Zkouška nanečisto

Lineární algebra

lekce 12

Osnova

1. Obecné informace
2. Okruhy k písemné zkoušce
3. Vzorová písemka

Obecné informace

Bodování

- max. 100 bodů (30 během semestru + 70 za písemnou zkoušku)
- min. 51 bodů
- obvyklý výpočet známky

Písemná zkouška

- 6 výpočetních příkladů + 1 teoretická otázka (vše za 10 bodů)
- celkem 105 minut
- teoretická otázka
  - testového charakteru (5 možností, právě 2 správné)
  - bodování: viz níže (obrazovka 24)
- doklad s fotografií (např. ISIC) s sebou

Okruhy*

Příklad 1: soustavy lineárních algebraických rovnic

- soustava 4 – 5 reálných rovnic (Gaussova eliminační metoda)

Příklad 2: vektorové prostory, lineární zobrazení

- lineární kombinace vektorů a jejich závislost/nezávislost
- souřadnice vektoru v zadané bázi
- hodnota lineárního zobrazení, vzor vektoru v zadaném lineárním zobrazení
- obor hodnot a nulový prostor lineárního zobrazení

Příklad 3: bilineární a kvadratické formy

- matice v zadané bázi (BF i KF)
- rozklad na symetrickou a antisymetrickou část (BF, čtvercová matice)
- klasifikace kvadratických forem (symetrických matic)

* Vše na reálných číslech.

Okruhy

Příklad 4: matice

- inverzní matice
- determinanty

Příklad 5: ortogonalita vektorů

- vektory kolmé k zadaným vektorům
- Gramova-Schmidtova ortogonalizace
- ortogonální projekce vektoru na zadaný podprostor

Příklad 6: vlastní vektory a vlastní čísla

- výpočet vlastních vektorů a vlastních čísel

Příklad 7: teoretická otázka

- „vše“ odpřednášené / zadané k samostudiu (prezentace)

Vzorová písemka

Příklad 1

Zadání

Pomocí Gaussovy eliminační metody řešte soustavu

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 - x_3 - x_4 &= 0 \\ -x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 &= 1 \\ 2x_1 \qquad - 3x_3 + x_4 &= 1 \\ 3x_1 - 4x_2 - x_3 \qquad &= 0 \end{aligned}$$

Řešení

- rozšířená matice soustavy a Gaussova eliminace

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -3 & 1 & 1 \\ 3 & -4 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\substack{\text{r2=r2+r1} \\ \text{r3=r3−2r1} \\ \text{r4=r4−3r1}}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 3 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\substack{\text{r3=r3−2r2} \\ \text{r4=r4+r2}}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 1 \end{array}\right) \rightarrow$$

Příklad 1

$$\rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{r4=r4+r3}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 0 \end{array}\right)$$

- zpětné dosazení

$$6x_4 = 0 \Rightarrow x_4 = 0$$

$$-3x_3 + 0 = 1 \Rightarrow x_3 = \frac{1}{3}$$

$$x_2 + \frac{1}{3} = 1 \Rightarrow x_2 = \frac{2}{3}$$

$$x_1 - \frac{2}{3} - \frac{1}{3} - 0 = 0 \Rightarrow x_1 = 1$$

Příklad 2

Zadání

Určete obor hodnot a jádro lineárního zobrazení $A: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ zadaného předpisy $A\big((1,1,0)\big) = (2,1,1)$, $A\big((1,1,1)\big) = (1,-1,1)$, $A\big((0,1,0)\big) = (1,2,0)$. Tj. nalezněte (aspoň jednu) bázi na každém z obou hledaných prostorů a určete jejich dimenzi.

Řešení

<u>Obor hodnot</u>

- $\boldsymbol{u}_1 = (2,1,1), \boldsymbol{u}_2 = (1,-1,1)$ a $\boldsymbol{u}_3 = (1,2,0)$
  - $\mathcal{H}(A) = \mathcal{L}(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3)$
  - (řádkové) Gaussovy eliminační úpravy nemění lineární obal
- $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \mathcal{H}(A) = \mathcal{L}\big((2,1,1), (0,-3,1)\big)$, $\dim \mathcal{H}(A) = 2$

