Úvod

Tato sbírka úloh z lineární algebry je určena studentům Fakulty elektrotechniky a informatiky VŠB - Technické univerzity Ostrava. Těmto studentům je především určeno skriptum profesora Zdeňka Dostála "LINEÁRNÍ ALGEBRA", k němuž jako studijní příloha má tato sbírka sloužit. Využít ji mohou také studenti kombinovaného studia jako doplněk studijní opory "LINEÁRNÍ ALGEBRA pro kombinované a distanční studium". Každá kapitola, respektive podkapitola (sekce) obsahuje stručné teoretické informace (definice, věty, vzorce). Potom následují podrobně řešené příklady a úlohy k samostatnému řešení. Na konci každé sekce jsou uvedeny výsledky úloh.

Sbírka úloh nemůže v žádném případě nahradit výše zmíněné skriptum, kde je učivo v plném rozsahu vyloženo a navíc velice pěkně a vhodně motivováno. Student by se měl tedy nejprve jeho prostřednictvím seznámit s teorií a teprve potom se pokusit o samostatné řešení ukázkových příkladů. Porovnání vlastního řešení s ukázkovým řešením mu tak pomůže odhalit případné nedostatky v teoretických znalostech, které je nutno doplnit. Neřešené úlohy by už pak neměly představovat vážný problém.

Nezbývá než doufat, že tato sbírka pomůže studentům při studiu lineární algebry, jež patří k základům matematického vzdělání dnešního inženýra. Na závěr bych chtěl ještě poděkovat ing. Martině Litschmannové za cenné připomínky, které přispěly k lepší srozumitelnosti předloženého textu.

Kapitola 1

Matice a řešení soustav lineárních rovnic

1.1 Aritmetické vektory

Aritmetickým vektorem rozumíme uspořádanou n-tici čísel. Píšeme $\mathbf{u} = [u_1, u_2, \ldots, u_n]$, čísla $u_1, u_2, \ldots, u_n$ nazýváme *složky* vektoru a jejich počet jeho *rozměrem* nebo *dimenzí.* Pro aritmetické vektory $\mathbf{u} = [u_1, u_2, \ldots, u_n]$, $\mathbf{v} = [v_1, v_2, \ldots, v_n]$ stejné dimenze a skalár (číslo) α definujeme

- *rovnost:* $\mathbf{u} = \mathbf{v} \Leftrightarrow u_1 = v_1, u_2 = v_2, \ldots, u_n = v_n$;
- *sčítání:* $\mathbf{u} + \mathbf{v} = [u_1 + v_1, u_2 + v_2, \ldots, u_n + v_n]$;
- *násobení skalárem:* $\alpha\mathbf{u} = [\alpha u_1, \alpha u_2, \ldots, \alpha u_n]$.

Vektor $\mathbf{o} = [0, 0, \ldots, 0]$ se nazývá *nulový vektor* a vektor $-\mathbf{u} = [-u_1, -u_2, \ldots, -u_n] = -1\mathbf{u}$ *opačný vektor* k vektoru $\mathbf{u}$. Snadno shledáme, že pro libovolné vektory stejné dimenze $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ a skaláry α, β platí:

V1 $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w})$;
V2 $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$;
V3 $\mathbf{u} + \mathbf{o} = \mathbf{u}$;
V4 $\mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = \mathbf{o}$;
V5 $\alpha(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \alpha\mathbf{u} + \alpha\mathbf{v}$;
V6 $(\alpha + \beta)\mathbf{u} = \alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{u}$;
V7 $\alpha(\beta\mathbf{u}) = (\alpha\beta)\mathbf{u}$;
V8 $1\mathbf{u} = \mathbf{u}$.

Dokázat vlastnosti V1 - V8 je velmi snadné, a tak si důkazy většiny z nich necháme na cvičení.

Příklad 1. Dokažte platnost komutativního zákona (vlastnost V2).

Důkaz: Nechť $\mathbf{u} = [u_1, u_2, \ldots, u_n]$, $\mathbf{v} = [v_1, v_2, \ldots, v_n]$, máme

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = [u_1 + v_1, u_2 + v_2, \ldots, u_n + v_n]$$

a

$$\mathbf{v} + \mathbf{u} = [v_1 + u_1, v_2 + u_2, \ldots, v_n + u_n].$$

Tyto vektory se rovnají. Jsou stejné dimenze a jejich odpovídající složky se rovnají, neboť pro sčítání čísel komutativní zákon platí.

Příklad 2. Dokažte vlastnost V6 (distributivní zákon).

Důkaz: Položíme-li $\mathbf{u} = [u_1, u_2, \ldots, u_n]$, potom

$$\begin{aligned}
(\alpha + \beta)\,\mathbf{u} &= (\alpha + \beta)\,[u_1, u_2, \ldots, u_n] \\
&= [(\alpha + \beta)\,u_1, (\alpha + \beta)\,u_2, \ldots, (\alpha + \beta)\,u_n] \\
&= [\alpha u_1 + \beta u_1, \alpha u_2 + \beta u_2, \ldots, \alpha u_n + \beta u_n] \\
&= [\alpha u_1, \alpha u_2, \ldots, \alpha u_n] + [\beta u_1, \beta u_2, \ldots, \beta u_n] \\
&= \alpha \mathbf{u} + \beta \mathbf{u}.
\end{aligned}$$

Platnost vlastnosti V6 tak opět vyplývá z analogické vlastnosti $(\alpha + \beta)\,u_i = \alpha u_i + \beta u_i$ pro čísla.

Cvičení:

1. Jsou dány vektory $\mathbf{u} = [1, -2, -3]$, $\mathbf{v} = [-2, 2, -1]$, $\mathbf{w} = [-1, -2, -11]$, $\mathbf{x} = [0, 0, 0, 0]$. Vypočtěte: a) $2\mathbf{u} + \mathbf{v}$; b) $3\mathbf{u} + 2\mathbf{v} - \mathbf{w}$; c) $\mathbf{u} + \mathbf{x}$.
2. Dokažte platnost ostatních vlastností V1 - V8.

Výsledky:

1. a) $[0, -2, -7]$; b) $[0, 0, 0]$; c) není definováno.
2. Návod: postupujte obdobně jako v ukázkových příkladech.

1.2 Algebra matic

Maticí $\mathbf{A}$ o rozměru $m \times n$ (čti: "em na en") nazýváme schéma mn *reálných,* resp. *komplexních* čísel a_{ik} $(i = 1, \ldots, m;\ k = 1, \ldots, n)$, sestavených v m řádcích a n sloupcích:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11}, & a_{12}, & \ldots, & a_{1n} \\ a_{21}, & a_{22}, & \ldots, & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}, & a_{m2}, & \ldots, & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Matici o rozměru $m \times n$ nebo také typu (m, n) zapisujeme $\mathbf{A} = [a_{ik}]_{m \times n}$, $\mathbf{A}_{m \times n}$, $[a_{ik}]$ nebo stručně $\mathbf{A}$. Je-li $m = n$, mluvíme o *čtvercové matici stupně (řádu) n*. Prvky $a_{11}, a_{22}, a_{33}, \ldots$ tvoří *hlavní diagonálu* matice. Symboly $\mathbf{r}_i^{\mathbf{A}}$, $\mathbf{s}_k^{\mathbf{A}}$ označujeme *i-tý řádek* a *k-tý sloupec* matice $\mathbf{A}$, tzn.

$\mathbf{r}_i^{\mathbf{A}} = [a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in}]$, $\mathbf{s}_k^{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} a_{1k} \\ \vdots \\ a_{mk} \end{bmatrix}$.

Jsou to vlastně naše známé aritmetické vektory, neboli matice typu $(1, n)$ a $(m, 1)$.

- Řekneme, že dvě matice se *rovnají*, jsou-li stejného typu a mají-li na stejných místech stejné prvky, tzn. $\mathbf{A} = \mathbf{B}$, právě když $a_{ik} = b_{ik}$ pro každé $i = 1, \ldots, m;\ k = 1, \ldots, n$.
- *Maticí transponovanou k matici* $\mathbf{A} = [a_{ik}]_{m \times n}$ nazýváme matici $\mathbf{A}^T = \left[a_{ki}^T\right]_{n \times m}$, pro niž platí $a_{ki}^T = a_{ik}$ $(i = 1, \ldots, m;\ k = 1, \ldots, n)$. Transponování matice převádí řádky ve sloupce a naopak.
- Matice $\mathbf{A} = [a_{ik}]_{n \times n}$ se nazývá *symetrick*á, platí-li $\mathbf{A} = \mathbf{A}^T$, tj. $a_{ik} = a_{ki}$ $(i, k = 1, \ldots, n)$.
- *Součinem čísla (skaláru)* α a *matice* $\mathbf{A} = [a_{ik}]_{m \times n}$ nazýváme matici $\mathbf{B} = [\alpha a_{ik}]_{m \times n}$.
- *Součtem matic* $\mathbf{A} = [a_{ik}]_{m \times n}$, $\mathbf{B} = [b_{ik}]_{m \times n}$ rozumíme matici $\mathbf{C} = [a_{ik} + b_{ik}]_{m \times n}$.

- *Součinem matic* $\mathbf{A} = [a_{ik}]_{m\times n}$ a $\mathbf{B} = [b_{kj}]_{n\times p}$ se nazývá matice $\mathbf{C} = [c_{ij}]_{m\times p}$ taková, že $c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} = \mathbf{r}_i^{\mathbf{A}} \cdot \mathbf{s}_j^{\mathbf{B}}$ $(i = 1, \ldots, m;\ j = 1, \ldots, p)$. (Slovy: *řádky* matice $\mathbf{A}$ násobíme *sloupci* matice $\mathbf{B}$.)
- Matice, jejíž všechny prvky jsou nuly, se nazývá *nulová matice.* Označujeme ji obvykle $\mathbf{O}$.
- Čtvercová matice $\mathbf{I}$, jež má na hlavní diagonále všechny prvky rovny 1 a všechny ostatní prvky rovny 0, se nazývá *jednotková matice.*

Vlastnosti maticových operací

Nechť $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ jsou libovolné matice a α, β libovolné reálné, resp. komplexní skaláry. Pokud mají níže uvedené operace smysl (tj. mají-li uvedené matice předepsaný typ), potom platí:

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{A}+\mathbf{B}=\mathbf{B}+\mathbf{A};\\
&(\mathbf{A}+\mathbf{B})+\mathbf{C}=\mathbf{A}+(\mathbf{B}+\mathbf{C});\\
&\mathbf{A}+\mathbf{O}=\mathbf{A};\\
&\alpha(\mathbf{A}+\mathbf{B})=\alpha\mathbf{A}+\alpha\mathbf{B};\\
&(\alpha+\beta)\mathbf{A}=\alpha\mathbf{A}+\beta\mathbf{A};\\
&(\mathbf{A}\mathbf{B})\mathbf{C}=\mathbf{A}(\mathbf{B}\mathbf{C});\\
&\mathbf{A}\mathbf{I}=\mathbf{A},\ \mathbf{I}\mathbf{B}=\mathbf{B}\\
&\alpha(\mathbf{A}\mathbf{B})=(\alpha\mathbf{A})\mathbf{B}=\mathbf{A}(\alpha\mathbf{B});\\
&(\alpha\beta)\mathbf{A}=\alpha(\beta\mathbf{A});\\
&\mathbf{A}(\mathbf{B}+\mathbf{C})=\mathbf{A}\mathbf{B}+\mathbf{A}\mathbf{C};\\
&(\mathbf{A}+\mathbf{B})\mathbf{C}=\mathbf{A}\mathbf{C}+\mathbf{B}\mathbf{C};\\
&\left(\mathbf{A}^T\right)^T=\mathbf{A};\\
&(\mathbf{A}+\mathbf{B})^T=\mathbf{A}^T+\mathbf{B}^T;\\
&(\mathbf{A}\mathbf{B})^T=\mathbf{B}^T\mathbf{A}^T.
\end{aligned}
$$

Poznámka 1. Komutativní zákon pro násobení matic zde nenajdeme, obecně totiž $\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$. S vyjímkou asociativního zákona pro násobení matic a transponování součinu matic není obtížné ověřit platnost těchto vlastností.

Příklad 1. Vypočtěte matici $\mathbf{X} = \mathbf{AB} + \lambda\mathbf{C}$, jestliže

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}0, & -1, & 1\\ 1, & 2, & 1\\ 1, & 0, & -2\end{bmatrix},\ \mathbf{B}=\begin{bmatrix}2\\ 0\\ -1\end{bmatrix},\ \lambda=-2,\ \mathbf{C}=\begin{bmatrix}1\\ 2\\ 3\end{bmatrix}.$$

Řešení: Nejdříve vypočteme součin $\mathbf{AB}$.

$$\mathbf{AB}=\begin{bmatrix}0, & -1, & 1\\ 1, & 2, & 1\\ 1, & 0, & -2\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}2\\ 0\\ -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\cdot 2+(-1\cdot 0)+1\cdot(-1)\\ 1\cdot 2+2\cdot 0+1\cdot(-1)\\ 1\cdot 2+0\cdot 0+(-2)\cdot(-1)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1\\ 1\\ 4\end{bmatrix}.$$

Odtud pak $\mathbf{X}=\begin{bmatrix}-1\\ 1\\ 4\end{bmatrix}+(-2)\begin{bmatrix}1\\ 2\\ 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-3\\ -3\\ -2\end{bmatrix}.$

Příklad 2. Vyjádřete matice $\mathbf{AA}^T$, $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$, kde

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1, & -2\\ -1, & 1\\ 2, & 0\end{bmatrix}.$$

Řešení: Určíme transponovanou matici $\mathbf{A}^T$.

$$\mathbf{A}^T = \begin{bmatrix} 1, & -1, & 2 \\ -2, & 1, & 0 \end{bmatrix}, \text{ potom } \mathbf{A}\mathbf{A}^T = \begin{bmatrix} 1, & -2 \\ -1, & 1 \\ 2, & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1, & -1, & 2 \\ -2, & 1, & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1\cdot 1 + (-2)\cdot(-2), & 1\cdot(-1) + (-2)\cdot 1, & 1\cdot 2 + (-2)\cdot 0 \\ (-1)\cdot 1 + 1\cdot(-2), & -1\cdot(-1) + 1\cdot 1, & -1\cdot 2 + 1\cdot 0 \\ 2\cdot 1 + 0\cdot(-2), & 2\cdot(-1) + 0\cdot 1, & 2\cdot 2 + 0\cdot 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5, & -3, & 2 \\ -3, & 2, & -2 \\ 2, & -2, & 4 \end{bmatrix},$$

zatímco

$$\mathbf{A}^T\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1, & -1, & 2 \\ -2, & 1, & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1, & -2 \\ -1, & 1 \\ 2, & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6, & -3 \\ -3, & 5 \end{bmatrix}.$$

Stojí za povšimnutí, že v obou případech jsme obdrželi symetrické matice: $\mathbf{A}\mathbf{A}^T$ a $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$. Také se potvrdilo, že násobení matic není obecně komutativní: $\mathbf{A}\mathbf{A}^T \neq \mathbf{A}^T\mathbf{A}$.

Příklad 3. Ukažte, že pro transponování součinu matic platí $(\mathbf{AB})^T = \mathbf{B}^T\mathbf{A}^T$.

Důkaz: Nechť $\mathbf{A} = [a_{ik}]_{m\times n}$, $\mathbf{B} = [b_{kj}]_{n\times p}$, položíme $\mathbf{C} = \mathbf{AB}$, $\mathbf{D} = \mathbf{B}^T\mathbf{A}^T$. Máme dokázat, že $\mathbf{C}^T = \mathbf{D}$. Matice $\mathbf{C}^T$ a $\mathbf{D}$ jsou zřejmě stejného typu (p, m), zbývá ještě dokázat, že mají ve stejných pozicích stejné prvky. Pro libovolný prvek matice $\mathbf{C}$ v pozici (i, j) platí

$$c_{ij} \quad = \quad \mathbf{r}_i^{\mathbf{A}} \cdot \mathbf{s}_j^{\mathbf{B}} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj}. \quad (\bigstar)$$

$$\left((\bigstar) \quad \mathbf{AB} = \begin{bmatrix} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1}, & a_{i2}, & \ldots, & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \ldots, & b_{1j}, & \ldots \\ \ldots, & b_{2j}, & \ldots \\ & \vdots & \\ \ldots, & b_{nj}, & \ldots \end{bmatrix} \right)$$

Tento prvek je roven prvku c_{ji}^T matice $(\mathbf{AB})^T$.

Pro každý prvek d_{ji} matice $\mathbf{D}$ dostaneme

$$d_{ji} \quad = \quad \mathbf{r}_j^{\mathbf{B}^T} \cdot \mathbf{s}_i^{\mathbf{A}^T} = b_{1j}a_{i1} + b_{2j}a_{i2} + \ldots + b_{nj}a_{in}. \quad (\blacklozenge)$$

$$\left((\blacklozenge) \quad \mathbf{B}^T\mathbf{A}^T = \begin{bmatrix} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{1j}, & b_{2j}, & \ldots, & b_{nj} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \ldots, & a_{i1}, & \ldots \\ \ldots, & a_{i2}, & \ldots \\ & \vdots & \\ \ldots, & a_{in}, & \ldots \end{bmatrix} \right)$$

Platí tedy $c_{ji}^T = d_{ji}$ pro každé $j = 1, \ldots, p$; $i = 1, \ldots, m$, jinými slovy $\mathbf{C}^T = \mathbf{D}$.

Příklad 4. Dokažte platnost asociativního zákona pro násobení matic.

Důkaz: Máme dokázat, že $(\mathbf{AB})\,\mathbf{C} = \mathbf{A}\,(\mathbf{BC})$. Nechť $\mathbf{A} = [a_{ik}]_{m\times n}$, $\mathbf{B} = [b_{kj}]_{n\times p}$, $\mathbf{C} = [c_{jq}]_{p\times s}$, potom *i-tý* řádek matice $\mathbf{AB}$ je $\left[\mathbf{r}_i^{\mathbf{A}} \cdot \mathbf{s}_1^{\mathbf{B}}, \mathbf{r}_i^{\mathbf{A}} \cdot \mathbf{s}_2^{\mathbf{B}}, \ldots, \mathbf{r}_i^{\mathbf{A}} \cdot \mathbf{s}_p^{\mathbf{B}}\right] = \left[\sum_{k=1}^n a_{ik}b_{k1}, \ldots, \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kp}\right]$, takže prvek matice $\mathbf{D} = (\mathbf{AB})\,\mathbf{C}$ na místě (i, q) je

$$d_{iq} \quad = \quad \mathbf{r}_i^{\mathbf{AB}} \cdot \mathbf{s}_q^{\mathbf{C}} = \left(\sum_{k=1}^n a_{ik}b_{k1}\right) c_{1q} + \left(\sum_{k=1}^n a_{ik}b_{k2}\right) c_{2q} + \cdots + \left(\sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kp}\right) c_{pq}. \quad (1.1)$$

Dále q-*tý* sloupec matice $\mathbf{BC}$ je $\left[\mathbf{r}_1^{\mathbf{B}}\cdot\mathbf{s}_q^{\mathbf{C}},\mathbf{r}_2^{\mathbf{B}}\cdot\mathbf{s}_q^{\mathbf{C}},\dots,\mathbf{r}_n^{\mathbf{B}}\cdot\mathbf{s}_q^{\mathbf{C}}\right]=\left[\sum_{j=1}^p b_{1j}c_{jq},\dots,\sum_{j=1}^p b_{nj}c_{jq}\right]$, odtud pro prvek matice $\mathbf{E}=\mathbf{A}\,(\mathbf{BC})$ v pozici (i,q) dostáváme

$$e_{iq}=\mathbf{r}_i^{\mathbf{A}}\cdot\mathbf{s}_q^{\mathbf{BC}}\quad=\quad a_{i1}\left(\sum_{j=1}^p b_{1j}c_{jq}\right)+a_{i2}\left(\sum_{j=1}^p b_{2j}c_{jq}\right)+\dots+a_{in}\left(\sum_{j=1}^p b_{nj}c_{jq}\right). \tag{1.2}$$

Rozepsáním vzorců (1.1) a (1.2) se přesvědčíme, že $d_{iq}=e_{iq}$ $(i=1,\dots,m;\ q=1,\dots,s)$:

$$\begin{aligned}d_{iq}&=(a_{i1}b_{11}+\dots+a_{in}b_{n1})\,c_{1q}+(a_{i1}b_{12}+\dots+a_{in}b_{n2})\,c_{2q}+\dots+(a_{i1}b_{1p}+\dots+a_{in}b_{np})\,c_{pq},\\ e_{iq}&=a_{i1}\,(b_{11}c_{1q}+\dots+b_{1p}c_{pq})+a_{i2}\,(b_{21}c_{1q}+\dots+b_{2p}c_{pq})+\dots+a_{in}\,(b_{n1}c_{1q}+\dots+b_{np}c_{pq}).\end{aligned}$$

Matice $\mathbf{D}$, $\mathbf{E}$ jsou stejného typu, mají na stejných místech stejné prvky, tudíž $(\mathbf{AB})\,\mathbf{C}=\mathbf{A}\,(\mathbf{BC})$.

