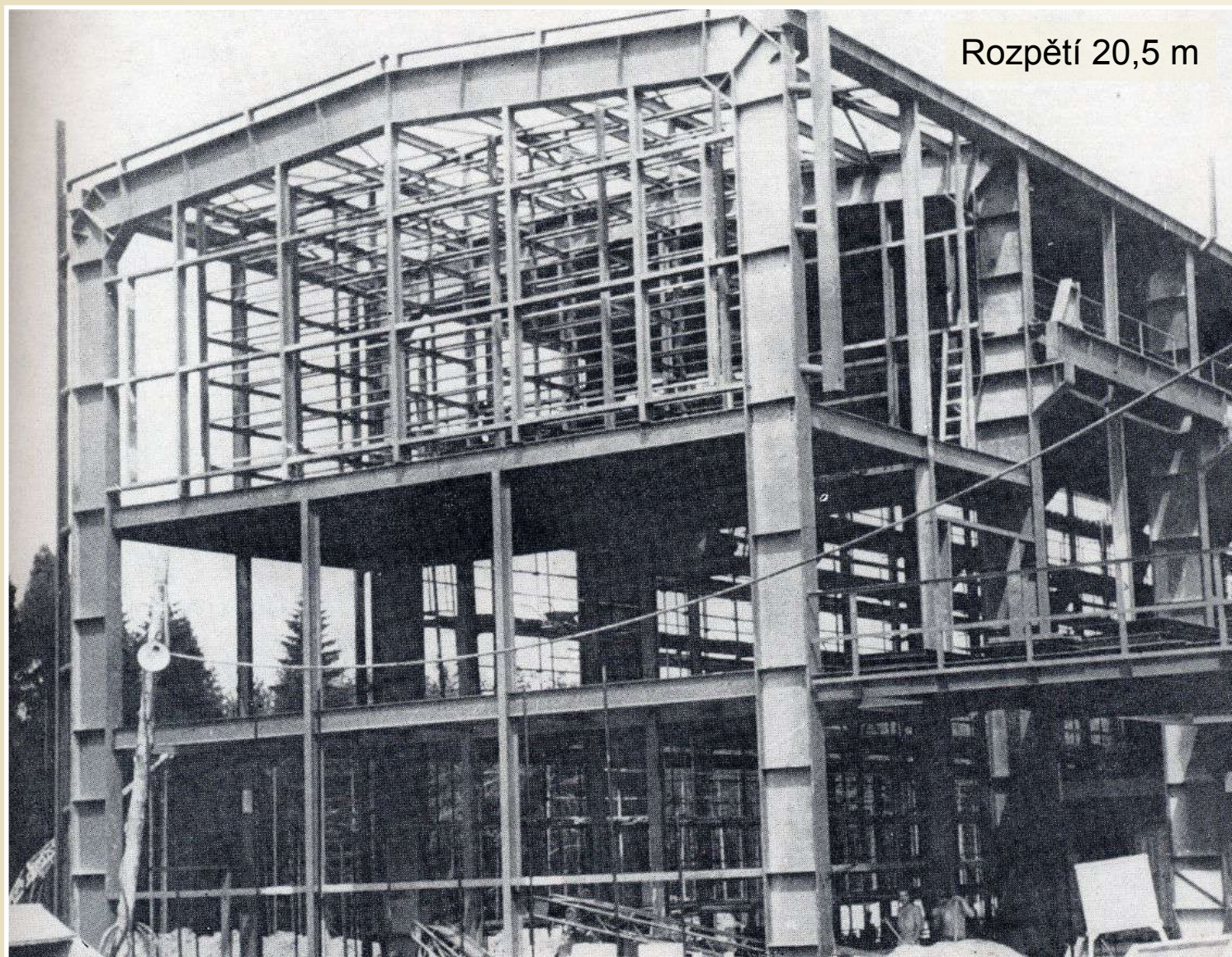
$$\tan \alpha = \frac{u_d}{w_d} = \frac{6,462 \cdot 10^{-3}}{10,441 \cdot 10^{-3}} = 0,6189 \Rightarrow \alpha = 31,75^\circ$$