Příklad 2

<u>Jádro</u>

- hledáme všechny vektory $\boldsymbol{v} = \alpha_1(1,1,0) + \alpha_2(1,1,1) + \alpha_3(0,1,0)$, pro které platí: $A(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{o}$
  - $A(\boldsymbol{v}) = A\big(\alpha_1(1,1,0) + \alpha_2(1,1,1) + \alpha_3(0,1,0)\big) = \alpha_1 A\big((1,1,0)\big) + \alpha_2 A\big((1,1,1)\big) + \alpha_3 A\big((0,1,0)\big) =$
    $= \alpha_1(2,1,1) + \alpha_2(1,-1,1) + \alpha_3(1,2,0)$
  - $\alpha_1(2,1,1) + \alpha_2(1,-1,1) + \alpha_3(1,2,0) = (0,0,0)$ → SLAR pro neznámé α_1, α_2 a α_3

- řešení

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{array}{l} \alpha_1 = -t \\ \alpha_2 = t \\ \alpha_3 = t \end{array} \quad (t \in \mathbb{R})$$

- $\boldsymbol{v} = -t(1,1,0) + t(1,1,1) + t(0,1,0) = \cdots = t(0,1,1)$

- $\mathcal{N}(A) = \mathcal{L}\big((0,1,1)\big), \quad \dim \mathcal{N}(A) = 1$

Příklad 3

Zadání

Klasifikujte kvadratickou formu $A\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$, $A(\mathbf{x}) = x_2^2 + x_4^2 - 2x_1x_2 - 2x_1x_3 - 2x_3x_4$

Řešení

- matice kvadratické formy (v kanonické bázi)

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

- převod do diagonálního tvaru „Gaussovými“ kongruencemi

$$\mathbf{A} \xrightarrow{\mathrm{r1=r1+r2}} \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\mathrm{s1=s1+s2}} \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \to \cdots$$

Příklad 3

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{r3=r3−r1}} \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{s3=s3−s1}} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{r4=r4+r3}} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{s4=s4+s3}} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- $d_{11} < 0,\ d_{22} > 0,\ d_{33} > 0,\ d_{44} = 0 \ \Longrightarrow$
  - matice **A** je indefinitní
  - kvadratická forma *A* je indefinitiní

Příklad 4

Zadání

Určete matici inverzní k matici $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Řešení

Gaussova-Jordanova eliminační metoda (nejjednodušší možnost)

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{r3}\leftrightarrow\text{r4}]{\text{r2=r2}-\text{r1}} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\cdots}$$

Příklad 4

$$\xrightarrow{\dots}\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\mathrm{r3=r3-r4}} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\mathrm{r1=r1+r2}}$$

$$\rightarrow\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\mathrm{r2=-r2}} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Poznámka: Vždy je doporučena zkouška $(\mathbf{A}^{-1}.\mathbf{A} = \mathbf{I})$.

Příklad 4 (alternativa)

Zadání

Určete determinant matice $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Řešení

- Gaussova eliminační metoda

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{r2=r2-r1 \\ r3\leftrightarrow r4}]{} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(\mathbf{A}) = 1 \times (-1) \times 1 \times 1 \times (-1) = 1$$

Příklad 4 (alternativa)

- rozvoj podle řádku

$$\det(\mathbf{A}) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \times {}_{\dots} + 0 \times {}_{\dots} + 0 \times {}_{\dots} + 1 \times (-1)^{3+4} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= -\left[0 \times {}_{\dots} + 0 \times {}_{\dots} + 1 \times (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}\right] = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -(1 \times 0 - 1 \times 1) = 1$$

Příklad 5

Zadání

Nalezněte všechny vektory z $\mathbb{R}^4$ kolmé (ortogonální) k vektorům $\boldsymbol{a} = (1,2,3,4)$, $\boldsymbol{b} = (4,3,2,1)$ a $\boldsymbol{c} = (1,1,1,1)$.

