Téma 1
Deformace staticky určitých prutových konstrukcí

Katedra stavební mechaniky
Fakulta stavební, VŠB - Technická univerzita Ostrava

Stavební statika - přednášející

doc. Ing. Petr Konečný, Ph.D.

Katedra stavební mechaniky (228)

místnost: LPH 407/3

www: **http://fast10.vsb.cz/konecny**

Prerekvizity

Předpokládané znalosti :

Matematika, Fyzika, Stavební statika, Pružnost a plasticita

Požadavky pro udělení zápočtu:

• zápočet z prerekvizitních předmětů

•minimálně 70 % aktivní účast na cvičení

• prokázání znalostí procvičované látky formou testů

Požadavky na složení zkoušky:

• zkouška z prerekvizitních předmětů

• zápočet (18-35 bodů)

• test na základní znalosti průběhy vnitřních sil a napětí

• úspěšná písemná zkouška (18-35 bodů)

• Ústní a písemná zkouška část zkoušky dohromady (min 33 b)

Osnova přednášky

- Stavební mechanika a architektura
- Pojem deformace
- Princip virtuálních prací
- Deformace nosníku v osové úloze
- Deformace přímého nosníku v příčné úloze (ve svislé hlavní rovině xz)
- Architektonické a konstrukční řešení

Architektura

Definice architektury:

Marcus Vitruvius Polio (80-70 před kristem - 15)

- firmitas – pevnost, tuhost a únosnost;
- utilitas – splnění funkcí, pro které byla stavěna;
- venustas – libost, estetický cíl.

Původ slova architektura je z řeckého **architekton – tesař.**

Panteon, Řím

Architektura

Autorizovaný architekt:

- Zodpovědnost za celou stavbu;
- Ke kvalitnímu dílu vede znalost:
  - Konstrukčních systémů;
  - Materiálů a jejich chování;
  - Cit pro estetiku
- Dobrá pověst stavitele/architekta
  - Kvalita a provedení díla či projektu:
  - Reklama

Nosná stavební konstrukce

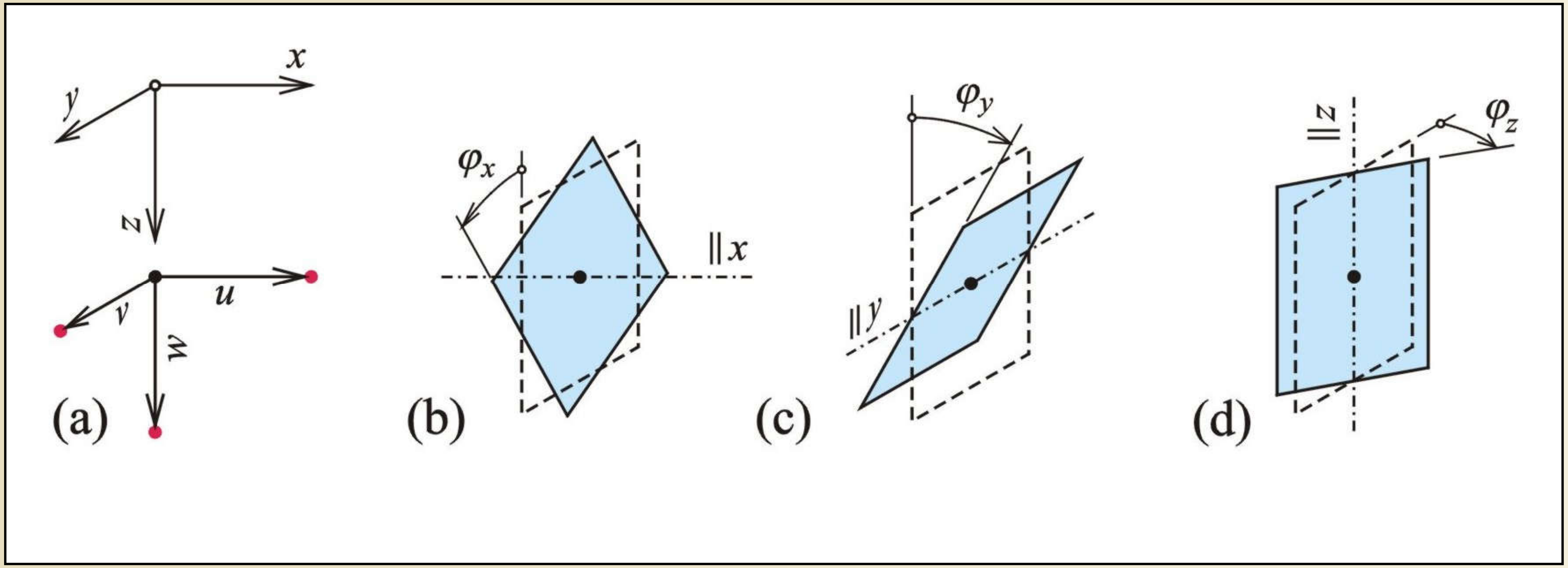
Nosná stavební konstrukce slouží k přenosu zatížení objektu do horninového masívu, na němž je objekt založen.
Musí mít dostatečnou **únosnost** a dlouhodobou **použitelnost.**
(blíže předmět Pružnost a plasticita)**.**

Kongresové centrum, Brno

Deformace (přetvoření)

Deformace (přetvoření):

a) Celková podoba deformované konstrukce
b) Některá lokální složka deformace v určitém místě konstrukce (posun, pootočení)



Označení a kladné smysly posunů a pootočení těžiště průřezu
Obr. 2.1. / str. 24

Deformace (přetvoření)

Proč se zabýváme deformacemi?