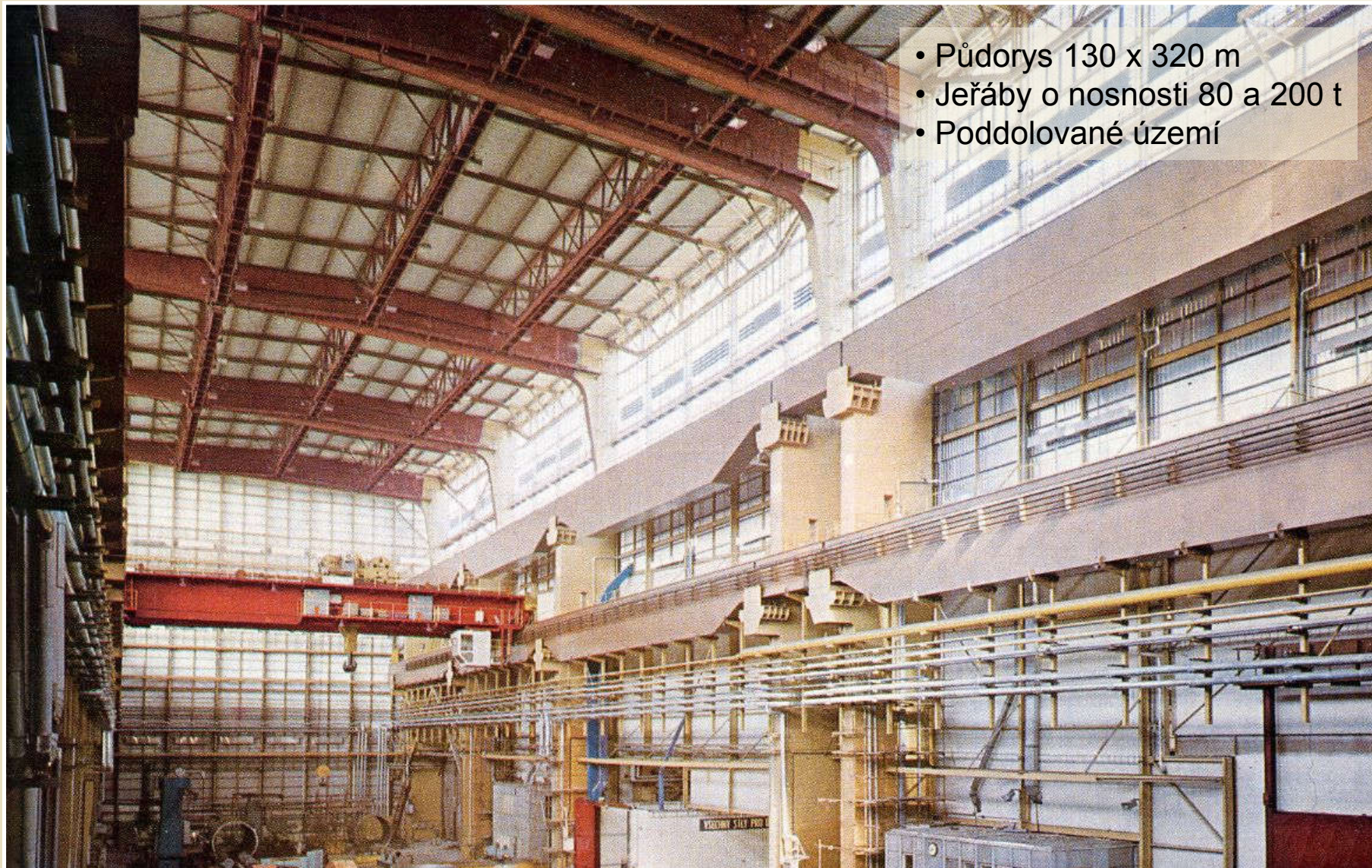
Zadání a řešení příkladu 2.9

Obr. 2.24. / str. 47

# Rámová ocelová konstrukce průmyslové haly



## Hala pro výrobu komponent jaderných elektráren, Vítkovice



- Půdorys 130 x 320 m
- Jeřáby o nosnosti 80 a 200 t
- Poddolované území

# Železniční most, Polanecká spojka



Most přes železniční trať v Polance z r.1964



# Tribuna fotbalového stadiónu na Bazalech, Ostrava



# Deformace rovinného kloubového příhradového nosníku

Virtuální práce pouze normálových sil

$$\delta = \sum_{j=1}^p \int_0^{l_j} \frac{N_j \bar{N}_j}{EA_j} dx_j = \frac{1}{E} \sum_{j=1}^p \frac{N_j \bar{N}_j}{A_j} \int_0^{l_j} dx_j = \frac{1}{E} \sum_{j=1}^p \frac{N_j \bar{N}_j l_j}{A_j}$$

Oteplení

$$\delta = \sum_{j=1}^p \int_0^{l_j} \bar{N} \alpha_t \Delta t_{0,j} dx_j = \alpha_t \sum_{j=1}^p \bar{N} \Delta t_{0,j} \int_0^{l_j} dx_j = \alpha_t \sum_{j=1}^p \bar{N} \Delta t_{0,j} l_j$$