Poznámka 2. Vzorce (1.1), (1.2) můžeme také vyjádřit pomocí dalšího sumačního znaku $\sum$:

$$d_{iq}\quad=\quad\sum_{j=1}^p\left[\left(\sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj}\right)c_{jq}\right]=\sum_{j=1}^p\left(\sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj}c_{jq}\right),$$

$$e_{iq}\quad=\quad\sum_{k=1}^n\left[a_{ik}\left(\sum_{j=1}^p b_{kj}c_{jq}\right)\right]=\sum_{k=1}^n\left(\sum_{j=1}^p a_{ik}b_{kj}c_{jq}\right)=\sum_{j=1}^p\left(\sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj}c_{jq}\right).$$

Cvičení:

1. Vypočtěte součiny $(\mathbf{AB})\,\mathbf{C}$ a $\mathbf{A}\,(\mathbf{BC})$ následujících matic:

   a) $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1, & 2, & 1\\ 0, & 1, & 2\\ 0, & 0, & 1\end{bmatrix}$, $\mathbf{B}=\begin{bmatrix}1 & 2\\ -1 & 1\\ 0 & -1\end{bmatrix}$, $\mathbf{C}=\begin{bmatrix}-1 & 2\\ 1 & 1\end{bmatrix}$;

   b) $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1, & -2, & 3\end{bmatrix}^T$, $\mathbf{B}=\begin{bmatrix}0, & 1, & 2\end{bmatrix}$, $\mathbf{C}=\begin{bmatrix}0, & 1, & -2\end{bmatrix}^T$.

2. Nechť

   $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}2, & 0, & 0\\ 0, & -1, & 0\\ 0, & 0, & 3\end{bmatrix}$, $\mathbf{B}=\begin{bmatrix}0, & 0, & -1\\ 0, & 2, & 0\\ 2, & 0, & 0\end{bmatrix}$.

   Vypočtěte: a) $\mathbf{A}^2$; b) $\mathbf{B}^2$; c) $\mathbf{B}^5$.

3. Najděte nenulové čtvercové matice $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ takové, že $\mathbf{AB}=\mathbf{O}$.

4. Ukažte, že pro každé číslo α a libovolné matice, pro něž mají následující operace smysl, platí:
   a) $\alpha\,(\mathbf{AB})=(\alpha\mathbf{A})\,\mathbf{B}=\mathbf{A}\,(\alpha\mathbf{B})$;
   b) $\mathbf{A}\,(\mathbf{B}+\mathbf{C})=\mathbf{AB}+\mathbf{AC}$.

5. Dokažte, že platí: Je-li $\mathbf{A}$ čtvercová matice, potom $\left(\mathbf{A}^2\right)^T=\left(\mathbf{A}^T\right)^2$.

6. Rozhodněte, které z následujících tvrzení je pravdivé (P) nebo nepravdivé (N) (o uvedených maticích předpokládáme, že jsou předepsaného typu):
   a) Je-li $\mathbf{A}=\mathbf{B}$, potom $\mathbf{AC}=\mathbf{BC}$;
   b) Je-li $\mathbf{AC}=\mathbf{BC}$, potom $\mathbf{A}=\mathbf{B}$;
   c) Je-li $\mathbf{AB}=\mathbf{O}$, potom $\mathbf{A}=\mathbf{O}$ nebo $\mathbf{B}=\mathbf{O}$;
   d) Je-li $\mathbf{A}^2=\mathbf{I}$, potom $\mathbf{A}=\pm\mathbf{I}$;
   e) Je-li $\mathbf{A}^2=\mathbf{I}$, potom $\mathbf{A}^n=\mathbf{I}$ pro každé $n\in\mathbb{N}\setminus\{1\}$;
   f) Je-li $\mathbf{A}^2=\mathbf{I}$, potom $\mathbf{A}^n=\mathbf{I}$ pro každé $n=2k$, $k\in\mathbb{N}$.

Výsledky:

1. a) $(\mathbf{AB})\,\mathbf{C} = \mathbf{A}\,(\mathbf{BC}) = \begin{bmatrix} 4, & 1 \\ 0, & -3 \\ -1, & -1 \end{bmatrix}$; b) $(\mathbf{AB})\,\mathbf{C} = \mathbf{A}\,(\mathbf{BC}) = \begin{bmatrix} -3, & 6, & -9 \end{bmatrix}^T$.

2. a) $\mathbf{A}^2 = \begin{bmatrix} 4, & 0, & 0 \\ 0, & 1, & 0 \\ 0, & 0, & 9 \end{bmatrix}$; b) $\mathbf{B}^2 = \begin{bmatrix} -2, & 0, & 0 \\ 0, & 4, & 0 \\ 0, & 0, & -2 \end{bmatrix}$; c) $\mathbf{B}^5 = \begin{bmatrix} 0, & 0, & -4 \\ 0, & 32, & 0 \\ 8, & 0, & 0 \end{bmatrix}$.

3. Například $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1, & -2 \\ -4, & 8 \end{bmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 4, & 6 \\ 2, & 3 \end{bmatrix}$.

4. Postupujte podobně jako v řešených *příkladech 3* a *4*.

5. Nedokazujte, že matice mají stejné prvky, ale využijte některou z vlastností maticových operací.

6. a) P; b) N; c) N; d) N, např. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0, & 1 \\ 1, & 0 \end{bmatrix}$; e) N; f) P.

1.3 Řešení soustav lineárních rovnic

Soustavou (systémem) m lineárních rovnic o n neznámých $x_1, x_2, \ldots, x_n$ nazýváme soustavu

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ & & & & \vdots & & & & \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & b_m. \end{array} \tag{1.3}$$

Systém (1.3) je určen *maticí soustavy* $\mathbf{A} = [a_{ik}]$ a vektorem pravých stran $\mathbf{b} = [b_1, \ldots, b_m]^T$ ($a_{11}, \ldots, a_{mn}; b_1, \ldots, b_m$ jsou daná reálná, resp. komplexní čísla). Můžeme jej také napsat ve tvaru maticové rovnice

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}, \tag{1.4}$$

kde $\mathbf{x} = [x_1, \ldots, x_n]^T$ je vektor neznámých. Přidáme-li k matici soustavy $\mathbf{A}$ jako poslední sloupec vektor $\mathbf{b}$, obdržíme *rozšířenou matici soustavy* $[\mathbf{A}\,|\mathbf{b}]$. *Řešením soustavy* (1.3) se nazývá každá taková uspořádaná n-tice čísel $[\xi_1, \ldots, \xi_n]$, že při dosazení čísel $\xi_1, \ldots, \xi_n$ za neznámé $x_1, \ldots, x_n$ jsou splněny všechny rovnice soustavy. Soustavu (1.3) řešíme *Gaussovou eliminační metodou*, tj. rozšířenou matici soustavy $[\mathbf{A} \mid \mathbf{b}]$ převedeme *elementárními řádkovými operacemi*

- R1 vzájemná výměna libovolných dvou řádků;
- R2 vynásobení některého řádku nenulovým číslem;
- R3 přičtení násobku některého řádku k jinému;

na rozšířenou matici $[\mathbf{H} \mid \mathbf{c}]$ *ekvivalentní soustavy se schodovou maticí* $\mathbf{H}$, pomocí níž už pak řešení soustavy snadno najdeme. *Schodovou maticí* rozumíme matici, jež vyhovuje těmto podmínkám:

1. Všechny řádky, jež mají pouze nulové prvky, jsou umístěny dole pod nenulovými řádky.
2. První nenulový prvek každého řádku *(vedoucí prvek)* musí být vždy ve sloupci, který je napravo od vedoucího prvku předcházejícího řádku.

Příklad 1. Rozhodněte, které matice jsou ve schodovém tvaru:

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}-1, & 3, & 2\\ 0, & 0, & 0\\ 0, & 0, & 1\end{bmatrix},\ \mathbf{B}=\begin{bmatrix}\mathbf{1}, & -2, & 0\\ \mathbf{\frac{1}{2}}, & 3, & 0\\ 0, & 0, & 0\end{bmatrix},\ \mathbf{C}=\begin{bmatrix}\mathbf{1}, & -3, & 0, & 5, & 0\\ 0, & 0, & \mathbf{1}, & 2, & 0\\ 0, & 0, & 0, & 0, & \mathbf{1}\\ 0, & 0, & 0, & 0, & 0\end{bmatrix},\ \mathbf{D}=\begin{bmatrix}\mathbf{-2}, & 1\\ 0, & \mathbf{-3}\\ 0, & 0\end{bmatrix}.$$

Řešení: Matice **A**, **B** nejsou ve schodovém tvaru. V matici **A** není nulový řádek uveden úplně dole. Matice **B** má sice nulový řádek správně pod nenulovými řádky, ale první nenulový prvek druhého řádku $\frac{1}{2}$ (vedoucí prvek) není ve sloupci napravo od vedoucího prvku předcházejícího řádku (číslo 1). Matice **C** a **D** jsou ve schodovém tvaru.

Matice **C** je dokonce příkladem *normované schodové matice.* Její vedoucí prvky se rovnají 1 a všechny prvky ve sloupcích nad i pod nimi jsou nulové.

Příklad 2. Najděte všechna řešení systému $\mathbf{Hx}=\mathbf{c}$, kde

$$[\mathbf{H}\mid\mathbf{c}] = \left[\begin{array}{rrr|r}-5, & -1, & 3 & 3\\ 0, & 3, & 5 & 8\\ 0, & 0, & -4 & 8\end{array}\right].$$

Řešení: Systém lineárních rovnic odpovídající této rozšířené matici je

$$\begin{aligned}-5x_1 - x_2 + 3x_3 &= 3\\ 3x_2 + 5x_3 &= 8\\ -4x_3 &= 8\ .\end{aligned}$$

Z poslední rovnice vypočteme $x_3=-2$. Po dosazení do druhé rovnice dostaneme

$$3x_2 + 5\,(-2) = 8,\quad 3x_2 = 18,\quad x_2 = 6.$$

Nakonec dosadíme za x_2 a x_3 do první rovnice a máme

$$-5x_1 - 6 + 3\,(-2) = 3,\quad -5x_1 = 15,\quad x_1 = -3.$$

Systém má jediné řešení $x_1=-3$, $x_2=6$, $x_3=-2$.

Příklad 3. Gaussovou eliminační metodou řešte soustavu rovnic

$$\begin{aligned} x_2 - 3x_3 &= -5\\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 &= 7\\ 4x_1 + 5x_2 - 2x_3 &= 10.\end{aligned}$$

Řešení: Sestavíme rozšířenou matici soustavy a převedeme ji úpravami R1 až R3 na schodový tvar.

$$\left[\begin{array}{rrr|r}0, & 1, & -3 & -5\\ 2, & 3, & -1 & 7\\ 4, & 5, & -2 & 10\end{array}\right]\begin{array}{l}r_2\\ r_1\\ \\ \end{array} \sim \left[\begin{array}{rrr|r}2, & 3, & -1 & 7\\ 0, & 1, & -3 & -5\\ 4, & 5, & -2 & 10\end{array}\right]\begin{array}{l}\\ \\ -2r_1\end{array} \sim \left[\begin{array}{rrr|r}2, & 3, & -1 & 7\\ 0, & 1, & -3 & -5\\ 0, & -1, & 0 & -4\end{array}\right]\begin{array}{l}\\ \\ +r_2\end{array} \sim$$

$$\left[\begin{array}{rrr|r}2, & 3, & -1 & 7\\ 0, & 1, & -3 & -5\\ 0, & 0, & -3 & -9\end{array}\right].$$

Neznámé dostaneme podobně jako v předešlé úloze: $x_3=3$, $x_2=4$, $x_1=-1$. Říkáme také, že soustava má *jediné řešení*, kterým je vektor $\mathbf{x}=[-1,\,4,\,3]^T$.

Příklad 4. Řešte lineární systém

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & - & x_4 & = & 4 \\ 2x_1 & - & 3x_2 & + & 2x_3 & - & 3x_4 & = & -1 \\ 3x_1 & - & 5x_2 & + & 3x_3 & - & 4x_4 & = & 3 \\ -x_1 & + & x_2 & - & x_3 & + & 2x_4 & = & 5 \end{array}$$

užitím Gauss-Jordanovy metody a vyberte alespoň jedno řešení, pro které $x_1 = -8$.

Řešení: Matici soustavy musíme tentokrát upravit na normovaný schodový tvar.

$$\left[\begin{array}{rrrr|r} 1, & -2, & 1, & -1 & 4 \\ 2, & -3, & 2, & -3 & -1 \\ 3, & -5, & 3, & -4 & 3 \\ -1, & 1, & -1, & 2 & 5 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ -2r_1 \\ -3r_1 \\ +r_1 \end{array} \sim \left[\begin{array}{rrrr|r} 1, & -2, & 1, & -1 & 4 \\ 0, & 1, & 0, & -1 & -9 \\ 0, & 1, & 0, & -1 & -9 \\ 0, & -1, & 0, & 1 & 9 \end{array}\right] \begin{array}{l} +2r_2 \\ \\ -r_2 \\ +r_2 \end{array} \sim$$

$$\left[\begin{array}{rrrr|r} 1, & 0, & 1, & -3 & -14 \\ 0, & 1, & 0, & -1 & -9 \\ 0, & 0, & 0, & 0 & 0 \\ 0, & 0, & 0, & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Redukce matice na normovanou schodovou matici je ukončena. Všimněme si, že u Gauss-Jordanovy metody vytváříme nuly souběžně nad i pod vedoucími prvky. Přistoupíme k určení řešení systému. Sloupce 3 a 4 neobsahují vedoucí prvky řádků, a tudíž neznámé x_3 a x_4 bereme jako nezávisle proměnné a můžeme za ně zvolit jakékoli číslo. Položíme tedy $x_3 = r$, $x_4 = s$ (r, $s \in \mathbb{R}$ nazýváme parametry) a dopočteme neznámé x_1 a x_2. Dostaneme takto řešení

$$\mathbf{x} = \left[\begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} -r + 3s - 14 \\ s - 9 \\ r \\ s \end{array}\right].$$

Systém má *nekonečně mnoho řešení závislých na dvou parametrech* r a s. Zbývá ještě najít to řešení, kde $x_1 = -8$. Volíme například $r = -3$ a $s = 1$, potom $x_1 = -8$, $x_2 = -8$, $x_3 = -3$, $x_4 = 1$.

V dalším příkladu si připomeneme soustavu rovnic, která nemá řešení.

Příklad 5. Najděte všechna řešení soustavy $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, jestliže

$$\mathbf{A} = \left[\begin{array}{rrrr} 1, & -2, & 1, & -1 \\ 2, & -3, & 2, & -3 \\ 3, & -5, & 3, & -4 \\ -1, & 1, & -1, & 2 \end{array}\right], \ \mathbf{b} = \left[\begin{array}{r} 4 \\ -1 \\ 4 \\ 5 \end{array}\right].$$

Řešení: Matice soustavy je stejná jako v předešlé úloze, a tak už snad není nutné uvádět příslušné řádkové operace.

$$\left[\begin{array}{rrrr|r} 1, & -2, & 1, & -1 & 4 \\ 2, & -3, & 2, & -3 & -1 \\ 3, & -5, & 3, & -4 & 4 \\ -1, & 1, & -1, & 2 & 5 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{rrrr|r} 1, & -2, & 1, & -1 & 4 \\ 0, & 1, & 0, & -1 & -9 \\ 0, & 1, & 0, & -1 & -8 \\ 0, & -1, & 0, & 1 & 9 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{rrrr|r} 1, & 0, & 1, & -3 & -14 \\ 0, & 1, & 0, & -1 & -9 \\ 0, & 0, & 0, & 0 & 1 \\ 0, & 0, & 0, & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Soustava *nemá řešení.* Předposlednímu řádku v upravené matici odpovídá totiž rovnice

$$0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 = 1,$$

jejíž levá strana se pro všechna dosazení za neznámé rovná 0, zatímco pravá strana je 1.

Pomocí jediné rozšířené matice lze řešit i více lineárních soustav, pokud mají stejnou matici. V takovém případě označíme společnou matici obou soustav $\mathbf{A}$, vektory pravých stran postupně $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$ a obě soustavy řešíme pomocí rozšířené matice $[\mathbf{A} \mid \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2]$.