1. Použitelnost konstrukce
2. Řešení staticky neurčitých konstrukcí
3. Ověřování správnosti výpočtu měřením

Předpoklady výpočtu:

- Fyzikální linearita (platí Hookův zákon)
- Geometrická linearita (teorie malých deformací)

Důsledek:

- Podmínky rovnováhy se sestavují na nedeformované konstrukci – teorie 1. řádu
- Platí princip superpozice a princip úměrnosti

Deformace (přetvoření)

Nelineární mechanika:

- Teorie 2. řádu – podmínky rovnováhy se sestavují na deformované konstrukci (deformace malé)
- Fyzikální nelinearita (nelineárně pružné nebo trvalé deformace)
- Teorie velkých deformací
- Konstrukce s jednostrannými vazbami
- Nosná lana a lanové konstrukce

Práce vnějších sil a momentů

Práce (externí) bodové síly: $L_e = P \cdot \delta = P \cdot \delta_c \cdot \cos\alpha$

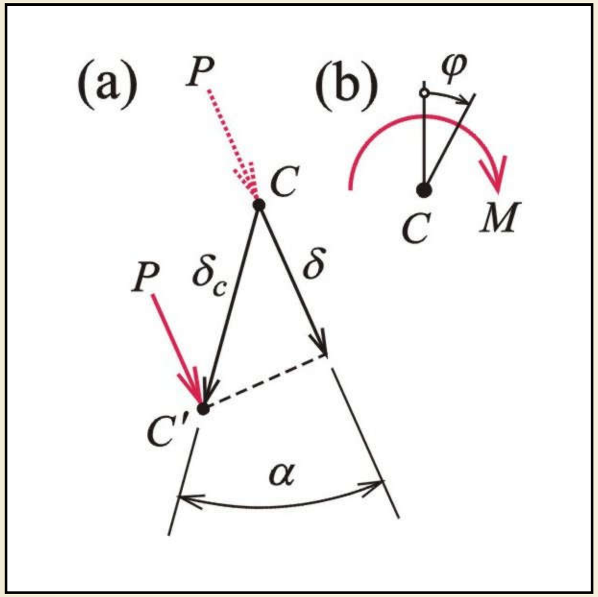
Práce - skalár, vyjadřuje se v joulech (J = N.m), kJ, MJ

Práce bodového momentu: $L_e = M.\varphi$

Poznámka:
Předpokladem je, že $\delta(\varphi)$ bylo vyvoláno jinou příčinou než P (M).

Práce je kladná, shodují-li se smysl

- vektoru síly a posunu δ,
- momentu a potočení φ.



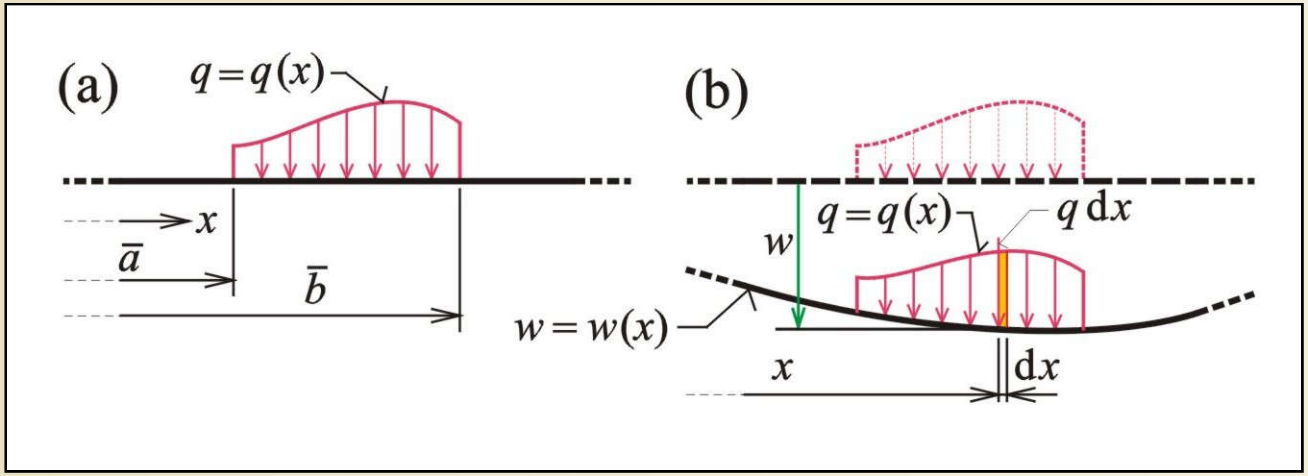
Práce bodové síly a bodového momentu
Obr. 2.2. / str. 26

Práce spojitého silového a momentového zatížení

Práce vnějších sil a momentů:

$$L_e = \int_{\bar{a}}^{\bar{b}} q(x) w(x) \mathrm{d}x \qquad L_e = \int_{\bar{a}}^{\bar{b}} m(x) \varphi_x(x) \mathrm{d}x$$

Předpoklad – velikost zatížení se během posunu nemění.



Práce silového liniového zatížení
Obr. 2.3. / str. 26

Virtuální práce

1) **Reálný zatěžovací stav**

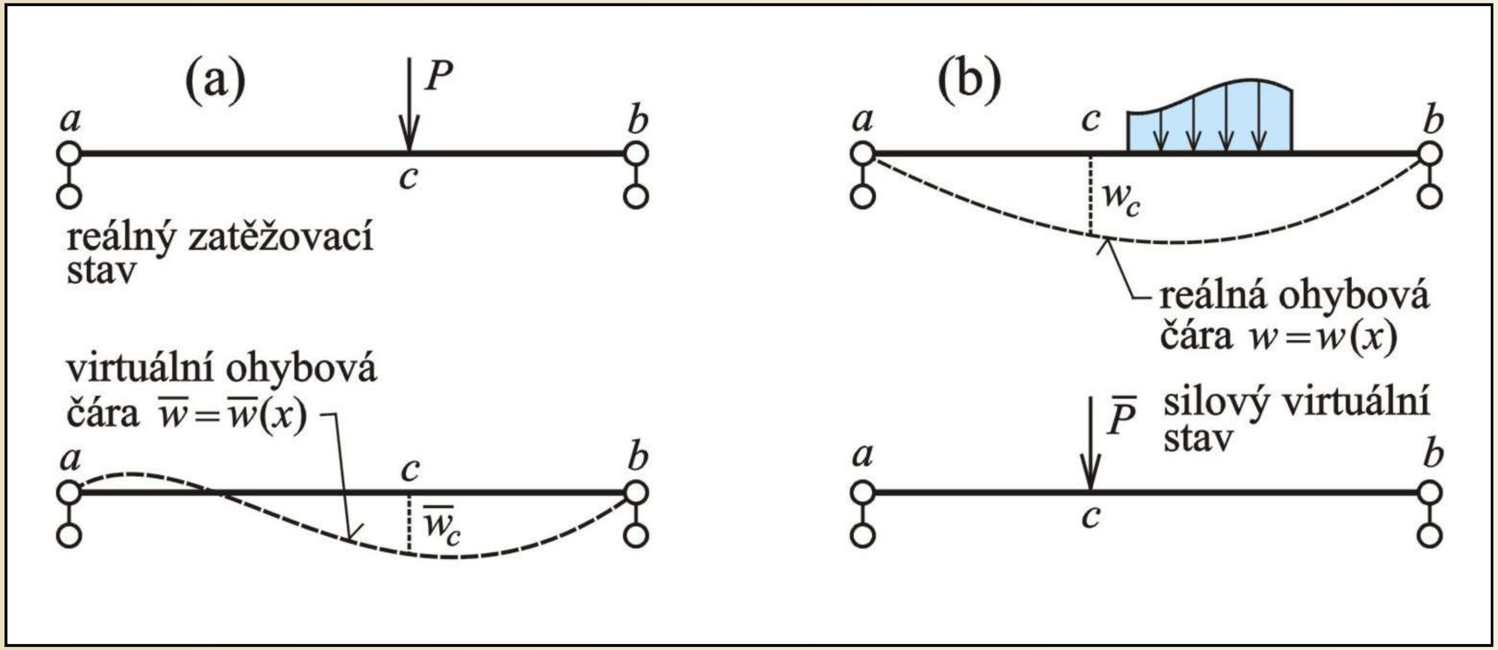
2) **Virtuální zatěžovací stav**:

   2a) *Deformační virtuální stav*

   2b) *Silový virtuální stav*

a) **Deformační** virtuální práce $L_e = P \cdot \overline{w}_c$

b) **Silová** virtuální práce $L_e = \overline{P} \cdot w_c$

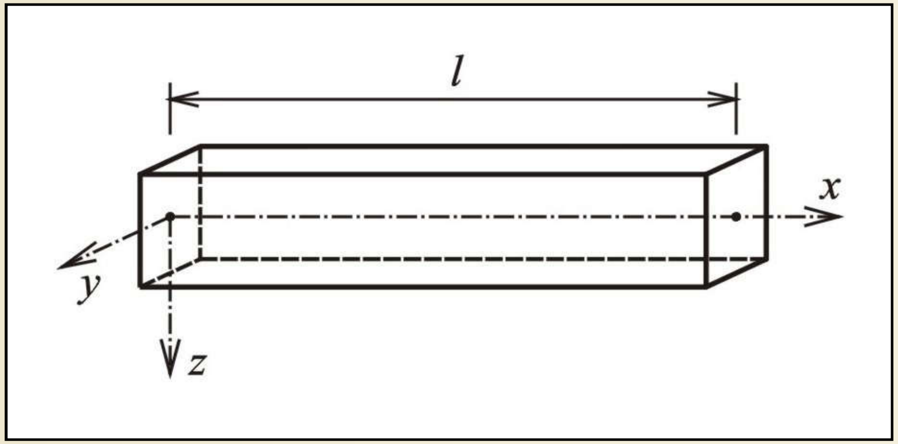


Deformační virtuální práce vypracovaná Lagrangem ke studiu rovnováhy konstrukcí.

K pojmu virtuální práce
Obr. 2.4. / str. 27

Práce vnitřních sil

Prostorově namáhaný přímý prut: N, M_y, M_z, V_z, V_y, T



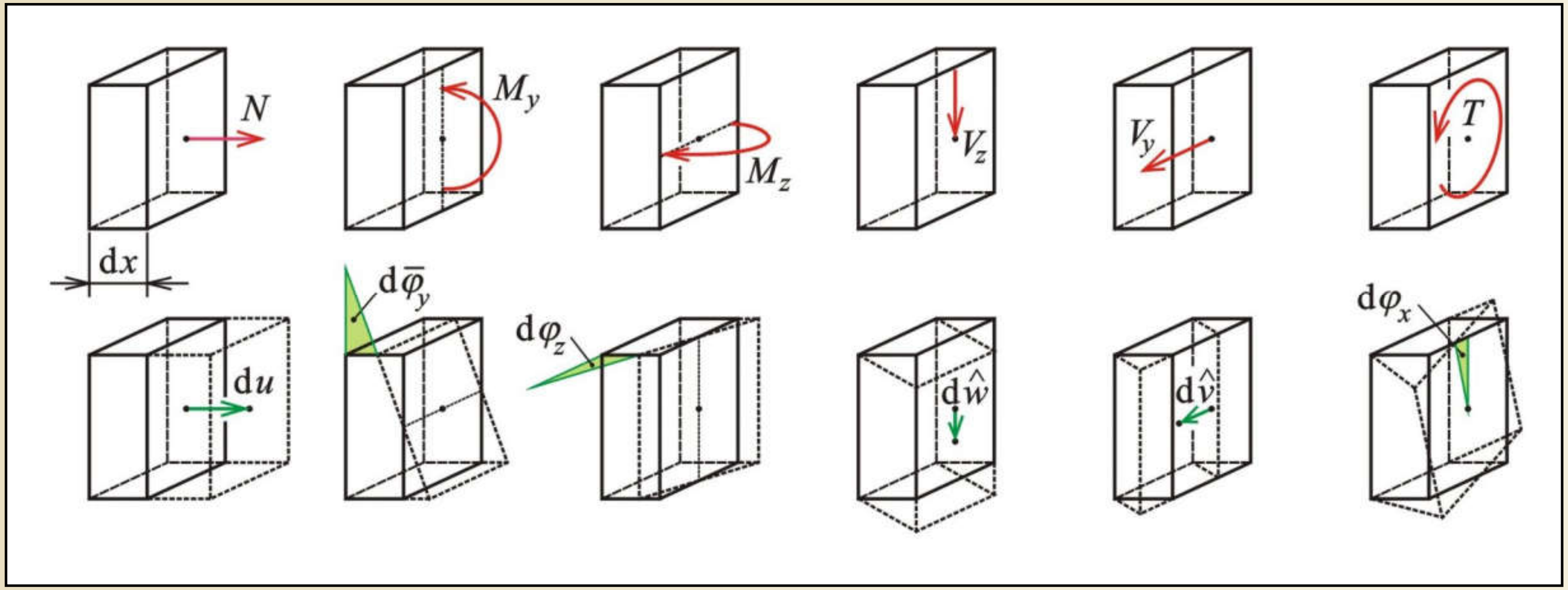
Souřadnicová soustava prutu
Obr. 2.5. / str. 28

Práce vnitřních sil

Práce vnitřních (interních) sil:

$$L_i = -\left\{ \int_l N\mathrm{d}u + \int_l M_y \mathrm{d}\overline{\varphi}_y + \int_l M_z \mathrm{d}\varphi_z + \int_l V_z \mathrm{d}\hat{w} + \int_l V_y \mathrm{d}\hat{v} + \int_l T\mathrm{d}\varphi_x \right\}$$

Vnitřní síly brání vzniku deformace, mají opačné smysly než na obr. 2.6., proto záporné znaménko při výpočtu L_i.