Řešení

- hledané vektory označme $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)$
- pak platí

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{a} &\equiv 1x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0 \\ \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{b} &\equiv 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 1x_4 = 0 \\ \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{c} &\equiv 1x_1 + 1x_2 + 1x_3 + 1x_4 = 0 \end{aligned} \quad \rightarrow \quad \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \text{Gaussova metoda}$$

Příklad 5

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{r3=r3−r1}]{\text{r2=r2−4r1}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & -5 & -10 & -15 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -3 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{r3=−r3}]{\text{r2=−r2/5}}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{r3=r3−r2}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$x_4 = t,\ \ x_3 = s,\ x_2 = -2s - 3t,\ x_1 = \cdots = s + 2t \quad (t, s \in \mathbb{R})$$

- $\boldsymbol{x} = (s + 2t, -2s - 3t,\ s,\ t) = s(1, -2, 1, 0) + t(2, -3, 0, 1) \in \mathcal{L}\big((1, -2, 1, 0), (2, -3, 0, 1)\big)$

Příklad 5 (alternativa 1)

Zadání

Pomocí Gramova-Schmidtova algoritmu ortogonalizujte [ortonormalizujte] zadané vektory z $\mathbb{R}^3$:
$\boldsymbol{a}_1 = (1,1,0)$, $\boldsymbol{a}_2 = (0,1,1)$ a $\boldsymbol{a}_3 = (0,1,0)$. (viz lekce 9, obrazovka 17)

Řešení

- $\boldsymbol{b}_1 = \boldsymbol{a}_1 = (1,1,0)$

  $\boldsymbol{b}_1' = \frac{(1,1,0)}{\sqrt{1^2+1^2+0^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$

- $\boldsymbol{b}_2 = \boldsymbol{a}_2 - \alpha_1^{(2)}\boldsymbol{b}_1$, kde $\alpha_1^{(2)} = \frac{\boldsymbol{a}_2 \cdot \boldsymbol{b}_1}{\boldsymbol{b}_1 \cdot \boldsymbol{b}_1}$
  - $\alpha_1^{(2)} = \frac{(0,1,1)\cdot(1,1,0)}{(1,1,0)\cdot(1,1,0)} = \frac{0\times1+1\times1+1\times0}{1\times1+1\times1+0\times0} = \frac{1}{2}$
  - $\boldsymbol{b}_2 = (0,1,1) - \frac{1}{2}(1,1,0) = \cdots = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1\right) \to (-1,1,2)$

    $\boldsymbol{b}_2' = \cdots = \frac{1}{\sqrt{6}}(-1,1,2) = \left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}\right)$

Příklad 5 (alternativa 1)

Zadání

Pomocí Gramova-Schmidtova algoritmu ortogonalizujte (ortonormalizujte) zadané vektory z $\mathbb{R}^3$: $\boldsymbol{a}_1 = (1,1,0)$, $\boldsymbol{a}_2 = (0,1,1)$ a $\boldsymbol{a}_3 = (0,1,0)$. (viz lekce 9, obrazovka 17)

Řešení

- $\boldsymbol{b}_3 = \boldsymbol{a}_3 - \alpha_1^{(3)}\boldsymbol{b}_1 - \alpha_2^{(3)}\boldsymbol{b}_2$, kde $\alpha_1^{(3)} = \frac{\boldsymbol{a}_3\cdot\boldsymbol{b}_1}{\boldsymbol{b}_1\cdot\boldsymbol{b}_1}$ a $\alpha_2^{(3)} = \frac{\boldsymbol{a}_3\cdot\boldsymbol{b}_2}{\boldsymbol{b}_2\cdot\boldsymbol{b}_2}$
  - $\alpha_1^{(3)} = \frac{(0,1,0)\cdot(1,1,0)}{(1,1,0)\cdot(1,1,0)} = \frac{1}{2}$, $\alpha_2^{(3)} = \frac{(0,1,0)\cdot(-1,1,2)}{(-1,1,2)\cdot(-1,1,2)} = \frac{1}{6}$
  - $\boldsymbol{b}_3 = (0,1,0) - \frac{1}{2}(1,1,0) - \frac{1}{6}(-1,1,2) = \cdots = \left(-\frac{1}{3},\frac{1}{3},-\frac{1}{3}\right) \to (-1,1,-1)$
    $\boldsymbol{b}'_3 = \cdots = \left(-\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

- $\boldsymbol{b}_1 = (1,1,0)$, $\boldsymbol{b}_2 = (-1,1,2)$, $\boldsymbol{b}_3 = (-1,1,-1)$; $\boldsymbol{b}'_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},0\right)$, $\boldsymbol{b}'_2 = \left(-\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{2}{\sqrt{6}}\right)$, $\boldsymbol{b}'_3 = \left(-\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

Příklad 5 (alternativa 2)

Zadání

Nalezněte ortogonální projekci vektoru $\boldsymbol{c} = (1,1,1,1)$ na $\mathcal{L}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$, kde $\boldsymbol{a} = (1,2,3,4)$ a $\boldsymbol{b} = (4,3,2,1)$.