Příklad 6. Určete řešení lineárních systémů

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} 2x_1 & - & 4x_2 & & & & & = & -10 \\ x_1 & - & 3x_2 & & & + & x_4 & = & -4 \\ x_1 & & & - & x_3 & + & 2x_4 & = & 4 \\ 3x_1 & - & 4x_2 & + & 3x_3 & - & x_4 & = & -11 \end{array} \quad \text{a} \quad \begin{array}{rcrcrcrcr} 2y_1 & - & 4y_2 & & & & & = & -8 \\ y_1 & - & 3y_2 & & & + & y_4 & = & -2 \\ y_1 & & & - & y_3 & + & 2y_4 & = & 9 \\ 3y_1 & - & 4y_2 & + & 3y_3 & - & y_4 & = & -15. \end{array}$$

Řešení: Systémy budeme tedy řešit užitím jediné rozšířené matice.

$$\left[\begin{array}{rrrr|rr} 2, & -4, & 0, & 0 & -10, & -8 \\ 1, & -3, & 0, & 1 & -4, & -2 \\ 1, & 0, & -1, & 2 & 4, & 9 \\ 3, & -4, & 3, & -1 & -11, & -15 \end{array}\right] \begin{array}{l} \cdot\left(\frac{1}{2}\right) \\ \\ \\ \\ \end{array} \sim \left[\begin{array}{rrrr|rr} 1, & -2, & 0, & 0 & -5, & -4 \\ 1, & -3, & 0, & 1 & -4, & -2 \\ 1, & 0, & -1, & 2 & 4, & 9 \\ 3, & -4, & 3, & -1 & -11, & -15 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ -r_1 \\ -r_1 \\ -3r_1 \end{array} \sim$$

$$\left[\begin{array}{rrrr|rr} 1, & -2, & 0, & 0 & -5, & -4 \\ 0, & -1, & 0, & 1 & 1, & 2 \\ 0, & 2, & -1, & 2 & 9, & 13 \\ 0, & 2, & 3, & -1 & 4, & -3 \end{array}\right] \begin{array}{l} -2r_2 \\ \\ +2r_2 \\ +2r_2 \end{array} \sim \left[\begin{array}{rrrr|rr} 1, & 0, & 0, & -2 & -7, & -8 \\ 0, & -1, & 0, & 1 & 1, & 2 \\ 0, & 0, & -1, & 4 & 11, & 17 \\ 0, & 0, & 3, & 1 & 6, & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ \\ +3r_3 \end{array} \sim$$

$$\left[\begin{array}{rrrr|rr} 1, & 0, & 0, & -2 & -7, & -8 \\ 0, & -1, & 0, & 1 & 1, & 2 \\ 0, & 0, & -1, & 4 & 11, & 17 \\ 0, & 0, & 0, & 13 & 39, & 52 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \cdot(-1) \\ \cdot(-1) \\ \cdot\left(\frac{1}{13}\right) \end{array} \sim \left[\begin{array}{rrrr|rr} 1, & 0, & 0, & -2 & -7, & -8 \\ 0, & 1, & 0, & -1 & -1, & -2 \\ 0, & 0, & 1, & -4 & -11, & -17 \\ 0, & 0, & 0, & 1 & 3, & 4 \end{array}\right] \begin{array}{l} +2r_4 \\ +r_4 \\ +4r_4 \\ \\ \end{array} \sim$$

$$\left[\begin{array}{rrrr|rr} 1, & 0, & 0, & 0 & -1, & 0 \\ 0, & 1, & 0, & 0 & 2, & 2 \\ 0, & 0, & 1, & 0 & 1, & -1 \\ 0, & 0, & 0, & 1 & 3, & 4 \end{array}\right].$$

Z upravené matice vidíme, že řešení jsou $x_1 = -1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 1$, $x_4 = 3$ a $y_1 = 0$, $y_2 = 2$, $y_3 = -1$, $y_4 = 4$.

Poznámka. Systémy jsme vyřešili Gauss-Jordanovou metodou. Úprava matice na normovaný schodový tvar je pracnější než úprava na schodový tvar *(dopředná redukce)*. Výpočet neznámých je pak ale snadnější, nemusí se provádět od poslední rovnice *(zpětná substituce)*.

Nakonec přidáme ještě jedno pozorování. *Má-li soustava se čtvercovou maticí právě jedno řešení, je matice soustavy řádkově ekvivalentní s jednotkovou maticí.*

Cvičení:

1. Dané soustavy řešte Gaussovou eliminační metodou:

a) $$\begin{array}{rcrcrcr} 2x & + & y & - & 3z & = & 0 \\ 6x & + & 3y & - & 8z & = & 0 \\ 2x & - & y & + & 5z & = & -4; \end{array}$$

b) $$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & 4x_2 & - & 2x_3 & = & 4 \\ 2x_1 & + & 7x_2 & - & x_3 & = & -2 \\ 2x_1 & + & 9x_2 & - & 7x_3 & = & 1; \end{array}$$

c) $$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & 4x_2 & - & 2x_3 & = & 0 \\ 2x_1 & + & 7x_2 & - & x_3 & = & 0 \\ 2x_1 & + & 9x_2 & - & 7x_3 & = & 0. \end{array}$$

2. Najděte všechna řešení soustav lineárních rovnic užitím Gauss-Jordanovy metody:

a) $$\begin{array}{rcrcrcrcl} x_1 & & & - & 2x_3 & + & x_4 & = & 6 \\ 2x_1 & - & x_2 & + & x_3 & - & 3x_4 & = & 0 \\ 9x_1 & - & 3x_2 & - & x_3 & - & 7x_4 & = & 4; \end{array}$$

b) $$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & - & 4x_2 & + & x_3 & = & 8 \\ 3x_1 & - & 12x_2 & + & 5x_3 & = & 26 \\ 2x_1 & - & 9x_2 & - & x_3 & = & 14. \end{array}$$

3. Řešte lineární systémy se stejnou maticí a různými pravými stranami:

$$\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & - & 3x_2 & - & x_3 & = & 3,\ 0,\ -10 \\ 2x_1 & - & 5x_2 & + & x_3 & = & 8,\ 0,\ -11 \\ x_1 & + & 4x_2 & - & 2x_3 & = & -5,\ 0,\ 9. \end{array}$$

4. Určete matici $\mathbf{X}$ tak, aby vyhovovala maticovým rovnicím:

a) $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$, $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1, & -3, & 1 \\ 3, & -8, & 2 \end{bmatrix}$, $\mathbf{X} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}$;

b) $\mathbf{XA} = \mathbf{I}$, $\mathbf{X} = \begin{bmatrix} x_1, & x_2 \\ x_3, & x_4 \end{bmatrix}$, $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2, & 9 \\ 1, & 4 \end{bmatrix}$, $\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1, & 0 \\ 0, & 1 \end{bmatrix}$.

5. Najděte vektor $\mathbf{b}$ tak, aby soustava rovnic $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ měla řešení:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1, & 3, & -1 \\ 1, & -1, & 2 \\ 0, & 4, & -3 \end{bmatrix}, \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}.$$

6. Určete všechny hodnoty α, pro které platí $\mathbf{AX} = \mathbf{XA}$, je-li:

a) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1, & 0, & 1 \\ 0, & 2, & 0 \\ 1, & 0, & 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 3, & 0, & 0 \\ 0, & 2, & 0 \\ 0, & 0, & \alpha \end{bmatrix}$;

b) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1, & 0, & 1 \\ 0, & 2, & 0 \\ 1, & 0, & 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 2, & 0, & 0 \\ 0, & \alpha, & 0 \\ 0, & 0, & 2 \end{bmatrix}$.

Výsledky:

1. a) $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$;

   b) nemá řešení;

   c) $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10r \\ 3r \\ r \end{bmatrix}$, $r \in \mathbb{R}$.

2. a) $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} -8 \\ -23 - 5s \\ -7 + s \\ 2s \end{bmatrix}$, $s \in \mathbb{R}$;

b) $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

3. $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$.

4. a) $\mathbf{X} = \begin{bmatrix} -1+2t \\ -1+t \\ t \end{bmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$;

   b) $\mathbf{X} = \begin{bmatrix} -4, & 9 \\ 1, & -2 \end{bmatrix}$.

5. Soustava bude mít řešení, jestliže $-b_1 + b_2 + b_3 = 0$, tj. $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} r+s \\ r \\ s \end{bmatrix}$; r, $s \in \mathbb{R}$.

6. a) $\mathbf{AX} = \mathbf{XA}$, je -li $\alpha = 3$;
   b) $\mathbf{AX} = \mathbf{XA}$, je-li α libovolné reálné číslo.

1.4 Inverzní matice

Inverzní maticí k čtvercové matici $\mathbf{A}$ nazýváme čtvercovou matici $\mathbf{A}^{-1}$ stejného řádu, pro niž platí $\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{I}$, kde $\mathbf{I}$ je jednotková matice. Čtvercová matice, k níž existuje (neexistuje) inverzní matice, se nazývá *regulární (singulární)*.

Soustava rovnic $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ *s regulární maticí* $\mathbf{A}$ *má právě jedno řešení*

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}.$$

Maticí elementární transformace (elementární maticí) nazýváme matici, kterou dostaneme z jednotkové matice provedením jedné elementární řádkové operace. Takovým způsobem získáme tři typy elementárních matic*:*

- *elementární permutační matici* $\mathbf{P}_{ij}$: (výměnou řádků r_i, r_j: $\mathbf{I} \sim \mathbf{P}_{ij}$);
- *elementární matici* $\mathbf{M}_i(\alpha)$: (vynásobením řádku r_i číslem $\alpha \neq 0$: $\mathbf{I} \sim \mathbf{M}_i(\alpha)$);
- *matici Gaussovy transformace* $\mathbf{G}_{ij}(\alpha)$: (přičtením α-násobku řádku r_i k řádku r_j: $\mathbf{I} \sim \mathbf{G}_{ij}(\alpha)$).

Každá řádková úprava matice $\mathbf{A}$ *odpovídá vynásobení matice* $\mathbf{A}$ *zleva vhodnou maticí elementární transformace:* Jinými slovy, jestliže elementární matice $\mathbf{T}$ vznikne z jednotkové matice realizací jisté řádkové úpravy, pak matice $\mathbf{TA}$ se rovná matici, jež vznikne z matice $\mathbf{A}$ stejnou řádkovou úpravou.

Příklad 1. V matici

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11}, & a_{12} \\ a_{21}, & a_{22} \\ a_{31}, & a_{32} \end{bmatrix}$$

proveďte prostřednictvím násobení vhodnou elementární maticí následující řádkové úpravy:

- výměnu 2. a 3. řádku;

- vynásobení 1. řádku nenulovým číslem α;
- přičtení α-násobku 1. řádku k 3. řádku.

Řešení: Příslušné elementární matice dostaneme provedením těchto řádkových operací na jednotkovou matici řádu 3.

- $\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1, & 0, & 0 \\ 0, & 1, & 0 \\ 0, & 0, & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ r_3 \\ r_2 \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 1, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 1 \\ 0, & 1, & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{P}_{23};$
- $\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1, & 0, & 0 \\ 0, & 1, & 0 \\ 0, & 0, & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \cdot(\alpha) \\ \\ \\ \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} \alpha, & 0, & 0 \\ 0, & 1, & 0 \\ 0, & 0, & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{M}_1(\alpha);$
- $\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1, & 0, & 0 \\ 0, & 1, & 0 \\ 0, & 0, & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ +\alpha r_1 \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 1, & 0, & 0 \\ 0, & 1, & 0 \\ \alpha, & 0, & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{G}_{13}(\alpha).$

Nyní vypočteme matice $\mathbf{P}_{23}\mathbf{A}$, $\mathbf{M}_1(\alpha)\,\mathbf{A}$ a $\mathbf{G}_{13}(\alpha)\,\mathbf{A}$:

- $\mathbf{P}_{23}\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 1 \\ 0, & 1, & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11}, & a_{12} \\ a_{21}, & a_{22} \\ a_{31}, & a_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}, & a_{12} \\ a_{31}, & a_{32} \\ a_{21}, & a_{22} \end{bmatrix};$
- $\mathbf{M}_1(\alpha)\,\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \alpha, & 0, & 0 \\ 0, & 1, & 0 \\ 0, & 0, & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11}, & a_{12} \\ a_{21}, & a_{22} \\ a_{31}, & a_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha a_{11}, & \alpha a_{12} \\ a_{21}, & a_{22} \\ a_{31}, & a_{32} \end{bmatrix};$
- $\mathbf{G}_{13}(\alpha)\,\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1, & 0, & 0 \\ 0, & 1, & 0 \\ \alpha, & 0, & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11}, & a_{12} \\ a_{21}, & a_{22} \\ a_{31}, & a_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}, & a_{12} \\ a_{21}, & a_{22} \\ \alpha a_{11} + a_{31}, & \alpha a_{12} + a_{32} \end{bmatrix}.$

Příklad 2. Napište inverzní matice k maticím elementárních transformací $\mathbf{P}_{23}$, $\mathbf{M}_1(\alpha)$ a $\mathbf{G}_{13}(\alpha)$ z předchozího příkladu.

Řešení: Matice elementárních transformací jsou regulární. Inverzní matici k dané elementární matici $\mathbf{T}$ obdržíme z jednotkové matice pomocí té řádkové operace, která matici $\mathbf{T}$ převede zpět na matici jednotkovou. Je tedy:

- $\mathbf{P}_{23}^{-1} = \begin{bmatrix} 1, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 1 \\ 0, & 1, & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{P}_{23},\ \mathbf{P}_{23}\mathbf{P}_{23} = \mathbf{I};$
- $\mathbf{M}_1^{-1}(\alpha) = \begin{bmatrix} \frac{1}{\alpha}, & 0, & 0 \\ 0, & 1, & 0 \\ 0, & 0, & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{M}_1\left(\alpha^{-1}\right),\ \mathbf{M}_1\left(\alpha^{-1}\right)\mathbf{M}_1(\alpha) = \mathbf{M}_1(\alpha)\,\mathbf{M}_1\left(\alpha^{-1}\right) = \mathbf{I};$
- $\mathbf{G}_{13}^{-1}(\alpha) = \begin{bmatrix} 1, & 0, & 0 \\ 0, & 1, & 0 \\ -\alpha, & 0, & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{G}_{13}(-\alpha),\ \mathbf{G}_{13}(-\alpha)\,\mathbf{G}_{13}(\alpha) = \mathbf{G}_{13}(\alpha)\,\mathbf{G}_{13}(-\alpha) = \mathbf{I}.$

Inverzní matice k elementárním maticím jsou opět elementární matice. Kontrolu správnosti výpočtu nechť si čtenář provede sám.

Příklad 3. Najděte inverzní matici k matici

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2, & 1, & 4 \\ 3, & 2, & 5 \\ 0, & -1, & 1 \end{bmatrix},$$

a vyjádřete pak matici $\mathbf{A}$ ve tvaru součinu elementárních matic.

Řešení: Inverzní matici počítáme podle následujícího schématu:

1. Napíšeme si rozšířenou matici $[\mathbf{A} \mid \mathbf{I}]$.
2. Užitím Gauss-Jordanovy metody redukujeme $[\mathbf{A} \mid \mathbf{I}]$ na $[\mathbf{I} \mid \mathbf{C}]$. Je-li redukce úspěšná, je $\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{C}$. V opačném případě matice $\mathbf{A}^{-1}$ neexistuje.

$$\left[\begin{array}{rrr|rrr} 2, & 1, & 4 & 1, & 0, & 0 \\ 3, & 2, & 5 & 0, & 1, & 0 \\ 0, & -1, & 1 & 0, & 0, & 1 \end{array}\right] \begin{array}{c} \\ -\frac{3}{2}r_1 \\ \\ \end{array} \sim \left[\begin{array}{rrr|rrr} 2, & 1, & 4 & 1, & 0, & 0 \\ 0, & \frac{1}{2}, & -1 & -\frac{3}{2}, & 1, & 0 \\ 0, & -1, & 1 & 0, & 0, & 1 \end{array}\right] \begin{array}{c} -2r_2 \\ \\ +2r_2 \end{array} \sim$$

$$\left[\begin{array}{rrr|rrr} 2, & 0, & 6 & 4, & -2, & 0 \\ 0, & \frac{1}{2}, & -1 & -\frac{3}{2}, & 1, & 0 \\ 0, & 0, & -1 & -3, & 2, & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} \cdot\left(\frac{1}{2}\right) \\ \cdot(2) \\ \cdot(-1) \end{array} \sim \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1, & 0, & 3 & 2, & -1, & 0 \\ 0, & 1, & -2 & -3, & 2, & 0 \\ 0, & 0, & 1 & 3, & -2, & -1 \end{array}\right] \begin{array}{l} -3r_3 \\ +2r_3 \\ \\ \end{array} \sim$$

$$\left[\begin{array}{rrr|rrr} 1, & 0, & 0 & -7, & 5, & 3 \\ 0, & 1, & 0 & 3, & -2, & -2 \\ 0, & 0, & 1 & 3, & -2, & -1 \end{array}\right].$$

Matice $\mathbf{A}$ je regulární, hledaná inverzní matice

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} -7, & 5, & 3 \\ 3, & -2, & -2 \\ 3, & -2, & -1 \end{bmatrix}.$$

Nyní máme matici $\mathbf{A}$ napsat jako součin elementárních matic. Řádkovým operacím, které transformují matici $\mathbf{A}$ na jednotkovou matici odpovídá osm elementárních matic:

$$\mathbf{T}_1 = \begin{bmatrix} 1, & 0, & 0 \\ -\frac{3}{2}, & 1, & 0 \\ 0, & 0, & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{T}_2 = \begin{bmatrix} 1, & -2, & 0 \\ 0, & 1, & 0 \\ 0, & 0, & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{T}_3 = \begin{bmatrix} 1, & 0, & 0 \\ 0, & 1, & 0 \\ 0, & 2, & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{T}_4 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}, & 0, & 0 \\ 0, & 1, & 0 \\ 0, & 0, & 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{T}_5 = \begin{bmatrix} 1, & 0, & 0 \\ 0, & 2, & 0 \\ 0, & 0, & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{T}_6 = \begin{bmatrix} 1, & 0, & 0 \\ 0, & 1, & 0 \\ 0, & 0, & -1 \end{bmatrix}, \mathbf{T}_7 = \begin{bmatrix} 1, & 0, & -3 \\ 0, & 1, & 0 \\ 0, & 0, & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{T}_8 = \begin{bmatrix} 1, & 0, & 0 \\ 0, & 1, & 2 \\ 0, & 0, & 1 \end{bmatrix}.$$

Transformaci matice $\mathbf{A}$ na jednotkovou matici, jak už bylo řečeno, můžeme realizovat pomocí násobení elementárními maticemi. Platí:

$$\mathbf{T}_8 \cdots \mathbf{T}_2 \mathbf{T}_1 \mathbf{A} = \mathbf{I},$$

odtud

$$\mathbf{A} = \mathbf{T}_1^{-1} \mathbf{T}_2^{-1} \cdots \mathbf{T}_8^{-1}. \tag{1.5}$$

Matice $\mathbf{T}_1^{-1}, \ldots, \mathbf{T}_8^{-1}$ určíme postupem uvedeným v *příkladu 2* této podkapitoly.

$$\mathbf{T}_1^{-1} = \begin{bmatrix} 1, & 0, & 0 \\ \frac{3}{2}, & 1, & 0 \\ 0, & 0, & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{T}_2^{-1} = \begin{bmatrix} 1, & 2, & 0 \\ 0, & 1, & 0 \\ 0, & 0, & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{T}_3^{-1} = \begin{bmatrix} 1, & 0, & 0 \\ 0, & 1, & 0 \\ 0, & -2, & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{T}_4^{-1} = \begin{bmatrix} 2, & 0, & 0 \\ 0, & 1, & 0 \\ 0, & 0, & 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{T}_5^{-1} = \begin{bmatrix} 1, & 0, & 0 \\ 0, & \frac{1}{2}, & 0 \\ 0, & 0, & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{T}_6^{-1} = \begin{bmatrix} 1, & 0, & 0 \\ 0, & 1, & 0 \\ 0, & 0, & -1 \end{bmatrix}, \mathbf{T}_7^{-1} = \begin{bmatrix} 1, & 0, & 3 \\ 0, & 1, & 0 \\ 0, & 0, & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{T}_8^{-1} = \begin{bmatrix} 1, & 0, & 0 \\ 0, & 1, & -2 \\ 0, & 0, & 1 \end{bmatrix}.$$

Teď už jenom zbývá dosadit do vzorce (1.5).