Kladné smysly vnitřních sil

Práce vnitřních sil prutu
Obr. 2.6. / str. 28

Princip virtuálních prací

Axiom:

Celková virtuální práce na vyšetřované konstrukci (tj. součet virtuálních prací vnějších i vnitřních sil) je roven nule.

$$L_e + L_i = 0$$

A) **Deformační princip virtuálních prací (princip virtuálních posunů)**

B) **Silový princip virtuálních prací (princip virtuálních sil)**

Virtuální vnitřní síly $\overline{N}, \overline{M}_y, \overline{M}_z, \overline{V}_z, \overline{V}_y, \overline{T}$

Reálné vnitřní síly, způsobují deformace

$$\mathrm{d}u = \frac{N}{EA}\mathrm{d}x \qquad \mathrm{d}\varphi_y = \frac{M_y}{EI_y}\mathrm{d}x \qquad \mathrm{d}\varphi_z = \frac{M_z}{EI_z}\mathrm{d}x$$

$$\mathrm{d}\hat{w} = \frac{V_z}{GA_z^*}\mathrm{d}x \qquad \mathrm{d}\hat{v} = \frac{V_y}{GA_y^*}\mathrm{d}x \qquad \mathrm{d}\varphi_x = \frac{T}{GI_t}\mathrm{d}x$$

Princip virtuálních prací

Silový princip virtuálních prací:

$$L_e = \sum \overline{F_i} \delta_i + \sum \overline{M_i} \varphi_i$$

Práce vnitřních sil

$$L_i = -\int_0^l \left\{ \overline{N} du + \overline{M}_y d\varphi + \overline{V}_y dv \right\} \mathrm{d}x$$

Diferenciální deformace:

$$du = \frac{N}{EA} dx \qquad d\varphi = \frac{M_y}{EI_y} dx \qquad dv = \frac{V_y}{GA^*} dx$$

Práce vnitřních sil

$$L_i = -\int_0^l \left\{ \frac{N\overline{N}}{EA} + \frac{M_y \overline{M}_y}{EI_y} + \boxed{\frac{V_y \overline{V}_y}{GA^*}} \right\} \mathrm{d}x$$

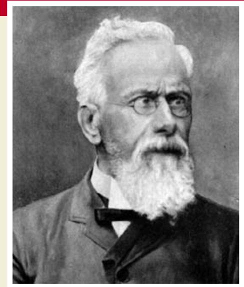
Pro h / l < 1/10 zanedbáváme

Bettiho věta o vzájemnosti virtuálních prací (1872)

$$P_1\delta_1 = P_3\delta_3 + M_4\delta_4$$

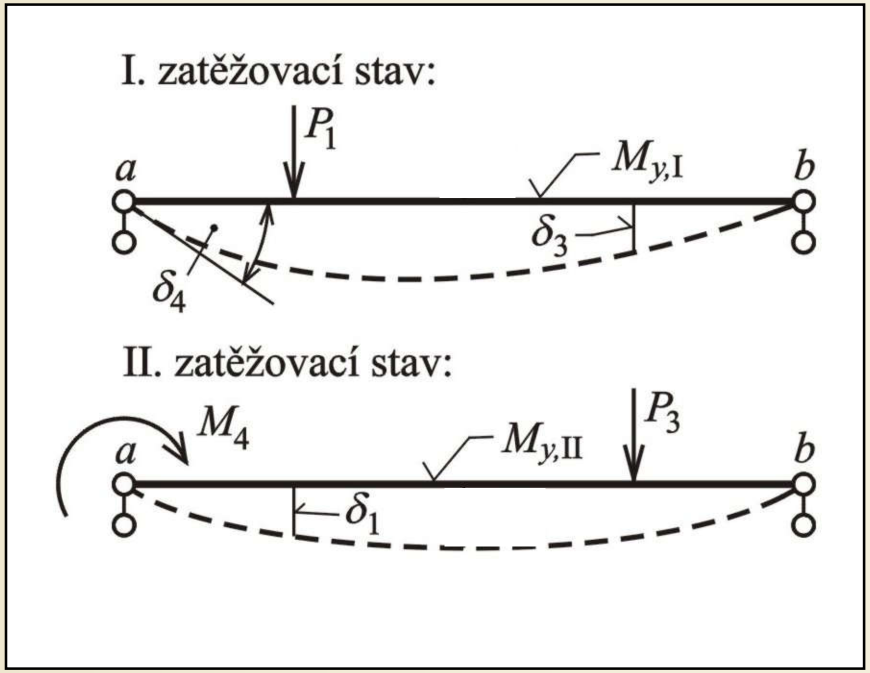
$$P_1\delta_1 = \int_0^l \frac{M_{y,\mathrm{I}} M_{y,\mathrm{II}}}{EI_y}\,\mathrm{d}x$$

$$P_3\delta_3 + M_4\delta_4 = \int_0^l \frac{M_{y,\mathrm{II}} M_{y,\mathrm{I}}}{EI_y}\,\mathrm{d}x$$



Enrico Betti
(1823 - 1892)

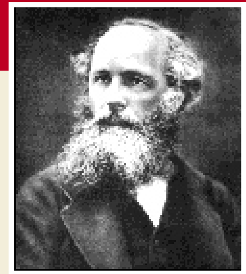
Virtuální práce vnějších sil I. stavu na odpovídajících deformacích II. stavu je rovna virtuální práci vnějších sil II. stavu na odpovídajících deformacích I. stavu.