## Příklad 2.11

Nutno určit  $w_c$

$$A_1 = 24 \cdot 10^{-4} \text{ m}^4$$

$$A_2 = 12 \cdot 10^{-4} \text{ m}^4$$

$$A_3 = 18 \cdot 10^{-4} \text{ m}^4$$

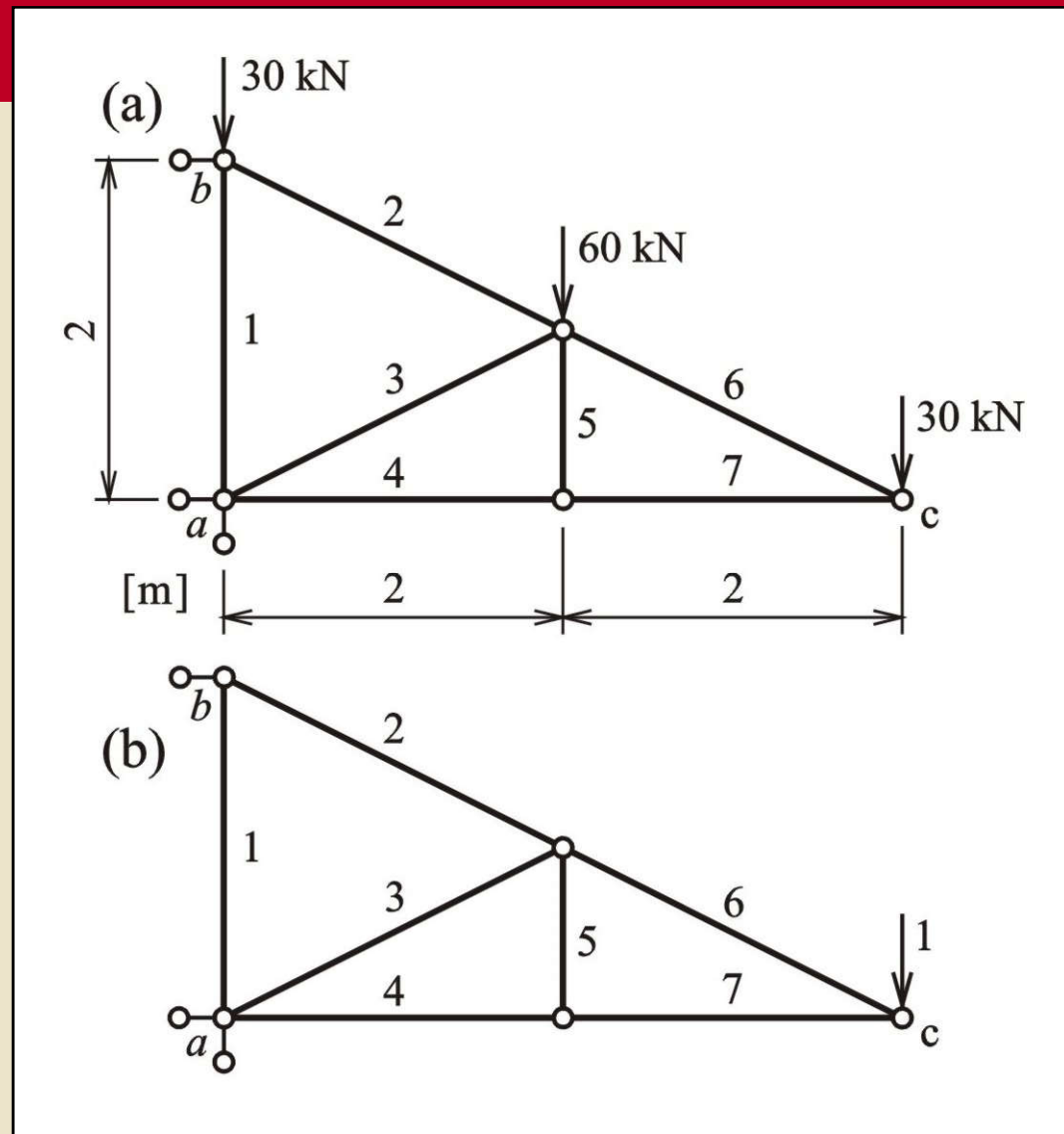
$$A_4 = 18 \cdot 10^{-4} \text{ m}^4$$

$$A_5 = 12 \cdot 10^{-4} \text{ m}^4$$

$$A_6 = 12 \cdot 10^{-4} \text{ m}^4$$

$$A_7 = 18 \cdot 10^{-4} \text{ m}^4$$

$$l_2 = l_3 = l_6 = 2,236 \text{ m}$$



Tabulkový výpočet

Zadání a řešení příkladu 2.11

Obr. 2.28. / str. 54

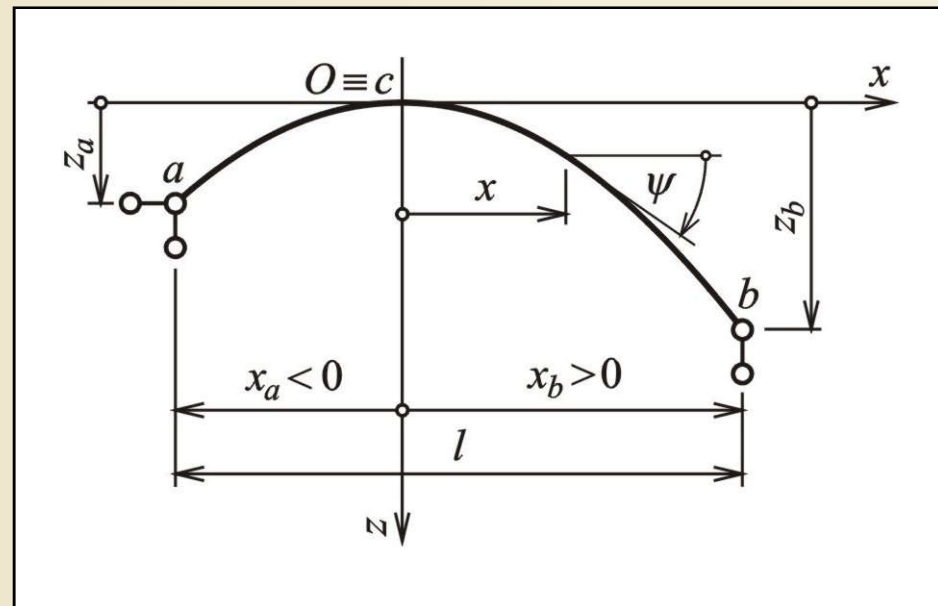
## Příklad 2.11 Tabulkový výpočet

$j$	$A_j$ [m <sup>2</sup> ]	$l_j$ [m]	$N_j$ [kN]	$\bar{N}_j$ [1]	$(N_j \bar{N}_j l_j / A_j) \cdot 10^{-3}$ [kN/m]
1	0,0024	2,000	-90,000	-1,000	75,000
2	0,0012	2,236	134,164	2,236	559,017
3	0,0018	2,236	-67,082	0,000	0,000
4	0,0018	2,000	-60,000	-2,000	133,333
5	0,0012	1,000	0,000	0,000	0,000
6	0,0012	2,236	67,082	2,236	279,508
7	0,0018	2,000	-60,000	-2,000	133,333