Pokud bychom chtěli ověřit, že matice $\mathbf{A}$ se skutečně rovná součinu $\mathbf{T}_1^{-1}\mathbf{T}_2^{-1}\cdots\mathbf{T}_8^{-1}$, nemusíme všechny tyto matice násobit. Uvedeme-li ve vzorci (1.5) jednotkovou matici, tj. $\mathbf{A} = \mathbf{T}_1^{-1}\cdots\mathbf{T}_8^{-1}\mathbf{I}$, pak je zřejmé, že matici $\mathbf{A}$ můžeme také získat z jednotkové matice pomocí řádkových úprav, které odpovídají po řadě maticím $\mathbf{T}_8^{-1}, \ldots, \mathbf{T}_1^{-1}$:

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1, & 0, & 0 \\ 0, & 1, & 0 \\ 0, & 0, & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} +3r_3 \\ -2r_3 \\ \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 1, & 0, & 3 \\ 0, & 1, & -2 \\ 0, & 0, & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \cdot(2) \\ \cdot\left(\frac{1}{2}\right) \\ \cdot(-1) \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 2, & 0, & 6 \\ 0, & \frac{1}{2}, & -1 \\ 0, & 0, & -1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ -2r_2 \end{matrix} \sim$$

$$\begin{bmatrix} 2, & 0, & 6 \\ 0, & \frac{1}{2}, & -1 \\ 0, & -1, & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} +2r_2 \\ \\ \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 2, & 1, & 4 \\ 0, & \frac{1}{2}, & -1 \\ 0, & -1, & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ +\frac{3}{2}r_1 \\ \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 2, & 1, & 4 \\ 3, & 2, & 5 \\ 0, & -1, & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{A}.$$

Poznámka. Vyjádření regulární matice ve tvaru součinu elementárních matic nemusí být jednoznačné. Redukci matice $\mathbf{A}$ na jednotkovou matici v předešlé úloze jsme mohli také zahájit *vynásobením prvního řádku* $\frac{1}{2}$ a potom *první řádek vynásobený* -3 *přičíst k druhému řádku.*

Příklad 4. Pomocí inverzní matice řešte soustavu rovnic

$$\begin{array}{rcrcrcr} 3x & + & y & - & z & = & 2 \\ 4x & + & 2y & - & z & = & 3 \\ -2x & - & y & + & z & = & 4. \end{array}$$

Řešení: Je-li matice soustavy $\mathbf{A}$ regulární, můžeme řešení soustavy vyjádřit ve tvaru $\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$.

$$[\mathbf{A} \mid \mathbf{I}] = \left[\begin{array}{rrr|rrr} 3, & 1, & -1 & 1, & 0, & 0 \\ 4, & 2, & -1 & 0, & 1, & 0 \\ -2, & -1, & 1 & 0, & 0, & 1 \end{array}\right] \begin{matrix} \\ \cdot(3) \\ \cdot(3) \end{matrix} \sim \left[\begin{array}{rrr|rrr} 3, & 1, & -1 & 1, & 0, & 0 \\ 12, & 6, & -3 & 0, & 3, & 0 \\ -6, & -3, & 3 & 0, & 0, & 3 \end{array}\right] \begin{matrix} \\ -4r_1 \\ +2r_1 \end{matrix} \sim$$

$$\left[\begin{array}{rrr|rrr} 3, & 1, & -1 & 1, & 0, & 0 \\ 0, & 2, & 1 & -4, & 3, & 0 \\ 0, & -1, & 1 & 2, & 0, & 3 \end{array}\right] \begin{matrix} \\ r_3 \\ r_2 \end{matrix} \sim \left[\begin{array}{rrr|rrr} 3, & 1, & -1 & 1, & 0, & 0 \\ 0, & -1, & 1 & 2, & 0, & 3 \\ 0, & 2, & 1 & -4, & 3, & 0 \end{array}\right] \begin{matrix} +r_2 \\ \\ +2r_2 \end{matrix} \sim$$

$$\left[\begin{array}{rrr|rrr} 3, & 0, & 0 & 3, & 0, & 3 \\ 0, & -1, & 1 & 2, & 0, & 3 \\ 0, & 0, & 3 & 0, & 3, & 6 \end{array}\right] \begin{matrix} \cdot\left(\frac{1}{3}\right) \\ \cdot(-1) \\ \cdot\left(\frac{1}{3}\right) \end{matrix} \sim \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1, & 0, & 0 & 1, & 0, & 1 \\ 0, & 1, & -1 & -2, & 0, & -3 \\ 0, & 0, & 1 & 0, & 1, & 2 \end{array}\right] \begin{matrix} \\ +r_3 \\ \end{matrix} \sim$$

$$\left[\begin{array}{rrr|rrr} 1, & 0, & 0 & 1, & 0, & 1 \\ 0, & 1, & 0 & -2, & 1, & -1 \\ 0, & 0, & 1 & 0, & 1, & 2 \end{array}\right] = \left[\mathbf{I} \mid \mathbf{A}^{-1}\right].$$

Inverzní matice existuje, takže soustava

$$\begin{bmatrix} 3, & 1, & -1 \\ 4, & 2, & -1 \\ -2, & -1, & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} \text{ má řešení } \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1, & 0, & 1 \\ -2, & 1, & -1 \\ 0, & 1, & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ -5 \\ 11 \end{bmatrix}.$$

Příklad 5. Najděte číslo λ tak, aby matice

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2, & 4, & 2 \\ 1, & \lambda, & 3 \\ 1, & 1, & 2 \end{bmatrix}$$

byla regulární.

Řešení: Pokusíme se o transformaci matice $\mathbf{B}$ na jednotkovou matici. Příslušné řádkové operace už nebudu uvádět.

$$\begin{bmatrix} 2, & 4, & 2 \\ 1, & \lambda, & 3 \\ 1, & 1, & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1, & 2, & 1 \\ 0, & \lambda-2, & 2 \\ 0, & -1, & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1, & 2, & 1 \\ 0, & -1, & 1 \\ 0, & \lambda-2, & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1, & 2, & 1 \\ 0, & -1, & 1 \\ 0, & 0, & \lambda \end{bmatrix}.$$

Z poslední upravené matice je vidět, že transformace je možná, je-li $\lambda \neq 0$. Matice $\mathbf{B}$ bude regulární pro každé nenulové číslo λ.

Příklad 6. Ukažte, že matice

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a, & b \\ c, & d \end{bmatrix}$$

je regulární právě tehdy, když $ad - bc \neq 0$.

Řešení:

- Nechť matice $\mathbf{A}$ je regulární. Pak alespoň jedno z čísel a nebo c je různé od nuly. Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že $a \neq 0$. Přistupme k redukci $\mathbf{A}$ na $\mathbf{I}$:

$$\begin{bmatrix} a, & b \\ c, & d \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1, & \frac{b}{a} \\ c, & d \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1, & \frac{b}{a} \\ 0, & d-\frac{bc}{a} \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1, & \frac{b}{a} \\ 0, & \frac{ad-bc}{a} \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1, & \frac{b}{a} \\ 0, & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1, & 0 \\ 0, & 1 \end{bmatrix};$$

  redukce musí být úspěšná, a tudíž $ad - bc \neq 0$.

- Nechť naopak $ad - bc \neq 0$. Pak opět čísla a, c nemohou být současně nulová. To ovšem znamená, že matici $\mathbf{A}$ můžeme úspěšně redukovat na matici jednotkovou, a tedy $\mathbf{A}$ je regulární.

Příklad 7. Dokažte, že platí toto tvrzení: Nechť $\mathbf{A}$ a $\mathbf{C}$ jsou čtvercové matice řádu n. Potom $\mathbf{AC} = \mathbf{I}$ právě tehdy, když $\mathbf{CA} = \mathbf{I}$.

Řešení:

- Je-li $\mathbf{AC} = \mathbf{I}$, pak soustava rovnic $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ má řešení pro libovolný vektor pravých stran $\mathbf{b}$. Tímto řešením je vektor $\mathbf{x} = \mathbf{Cb} : \mathbf{A}(\mathbf{Cb}) = (\mathbf{AC})\,\mathbf{b} = \mathbf{Ib} = \mathbf{b}$. Označme $\mathbf{T}_1, \ldots, \mathbf{T}_k$ matice elementárních transformací, které redukují matici $\mathbf{A}$ na matici $\mathbf{H}$, kde $\mathbf{H}$ je v normovaném schodovém tvaru, tj. $\mathbf{T}_k \cdots \mathbf{T}_1 \mathbf{A} = \mathbf{H}$. Ukážeme, že $\mathbf{H}$ je jednotková matice. Kdyby tomu tak nebylo, musela by mít matice $\mathbf{H}$ poslední řádek nulový, a tudíž soustava $\mathbf{Hx} = \mathbf{e}_n$, kde $\mathbf{e}_n = [0, \ldots, 0, 1]^T$, by neměla řešení. Pak by ale neměla řešení také původní soustava $\mathbf{Ax} = \mathbf{T}_1^{-1} \cdots \mathbf{T}_k^{-1} \mathbf{e}_n$, což je spor s tím, co jsme v úvodu ukázali. Existuje tedy matice $\mathbf{D} = \mathbf{T}_k \cdots \mathbf{T}_1$ taková, že $\mathbf{DA} = \mathbf{I}$. Jenže $\mathbf{D} = \mathbf{DI} = \mathbf{D}(\mathbf{AC}) = (\mathbf{DA})\,\mathbf{C} = \mathbf{IC} = \mathbf{C}$, takže $\mathbf{CA} = \mathbf{I}$.

- Je-li naopak $\mathbf{CA} = \mathbf{I}$, pak postupujeme jako v první částí s tím, že zaměníme úlohy matic $\mathbf{A}$ a $\mathbf{C}$.

Cvičení:

1. Vypočtěte inverzní matice k těmto maticím:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1, & -2, & 3 \\ 2, & -1, & 1 \\ 4, & -5, & 7 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1, & 0, & 1 \\ 0, & 1, & 1 \\ 0, & 0, & -1 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 3, & -2, & 0, & -1 \\ 0, & 2, & 2, & 1 \\ 1, & -2, & -3, & -2 \\ 0, & 1, & 2, & 1 \end{bmatrix}.$$

2. Soustavu lineárních rovnic řešte užitím inverzní matice:

$$\text{a)}\quad \begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & 3x_2 & - & 2x_3 & = & 1 \\ 2x_1 & + & 5x_2 & - & 3x_3 & = & 2 \\ -3x_1 & + & 2x_2 & - & 4x_3 & = & -1; \end{array}$$

$$\text{b)}\quad \begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & 3x_2 & + & 4x_3 & = & 1 \\ -2x_1 & - & 5x_2 & - & 3x_3 & = & 6 \\ x_1 & + & 4x_2 & + & 9x_3 & = & -8. \end{array}$$

3. Matici

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1, & 0, & 0 \\ 1, & 2, & 0 \\ 1, & 2, & 3 \end{bmatrix}$$

napište ve tvaru součinu elementárních matic.

4. Dokažte, že pro každou regulární matici $\mathbf{A}$ a libovolné číslo $\alpha \neq 0$ platí

$$(\alpha\mathbf{A})^{-1} = \alpha^{-1}\mathbf{A}^{-1}.$$

5. Určete všechna čísla θ, pro která je matice

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 3, & 5, & -1 \\ 1, & \theta, & \frac{2}{3} \\ -1, & \frac{1}{3}, & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

regulární.

6. Najděte několik příkladů regulárních matic 2. stupně takových, že $\mathbf{A} = \mathbf{A}^{-1}$.

7. Rozhodněte, které z následujících tvrzení je pravdivé (P) nebo nepravdivé (N). O maticích předpokládáme, že mají vhodný rozměr.
   a) Je-li $\mathbf{AC} = \mathbf{BC}$ a $\mathbf{C}$ je regulární, pak $\mathbf{A} = \mathbf{B}$;
   b) Je-li $\mathbf{AB} = \mathbf{O}$ a $\mathbf{B}$ je regulární, pak $\mathbf{A} = \mathbf{O}$;
   c) Každá regulární matice je součinem elementárních matic;
   d) Jsou-li matice $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ regulární, pak $(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}^{-1}$;
   e) Je-li $\mathbf{AB} = \mathbf{C}$ a dvě z těchto matic jsou regulární, pak i třetí matice je regulární;
   f) Je-li $\mathbf{AB} = \mathbf{C}$ a dvě z těchto matic jsou singulární, pak i třetí matice je singulární;
   g) Je-li matice $\mathbf{A}$ regulární, pak $\left(\mathbf{A}^T\right)^{-1} = \left(\mathbf{A}^{-1}\right)^T$ a $\left(\mathbf{A}^{-1}\right)^{-1} = \mathbf{A}$;
   h) Pro každou elementární permutační matici $\mathbf{P}_{ij}$ platí: $\mathbf{P}_{ij}^{-1} = \mathbf{P}_{ij}^T$.

Výsledky:

1. $\mathbf{A}^{-1}$ neexistuje; $\mathbf{B}^{-1} = \mathbf{B}$; $\mathbf{C}^{-1} = \begin{bmatrix} 1, & 1, & -2, & -4 \\ 0, & 1, & 0, & -1 \\ -1, & -1, & 3, & 6 \\ 2, & 1, & -6, & -10 \end{bmatrix}$.

2. a) $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14, & -8, & -1 \\ -17, & 10, & 1 \\ -19, & 11, & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$;

   b) matice soustavy je singulární, soustavu nelze řešit užitím inverzní matice.

3. $\mathbf{L} = \mathbf{G}_{12}(1)\,\mathbf{G}_{13}(1)\,\mathbf{G}_{23}(1)\,\mathbf{M}_2(2)\,\mathbf{M}_3(3) =$

$$= \begin{bmatrix} 1, & 0, & 0 \\ 1, & 1, & 0 \\ 0, & 0, & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1, & 0, & 0 \\ 0, & 1, & 0 \\ 1, & 0, & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1, & 0, & 0 \\ 0, & 1, & 0 \\ 0, & 1, & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1, & 0, & 0 \\ 0, & 2, & 0 \\ 0, & 0, & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1, & 0, & 0 \\ 0, & 1, & 0 \\ 0, & 0, & 3 \end{bmatrix}.$$

4. Návod: držte se definice inverzní matice.
5. Matice je regulární pro libovolné číslo θ.
6. Například: $\begin{bmatrix} 0, & 1 \\ 1, & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1, & 1 \\ 0, & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -6, & -7 \\ 5, & 6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1, & 0 \\ 50, & -1 \end{bmatrix}, \dots$

   Nápověda: určete inverzní matici k matici

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11}, & a_{12} \\ a_{21}, & a_{22} \end{bmatrix};$$

$$\left(\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{d} \begin{bmatrix} a_{22}, & -a_{12} \\ -a_{21}, & a_{11} \end{bmatrix}, \; d = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} \neq 0\right).$$

7. a) P; b) P; c) P; d) N; e) P; f) N; g) P; h) P.

1.5 Trojúhelníkový rozklad

Čtvercovou matici

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} u_{11}, & u_{12}, & \dots, & u_{1n} \\ 0, & u_{22}, & \dots, & u_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0, & 0, & \dots, & u_{nn} \end{bmatrix},$$

jež má pod hlavní diagonálou samé nuly, nazýváme *horní trojúhelníkovou maticí*. Čtvercovou matici

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} l_{11}, & 0, & \dots, & 0 \\ l_{21}, & l_{22}, & \dots, & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n1}, & l_{n2}, & \dots, & l_{nn} \end{bmatrix},$$

jež má nad hlavní diagonálou samé nuly, nazveme *dolní trojúhelníkovou maticí*. Matice $\mathbf{P}$, kterou můžeme získat z jednotkové matice $\mathbf{I}$ postupnou výměnou řádků, se nazývá *permutační matice*.

Libovolná permutační matice $\mathbf{P}$ *se dá napsat jako součin elementárních permutačních matic, přičemž platí*

$$\mathbf{P}^{-1} = \mathbf{P}^T. \tag{1.6}$$

Každá výměna sloupců v matici $\mathbf{A}$ *odpovídá vynásobení matice* $\mathbf{A}$ *zprava vhodnou elementární permutační maticí:* Je-li tedy $\mathbf{B} = \mathbf{AP}_{ij}$, pak $\mathbf{B}$ je matice, jež vznikne z matice $\mathbf{A}$ výměnou i-tého a j-tého sloupce.

Každou čtvercovou regulární matici $\mathbf{A}$ *můžeme vyjádřit ve tvaru*

$$\mathbf{A} = \mathbf{LU}\widetilde{\mathbf{P}}, \tag{1.7}$$

kde $\mathbf{L}$ *je dolní trojúhelníková matice,* $\mathbf{U}$ *je horní trojúhelníková matice a* $\widetilde{\mathbf{P}}$ *je permutační matice.* Vyjádření matice $\mathbf{A}$ ve tvaru (1.7) se nazývá *LU rozklad* matice $\mathbf{A}$. Příslušné matice $\mathbf{L}$, $\mathbf{U}$ a $\widetilde{\mathbf{P}}$ najdeme následujícím způsobem:

1. Sestavíme rozšířenou matici $[\mathbf{A} \mid \mathbf{I}]$ a ještě jednou matici $\mathbf{I}$.

2. Pomocí řádkových operací redukujeme $[\mathbf{A} \mid \mathbf{I}]$ na $\left[\mathbf{U} \mid \widetilde{\mathbf{L}}\right]$, kde $\widetilde{\mathbf{L}} = \mathbf{L}^{-1}$. *Pořadí řádku nezaměňujeme a vždy přičítáme násobek řádku s nižším indexem k řádku s vyšším indexem!* Není-li při redukci zapotřebí vyměňovat sloupce, je $\widetilde{\mathbf{P}} = \mathbf{I}$. Je-li při redukci $\mathbf{A}$ na $\mathbf{U}$ nutná i výměna sloupců, použijeme stejných výměn sloupců k transformaci matice $\mathbf{I}$ na permutační matici $\mathbf{P}$. V tomto případě $\widetilde{\mathbf{P}} = \mathbf{P}^T$.

3. Nakonec vypočteme známým způsobem matici $\mathbf{L} = \widetilde{\mathbf{L}}^{-1}$.

Řešení soustavy rovnic $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ s regulární maticí $\mathbf{A}$ pomocí LU rozkladu pak spočívá v tom, že soustavu přepíšeme do tvaru

$$\mathbf{L}\left(\mathbf{U}\left(\widetilde{\mathbf{P}}\mathbf{x}\right)\right) \quad = \quad \mathbf{b}$$

a položíme $\widetilde{\mathbf{P}}\mathbf{x} = \mathbf{y}$, $\mathbf{Uy} = \mathbf{z}$. Řešení soustavy se tak rozpadne na řešení tří soustav

$$\mathbf{Lz} = \mathbf{b}, \quad \mathbf{Uy} = \mathbf{z}, \quad \widetilde{\mathbf{P}}\mathbf{x} = \mathbf{y}. \tag{1.8}$$

Poznámka 1. LU rozklad není jednoznačný. Záleží na tom, jak volíme diagonální prvky matice $\mathbf{L}$:

$$\begin{bmatrix} 2, & 9 \\ 1, & 4 \end{bmatrix} = \begin{array}{l} \nearrow \begin{bmatrix} 1, & 0 \\ \frac{1}{2}, & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2, & 9 \\ 0, & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \\ \searrow \begin{bmatrix} 1, & 0 \\ \frac{1}{2}, & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2, & 9 \\ 0, & -1 \end{bmatrix} \end{array}.$$

Příklad 1. Užitím LU rozkladu řešte soustavu

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x_1 & + & x_2 & - & 3x_3 & = & -2 \\ 6x_1 & + & 3x_2 & - & 8x_3 & = & -5 \\ 2x_1 & - & x_2 & + & 5x_3 & = & 8. \end{array}$$

Řešení: Označíme $\mathbf{A}$ matici soustavy a přistoupíme k výpočtu matic $\mathbf{L}$, $\mathbf{U}$, $\widetilde{\mathbf{P}}$.