K odvození Bettiho věty
Obr. 2.8. / str. 30

Maxwellova věta o vzájemnosti posunů

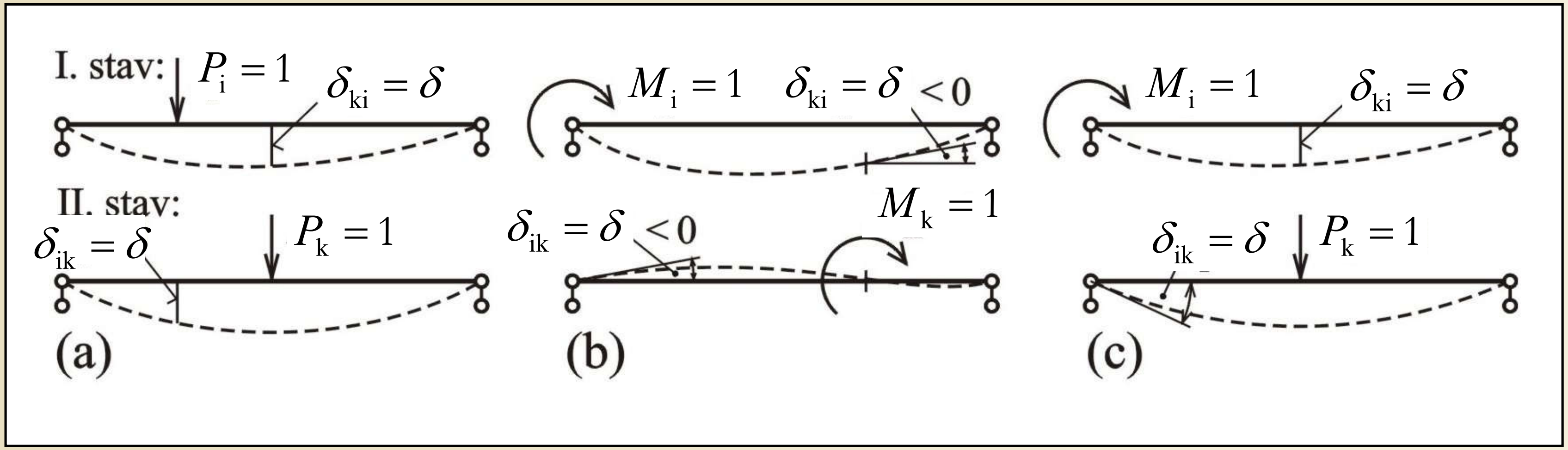
Zvláštní případ Bettiho věty, kdy v každém z obou zatěžovacích stavů působí na konstrukci jediná síla P nebo jediný moment M.



James Clerk Maxwell
(1831 - 1879)

$P_i \delta_{ik} = P_k \delta_{ki}$ $\quad P_i = P_k = P = 1$ $\quad \delta_{ik} = \delta_{ki} = \delta$

Posun způsobený první silou v místě a ve směru druhé síly je roven posunu způsobeném druhou silou v místě a ve směru první síly.



K odvození Maxwellovy věty
Obr. 2.9. / str. 31

Virtuální veličiny

Když vnější zatížení nahradíme virtuální (jednotkovou) silou popř. momentem a dopočteme příslušné virtuální (jednotkové) vnitřní síly pak získáme přetvoření.

$$P_{\mathrm{i}}\delta_{\mathrm{i}k} = 1.\delta_{\mathrm{ik}} = \delta_{\mathrm{ik}}$$

Výsledná deformace je:

- *Pro osově namáhané pruty:*

$$\delta_{\mathrm{ik}} = P_k.\delta_{\mathrm{ki}} = \int_0^l \frac{\overline{N_i} N_k}{EA}\,\mathrm{d}x$$

- *Pro ohýbané pruty:*

$$\delta_{\mathrm{ik}} = P_k.\delta_{\mathrm{ki}} = \int_0^l \frac{\overline{M_i} M_k}{EI_y}\,\mathrm{d}x$$

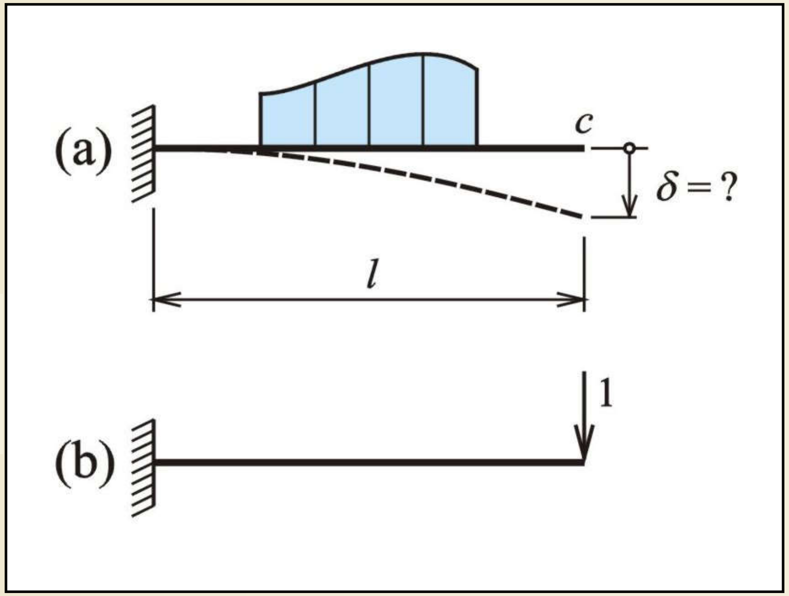
Metoda jednotkových sil

Silový princip virtuálních prací:

$$L_e + L_i = 0 \Rightarrow L_e = -L_i$$

Po dosazení

$$\sum \overline{F}_i \delta_i + \sum \overline{M}_i \varphi_i = \int_0^l \left\{ \frac{N\overline{N}}{EA} + \frac{M_y \overline{M}_y}{EI_y} + \frac{V_y \overline{V}_y}{GA^*} \right\} \mathrm{d}x$$



Silové zatížení

$$\sum \overline{F}_i \delta_i \left(popř. \sum \overline{M}_i \varphi_i \right) = \int_0^l \left\{ \frac{N\overline{N}}{EA} + \frac{M_y \overline{M}_y}{EI_y} + \frac{V_y \overline{V}_y}{GA^*} \right\} \mathrm{d}x$$