					<b>1180,192</b>

$$w_c = \frac{1}{E} \sum_{j=1}^7 \frac{N_j \bar{N}_j l_j}{A_j} = \frac{1180,192 \cdot 10^3}{2,1 \cdot 10^8} = 5,62 \cdot 10^{-3} \text{ m} = 5,62 \text{ mm}$$

# Deformace rovinně zakřiveného nosníku v rovinné úloze

Rozpětí  $l$ , vzezření  $f$ , poměrné vzezření  $\Phi$   $\Phi = \frac{f}{l}$

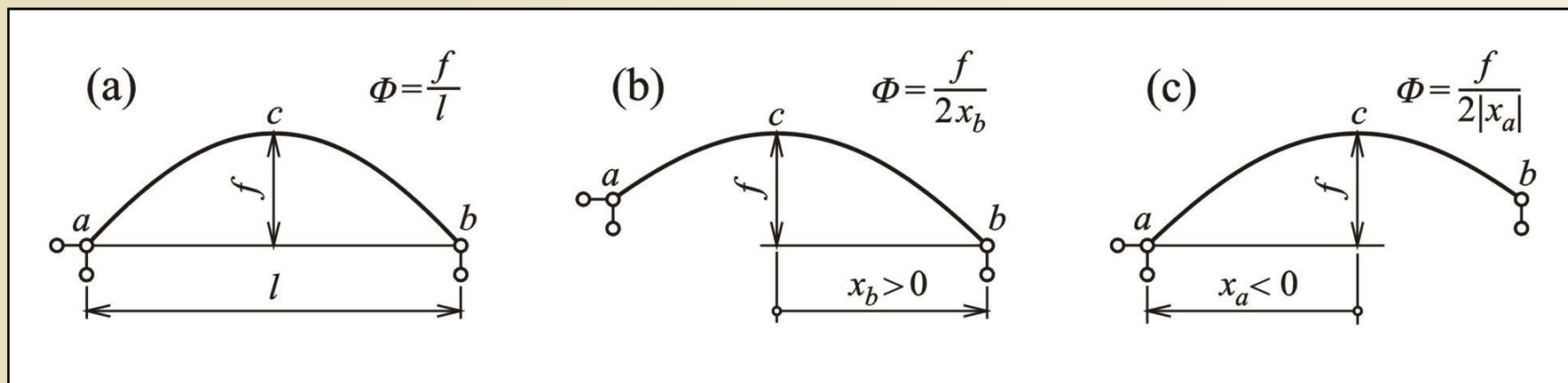


Tvar a podepření rovinného zakřiveného nosníku v rovinné úloze

Obr. 2.25. / str. 48

# Deformace rovinně zakřiveného nosníku v rovinné úloze

Rozpětí  $l$ , vzezětí  $f$ , poměrné vzezětí  $\Phi$   $\Phi = \frac{f}{l}$



Vzezětí  $f$  a poměrná vzezětí  $\Phi$  rovinných zakřivených nosníků

Obr. 2.26. / str. 49

# Deformace rovinně zakřiveného nosníku v rovinné úloze

## Použití metody jednotkových sil

Silové zatížení

$$\delta = \int_L \frac{N\bar{N}}{EA} ds + \int_L \frac{M\bar{M}}{EI} ds + \int_L \frac{V\bar{V}}{GA_j^*} ds$$