• Úprava $[\mathbf{A} \mid \mathbf{I}]$ na $\left[\mathbf{U} \mid \widetilde{\mathbf{L}}\right]$:

$$[\mathbf{A} \mid \mathbf{I}] = \left[\begin{array}{rrr|rrr} 2, & 1, & -3 & 1, & 0, & 0 \\ 6, & 3, & -8 & 0, & 1, & 0 \\ 2, & -1, & 5 & 0, & 0, & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ -3r_1 \\ -r_1 \end{array} \sim \begin{array}{c} \left[\begin{array}{rrr|rrr} 2, & 1, & -3 & 1, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 1 & -3, & 1, & 0 \\ 0, & -2, & 8 & -1, & 0, & 1 \end{array}\right] \\ \begin{array}{rrr} & \mathbf{s}_3 & \mathbf{s}_2 \end{array} \end{array} \sim$$

$$\left[\begin{array}{rrr|rrr} 2, & -3, & 1 & 1, & 0, & 0 \\ 0, & 1, & 0 & -3, & 1, & 0 \\ 0, & 8, & -2 & -1, & 0, & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ -8r_2 \end{array} \sim \left[\begin{array}{rrr|rrr} 2, & -3, & 1 & 1, & 0, & 0 \\ 0, & 1, & 0 & -3, & 1, & 0 \\ 0, & 0, & -2 & 23, & -8, & 1 \end{array}\right] = \left[\mathbf{U} \mid \widetilde{\mathbf{L}}\right].$$

• Výpočet permutační matice $\widetilde{\mathbf{P}}$:

$$\mathbf{I} = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 1, & 0, & 0 \\ 0, & 1, & 0 \\ 0, & 0, & 1 \end{bmatrix} \\ \begin{array}{ccc} & \mathbf{s}_3 & \mathbf{s}_2 \end{array} \end{array} \sim \begin{bmatrix} 1, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 1 \\ 0, & 1, & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{P}, \mathbf{P}^T = \begin{bmatrix} 1, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 1 \\ 0, & 1, & 0 \end{bmatrix} = \widetilde{\mathbf{P}}.$$

• Výpočet matice $\mathbf{L}$:

$$\left[\widetilde{\mathbf{L}} \mid \mathbf{I}\right] = \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1, & 0, & 0 & 1, & 0, & 0 \\ -3, & 1, & 0 & 0, & 1, & 0 \\ 23, & -8, & 1 & 0, & 0, & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ +3r_1 \\ -23r_1 \end{array} \sim \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1, & 0, & 0 & 1, & 0, & 0 \\ 0, & 1, & 0 & 3, & 1, & 0 \\ 0, & -8, & 1 & -23, & 0, & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ +8r_2 \end{array} \sim$$

$$\left[\begin{array}{rrr|rrr} 1, & 0, & 0 & 1, & 0, & 0 \\ 0, & 1, & 0 & 3, & 1, & 0 \\ 0, & 0, & 1 & 1, & 8, & 1 \end{array}\right] = [\mathbf{I} \mid \mathbf{L}]\,.$$

Nakonec přistoupíme k řešení rovnic (1.8):

$$\mathbf{Lz} = \mathbf{b}: \left[\begin{array}{rrr|r} 1, & 0, & 0 & -2 \\ 3, & 1, & 0 & -5 \\ 1, & 8, & 1 & 8 \end{array}\right] \begin{array}{l} z_1 = -2 \\ z_2 = 1 \\ z_3 = 2 \end{array}, \quad \mathbf{Uy} = \mathbf{z}: \left[\begin{array}{rrr|r} 2, & -3, & 1 & -2 \\ 0, & 1, & 0 & 1 \\ 0, & 0, & -2 & 2 \end{array}\right] \begin{array}{l} y_1 = 1 \\ y_2 = 1 \\ y_3 = -1 \end{array},$$

$$\widetilde{\mathbf{P}}\mathbf{x} = \mathbf{y}: \left[\begin{array}{rrr|r} 1, & 0, & 0 & 1 \\ 0, & 0, & 1 & 1 \\ 0, & 1, & 0 & -1 \end{array}\right] \begin{array}{l} x_1 = 1 \\ x_3 = 1 \\ x_2 = -1 \end{array}, \text{ řešení soustavy je } x_1 = 1,\ x_2 = -1 \text{ a } x_3 = 1.$$

Poznámka 2. Případnou výměnu sloupců při úpravě $[\mathbf{A} \mid \mathbf{I}]$ na $\left[\mathbf{U} \mid \widetilde{\mathbf{L}}\right]$ provádíme jen v matici $\mathbf{A}$ nebo upravené matici $\mathbf{A}$. K úpravě stačila pouze jediná výměna sloupců, a tudíž příslušná permutační matice $\widetilde{\mathbf{P}}$ je elementární permutační maticí. Pokud LU rozklad má posloužit pouze k řešení soustavy, nemusíme vyčíslit matici $\mathbf{L}$ explicitně. Vzhledem k tomu, že $\widetilde{\mathbf{L}} = \mathbf{L}^{-1}$, můžeme vyjádřit řešení první soustavy (1.8) ve tvaru $\mathbf{z} = \widetilde{\mathbf{L}}\mathbf{b}$:

$$\left[\begin{array}{rrr} 1, & 0, & 0 \\ -3, & 1, & 0 \\ 23, & -8, & 1 \end{array}\right] \left[\begin{array}{r} -2 \\ -5 \\ 8 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{r} -2 \\ 1 \\ 2 \end{array}\right].$$

Příklad 2. Najděte trojúhelníkový (LU) rozklad matice

$$\mathbf{A} = \left[\begin{array}{rrrr} 0, & -1, & 1, & 0 \\ -1, & 4, & -4, & 3 \\ 1, & -2, & 0, & 3 \\ 5, & -8, & 4, & 0 \end{array}\right].$$

Řešení:

- Redukce $[\mathbf{A} \mid \mathbf{I}]$ na $\left[\mathbf{U} \mid \widetilde{\mathbf{L}}\right]$:

$$\begin{array}{c} \qquad\qquad \mathbf{A} \qquad\qquad\qquad\qquad \mathbf{I} \\ \left[\begin{array}{rrrr|rrrr} 0, & -1, & 1, & 0 & 1, & 0, & 0, & 0 \\ -1, & 4, & -4, & 3 & 0, & 1, & 0, & 0 \\ 1, & -2, & 0, & 3 & 0, & 0, & 1, & 0 \\ 5, & -8, & 4, & 0 & 0, & 0, & 0, & 1 \end{array}\right] \\ \mathbf{s}_3 \qquad\qquad \mathbf{s}_1 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \end{array} \sim \left[\begin{array}{rrrr|rrrr} 1, & -1, & 0, & 0 & 1, & 0, & 0, & 0 \\ -4, & 4, & -1, & 3 & 0, & 1, & 0, & 0 \\ 0, & -2, & 1, & 3 & 0, & 0, & 1, & 0 \\ 4, & -8, & 5, & 0 & 0, & 0, & 0, & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ +4r_1 \\ \\ -4r_1 \end{array} \sim$$

$$\begin{array}{c} \left[\begin{array}{rrrr|rrrr} 1, & -1, & 0, & 0 & 1, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & -1, & 3 & 4, & 1, & 0, & 0 \\ 0, & -2, & 1, & 3 & 0, & 0, & 1, & 0 \\ 0, & -4, & 5, & 0 & -4, & 0, & 0, & 1 \end{array}\right] \\ \qquad \mathbf{s}_3 \quad \mathbf{s}_2 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \end{array} \sim \left[\begin{array}{rrrr|rrrr} 1, & 0, & -1, & 0 & 1, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & -1, & 0, & 3 & 4, & 1, & 0, & 0 \\ 0, & 1, & -2, & 3 & 0, & 0, & 1, & 0 \\ 0, & 5, & -4, & 0 & -4, & 0, & 0, & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ +r_2 \\ +5r_2 \end{array} \sim$$

$$\left[\begin{array}{rrrr|rrrr} 1, & 0, & -1, & 0 & 1, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & -1, & 0, & 3 & 4, & 1, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & -2, & 6 & 4, & 1, & 1, & 0 \\ 0, & 0, & -4, & 15 & 16, & 5, & 0, & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ \\ -2r_3 \end{array} \sim \begin{array}{c} \qquad\qquad \mathbf{U} \qquad\qquad\qquad\qquad \widetilde{\mathbf{L}} \\ \left[\begin{array}{rrrr|rrrr} 1, & 0, & -1, & 0 & 1, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & -1, & 0, & 3 & 4, & 1, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & -2, & 6 & 4, & 1, & 1, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & 3 & 8, & 3, & -2, & 1 \end{array}\right] \end{array}.$$

• Odvození permutační matice $\widetilde{\mathbf{P}}$:

$$\mathbf{I}=\begin{array}{c}\begin{bmatrix}1, & 0, & 0, & 0\\ 0, & 1, & 0, & 0\\ 0, & 0, & 1, & 0\\ 0, & 0, & 0, & 1\end{bmatrix}\\ \begin{array}{cccc}\mathbf{s}_3 & & \mathbf{s}_1 & \end{array}\end{array}\sim\begin{array}{c}\begin{bmatrix}0, & 0, & 1, & 0\\ 0, & 1, & 0, & 0\\ 1, & 0, & 0, & 0\\ 0, & 0, & 0, & 1\end{bmatrix}\\ \begin{array}{cccc} & & \mathbf{s}_3 & \mathbf{s}_2\end{array}\end{array}\sim\begin{bmatrix}0, & 1, & 0, & 0\\ 0, & 0, & 1, & 0\\ 1, & 0, & 0, & 0\\ 0, & 0, & 0, & 1\end{bmatrix}=\mathbf{P},$$

$$\mathbf{P}^T=\begin{bmatrix}0, & 0, & 1, & 0\\ 1, & 0, & 0, & 0\\ 0, & 1, & 0, & 0\\ 0, & 0, & 0, & 1\end{bmatrix}=\widetilde{\mathbf{P}}.$$

• Vyčíslení matice $\mathbf{L}$:

$$\begin{array}{c}\begin{array}{cc}\widetilde{\mathbf{L}} & \mathbf{I}\end{array}\\ \left[\begin{array}{cccc|cccc}1, & 0, & 0, & 0 & 1, & 0, & 0, & 0\\ 4, & 1, & 0, & 0 & 0, & 1, & 0, & 0\\ 4, & 1, & 1, & 0 & 0, & 0, & 1, & 0\\ 8, & 3, & -2, & 1 & 0, & 0, & 0, & 1\end{array}\right]\end{array}\begin{array}{l}\\ -4r_1\\ -4r_1\\ -8r_1\end{array}\sim\left[\begin{array}{cccc|cccc}1, & 0, & 0, & 0 & 1, & 0, & 0, & 0\\ 0, & 1, & 0, & 0 & -4, & 1, & 0, & 0\\ 0, & 1, & 1, & 0 & -4, & 0, & 1, & 0\\ 0, & 3, & -2, & 1 & -8, & 0, & 0, & 1\end{array}\right]\begin{array}{l}\\ \\ -r_2\\ -3r_2\end{array}\sim$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc}1, & 0, & 0, & 0 & 1, & 0, & 0, & 0\\ 0, & 1, & 0, & 0 & -4, & 1, & 0, & 0\\ 0, & 0, & 1, & 0 & 0, & -1, & 1, & 0\\ 0, & 0, & -2, & 1 & 4, & -3, & 0, & 1\end{array}\right]\begin{array}{l}\\ \\ \\ +2r_3\end{array}\sim\begin{array}{c}\begin{array}{cc}\mathbf{I} & \mathbf{L}\end{array}\\ \left[\begin{array}{cccc|cccc}1, & 0, & 0, & 0 & 1, & 0, & 0, & 0\\ 0, & 1, & 0, & 0 & -4, & 1, & 0, & 0\\ 0, & 0, & 1, & 0 & 0, & -1, & 1, & 0\\ 0, & 0, & 0, & 1 & 4, & -5, & 2, & 1\end{array}\right]\end{array}.$$

Vypočtené matice $\mathbf{L}\,,\mathbf{U}$ a $\widetilde{\mathbf{P}}$ můžeme ještě pro kontrolu dosadit do vzorce (1.7). Platí:

$$\begin{bmatrix}0, & -1, & 1, & 0\\ -1, & 4, & -4, & 3\\ 1, & -2, & 0, & 3\\ 5, & -8, & 4, & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1, & 0, & 0, & 0\\ -4, & 1, & 0, & 0\\ 0, & -1, & 1, & 0\\ 4, & -5, & 2, & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1, & 0, & -1, & 0\\ 0, & -1, & 0, & 3\\ 0, & 0, & -2, & 6\\ 0, & 0, & 0, & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0, & 1, & 0, & 0\\ 0, & 0, & 1, & 0\\ 1, & 0, & 0, & 0\\ 0, & 0, & 0, & 1\end{bmatrix}.$$

Pozorování. Prvky matice $\mathbf{L}$ se až na znaménko shodují s multiplikátory řádkových operací redukujících matici $\mathbf{A}$ na matici $\mathbf{U}$. Přesněji řečeno, jestliže jsme při redukci $\mathbf{A}$ na $\mathbf{U}$ přičetli k řádku r_j α-násobek řádku r_i, je odpovídající prvek l_{ji} matice $\mathbf{L}$ roven $-\alpha$. Můžeme tedy souběžně s úpravou matice $\mathbf{A}$ na matici $\mathbf{U}$ generovat matici $\mathbf{L}$: *Vyjdeme z jednotkové matice* $\mathbf{I}$ *stejného stupně. Je-li během úpravy* $\mathbf{A}$ *na* $\mathbf{U}$ *k j-tému řádku přičten* α*-násobek i-tého řádku, nahradíme nulu na místě (j,i) upravované jednotkové matice číslem* $-\alpha$. Ukážeme si to na příkladu matice $\mathbf{A}$ z předešlé úlohy. Místo matice $\mathbf{A}$ budeme ale redukovat hned matici $\mathbf{AP}=\bar{\mathbf{A}}$, abychom se už nemuseli zabývat výměnami sloupců.

$$\mathbf{AP}=\begin{bmatrix}0, & -1, & 1, & 0\\ -1, & 4, & -4, & 3\\ 1, & -2, & 0, & 3\\ 5, & -8, & 4, & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0, & 1, & 0, & 0\\ 0, & 0, & 1, & 0\\ 1, & 0, & 0, & 0\\ 0, & 0, & 0, & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1, & 0, & -1, & 0\\ -4, & -1, & 4, & 3\\ 0, & 1, & -2, & 3\\ 4, & 5, & -8, & 0\end{bmatrix}=\bar{\mathbf{A}}.$$

Redukce matice $\bar{\mathbf{A}}$

$$\begin{bmatrix}1, & 0, & -1, & 0,\\ -4, & -1, & 4, & 3,\\ 0, & 1, & -2, & 3,\\ 4, & 5, & -8, & 0\end{bmatrix}\begin{array}{l}\\ r_2+4r_1\\ \\ r_4-4r_1\end{array}\sim$$

Generování matice L

$$\begin{bmatrix}1, & 0, & 0, & 0\\ 0, & 1, & 0, & 0\\ 0, & 0, & 1, & 0\\ 0, & 0, & 0, & 1\end{bmatrix}\begin{array}{l}\\ -4\rightarrow l_{21}\\ \\ 4\rightarrow l_{41}\end{array}$$

$$\left[\begin{array}{rrrr} 1, & 0, & -1, & 0 \\ 0, & -1, & 0, & 3 \\ 0, & 1, & -2, & 3 \\ 0, & 5, & -4, & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ r_3 + 1r_2 \\ r_4 + 5r_2 \end{array} \sim \qquad \left[\begin{array}{rrrr} 1, & 0, & 0, & 0 \\ -4, & 1, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 1, & 0 \\ 4, & 0, & 0, & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ -1 \to l_{32} \\ -5 \to l_{42} \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{rrrr} 1, & 0, & -1, & 0 \\ 0, & -1, & 0, & 3 \\ 0, & 0, & -2, & 6 \\ 0, & 0, & -4, & 15 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ \\ r_4 - 2r_3 \end{array} \sim \qquad \left[\begin{array}{rrrr} 1, & 0, & 0, & 0 \\ -4, & 1, & 0, & 0 \\ 0, & -1, & 1, & 0 \\ 4, & -5, & 0, & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ \\ 2 \to l_{43} \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{rrrr} 1, & 0, & -1, & 0 \\ 0, & -1, & 0, & 3 \\ 0, & 0, & -2, & 6 \\ 0, & 0, & 0, & 3 \end{array}\right] = \mathbf{U} \qquad \mathbf{L} = \left[\begin{array}{rrrr} 1, & 0, & 0, & 0 \\ -4, & 1, & 0, & 0 \\ 0, & -1, & 1, & 0 \\ 4, & -5, & 2, & 1 \end{array}\right].$$

Poznámka 3. Není obtížné zdůvodnit, že tímto způsobem vždy dostaneme dolní trojúhelníkovou matici $\mathbf{L}$. Nechť $\mathbf{T}_1, \ldots, \mathbf{T}_k$ jsou elementární matice, které odpovídají řádkovým operacím transformujícím matici $\mathbf{A}$, resp. $\bar{\mathbf{A}} = \mathbf{AP}$ na matici $\mathbf{U}$. Platí

$$\mathbf{T}_k \mathbf{T}_{k-1} \cdots \mathbf{T}_1 \mathbf{AP} \quad = \quad \mathbf{U}. \tag{1.9}$$

Vzhledem k tomu, že matice $\bar{\mathbf{A}}$ má během úpravy (nenulové) vedoucí prvky pokaždé tam, kde je potřebujeme, jsou všechny matice $\mathbf{T}_1, \ldots, \mathbf{T}_k$ dolní trojúhelníkové matice $\mathbf{G}_{ij}\left(-\bar{a}_{ji}^{i-1}/\bar{a}_{ii}^{i-1}\right)$ $(i = 1, \ldots, n-1;\ j = i+1, \ldots, n)$, a tudíž i matice inverzní $\mathbf{T}_1^{-1}, \ldots, \mathbf{T}_k^{-1}$ jsou dolní trojúhelníkové matice $\mathbf{G}_{ij}\left(\bar{a}_{ji}^{i-1}/\bar{a}_{ii}^{i-1}\right)$, jejichž součinem je dolní trojúhelníková matice $\mathbf{L}$. Ze vztahu (1.9) totiž máme

$$\mathbf{AP} \quad = \quad \underbrace{\mathbf{T}_1^{-1} \cdots \mathbf{T}_{k-1}^{-1} \mathbf{T}_k^{-1}}_{\mathbf{L}} \mathbf{U},$$

takže

$$\mathbf{L} \quad = \quad \mathbf{T}_1^{-1} \cdots \mathbf{T}_{k-1}^{-1} \mathbf{T}_k^{-1} \mathbf{I}. \tag{1.10}$$

Podle (1.10) získáme tedy matici $\mathbf{L}$ z jednotkové matice $\mathbf{I}$ užitím řádkových operací, které odpovídají postupně maticím $\mathbf{T}_k^{-1}, \mathbf{T}_{k-1}^{-1}, \ldots, \mathbf{T}_1^{-1}$. Nechť $\mathbf{T}_k = \mathbf{G}_{n-1n}(\alpha)$ je matice poslední elementární transformace (α-násobek řádku r_{n-1} přičteme k řádku r_n) při redukci matice $\bar{\mathbf{A}}$ na matici $\mathbf{U}$. Odtud matice $\mathbf{T}_k^{-1}\mathbf{I} = \mathbf{G}_{n-1n}(-\alpha)$ vznikne z jednotkové matice $\mathbf{I}$ záměnou nuly v pozici $(n, n-1)$ číslem $-\alpha$. Podobně, je-li $\mathbf{T}_{k-1} = \mathbf{G}_{n-2n}(\beta)$, pak součinem $\mathbf{T}_{k-1}^{-1}\mathbf{T}_k^{-1}$ je matice $\mathbf{G}_{n-2n}(-\beta)\,\mathbf{G}_{n-1n}(-\alpha)$, která se rovná matici, jež vznikne z $\mathbf{G}_{n-1n}(-\alpha)$ přičtením $(-\beta)$-násobku řádku r_{n-2} k řádku r_n. Ježto matice $\mathbf{G}_{n-1n}(-\alpha)$ má na místě $(n-2, n-2)$ prvek 1, zatímco ostatní prvky řádku jsou nulové, bude mít matice $\mathbf{G}_{n-2n}(-\beta)\,\mathbf{G}_{n-1n}(-\alpha)$ na místě $(n, n-2)$ číslo $-\beta$. Dále je pak obsazena pozice $(n-1, n-2)$. Vypočteme-li součin $\mathbf{T}_{k-2}^{-1}\left(\mathbf{T}_{k-1}^{-1}\mathbf{T}_k^{-1}\right)$, kde $\mathbf{T}_{k-2}^{-1} = \mathbf{G}_{n-2n-1}(-\gamma)$, objeví se ve výsledné matici na místě $(n-1, n-2)$ číslo $-\gamma$, atd. Takovým způsobem jsou generovány prvky matice $\mathbf{L}$, aniž by se pozměnily prvky již vygenerované. To znamená, že matici $\mathbf{L}$ můžeme skutečně vytvářet z jednotkové matice $\mathbf{I}$ spolu s úpravou matice $\mathbf{A}$ na matici $\mathbf{U}$ tím, že v ní obsazujeme příslušná místa pod hlavní diagonálou multiplikátory řádkových operací s opačným znaménkem.