Metoda jednotkových sil
Obr. 2.10. / str. 32

$$\overline{F}_{\mathrm{i}} = 1 \left(popř\, \overline{M}_{\mathrm{i}} = 1 \right)$$

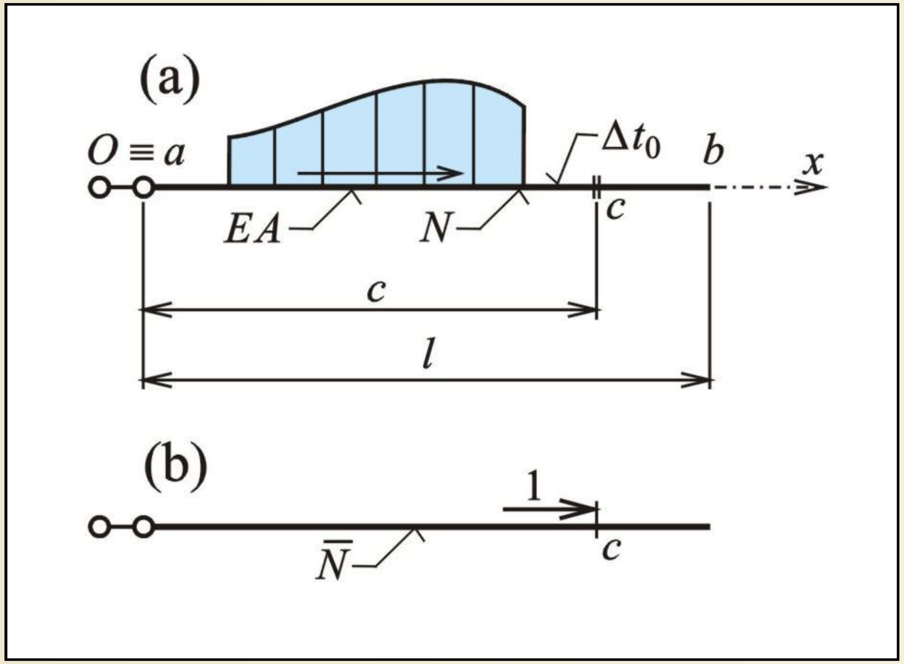
$$\overline{F}_i \delta_i = 1 \cdot \delta_i = \boxed{\delta_i = \int_0^l \left\{ \frac{N\overline{N}}{EA} + \frac{M_y \overline{M}_y}{EI_y} + \frac{M_z \overline{M}_z}{EI_z} \right\} \mathrm{d}x}$$

Deformace nosníku v osové úloze

Silové zatížení

Stálý průřez

$$\delta = u_e = \frac{1}{EA}\int_0^l N\overline{N}\,\mathrm{d}x = \frac{N_x.1.l}{EA} = \frac{\pm A_N}{EA}$$



Deformace nosníku v osové úloze
Obr. 2.11. / str. 33

Příklad 2.1 – silové zatížení

Nutno určit pro silový zatěžovací stav vodorovný posun u_c

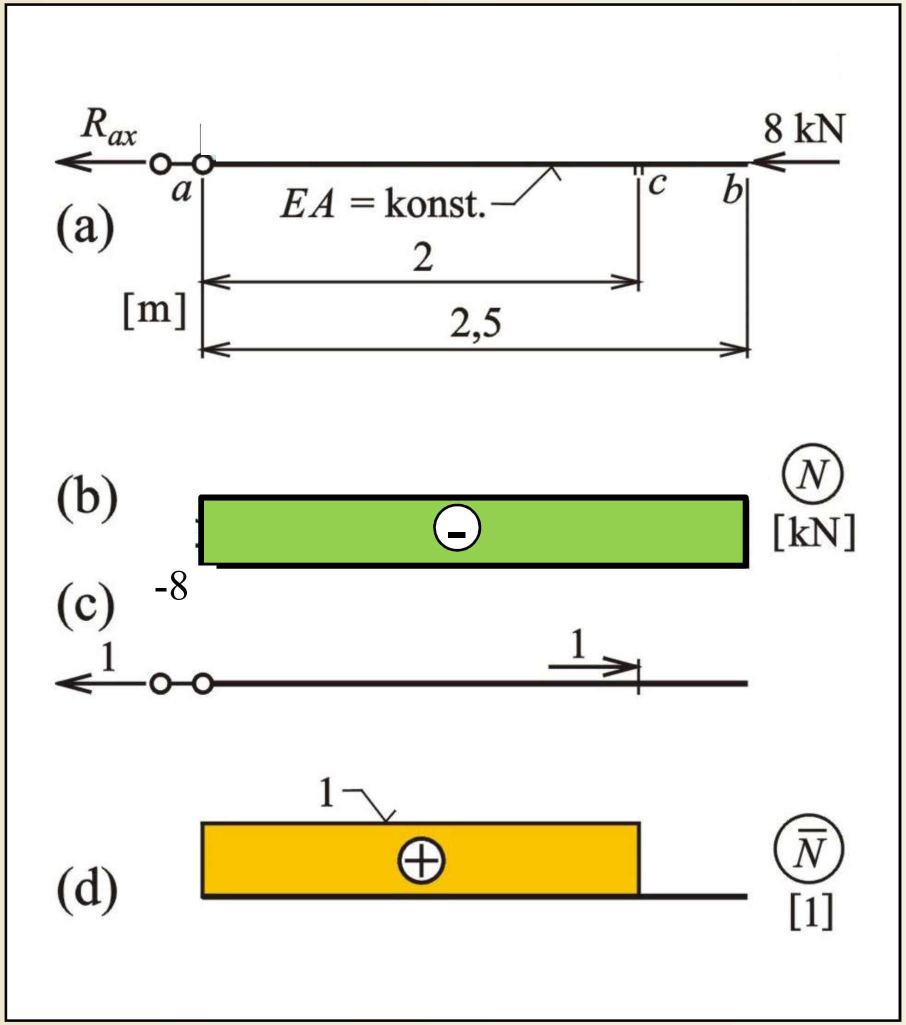
$A = 64\ \text{mm}^2$,

$E = 2{,}1.10^8\ \text{kPa}$,

Silový zatěžovací stav:

$$R_{ax} + 8 = 0$$
$$R_{ax} = -8\text{kN}$$
$$N = -8$$

$$u_c = \int_0^l \frac{N\overline{N}}{EA}\,dx = \frac{A_N}{EA} =$$
$$= \frac{-8.2}{2{,}1.10^8.6{,}4.10^{-5}} = -0{,}00119\text{m}$$
$$= 0{,}00119\text{m}(\leftarrow)$$