Řešení

- hledanou ortogonální projekci označme $\boldsymbol{x}$. Platí tedy: $\boldsymbol{x} = \alpha\boldsymbol{a} + \beta\boldsymbol{b} = (\alpha + 4\beta, 2\alpha + 3\beta, 3\alpha + 2\beta, 4\alpha + \beta)$.
- dále musí platit (současně)

  $(\boldsymbol{c} - \boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{a} = \boldsymbol{0} \iff (1 - \alpha - 4\beta) \times 1 + (1 - 2\alpha - 3\beta) \times 2 + (1 - 3\alpha - 2\beta) \times 3 + (1 - 4\alpha - \beta) \times 4 = 0$

  $(\boldsymbol{c} - \boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{b} = \boldsymbol{0} \iff (1 - \alpha - 4\beta) \times 4 + (1 - 2\alpha - 3\beta) \times 3 + (1 - 3\alpha - 2\beta) \times 2 + (1 - 4\alpha - \beta) \times 1 = 0$

  neboli

  $3\cancel{0}\alpha + 2\cancel{0}\beta = 1\cancel{0}$,

  $2\cancel{0}\alpha + 30\beta = 1\cancel{0}$.

- standardní řešení ... $\alpha = 1/5,\ \beta = 1/5$, a tedy $\boldsymbol{x} = (1,1,1,1)$. (Interpretace!)

Příklad 6

Zadání

Určete všechna vlastní čísla a jim odpovídající vlastní vektory matice $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Řešení

- vlastní čísla
  - $\begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0$
  - $\begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 0 & -\lambda & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 & 0 & -\lambda \\ 0 & 1 & -\lambda & 0 & 1 \end{vmatrix} =$

$$= (-\lambda)^3 + 0 \times 1 \times 0 + 0 \times 0 \times 1 - 0 \times (-\lambda) \times 0 - (-\lambda) \times 1 \times 1 - 0 \times 0 \times (-\lambda) = -\lambda^3 + \lambda$$

Příklad 6

- $-\lambda^3 + \lambda = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 0, \lambda_3 = -1$

- vlastní vektory
  - $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda & 0 \end{array}\right)$
  - $\lambda_1 = 1$: $\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{r3=r3+r2}} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ t \\ t \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $t \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$
  - $\lambda_2 = 0$: $\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} s \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $s \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$

Příklad 6

- $\lambda_3 = -1$: $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{r3=r3−r2}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -r \\ r \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix},$
  $r \in \mathbb{C} \backslash \{0\}$

<u>shrnutí</u>

- $\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 0, \quad \lambda_3 = -1$
- $\mathbf{v}_1 = t\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = s\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = r\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (t, s, r \in \mathbb{C} \backslash \{0\})$

Teoretická otázka

Zadání

Vyberte a zřetelně označte (např. zakroužkováním písmene) pravdivá tvrzení:

a) Jestliže je $\mathbf{A}^{-1}$ inverzní matice k matici $\mathbf{A}$, pak $\mathbf{A}^{-1}.\mathbf{A} = \mathbf{I}$, ale nemusí platit $\mathbf{A}.\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{I}$.

b) Pro každou reálnou čtvercovou matici existuje matice inverzní.

c) Pro reálnou čtvercovou matici existuje matice inverzní, právě když je její determinant nenulový.

d) Matici, k níž existuje matice inverzní, nazýváme singulární.

e) Jestliže je $\mathbf{A}^{-1}$ inverzní matice k matici $\mathbf{A}$, pak $\mathbf{A}^{-1}.\mathbf{A} = \mathbf{A}.\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{I}$.

Teoretická otázl

Pravdivá budou vždy právě dvě tvrzení. Pokud si nebudete jisti, můžete zvolit jen jedno.

Hodnocení:

a) dvě správně vybraná pravdivá tvrzení – 10 bodů,
b) dvě vybraná tvrzení, z nichž jedno je pravdivé a jedno nepravdivé – 4 body,
c) jen jedno vybrané tvrzení, které je ale pravdivé – 6 bodů,
d) v ostatních případech – 0 bodů.