Cvičení:

1. Určete permutační matici $\mathbf{P}$ tak, aby $\mathbf{AP} = \mathbf{B}$, jestliže

$$\mathbf{A} = \left[\begin{array}{rrr} 1, & 2, & -1 \\ 3, & 7, & 2 \\ 4, & -2, & 1 \end{array}\right], \quad \mathbf{B} = \left[\begin{array}{rrr} 2, & -1, & 1 \\ 7, & 2, & 3 \\ -2, & 1, & 4 \end{array}\right].$$

2. Najděte permutační matici $\mathbf{P}$, matice $\mathbf{L}$ a $\mathbf{U}$ tak, aby $\mathbf{AP} = \mathbf{LU}$, je-li

a) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2, & -1 \\ 6, & -5 \end{bmatrix}$;

b) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4, & 6, & 1 \\ 2, & 3, & 1 \\ 1, & 1, & 1 \end{bmatrix}$.

3. Lineární systémy $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ řešte pomocí LU rozkladu:

a) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1, & 2, & -1 \\ 3, & 7, & 2 \\ 4, & -2, & 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$;

b) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1, & 1, & -1, & -2 \\ 2, & 2, & -1, & 1 \\ -1, & 2, & 1, & -4 \\ 1, & 4, & 2, & 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 8 \\ 5 \\ 10 \\ 5 \end{bmatrix}$;

c) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1, & -4, & 1, & -2 \\ 0, & 2, & -1, & 1 \\ 2, & -7, & -2, & 1 \\ 0, & 3, & 0, & -4 \end{bmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} -9 \\ 6 \\ 10 \\ -16 \end{bmatrix}$.

4. Matici $\mathbf{L}$ z *příkladu 2* této podkapitoly napište jako součin elementárních matic.

5. Řešte soustavu $\mathbf{A}^2\mathbf{x} = \mathbf{b}$, pro

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2, & -1, & 0 \\ 4, & -1, & 2 \\ -6, & 2, & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{b} = \begin{bmatrix} -2 \\ 14 \\ 12 \end{bmatrix}.$$

6. Řešte soustavu $\mathbf{A}^3\mathbf{x} = \mathbf{b}$, je-li

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1, & 0, & 1 \\ 3, & 1, & 0 \\ -2, & 0, & 4 \end{bmatrix}, \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 27 \\ 29 \\ 122 \end{bmatrix}.$$

7. Budiž $\mathbf{L}$ ($\mathbf{U}$) dolní (horní) trojúhelníková matice. Označte, které z následujících tvrzení je pravdivé (P) nebo nepravdivé (N):
   a) Každou čtvercovou matici $\mathbf{A}$ lze rozložit na součin $\mathbf{LU}$;
   b) Každou regulární matici $\mathbf{A}$ můžeme rozložit na součin $\mathbf{LU}$;
   c) Každou regulární matici $\mathbf{A}$ lze vyjádřit jako součin $\mathbf{LU}\widetilde{\mathbf{P}}$, kde $\widetilde{\mathbf{P}}$ je permutační matice;
   d) Lineární systém $\mathbf{LUx} = \mathbf{b}$ řešíme nejprve dopřednou substitucí a pak zpětnou substitucí;
   e) K výpočtu LU rozkladu je zapotřebí asi $\frac{1}{2}$ počtu násobení než k výpočtu inverzní matice;
   f) Existuje pouze jediný rozklad dané regulární matice $\mathbf{A}$ na součin $\mathbf{LU}\widetilde{\mathbf{P}}$.

Výsledky:

1. $\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0, & 0, & 1 \\ 1, & 0, & 0 \\ 0, & 1, & 0 \end{bmatrix}$.

2. a) $\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1, & 0 \\ 0, & 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1, & 0 \\ 3, & 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{U} = \begin{bmatrix} 2, & -1 \\ 0, & -2 \end{bmatrix}$;

   b) $\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 1 \\ 0, & 1, & 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1, & 0, & 0 \\ \frac{1}{2}, & 1, & 0 \\ \frac{1}{4}, & \frac{3}{2}, & 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{U} = \begin{bmatrix} 4, & 1, & 6 \\ 0, & \frac{1}{2}, & 0 \\ 0, & 0, & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$.

3. a) $\widetilde{\mathbf{P}} = \mathbf{I}$, $\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1, & 0, & 0 \\ 3, & 1, & 0 \\ 4, & -10, & 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{U} = \begin{bmatrix} 1, & 2, & -1 \\ 0, & 1, & 5 \\ 0, & 0, & 55 \end{bmatrix}$, $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$;

   b) $\widetilde{\mathbf{P}} = \begin{bmatrix} 1, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 1, & 0 \\ 0, & 1, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1, & 0, & 0, & 0 \\ 2, & 1, & 0, & 0 \\ -1, & 0, & 1, & 0 \\ 1, & 3, & 1, & 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{U} = \begin{bmatrix} 1, & -1, & 1, & -2 \\ 0, & 1, & 0, & 5 \\ 0, & 0, & 3, & -6 \\ 0, & 0, & 0, & -6 \end{bmatrix}$,

   $\mathbf{x} = [1, 2, -1, -2]^T$.

   c) $\widetilde{\mathbf{P}} = \mathbf{I}$, $\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & 1, & 0, & 0 \\ 2, & \frac{1}{2}, & 1, & 0 \\ 0, & \frac{3}{2}, & -\frac{3}{7}, & 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{U} = \begin{bmatrix} 1, & -4, & 1, & -2 \\ 0, & 2, & -1, & 1 \\ 0, & 0, & -\frac{7}{2}, & \frac{9}{2} \\ 0, & 0, & 0, & -\frac{25}{7} \end{bmatrix}$, $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix}$.

4. $\mathbf{L} = \mathbf{G}_{12}(-4)\,\mathbf{G}_{14}(4)\,\mathbf{G}_{23}(-1)\,\mathbf{G}_{24}(-5)\,\mathbf{G}_{34}(2) =$

$$= \begin{bmatrix} 1, & 0, & 0, & 0 \\ -4, & 1, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 1, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & 1, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 1, & 0 \\ 4, & 0, & 0, & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & 1, & 0, & 0 \\ 0, & -1, & 1, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & 1, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 1, & 0 \\ 0, & -5, & 0, & 1 \end{bmatrix} \times$$

$$\times \begin{bmatrix} 1, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & 1, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 1, & 0 \\ 0, & 0, & 2, & 1 \end{bmatrix}.$$

5. $\mathbf{x} = [-2, 0, 1]^T$; návod: položte $\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x}$ a soustavu $\mathbf{A}\mathbf{y} = \mathbf{b}$ řešte užitím LU rozkladu.

6. $\mathbf{x} = [-1, 2, 2]^T$.

7. a) N; b) N; c) P; d) P; e) P; f) N.

Kapitola 2

Vektorové prostory

Množina $\mathcal{V}$ prvků $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}, \ldots$ se nazývá *vektorový prostor*, má-li následující vlastnosti:

- Jsou-li $\mathbf{u}$, $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$ libovolné prvky a je-li α libovolné číslo (reálné nebo komplexní), pak také *součet* $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ a *skalární násobek* $\alpha\mathbf{u}$ patří do $\mathcal{V}$,
- v množině $\mathcal{V}$ existuje prvek $\mathbf{o}$ a ke každému prvku $\mathbf{u} \in \mathcal{V}$ existuje prvek $-\mathbf{u} \in \mathcal{V}$,

přičemž pro všechna $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w} \in \mathcal{V}$ a čísla α, $\beta \in \mathbb{R}\,(\mathbb{C})$ platí následující podmínky:

V1 $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w})\,;$
V2 $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u};$
V3 $\mathbf{u} + \mathbf{o} = \mathbf{u};$
V4 $\mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = \mathbf{o};$
V5 $\alpha\,(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \alpha\mathbf{u} + \alpha\mathbf{v};$
V6 $(\alpha + \beta)\,\mathbf{u} = \alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{u};$
V7 $\alpha\,(\beta\mathbf{u}) = (\alpha\beta)\,\mathbf{u};$
V8 $1\mathbf{u} = \mathbf{u}.$

Prvky množiny $\mathcal{V}$ nazýváme *vektory*. Reálná, resp. komplexní čísla nazýváme *skaláry*. Je-li množinou skalárů množina reálných (komplexních) čísel, mluvíme o *reálném (komplexním)* vektorovém prostoru. Vektor $\mathbf{o}$ se nazývá *nulový vektor* a vektor $-\mathbf{u}$ *opačný vektor* k vektoru $\mathbf{u}$.

Neprázdnou podmnožinu $\mathcal{W}$ vektorového prostoru nazveme *podprostorem* prostoru $\mathcal{V}$, jestliže je sama vektorovým prostorem vzhledem k operacím sčítání vektorů a násobení vektoru skalárem definovanými na $\mathcal{V}$.

Příklad 1. Reálné aritmetické vektory zavedené v *podkapitole 1.1* s operacemi sčítání vektorů a násobení vektoru skalárem po složkách tvoří vektorový prostor, který se nazývá *aritmetický vektorový prostor*.

Příklad 2. Buď $\mathcal{V} = \mathbb{R}^2$ množina všech uspořádaných dvojic reálných čísel. Definujme sčítání uspořádaných dvojic a násobení uspořádané dvojice skalárem následovně:

- $[x, y] \oplus [r, s] = [x + r, 2y + s]\,;$
- $\alpha\,[x, y] = [\alpha x, \alpha y]\,.$

Je množina $\mathcal{V}$ pro takto definované sčítání a násobení skalárem vektorový prostor?

Řešení: Ověříme platnost axiomů V1 - V8 vektorového prostoru. Položme $\mathbf{u} = [x, y]$, $\mathbf{v} = [r, s]$ a $\mathbf{w} = [a, b]$. Začneme axiomem V1. Má platit

$$(\mathbf{u} \oplus \mathbf{v}) \oplus \mathbf{w} \quad = \quad \mathbf{u} \oplus (\mathbf{v} \oplus \mathbf{w}) .$$

$$(\mathbf{u} \oplus \mathbf{v}) \oplus \mathbf{w} = ([x, y] \oplus [r, s]) \oplus [a, b] = [x + r, 2y + s] \oplus [a, b] = [x + r + a, 4y + 2s + b] .$$

$$\mathbf{u} \oplus (\mathbf{v} \oplus \mathbf{w}) = [x, y] \oplus ([r, s] \oplus [a, b]) = [x, y] \oplus [r + a, 2s + b] = [x + r + a, 2y + 2s + b] .$$

Axiom V1 neplatí,

$$(\mathbf{u} \oplus \mathbf{v}) \oplus \mathbf{w} \neq \mathbf{u} \oplus (\mathbf{v} \oplus \mathbf{w}) ,$$

množina $\mathcal{V}$ není vektorový prostor. Operaci sčítání uspořádaných dvojic jsme označili " $\oplus$ ", abychom ji odlišili od sčítání po složkách.

Příklad 3. Ukažte, že neprázdná podmnožina $\mathcal{W}$ vektorového prostoru $\mathcal{V}$ je podprostorem prostoru $\mathcal{V}$, právě když splňuje následující podmínky:

(1) Jestliže $\mathbf{u}$, $\mathbf{v} \in \mathcal{W}$, pak $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in \mathcal{W}$.
(2) Jestliže $\alpha \in \mathbb{R}$ a $\mathbf{u} \in \mathcal{W}$, pak $\alpha\mathbf{u} \in \mathcal{W}$.

Řešení: Je-li $\mathcal{W}$ vektorový podprostor, tak podmínky (1) a (2) jsou samozřejmě splněny. Nechť $\mathcal{W}$ vyhovuje podmínkám (1) a (2). Položíme-li $\alpha = -1$, pak vzhledem k (2) $-1\mathbf{u} = -\mathbf{u} \in \mathcal{W}$ a podle (1) $\mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = \mathbf{o} \in \mathcal{W}$, takže opačný vektor i nulový vektor patří do $\mathcal{W}$. Ostatní axiomy vektorového prostoru vzhledem k tomu, že $\mathcal{W} \subset \mathcal{V}$, musí v množině $\mathcal{W}$ platit pochopitelně také.

Příklad 4. Buď $\mathcal{F}$ vektorový prostor všech reálných funkcí reálné proměnné x spolu s operacemi

- *sčítání:* pro každé f, $g \in \mathcal{F}$ a libovolné $x \in \mathbb{R}$ klademe $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$;
- *skalární násobení:* pro každé $f \in \mathcal{F}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ a libovolné $x \in \mathbb{R}$ klademe $(\alpha f)(x) = \alpha f(x)$.

Ukažte, že množina

$$\mathcal{F}_0 = \{f \in \mathcal{F} : \, f(0) = 0\}$$

je podprostorem prostoru $\mathcal{F}$.

Řešení: Jak jsme ukázali v předešlé úloze, stačí ověřit, že množina $\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}$ je uzavřena vzhledem ke sčítání vektorů a násobení vektoru skalárem, tj.

$$\begin{aligned} f, \, g \in \mathcal{F}_0 \quad &\Rightarrow \quad f + g \in \mathcal{F}_0, \\ \alpha \in \mathbb{R} \wedge f \in \mathcal{F}_0 \quad &\Rightarrow \quad \alpha f \in \mathcal{F}_0. \end{aligned}$$

Nechť tedy f, $g \in \mathcal{F}_0$ a $\alpha \in \mathbb{R}$. Potom

$$\begin{aligned} (f + g)(0) \quad &= \quad f(0) + g(0) \quad = \quad 0, \\ (\alpha f)(0) \quad &= \quad \alpha f(0) \quad = \quad 0, \end{aligned}$$

takže $f + g \in \mathcal{F}_0$ a $\alpha f \in \mathcal{F}_0$. Množina $\mathcal{F}_0$ je vektorový podprostor.

Příklad 5. Dokažte, že lineární obal množiny $\mathcal{S} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ vektorů prostoru $\mathcal{V}$ tvoří vektorový podprostor prostoru $\mathcal{V}$.

Řešení: Lineární obal množiny $\mathcal{S}$ (označujeme $\langle \mathcal{S} \rangle$) je množina všech vektorů, které se dají vyjádřit ve tvaru

$$\mathbf{u} \quad = \quad \alpha_1 \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \mathbf{v}_2 + \cdots + \alpha_k \mathbf{v}_k ; \;\; \alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{R}.$$

Nechť tedy $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \langle \mathcal{S} \rangle$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Zřejmě $\mathbf{v} = \beta_1 \mathbf{v}_1 + \beta_2 \mathbf{v}_2 + \cdots + \beta_k \mathbf{v}_k$, odtud

$$\begin{aligned} \mathbf{u} + \mathbf{v} &= (\alpha_1 + \beta_1)\,\mathbf{v}_1 + \cdots + (\alpha_k + \beta_k)\,\mathbf{v}_k \in \langle \mathcal{S} \rangle, \\ \alpha \mathbf{u} &= (\alpha\alpha_1)\,\mathbf{v}_1 + \cdots + (\alpha\alpha_k)\,\mathbf{v}_k \in \langle \mathcal{S} \rangle. \end{aligned}$$

Lineární obal $\langle \mathcal{S} \rangle$ je uzavřen vzhledem ke sčítání vektorů a násobení vektoru skalárem, a tudíž tvoří vektorový podprostor v prostoru $\mathcal{V}$.

Poznámka. Lineární obal množiny $\mathcal{S} = \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ je v literatuře často označován jako vektorový prostor *generovaný* vektory $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$ a píše se $\langle \mathcal{S} \rangle = \langle \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k \rangle$.

Pozorování. Snadno ověříme, že $\mathcal{S} \subset \langle \mathcal{S} \rangle$: Pro každý vektor $\mathbf{v}_i \in \mathcal{S}$; $i \in \{1, \ldots, k\}$, totiž platí

$$\mathbf{v}_i = \alpha_1 \mathbf{v}_1 + \cdots + \alpha_i \mathbf{v}_i + \cdots + \alpha_k \mathbf{v}_k,$$

kde klademe $\left\{ \begin{array}{c} \alpha_j = 1 \\ \alpha_j = 0 \end{array} \right\}$, je-li $\left\{ \begin{array}{c} j = i \\ j \neq i \end{array} \right\}$; $j = 1, \ldots, k$. To znamená, že $\mathbf{v}_i \in \langle \mathcal{S} \rangle$.

Cvičení:

1. Buď $\mathcal{V} = \mathbb{R}^2$ množina všech uspořádaných dvojic reálných čísel. Definujme sčítání uspořádaných dvojic a násobení uspořádané dvojice skalárem:

$$\begin{aligned} [x, y] + [r, s] &= [x + r, y + s]; \\ \alpha \odot [x, y] &= [0, 0]. \end{aligned}$$

   Tvoří množina $\mathbb{R}^2$ spolu s těmito operacemi vektorový prostor?

2. Ukažte, že množina $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ všech reálných čtvercových matic řádu 2 je vektorový prostor vzhledem ke sčítání matic a násobení matice skalárem ve smyslu *podkapitoly 1.2.*

3. Nechť je dán vektorový prostor $\mathbb{R}^2$ s operacemi sčítání vektorů a násobení vektoru skalárem po složkách. Buď $\mathcal{W} = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : x = y\}$. Je množina $\mathcal{W}$ podprostorem vektorového prostoru $\mathbb{R}^2$?

4. Budiž dán vektorový prostor $\mathbb{R}^2$ jako v minulé úloze. Nechť $\mathcal{U} = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : y = x + 1\}$. Tvoří množina $\mathcal{U}$ podprostor v $\mathbb{R}^2$?

5. Budiž dána soustava homogenních rovnic $\mathbf{Ax} = \mathbf{o}$, kde $\mathbf{A} = [a_{ik}]_{m \times n}$. Je množina všech řešení homogenní soustavy podprostorem vektorového prostoru $\mathbb{R}^n$?

6. Dokažte, že množina $\mathcal{F}_1$ všech reálných funkcí f takových, že $f(0) = 1$, není podprostorem vektorového prostoru $\mathcal{F}$ všech reálných funkcí.

Výsledky:

1. Ne. Neplatí axiom V8.

2. Množina $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ je uzavřena vzhledem k operacím sčítání a skalární násobení, které vyhovují axiomům V1 - V8 (viz vlastnosti maticových operací v *podkapitole 1.2*).