Teplotní zatížení

$$\delta = \alpha_t \Delta t_0 \int_L \bar{N} ds + \alpha_t \Delta t_1 \int_L \frac{\bar{M}}{h} ds$$

Řešení

$$ds = \frac{dx}{\cos \psi}$$

Po úpravě:

Silové zatížení

$$\delta = \frac{1}{E} \int_{x_a}^{x_b} \frac{N\bar{N}}{A \cos \psi} dx + \frac{1}{E} \int_{x_a}^{x_b} \frac{M\bar{M}}{I \cos \psi} dx + \frac{1}{G} \int_{x_a}^{x_b} \frac{V\bar{V}}{A^* \cos \psi} dx$$

Teplotní zatížení

$$\delta = \alpha_t \Delta t_0 \int_{x_a}^{x_b} \frac{\bar{N}}{\cos \psi} dx + \alpha_t \Delta t_1 \int_{x_a}^{x_b} \frac{\bar{M}}{h \cos \psi} dx$$

# Deformace rovinně zakřiveného nosníku v rovinné úloze

## Výpočet přetvoření

Numerická integrace

Simpsonovo pravidlo

$$\int_0^l f(x) dx \approx (f_0 + 4(f_1 + f_3 + \dots + f_{n-1}) + 2(f_2 + f_4 + \dots + f_{n-2}) + f_n) \cdot \frac{d}{3}$$

## Obdélníková metoda

$$\delta = \frac{1}{E} \int_{x_a}^{x_b} \frac{N\bar{N}}{A \cos \psi} dx + \frac{1}{E} \int_{x_a}^{x_b} \frac{M\bar{M}}{I \cos \psi} dx = \frac{1}{E} \sum_{i=1}^n \frac{N_i \bar{N}_i}{A_i \cos \psi_i} \Delta x_i + \frac{1}{E} \sum_{i=1}^n \frac{M_i \bar{M}_i}{I_i \cos \psi_i} \Delta x_i$$

$$\delta = \frac{1}{E} \sum_{i=1}^n \frac{N_i \bar{N}_i}{A_i} \Delta s_i + \frac{1}{E} \sum_{i=1}^n \frac{M_i \bar{M}_i}{I_i} \Delta s_i$$



## Příklad 2.10

Nutno určit  $u_b$

Parabolická střednice  $z(x) = k \cdot x^2$

$$k = \frac{z_a}{x_a^2} = \frac{z_b}{x_b^2} = \frac{2}{5^2} = 0,08 \text{ m}^{-1}$$