Zadání

Vyberte a zřetelně označte (např.

a) Jestliže je $\mathbf{A}^{-1}$ inverzní mat
b) Pro každou reálnou čtvercovou
c) Pro reálnou čtvercovou matici existuje matice inverzní, právě když je její determinant nenulový.
d) Matici, k níž existuje matice inverzní, nazýváme singulární.
e) Jestliže je $\mathbf{A}^{-1}$ inverzní matice k matici $\mathbf{A}$, pak $\mathbf{A}^{-1}.\mathbf{A} = \mathbf{A}.\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{I}$.

Teoretická otázka

Řešení

Vyberte a zřetelně označte (např. zakroužkováním písmene) pravdivá tvrzení:

a) Jestliže je $\mathbf{A}^{-1}$ inverzní matice k matici $\mathbf{A}$, pak $\mathbf{A}^{-1}.\mathbf{A} = \mathbf{I}$, ale nemusí platit $\mathbf{A}.\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{I}$.

b) Pro každou reálnou čtvercovou matici existuje matice inverzní.

c) Pro reálnou čtvercovou matici existuje matice inverzní, právě když je její determinant nenulový.

d) Matici, k níž existuje matice inverzní, nazýváme singulární.

e) Jestliže je $\mathbf{A}^{-1}$ inverzní matice k matici $\mathbf{A}$, pak $\mathbf{A}^{-1}.\mathbf{A} = \mathbf{A}.\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{I}$.

Teoretická otázka

Řešení

Vyberte a zřetelně označte (např. za

Pro inverzní matici platí vždy obě rovnosti současně, tedy $\mathbf{A}.\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}.\mathbf{A} = \mathbf{I}$.

a) Jestliže je $\mathbf{A}^{-1}$ inverzní matice k matici $\mathbf{A}$, pak $\mathbf{A}^{-1}.\mathbf{A} = \mathbf{I}$, ale nemusí platit $\mathbf{A}.\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{I}$.

b) Pro každou reálnou čtvercovou matici existuje matice inverzní.

c) Pro reálnou čtvercovou matici existuje matice inverzní, právě když je její determinant nenulový.

d) Matici, k níž existuje matice inverzní, nazýváme singulární.

e) Jestliže je $\mathbf{A}^{-1}$ inverzní matice k matici $\mathbf{A}$, pak $\mathbf{A}^{-1}.\mathbf{A} = \mathbf{A}.\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{I}$.

Teoretická otázka

Řešení

Vyberte a zřetelně označte (nap

Inverzní matice existuje jen pro regulární matice a neexistuje pro matice singulární, např. pro matici nulovou.

a) Jestliže je $\mathbf{A}^{-1}$ inverzní ma … atit $\mathbf{A}.\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{I}$.

b) Pro každou reálnou čtvercovou matici existuje matice inverzní.

c) Pro reálnou čtvercovou matici existuje matice inverzní, právě když je její determinant nenulový.

d) Matici, k níž existuje matice inverzní, nazýváme singulární.

e) Jestliže je $\mathbf{A}^{-1}$ inverzní matice k matici $\mathbf{A}$, pak $\mathbf{A}^{-1}.\mathbf{A} = \mathbf{A}.\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{I}$.

Teoretická otázka

Řešení

Vyberte a zřetelně označte (např. zakroužkováním písmene) pravdivá tvrzení:

a) Jestliže je $\mathbf{A}^{-1}$ inverzní matice k matici $\mathbf{A}$, pak $\mathbf{A}^{-1}.\mathbf{A} = \mathbf{I}$, ale nemusí platit $\mathbf{A}.\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{I}$.

b) Pro každou erzní.

c) Pro reálnou ávě když je její determinant nenulový.

Právě naopak, pro singulární matici inverzní matice neexistuje. Matice, pro kterou existuje inverzní matice, se nazývá regulární.

d) Matici, k níž existuje matice inverzní, nazýváme singulární.

e) Jestliže je $\mathbf{A}^{-1}$ inverzní matice k matici $\mathbf{A}$, pak $\mathbf{A}^{-1}.\mathbf{A} = \mathbf{A}.\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{I}$.

Konec lekce 12.

Mnoho štěstí (a solidní znalosti) u písemek ...