Zadání a řešení příkladu 2.1 – silové zatížení

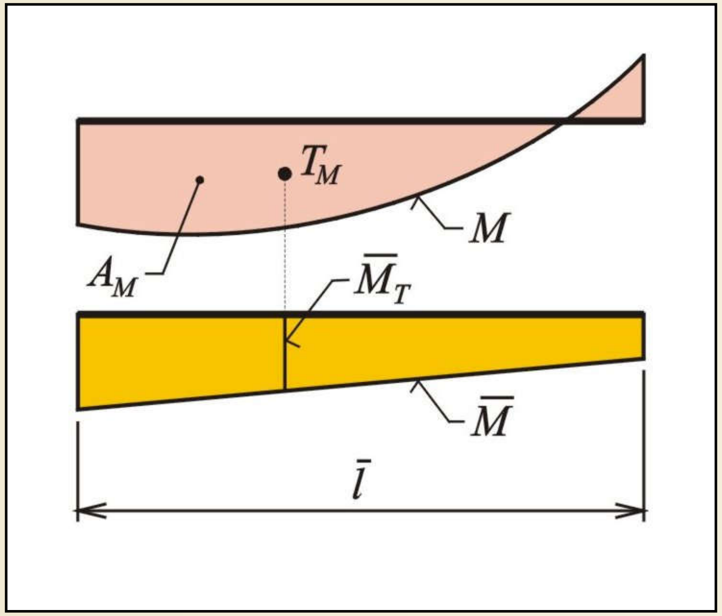
Obr. 2.12. / str. 34

Vereščaginovo pravidlo

Pomůcka pro výpočet integrálu

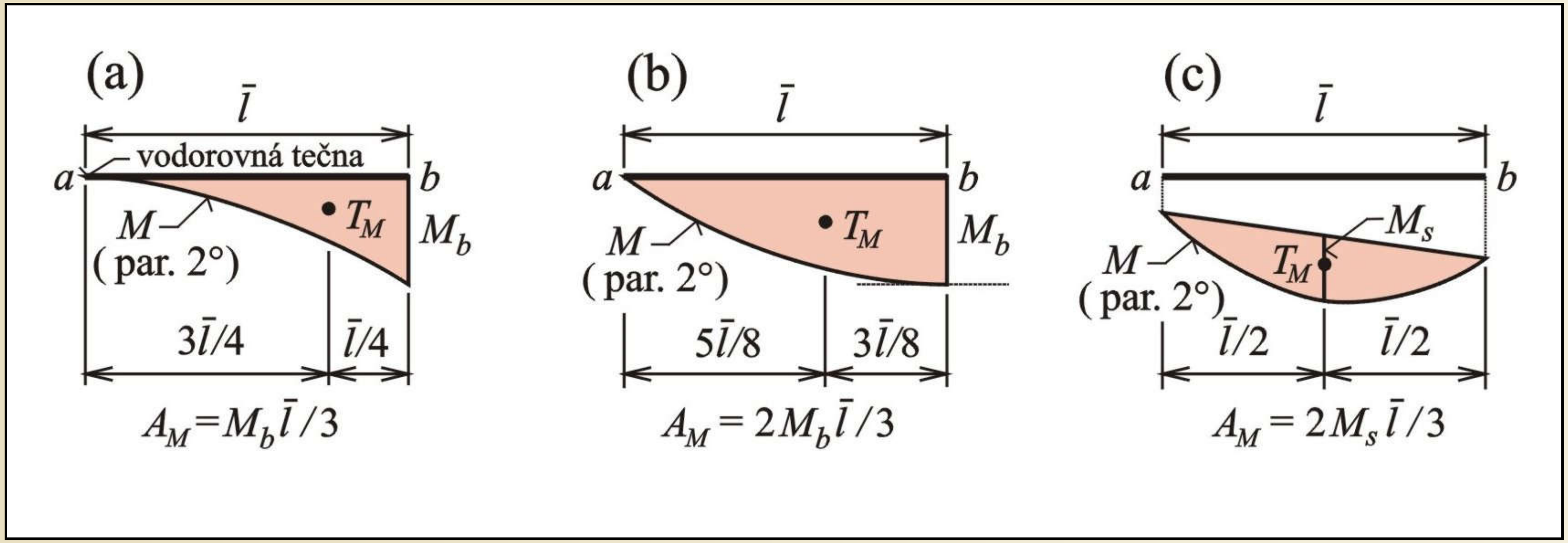
Integrál ze součinu dvou momentových funkcí, z nichž první M je hladká a spojitá a druhá $\overline{M}$ je lineární, je roven součinu plochy A_M prvního momentového obrazce a pořadnice $\overline{M}_T$ druhého momentové obrazce v místě těžiště T_M prvního momentového obrazce.

$$\int_0^l M\overline{M}\mathrm{d}x = A_M . \overline{M}_T$$



Vereščaginovo pravidlo
Obr. 2.15. / str. 37

Vereščaginovo pravidlo



Poloha těžiště parabolické části momentových obrazců pro použití Vereščaginova pravidla
Obr. 2.16. / str. 38