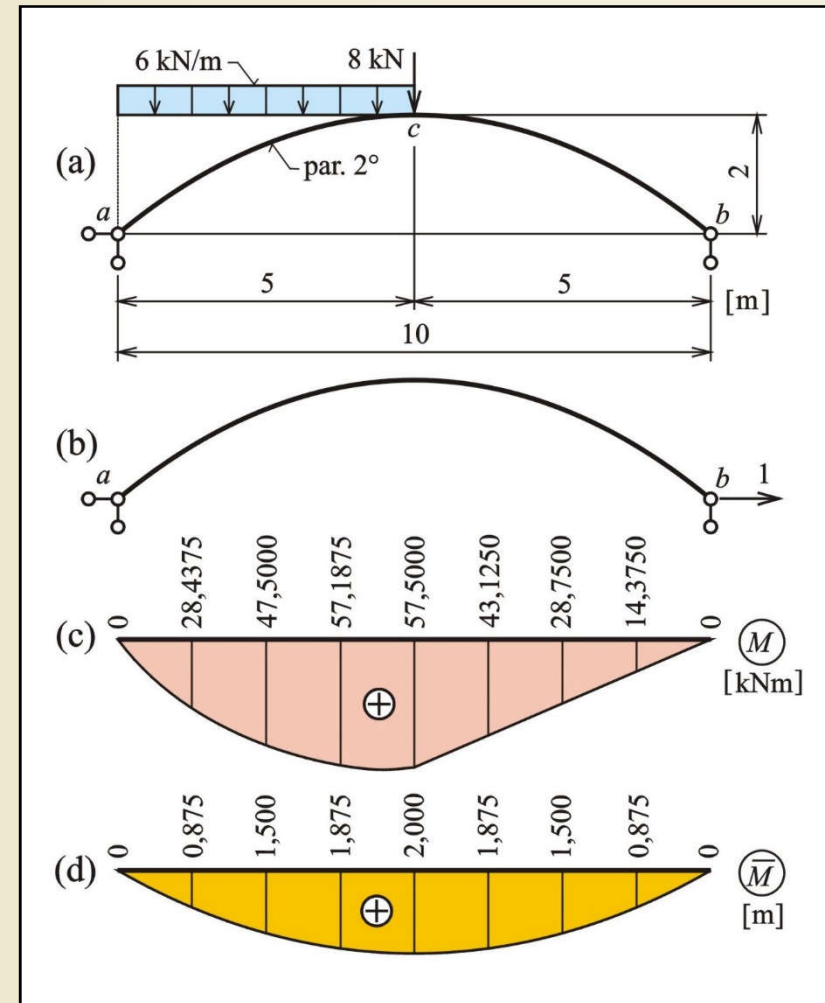
$$z(x) = k \cdot x^2 = 0,08x^2$$

$$\text{tg } \psi = \frac{dz}{dx} = [k \cdot x^2]' = 2 \cdot k \cdot x = 0,16x$$

$$\cos \psi = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 \psi}} = \frac{1}{\sqrt{1 + 0,0256x^2}}$$

$$\sin \psi = \frac{\text{tg } \psi}{\sqrt{1 + \tan^2 \psi}} = \frac{0,16x}{\sqrt{1 + 0,0256x^2}}$$

$$EI = 6,72 \cdot 10^4 \text{ kNm}^2$$



Zadání a řešení příkladu 2.10

Obr. 2.27. / str. 51

## Příklad 2.10

Výpočet reakcí:

$$R_{az} \cdot 10 - 6 \cdot 5 \cdot (10 - 2,5) - 8 \cdot 5 = 0$$

$$R_{az} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 7,5 + 8 \cdot 5}{10} = \frac{225 + 40}{10} = 26,5 \text{ kN}$$

$$R_{bz} \cdot 10 - 6 \cdot 5 \cdot 2,5 - 8 \cdot 5 = 0$$

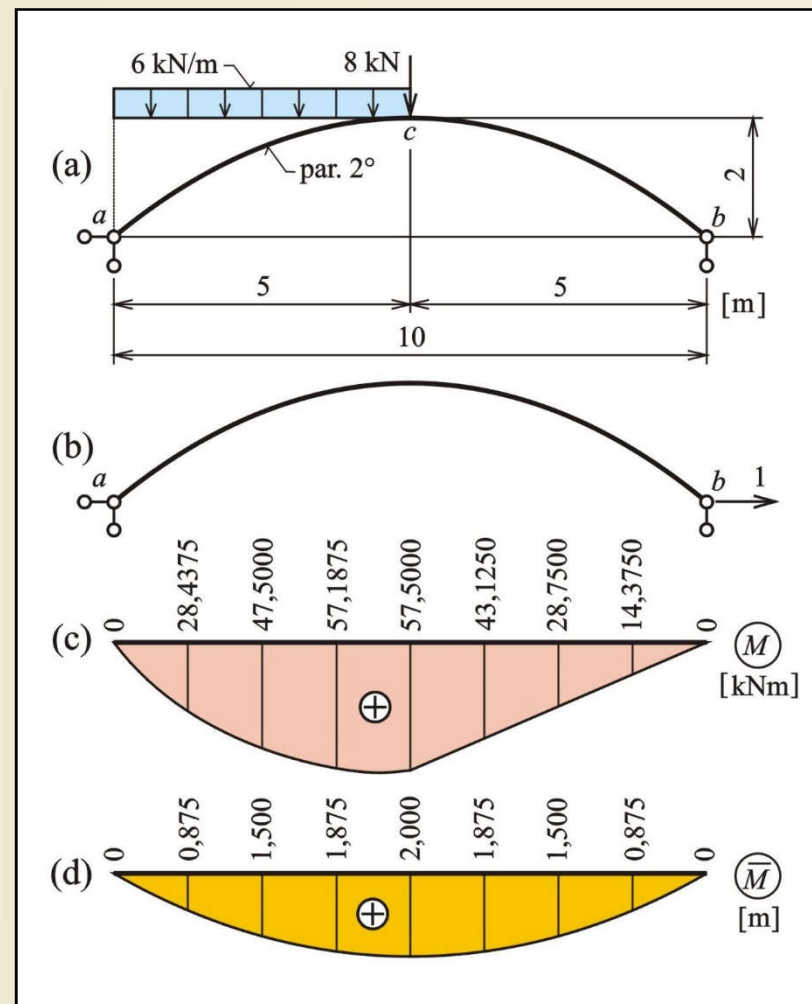
$$R_{bz} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 2,5 + 8 \cdot 5}{10} = \frac{75 + 40}{10} = 11,5 \text{ kN}$$

$$R_{ax} = R_{bx} = 0$$

$$\overline{R}_{az} = \overline{R}_{bz} = 0$$

$$\overline{R}_{ax} = 1(\leftarrow)$$

**Výpočet ohybových momentů po délce oblouku – viz obr.**



Zadání a řešení příkladu 2.10

Obr. 2.27. / str. 51

# Příklad 2.10, výpočet posunutí $u_b$ Simpsonovým pravidlem

$$u_b = \int_L \frac{M\bar{M}}{EI} ds = \frac{1}{EI} \int_0^l \frac{M\bar{M}}{\cos \psi} dx \approx \frac{1}{EI} S$$