3. Ano.

4. Ne.

5. Ano.

6. Při řešení úloh 3 - 6 postupujte ve shodě s *příkladem 3* této podkapitoly.

2.1 Lineární kombinace, závislost a nezávislost vekrorů. Báze vektorového prostoru, souřadnice vektoru, dimenze.

Říkáme, že vektor $\mathbf{v}$ je *lineární kombinací* vektorů $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$, existují-li takové skaláry $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$, že

$$\mathbf{v} \quad = \quad \alpha_1 \mathbf{v}_1 + \cdots + \alpha_k \mathbf{v}_k.$$

Množina vektorů $\mathcal{S} = \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ je *lineárně nezávislá*, jestliže rovnice

$$\alpha_1 \mathbf{v}_1 + \cdots + \alpha_k \mathbf{v}_k \quad = \quad \mathbf{o} \tag{2.1}$$

má pouze triviální řešení, tj. $\alpha_1 = \cdots = \alpha_k = 0$. Má-li rovnice (2.1) i jiné řešení než triviální, tzn. alespoň jeden ze skalárů $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ je nenulový, je možina $\mathcal{S}$ *lineárně závislá.* Nekonečná množina vektorů $\mathcal{S} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots\}$ je lineárně nezávislá, je-li každá její konečná podmnožina lineárně nezávislá.

Množina nenulových vektorů $\mathcal{S} = \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ je lineárně závislá, právě když jeden z nich je lineární kombinací předcházejících.

Množina $\mathcal{E}$ vektorů vektorového prostoru $\mathcal{V}$ se nazývá *báze vektorového prostoru* $\mathcal{V}$, jestliže platí:

- $\mathcal{E}$ je lineárně nezávislá.
- Každý vektor $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$ lze vyjádřit jako lineární kombinaci vektorů množiny $\mathcal{E}$.

Je-li $\mathcal{E} = (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)$ uspořádaná báze vektorového prostoru $\mathcal{V}$, pak každý vektor $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$ se dá jednoznačně napsat ve tvaru

$$\mathbf{v} \quad = \quad v_1 \mathbf{e}_1 + \cdots + v_n \mathbf{e}_n. \tag{2.2}$$

Čísla $v_1, \ldots, v_n$ z rovnice (2.2) nazýváme *souřadnice vektoru* $\mathbf{v}$ vzhledem k uspořádané bázi $\mathcal{E}$ a zapisujeme je někdy jako *sloupcový* aritmetický vektor $[\mathbf{v}]_{\mathcal{E}} = [v_1, \ldots, v_n]^T$.

Počet vektorů báze udává *dimenzi* vektorového prostoru. Je-li báze *konečná (nekonečná)*, mluvíme o *konečněrozměrném (nekonečněrozměrném)* vektorovém prostoru.

Příklad 1. Vyjádřete vektor $\mathbf{u} = [1,\, 3,\, 1]$ jako lineární kombinaci vektorů $\mathbf{u}_1 = [2,\, 1,\, 1]$, $\mathbf{u}_2 = [1,\, 1,\, 2]$ a $\mathbf{u}_3 = [0,\, 1,\, 1]$ vektorového prostoru $\mathbb{R}^3$.

Řešení: Hledáme takové skaláry α_1, α_2, α_3, aby platilo

$$\alpha_1 \mathbf{u}_1 + \alpha_2 \mathbf{u}_2 + \alpha_3 \mathbf{u}_3 \quad = \quad \mathbf{u}.$$

Po dosazení za jednotlivé vektory obdržíme porovnáním příslušných složek soustavu rovnic

$$\begin{array}{rcrcrcl} 2\alpha_1 & + & \alpha_2 & & & = & 1 \\ \alpha_1 & + & \alpha_2 & + & \alpha_3 & = & 3 \\ \alpha_1 & + & 2\alpha_2 & + & \alpha_3 & = & 1, \end{array}$$

jež má řešení $\alpha_1 = \frac{3}{2}$, $\alpha_2 = -2$, $\alpha_3 = \frac{7}{2}$, tedy $\mathbf{u} = \frac{3}{2}\mathbf{u}_1 + (-2)\,\mathbf{u}_2 + \frac{7}{2}\mathbf{u}_3$.

Příklad 2 Ukažte, že polynomy $p_1(x) = 1$, $p_2(x) = x + 1$, $p_3(x) = (x+1)^2$ jsou lineárně nezávislé a napište polynom $p(x) = 3x^2 - 4x + 5$ jako lineární kombinací polynomů p_1, p_2, p_3.

Řešení: Sestavíme rovnici (2.1) pro zadané polynomy. Funkci nulového vektoru plní polynom $o(x) = 0x^2 + 0x + 0$, jež pro každé $x \in \mathbb{R}$ nabývá hodnoty 0. Platí

$$\alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2 + \alpha_3 p_3 \quad = \quad 0,$$

$$\alpha_1 \cdot 1 + \alpha_2 (x+1) + \alpha_3 \left(x^2 + 2x + 1\right) \quad = \quad 0. \tag{2.3}$$

Porovnáním koeficientů u jednotlivých mocnin dostaneme soustavu rovnic:

$$\begin{aligned} x^0 : \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 &= 0 \\ x^1 : \qquad \alpha_2 + 2\alpha_3 &= 0 \\ x^2 : \qquad\qquad \alpha_3 &= 0, \end{aligned}$$

jež má evidentně pouze triviální řešení $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$, tj. polynomy jsou lineárně nezávislé. K dořešení úlohy stačí v rovnici (2.3) uvést na pravé straně polynom $p(x)$ a vyřešit soustavu

$$\begin{aligned} \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 &= 5 \\ \alpha_2 + 2\alpha_3 &= -4 \\ \alpha_3 &= 3. \end{aligned}$$

Odtud zpětnou substitucí máme $\alpha_3 = 3$, $\alpha_2 = -10$, $\alpha_1 = 12$, takže $p(x) = 12 - 10(x+1) + 3(x+1)^2$.

Poznámka 1. Polynomy $p_1(x) = 1$, $p_2(x) = x+1$, $p_3(x) = (x+1)^2$ tvoří bázi vektorového prostoru $\mathcal{P}_2$ všech polynomů stupně nejvýše 2. Prostor $\mathcal{P}_2$ má *standardní bázi* $\mathcal{P} = \left(1,\, x,\, x^2\right)$, jeho dimenze je tedy 3, a tudíž libovolnou trojici nezávislých polynomů stupně nejvýše 2 lze pokládat za jeho bázi, neboť počet vektorů kterékoliv báze daného vektorového prostoru je vždy stejný.

Přejdeme-li k souřadnicím vektoru, můžeme psát, že polynom $p(x)$ má v uspořádaných bázích $\mathcal{P} = \left(1,\, x,\, x^2\right)$, resp. $\widetilde{\mathcal{P}} = \left(1,\, x+1,\, (x+1)^2\right)$ souřadnice $5, -4, 3$, resp. $12, -10, 3$. Píšeme

$[p(x)]_{\mathcal{P}} = [5, -4,\, 3]^T$, resp. $[p(x)]_{\widetilde{\mathcal{P}}} = [12, -10,\, 3]^T$.

Poznámka 2. Podrobné řešení soustav rovnic v předešlých úlohách nechávám na čtenáři, nicméně podívejme se na příslušné rozšířené matice:

Příklad 1: $[\mathbf{A}_1 \mid \mathbf{b}_1] = \left[\begin{array}{ccc|c} 2, & 1, & 0 & 1 \\ 1, & 1, & 1 & 3 \\ 1, & 2, & 1 & 1 \end{array}\right]$. **Příklad 2:** $[\mathbf{A}_2 \mid \mathbf{b}_2] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1, & 1, & 1 & 5 \\ 0, & 1, & 2 & -4 \\ 0, & 0, & 1 & 3 \end{array}\right]$.

Sloupce matice $[\mathbf{A}_1 \mid \mathbf{b}_1]$ tvoří souřadnice vektorů $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}$ vzhledem ke *standardní bázi* $\mathcal{E} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ ($\mathbf{e}_1 = [1,0,0]$, $\mathbf{e}_2 = [0,1,0]$, $\mathbf{e}_3 = [0,0,1]$) vektorového prostoru $\mathbb{R}^3$. Stejně tak sloupce matice $[\mathbf{A}_2 \mid \mathbf{b}_2]$ tvoří souřadnice zadaných polynomů vzhledem ke standardní bázi $\mathcal{P} = \left(1,\, x,\, x^2\right)$ vektorového prostoru $\mathcal{P}_2$. Je tedy:

1. $[\mathbf{A}_1 \mid \mathbf{b}_1] = \left[\begin{array}{ccc|c} | & | & | & | \\ [\mathbf{u}_1]_{\mathcal{E}} & [\mathbf{u}_2]_{\mathcal{E}} & [\mathbf{u}_3]_{\mathcal{E}} & [\mathbf{u}]_{\mathcal{E}} \\ | & | & | & | \end{array}\right]$, 2. $[\mathbf{A}_2 \mid \mathbf{b}_2] = \left[\begin{array}{ccc|c} | & | & | & | \\ [p_1]_{\mathcal{P}} & [p_2]_{\mathcal{P}} & [p_3]_{\mathcal{P}} & [p]_{\mathcal{P}} \\ | & | & | & | \end{array}\right]$.

Příklad 3. Najděte bázi prostoru $\mathcal{W} = \left\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : \, 2x_1 + x_2 - x_3 = 0 \wedge x_1 - x_2 + x_3 = 0\right\}$. Zdůvodněte, že se jedná o bázi.

Řešení: Vektorový prostor $\mathcal{W}$ je vlastně množinou všech řešení homogenní soustavy

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 - x_3 &= 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 &= 0. \end{aligned}$$

Soustava má řešení: $x_1 = 0$, $x_2 = t$, $x_3 = t$, $t \in \mathbb{R}$. Odtud $\mathcal{W} = \left\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : \, \mathbf{x} = t\,[0,1,1],\, t \in \mathbb{R}\right\}$. Vektorový prostor $\mathcal{W}$ je tak lineárním obalem množiny $\mathcal{S} = \{[0,1,1]\}$, píšeme $\mathcal{W} = \langle [0,1,1] \rangle$. Množina $\mathcal{S}$ je navíc lineárně nezávislá, neboť nenulový vektor $\mathbf{u} = [0,1,1]$ je nutně lineárně nezávislý, a tedy množina $\mathcal{S}$ je báze prostoru $\mathcal{W}$.

Příklad 4. Určete dimenzi vektorového prostoru $\mathcal{U} = \langle \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d} \rangle$, je-li $\mathbf{a} = [1,1,1]$, $\mathbf{b} = [1,2,0]$, $\mathbf{c} = [1,0,1]$, $\mathbf{d} = [-1,5,4]$.

Řešení: Vektorový prostor $\mathcal{U}$ je lineárním obalem množiny $\mathcal{S} = \{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}\}$. Víme, že nenulové vektory jsou lineárně závislé právě tehdy, když jeden z nich je lineární kombinací předcházejících. Množiny $\mathcal{S}_1 = \{\mathbf{a}\}$ a $\mathcal{S}_2 = \{\mathbf{a}, \mathbf{b}\}$ jsou zřejmě lineárně nezávislé. Vektor $\mathbf{a} \neq \mathbf{o}$ a neplatí $\mathbf{b} = k \cdot \mathbf{a}$ pro žádný skalár $k \in \mathbb{R}$. Také množina $\mathcal{S}_3 = \{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$ je lineárně nezávislá, neboť ani vektor $\mathbf{c}$ není lineární kombinací vektorů $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$. Rovnice

$$\alpha \mathbf{a} + \beta \mathbf{b} \quad = \quad \mathbf{c}$$

nemá, jak se dá snadno zjistit řešení. To poznáme jednak tak, že odpovídající soustava

$$\begin{array}{ccccc} \alpha & + & \beta & = & 1 \\ \alpha & + & 2\beta & = & 0 \\ \alpha & & & = & 1 \end{array}$$

nemá řešení, nebo také tak, že porovnáme hodnosti matice $\mathbf{A}$ a matice rozšířené $[\mathbf{A} \mid \mathbf{c}]$:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1, & 1 \\ 1, & 2 \\ 1, & 0 \end{bmatrix} \begin{array}{c} \\ -r_1 \\ -r_1 \end{array} \sim \begin{bmatrix} 1, & 1 \\ 0, & 1 \\ 0, & -1 \end{bmatrix} \begin{array}{c} \\ \\ +r_2 \end{array} \sim \begin{bmatrix} \mathbf{1}, & 1 \\ 0, & \mathbf{1} \\ 0, & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow h(\mathbf{A}) = 2;$$

$$[\mathbf{A} \mid \mathbf{c}] = \begin{bmatrix} 1, & 1, & 1 \\ 1, & 2, & 0 \\ 1, & 0, & 1 \end{bmatrix} \begin{array}{c} \\ -r_1 \\ -r_1 \end{array} \sim \begin{bmatrix} 1, & 1, & 1 \\ 0, & 1, & -1 \\ 0, & -1, & 0 \end{bmatrix} \begin{array}{c} \\ \\ +r_2 \end{array} \begin{bmatrix} \mathbf{1}, & 1, & 1 \\ 0, & \mathbf{1}, & -1 \\ 0, & 0, & \mathbf{-1} \end{bmatrix} \Rightarrow h([\mathbf{A} \mid \mathbf{c}]) = 3.$$

Nakonec zbývá ověřit, je-li vektor $\mathbf{d}$ lineární kombinací vektorů $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$:

$$\alpha \mathbf{a} + \beta \mathbf{b} + \gamma \mathbf{c} \quad = \quad \mathbf{d}. \tag{2.4}$$

Rovnice (2.4) je jednoznačně řešitelná, neboť tentokrát hodnost matice soustavy, která jí odpovídá, se rovná hodnosti matice rozšířené a sloupce matice soustavy jsou navíc lineárně nezávislé:

$$\widetilde{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} 1, & 1, & 1 \\ 1, & 2, & 0 \\ 1, & 0, & 1 \end{bmatrix}, h\left(\widetilde{\mathbf{A}}\right) = 3; \; \left[\widetilde{\mathbf{A}} \mid \mathbf{d}\right] = \begin{bmatrix} 1, & 1, & 1, & -1 \\ 1, & 2, & 0, & 5 \\ 1, & 0, & 1, & 4 \end{bmatrix}, h\left(\left[\widetilde{\mathbf{A}} \mid \mathbf{d}\right]\right) = 3.$$

Platí $\alpha = 15$, $\beta = -5$, $\gamma = -11$, tj. $\mathbf{d} = 15\mathbf{a} - 5\mathbf{b} - 11\mathbf{c}$, takže množina $\mathcal{S} = \{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}\}$ je lineárně závislá. Vektor $\mathbf{d}$ můžeme vyškrtnout, ježto každý vektor $\mathbf{u} \in \mathcal{U}$ se dá vyjádřit jednoduše jen jako lineární kombinace vektorů $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$:

$$\mathcal{U} \ni \mathbf{u} = u_1\mathbf{a} + u_2\mathbf{b} + u_3\mathbf{c} + u_4\mathbf{d} \quad = \quad (u_1 + 15u_4)\,\mathbf{a} + (u_2 - 5u_4)\,\mathbf{b} + (u_3 - 11u_4)\,\mathbf{c}.$$

Odtud $\mathcal{U} = \langle \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d} \rangle = \langle \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \rangle$, a tedy $\dim(\mathcal{U}) = 3$.

Poznámka 3. Vektorový prostor $\mathcal{U}$ je podprostorem prostoru $\mathbb{R}^3$, jehož dimenze je 3. Vektor $\mathbf{d}$ už tedy nutně musel být lineární kombinací vektorů $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$. Úlohu jsme mohli samozřejmě vyřešit přímo určením *hodnosti* matice sestavené po sloupcích z vektorů $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$, $\mathbf{d}$, tj. nalezením maximálního počtu lineárně nezávislých sloupců matice

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} | & | & | & | \\ \mathbf{a} & \mathbf{b} & \mathbf{c} & \mathbf{d} \\ | & | & | & | \end{bmatrix}:$$

$$\begin{bmatrix} 1, & 1, & 1, & -1 \\ 1, & 2, & 0, & 5 \\ 1, & 0, & 1, & 4 \end{bmatrix} \sim \cdots \sim \begin{bmatrix} \mathbf{1}, & 1, & 1, & -1 \\ 0, & \mathbf{1}, & -1, & 6 \\ 0, & 0, & \mathbf{-1}, & 11 \end{bmatrix} \Rightarrow h(\mathbf{A}) = 3 \Rightarrow \dim(\mathcal{U}) = 3.$$

Cvičení:

1. Polynom $p(x) = x^3+5x^2+10x+11$ napište jako lineární kombinaci polynomů $p_1,\ p_2,\ p_3,\ p_4$: $p_1(x) = 1,\ p_2(x) = x+2,\ p_3(x) = (x+2)^2,\ p_4(x) = (x+2)^3$.

2. Ukažte, že polynomy $p_1(x) = x^2-1,\ p_2(x) = x^2+1$ a $p_3(x) = 2x-1$ tvoří uspořádanou bázi prostoru $\mathcal{U} = \left\langle x^2-1, x^2+1, 3, 2x-1, x\right\rangle$ a určete souřadnice polynomu $(x-3)^2$ vzhledem k této bázi.

3. Je dána standardní báze $\mathcal{E} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ prostoru $\mathbb{R}^3$. Dokažte, že vektory $\mathbf{f}_1 = 2\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2,\ \mathbf{f}_2 = \mathbf{e}_1 + 3\mathbf{e}_2 + 2\mathbf{e}_3,\ \mathbf{f}_3 = -2\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$ tvoří také bázi prostoru $\mathbb{R}^3$ a vypočtěte souřadnice vektoru $\mathbf{u} = 7\mathbf{e}_1 + 14\mathbf{e}_2 + 21\mathbf{e}_3$ vzhledem k uspořádané bázi $\mathcal{F} = (\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3)$.

4. Určete dimenzi podprostoru $\mathcal{W}$ všech řešení homogenní soustavy

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & - & x_4 & = & 0 \\ 2x_1 & - & 3x_2 & + & 2x_3 & - & 3x_4 & = & 0 \\ 3x_1 & - & 5x_2 & + & 3x_3 & - & 4x_4 & = & 0 \\ -x_1 & + & x_2 & - & x_3 & + & 2x_4 & = & 0. \end{array}$$

5. Buď $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ vektorový prostor všech komplexních matic stupně 2. Jaká je dimenze prostoru $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, je-li $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ reálný, respektive komplexní vektorový prostor?

Řešení:

1. $p(x) = 3 + 2(x+2) - (x+2)^2 + (x+2)^3$.

2. $\left[(x-3)^2\right]_{\widetilde{\mathcal{P}}} = \left[-\frac{5}{2},\ \frac{7}{2}, -3\right]^T$, kde $\widetilde{\mathcal{P}} = \left(x^2-1, x^2+1, 2x-1\right)$.

3. $[\mathbf{u}]_{\mathcal{F}} = [12,\ 5, 11]^T$.

4. $\mathcal{W} = \left\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4 : \mathbf{x} = r\,[-1,\ 0,\ 1,\ 0] + s\,[3,\ 1,\ 0,\ 1]\,;\ r,\ s \in \mathbb{R}\right\}$, $\dim(\mathcal{W}) = 2$.

5. $\dim(\mathcal{M}_2(\mathbb{C})) = 8$, respektive $\dim(\mathcal{M}_2(\mathbb{C})) = 4$.
   Návod: rozmyslete si, které čtvercové matice řádu 2 tvoří bázi $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ v případě, že tato množina je reálným, respektive komplexním vektorovým prostorem.