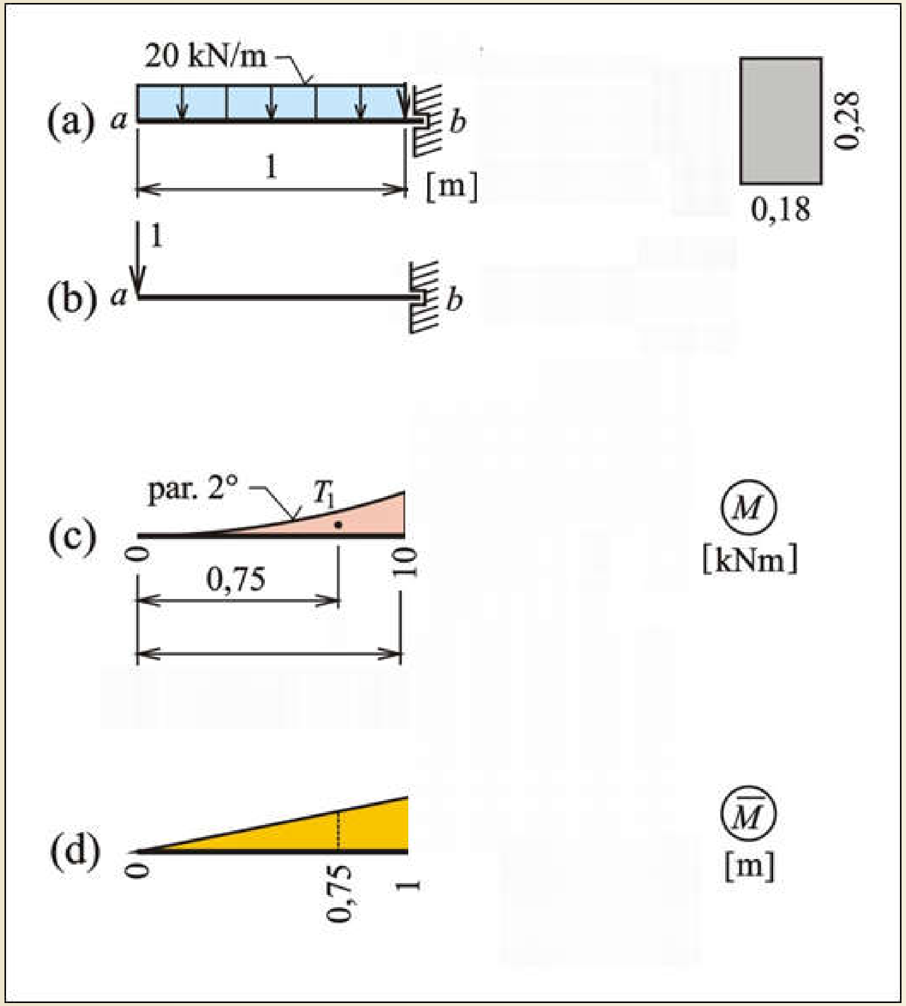
Příklad

S využitím Vereščaginova pravidla určete svislý průhyb $\delta = w_a$.

Železobetonová konzola

$E = 2{,}2.10^7$ kPa

Možno zanedbat práci posouvajících sil.



Zadání a řešení příkladu

Obr. 2.17. / str. 38

Příklad 2.3

$$EI = E\frac{bh^3}{12} = 2{,}2.10^7.0{,}18.\frac{0{,}28^3}{12} =$$

$$= 7{,}24416 \cdot 10^3 \mathrm{kNm}^2$$

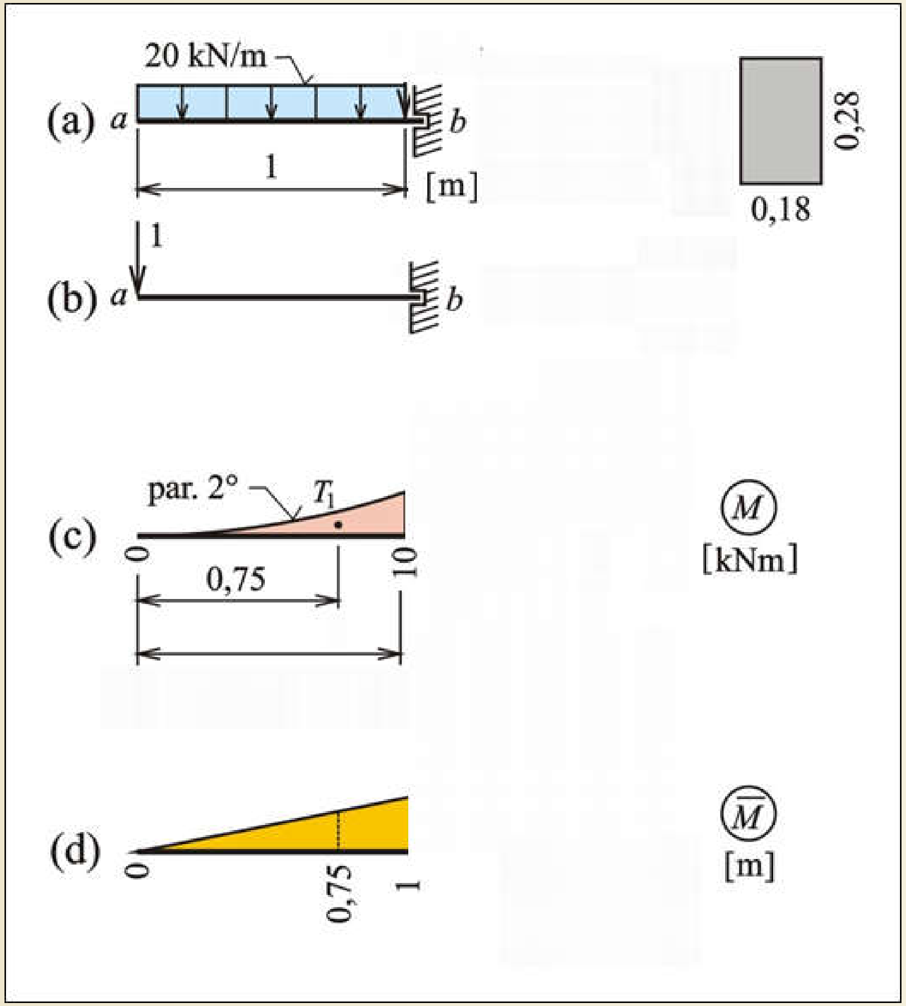
$$w_a = \int_0^2 \frac{M\overline{M}}{EI}\mathrm{d}x = \frac{1}{EI}S =$$

$$= \frac{2{,}5}{7{,}24416.10^3} = 0{,}000345\mathrm{m}$$

$$S = \int_0^1 M\overline{M}\mathrm{d}x = A_M\overline{M} \ =$$

$$= \frac{M_b.l}{3}.\overline{M} = -10.1/3.(-0.75) =$$

$$= -3{,}333.(-0{,}75) = 2{,}5\mathrm{kNm}^3$$



Zadání a řešení příkladu 2.3

Obr. 2.17. / str. 38

Architektonické a konstrukční řešení

Bitexco Financial Tower
Ho-Chi-Minh City, Vietnam

Kriteria

- firmitas - ANO;
- utilitas – ČÁSTEČNĚ
  - problem s heliportem;
- venustas – ANO.