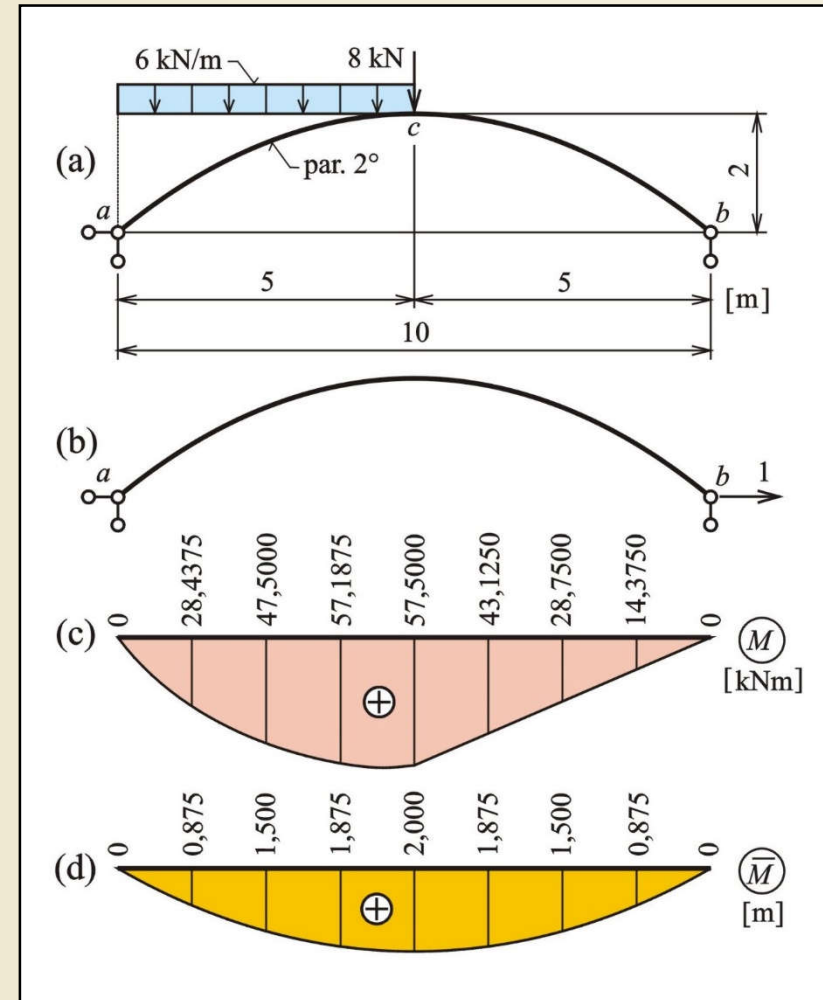
$$S = \int_0^l f(x) dx \quad S \approx (f_0 + 4 \cdot (f_1 + f_3 + f_5 + f_7) + 2 \cdot (f_2 + f_4 + f_6) + f_8) \frac{d}{3}$$

$$n = 8 \quad d = l/n = 10/8 = 1,25$$

i	x [m]	tgψ	cosψ	M[kNm]	$\bar{M}$ [kNm]	$M\bar{M}/\cos\psi$ [kNm <sup>2</sup> ]
0	-5,00	-0,8	0,78087	0,0000	0,0000	0,000
1	-3,75	-0,6	0,85749	28,4375	0,875	29,018
2	-2,50	-0,4	0,92848	47,5000	1,500	76,739
3	-1,25	-0,2	0,98058	57,1875	1,875	109,350
4	+0,00	+0,0	1,00000	57,5000	2,000	115,000
5	+1,25	+0,2	0,98058	43,1250	1,875	82,461
6	+2,50	+0,4	0,92848	28,7500	1,500	46,447
7	+3,75	+0,6	0,85749	14,3750	0,875	14,668
8	+5,00	+0,8	0,78087	0,0000	0,000	0,000

$$S = (0 + 4(29,018 + 109,35 + 82,46 + 14,668) + 2(76,739 + 115,00 + 46,447) + 0)1,25/3 = 590,984 \text{ kNm}^3$$

$$u_b = \frac{590,984}{6,72 \cdot 10^4} = 8,79 \cdot 10^{-3} \text{ m} = 8,79 \text{ mm}$$



Zadání a řešení příkladu 2.10

Obr. 2.27. / str. 51

# Příklad 2.10, výpočet posunutí $u_b$ , obdélníková metoda

$$u_b = \int_L \frac{M\bar{M}}{EI} ds = \frac{1}{EI} \sum_{i=1}^n M_i \bar{M}_i \Delta x_i \quad n = 10 \quad \Delta x_i = \frac{l}{10} = 1$$

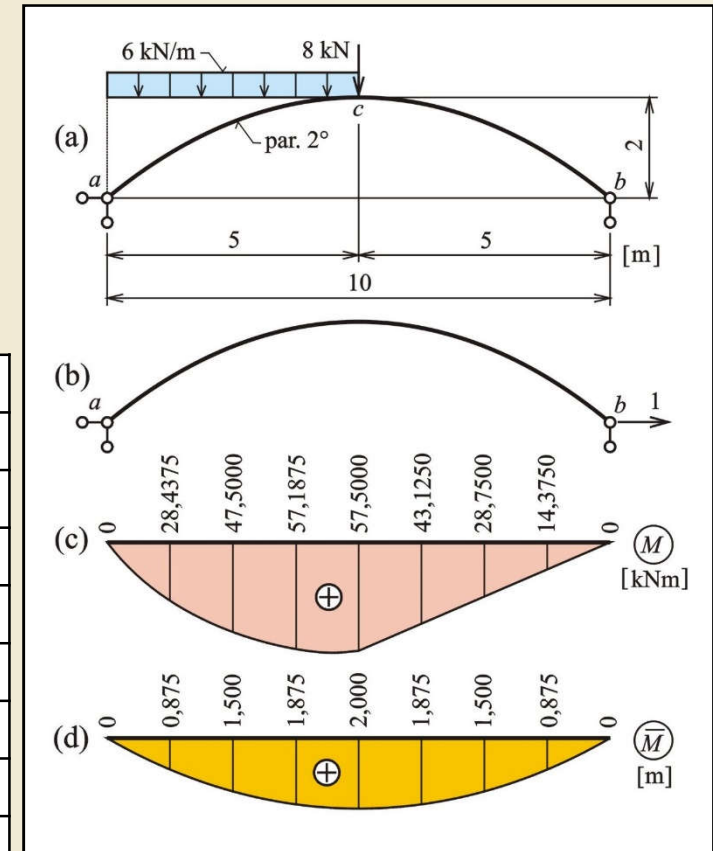
$$M(x) = 26,5 \cdot (5 + x) - 3 \cdot (5 + x)^2 \quad \text{pro } 0 \leq x \leq 5$$

$$M(x) = 26,5 \cdot (5 + x) - 6 \cdot 5 \cdot (2,5 + x) - 8 \cdot x \quad \text{pro } 5 \leq x \leq 10$$

$$\bar{M}(x) = 1 \cdot (2 - z)$$

i	x [m]	z [m]	tgψ	cosψ	M[kNm]	$\bar{M}$ [kNm]	$M\bar{M}\Delta x / \cos\psi$ [kNm <sup>2</sup> ]
1	-4,5	1,62	-0,72	0,811534	12,5	0,38	5,85311
2	-3,5	0,98	-0,56	0,872506	33,0	1,02	38,5785
3	-2,5	0,50	-0,40	0,928477	47,5	1,50	76,7386
4	-1,5	0,18	-0,24	0,972387	56,0	1,82	104,8142
5	-0,5	0,02	-0,08	0,996815	58,5	1,98	116,2000
6	+0,5	0,02	+0,08	0,996815	51,75	1,98	102,7924
7	+1,5	0,18	+0,24	0,972387	40,2500	1,82	75,3352
8	+2,5	0,05	+0,40	0,928477	28,75	1,5	46,4470
9	+3,5	0,98	+0,56	0,872506	17,25	1,02	20,1660
10	+4,5	1,62	+0,72	0,811534	5,75	0,38	2,6924

$$\sum_{i=1}^n M \cdot \bar{M} \cdot \Delta x = 589,618 \text{ kNm}^3 \quad u_b = \frac{589,618}{6,72 \cdot 10^4} = 8,77 \cdot 10^{-3} \text{ m} = 8,77 \text{ mm}$$



Zadání a řešení příkladu 2.10

Obr. 2.27. / str. 51

# Rovinně zakřivený nosník



Gateway Arch, rozpětí a vzepětí ocelového oblouku z roku 1966 192,5 m, Saint Louis, Missouri.

# Rovinně zakřivený nosník



Gateway Arch, rozpětí a vzepětí ocelového oblouku z roku 1966 192,5 m, Saint Louis, Missouri.

# Rovinně zakřivený nosník



Rovinně zakřivený vazník, Výzkumné energetické centrum VŠB-TU Ostrava

# Železniční most, Polanecká spojka



Most přes řeku Odru z r.1964, Polanecká spojka, Ostrava – Zábřeh



# Silniční most, Ostrava - Hrabová



Příhradový most přes řeku Ostravici