Kapitola 3

Lineární a multilineární zobrazení

3.1 Lineární zobrazení

Zobrazení $\mathcal{A}$ vektorového prostoru $\mathcal{U}$ do vektorového prostoru $\mathcal{V}$ se nazývá *lineární,* jestliže pro libovolné vektory $\mathbf{u}$, $\mathbf{v} \in \mathcal{U}$ a skalár α platí:

$$\mathcal{A}(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = \mathcal{A}(\mathbf{u}) + \mathcal{A}(\mathbf{v})\,; \tag{3.1}$$

$$\mathcal{A}(\alpha\mathbf{u}) = \alpha\mathcal{A}(\mathbf{u})\,. \tag{3.2}$$

Lineární zobrazení $\mathcal{A} : \mathcal{U} \to \mathcal{U}$ se nazývá *lineární transformace. Lineární formou (lineárním funkcionálem)* nazýváme lineární zobrazení $\mathcal{A} : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$. Množinu všech lineárních zobrazení vektorového prostoru $\mathcal{U}$ do vektorového prostoru $\mathcal{V}$ označujeme $\mathcal{L}(\mathcal{U},\mathcal{V})$.

Nulovým prostorem (jádrem) zobrazení $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(\mathcal{U},\mathcal{V})$ rozumíme *množinu*

$$\mathcal{N}(\mathcal{A}) = \{\mathbf{u} \in \mathcal{U} : \mathcal{A}(\mathbf{u}) = \mathbf{o} \in \mathcal{V}\}\,. \tag{3.3}$$

Oborem hodnot zobrazení $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(\mathcal{U},\mathcal{V})$ rozumíme množinu

$$\mathcal{H}(\mathcal{A}) = \{\mathcal{A}(\mathbf{u}) : \mathbf{u} \in \mathcal{U}\}\,. \tag{3.4}$$

Jádro $\mathcal{N}(\mathcal{A})$ je podprostorem vektorového prostoru $\mathcal{U}$, jeho dimenze se označuje $d(\mathcal{A})$ a nazývá *defekt zobrazení* $\mathcal{A}$. Obor hodnot $\mathcal{H}(\mathcal{A})$ tvoří zase podprostor prostoru $\mathcal{V}$, jeho dimenzi označujeme $h(\mathcal{A})$ a nazýváme *hodnost zobrazení* $\mathcal{A}$. Platí

$$d(\mathcal{A}) + h(\mathcal{A}) = \dim(\mathcal{U})\,. \tag{3.5}$$

Příklad 1. Ukažte, že zobrazení $\mathcal{A} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ je lineární, je-li

$$\mathcal{A}([x_1, x_2, x_3]) = [x_1 - x_2, x_1 + x_2, x_1 + x_2 + x_3]\,.$$

Řešení: Nechť $\mathbf{x} = [x_1, x_2, x_3]$, $\mathbf{y} = [y_1, y_2, y_3]$ jsou libovolné vektory z $\mathbb{R}^3$ a α libovolný skalár. Potom $\mathbf{x}+\mathbf{y} = [x_1+y_1, x_2+y_2, x_3+y_3]$, $\alpha\mathbf{x} = [\alpha x_1, \alpha x_2, \alpha x_3]$. Zbývá ověřit, má-li zobrazení $\mathcal{A}$ vlastnosti (3.1) a (3.2):

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}(\mathbf{x}+\mathbf{y}) &= [(x_1+y_1)-(x_2+y_2), (x_1+y_1)+(x_2+y_2), (x_1+y_1)+(x_2+y_2)+(x_3+y_3)] \\
&= [(x_1-x_2)+(y_1-y_2), (x_1+x_2)+(y_1+y_2), (x_1+x_2+x_3)+(y_1+y_2+y_3)] \\
&= [x_1-x_2, x_1+x_2, x_1+x_2+x_3] + [y_1-y_2, y_1+y_2, y_1+y_2+y_3] \\
&= \mathcal{A}(\mathbf{x}) + \mathcal{A}(\mathbf{y})\,. \\
\mathcal{A}(\alpha\mathbf{x}) &= [\alpha x_1 - \alpha x_2, \alpha x_1 + \alpha x_2, \alpha x_1 + \alpha x_2 + \alpha x_3] \\
&= [\alpha(x_1-x_2), \alpha(x_1+x_2), \alpha(x_1+x_2+x_3)] \\
&= \alpha[x_1-x_2, x_1+x_2, x_1+x_2+x_3] \\
&= \alpha\mathcal{A}(\mathbf{x})\,.
\end{aligned}$$

Zobrazení $\mathcal{A}$ má požadované vlastnosti, je tedy lineární.

Příklad 2. Zobrazení $\mathcal{A} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ je pro každé $\mathbf{u} = [u_1, u_2] \in \mathbb{R}^2$ definované vztahem

$$\mathcal{A}(\mathbf{u}) = \left[u_1 + u_2, u_2^2\right].$$

Je zobrazení $\mathcal{A}$ lineární?

Řešení: V tomto případě zobrazení $\mathcal{A}$ není lineární. Pro libovolné vektory $\mathbf{u}$, $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$ totiž platí:

$$\mathbf{u} = [u_1, u_2]\,,\ \mathbf{v} = [v_1, v_2]\,,\ \mathbf{u} + \mathbf{v} = [u_1 + v_1, u_2 + v_2]\,,\ \mathcal{A}(\mathbf{v}) = \left[v_1 + v_2, v_2^2\right].\ \text{Odtud}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}(\mathbf{u} + \mathbf{v}) &= \left[(u_1 + v_1) + (u_2 + v_2)\,, (u_2 + v_2)^2\right], \\
\mathcal{A}(\mathbf{u}) + \mathcal{A}(\mathbf{v}) &= \left[(u_1 + u_2) + (v_1 + v_2)\,, u_2^2 + v_2^2\right], \\
\mathcal{A}(\mathbf{u} + \mathbf{v}) &\neq \mathcal{A}(\mathbf{u}) + \mathcal{A}(\mathbf{v}).
\end{aligned}$$

Příklad 3. Nechť $\mathbf{A} = [a_{ik}]_{m\times n}$ je reálná matice a nechť $\mathbb{R}^{n,1}$, $\mathbb{R}^{m,1}$ jsou vektorové prostory všech sloupcových aritmetických vektorů dimenze n, m. Dokažte, že zobrazení $\mathcal{A} : \mathbb{R}^{n,1} \to \mathbb{R}^{m,1}$ definované předpisem

$$\mathcal{A} : \mathbb{R}^{n,1} \ni \mathbf{x} \longmapsto \mathbf{A}\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{m,1}$$

je lineární.

Řešení: S využitím vlastností maticových operací *(sekce 1.2)* snadno ukážeme, že zobrazení $\mathcal{A}$ splňuje pro každé vektory $\mathbf{x}$, $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^{n,1}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ axiomy (3.1) a (3.2), takže je lineární:

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \mathbf{A}(\mathbf{x} + \mathbf{y}) &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{A}\mathbf{y} = \mathcal{A}(\mathbf{x}) + \mathcal{A}(\mathbf{y}), \\
\mathcal{A}(\alpha\mathbf{x}) = \mathbf{A}(\alpha\mathbf{x}) &= \alpha(\mathbf{A}\mathbf{x}) = \alpha\mathcal{A}(\mathbf{x}).
\end{aligned}$$

Příklad 4. Buď $\mathcal{A} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ lineární zobrazení, pro které platí:

$$\mathcal{A}(\mathbf{f}_1) = [1, 2]\,,\ \mathcal{A}(\mathbf{f}_2) = [2, 3]\,,\ \mathcal{A}(\mathbf{f}_3) = [1, 1]\,,$$

kde $\mathbf{f}_1 = [2, 3, -1]$, $\mathbf{f}_2 = [0, 1, 2]$, $\mathbf{f}_3 = [-1, 1, 1]$. Nalezněte všechny vektory $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$, které se zobrazí na vektor $\mathbf{v} = [-3, 2]$.

Řešení: Vektory $\mathbf{f}_1$, $\mathbf{f}_2$, $\mathbf{f}_3$ tvoří bázi prostoru $\mathbb{R}^3$, neboť jsou lineárně nezávislé. Lineární zobrazení $\mathcal{A}$ je tedy určeno obrazy báze. Je-li totiž $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ libovolný vektor, pak zřejmě

$$\mathbf{x} = \alpha_1\mathbf{f}_1 + \alpha_2\mathbf{f}_2 + \alpha_3\mathbf{f}_3. \tag{3.6}$$

Odtud pro jeho obraz v důsledku (3.1) a (3.2) dostaneme

$$\mathcal{A}(\mathbf{x}) = \alpha_1\mathcal{A}(\mathbf{f}_1) + \alpha_2\mathcal{A}(\mathbf{f}_2) + \alpha_3\mathcal{A}(\mathbf{f}_3) : \tag{3.7}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}(\alpha_1\mathbf{f}_1 + \alpha_2\mathbf{f}_2 + \alpha_3\mathbf{f}_3) &= \mathcal{A}((\alpha_1\mathbf{f}_1 + \alpha_2\mathbf{f}_2) + \alpha_3\mathbf{f}_3) \\
&= \mathcal{A}(\alpha_1\mathbf{f}_1 + \alpha_2\mathbf{f}_2) + \mathcal{A}(\alpha_3\mathbf{f}_3) \\
&= \mathcal{A}(\alpha_1\mathbf{f}_1) + \mathcal{A}(\alpha_2\mathbf{f}_2) + \mathcal{A}(\alpha_3\mathbf{f}_3) \\
&= \alpha_1\mathcal{A}(\mathbf{f}_1) + \alpha_2\mathcal{A}(\mathbf{f}_2) + \alpha_3\mathcal{A}(\mathbf{f}_3).
\end{aligned}$$

Nejprve vyřešíme rovnici (3.7):

$$[-3, 2] = \alpha_1[1, 2] + \alpha_2[2, 3] + \alpha_3[1, 1]\,,$$

tj. soustavu

$$\begin{aligned}
\alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3 &= -3 \\
2\alpha_1 + 3\alpha_2 + \alpha_3 &= 2.
\end{aligned}$$

Soustava má nekonečně mnoho řešení: $\alpha_1 = 13 + s$, $\alpha_2 = -8 - s$, $\alpha_3 = s$; $s \in \mathbb{R}$. Odtud z rovnice (3.6) obdržíme

$$\begin{aligned}\mathbf{x} &= (13+s)[2,\,3,-1] + (-8-s)[0,\,1,\,2] + s[-1,\,1,\,1] \\ &= [26+s, 31+3s, -29-2s] \\ &= [s,\,3s,-2s] + [26,\,31,-29]\,.\end{aligned}$$

Hledaná množina $\left\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : \mathcal{A}(\mathbf{x}) = [-3,\,2]\right\}$ je tvaru

$$\left\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : \mathbf{x} = s[1,\,3,-2] + [26,\,31,-29]\,,\, s \in \mathbb{R}\right\}. \tag{3.8}$$

Příklad 5. Najděte jádro a obor hodnot zobrazení $\mathcal{A}$ z předešlé úlohy.

Řešení: Úloha nalézt jádro lineárního zobrazení $\mathcal{A}$ je analogií předešlé úlohy. Místo s vektorem $\mathbf{v} = [-3,\,2]$ se pracuje s nulovým vektorem $\mathbf{o} = [0,0]$. Jádro zobrazení $\mathcal{A}$ však můžeme najít jednodušeji. Uvážíme-li, že $\mathcal{A}[26,\,31,-29] = [-3,\,2]$ (v (3.8) položíme $s = 0$), dostaneme

$$\mathcal{A}(s[1,\,3,-2] + [26,\,31,-29]) = [-3,\,2]\,,$$

resp.

$$\mathcal{A}(s[1,\,3,-2]) + \mathcal{A}([26,\,31,-29]) = [-3,\,2]\,,$$

odkud nutně $\mathcal{A}(s[1,\,3,-2]) = [0,0]$. Platí tedy

$$\mathcal{N}(\mathcal{A}) = \left\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : \mathbf{x} = s[1,\,3,-2]\,,\, s \in \mathbb{R}\right\} = \langle[1,\,3,-2]\rangle\,.$$

Obor hodnot $\mathcal{H}(\mathcal{A}) = \left\{\mathcal{A}(\mathbf{x}) : \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3\right\} = \{\alpha_1[1,2] + \alpha_2[2,3] + \alpha_3[1,1] : \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}\}$. Jinak řečeno $\mathcal{H}(\mathcal{A}) = \langle[1,2]\,,[2,3]\,,[1,1]\rangle$. Poslední vektor je lineární kombinací předcházejících dvou vektorů: $-1 \cdot [1,2] + 1 \cdot [2,3] = [1,1]$. Po jeho vyškrtnutí tak dostáváme, že obor hodnot

$$\mathcal{H}(\mathcal{A}) = \langle[1,2]\,,[2,3]\rangle\,.$$

Nakonec můžeme ještě potvrdit platnost vzorce (3.5). Má platit

$$d(\mathcal{A}) + h(\mathcal{A}) = \dim\left(\mathbb{R}^3\right).$$

A skutečně

$$\dim(\mathcal{N}(\mathcal{A})) + \dim(\mathcal{H}(\mathcal{A})) = 1 + 2 = 3.$$

Příklad 6. Nechť $\mathcal{U}$, $\mathcal{V}$ a $\mathcal{W}$ jsou vektorové prostory a nechť $\mathcal{B}, \mathcal{C} \in \mathcal{L}(\mathcal{U},\mathcal{V})\,,\, \mathcal{A} \in \mathcal{L}(\mathcal{V},\mathcal{W})$. Dokažte¸ že platí

$$\mathcal{A}(\mathcal{B}+\mathcal{C}) = \mathcal{AB} + \mathcal{AC}. \tag{3.9}$$

Řešení: Vzorec (3.9) je obdobou distributivního zákona algebry matic: $\mathbf{A}(\mathbf{B}+\mathbf{C}) = \mathbf{AB} + \mathbf{AC}$. Máme ukázat, že složení zobrazení $\mathcal{A}$ a součtu zobrazení $\mathcal{B}+\mathcal{C}$ se rovná součtu složených zobrazení. Připomeňme si, že *součet zobrazení* $\mathcal{B}, \mathcal{C}$ je definován předpisem $(\mathcal{B}+\mathcal{C})(\mathbf{u}) = \mathcal{B}(\mathbf{u}) + \mathcal{C}(\mathbf{u})$ a že *složené zobrazení (součin zobrazení)* $\mathcal{AD} : \mathcal{U} \to \mathcal{W}$ $(\mathcal{D} = \mathcal{B} + \mathcal{C})$ je definováno předpisem $(\mathcal{AD})(\mathbf{u}) = \mathcal{A}(\mathcal{D}(\mathbf{u}))$.

Buď $\mathbf{u} \in \mathcal{U}$ libovolný vektor. Platí:

$$\begin{aligned}(\mathcal{A}(\mathcal{B}+\mathcal{C}))(\mathbf{u}) &= \mathcal{A}((\mathcal{B}+\mathcal{C})(\mathbf{u})) \\ &= \mathcal{A}(\mathcal{B}(\mathbf{u}) + \mathcal{C}(\mathbf{u})) \\ &= \mathcal{A}(\mathcal{B}(\mathbf{u})) + \mathcal{A}(\mathcal{C}(\mathbf{u})) \\ &= (\mathcal{AB})(\mathbf{u}) + (\mathcal{AC})(\mathbf{u})\,.\end{aligned}$$

Rovnost (3.9) je dokázána.

Poznámka. Musíme dávat pozor¸ v jakém pořadí vyhodnocujeme složené zobrazení. V kterém kroku jsme využili, že zobrazení $\mathcal{A}$ je lineární?

Cvičení:

1. Je zobrazení $\mathcal{A} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ z ***příkladu 1 (podkapitoly 3.1)*** prosté?
2. Dokažte, že zobrazení $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, pro které platí
$$f([x, y, z]) \quad = \quad [x - 2y, y + 3z],$$
je lineární. Určete jeho jádro (označuje se také $Ker\ f$) a obor hodnot.

3. Je dáno lineární zobrazení $\mathcal{A} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ takové, že
$$\begin{aligned} \mathcal{A}([2, -3]) &= [2, -1, 3], \\ \mathcal{A}([-1, 1]) &= [-3, 2, 0]. \end{aligned}$$
Jak se zobrazí vektor $\mathbf{x} = [7, -9]$?
4. Najděte jádro lineární formy $\mathcal{A} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, je-li
$$\mathcal{A}([x_1, x_2, x_3]) \quad = \quad 2x_1 - x_2 + 3x_3.$$
Určete $d(\mathcal{A})$ a $h(\mathcal{A})$.
5. Ukažte, že zobrazení
$$\mathcal{A} : \mathbb{C} \ni a + bi \longmapsto a - bi \in \mathbb{C}$$
je (není) lineární, jestliže $\mathbb{C}$ je reálný (komplexní) vektorový prostor.
6. Pro lineární zobrazení $\mathcal{A} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ a $\mathcal{B} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ platí
$$\mathcal{A}([2, 1]) = -1,\ \mathcal{A}([1, -2]) = 3;$$
$$\mathcal{B}([2, 3]) = [0, 1],\ \mathcal{B}([1, -2]) = [2, 1].$$
Vypočtěte $(\mathcal{AB})([7, 0])$.

Řešení:

1. Ano: $\mathcal{N}(\mathcal{A}) = \{\mathbf{o}\}$.
2. $Ker\ f = \langle [-6, -3, 1] \rangle$; $\mathcal{H}(f) = \left\langle [1, 0], [-2, 1], \widehat{[0, 3]} \right\rangle = \langle [1, 0], [-2, 1] \rangle$.
3. $\mathcal{A}(\mathbf{x}) = [13, -8, 6]$.
4. $\mathcal{N}(\mathcal{A}) = \langle [1, 2, 0], [-3, 0, 2] \rangle$; $d(\mathcal{A}) = 2$, $h(\mathcal{A}) = 1$.
5. Zobrazení $\mathcal{A}$ nemá vlastnost (3.2), je-li $\mathbb{C}$ komplexní vektorový prostor.
6. $(\mathcal{AB})([7, 0]) = -\frac{29}{5}$.

3.2 Lineární zobrazení a matice

Maticí zobrazení $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(\mathcal{U}, \mathcal{V})$ vzhledem k uspořádaným bázím $\mathcal{E} = (\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$, $\mathcal{F} = (\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_m)$ vektorových prostorů $\mathcal{U}$, $\mathcal{V}$ nazýváme matici

$$[\mathcal{A}]_{\mathcal{E},\mathcal{F}} = \begin{bmatrix} | & | & & | \\ [\mathcal{A}(\mathbf{e}_1)]_{\mathcal{F}} & [\mathcal{A}(\mathbf{e}_2)]_{\mathcal{F}} & \cdots & [\mathcal{A}(\mathbf{e}_n)]_{\mathcal{F}} \\ | & | & & | \end{bmatrix}. \tag{3.10}$$

Jinými slovy, obrazy vektorů báze $\mathcal{E} = (\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$ vyjádříme jako lineární kombinaci vektorů báze $\mathcal{F} = (\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_m)$:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(\mathbf{e}_1) &= a_{11}\mathbf{f}_1 + a_{21}\mathbf{f}_2 + \cdots + a_{m1}\mathbf{f}_m \\ \mathcal{A}(\mathbf{e}_2) &= a_{12}\mathbf{f}_1 + a_{22}\mathbf{f}_2 + \cdots + a_{m2}\mathbf{f}_m \\ &\vdots \\ \mathcal{A}(\mathbf{e}_n) &= a_{1n}\mathbf{f}_1 + a_{2n}\mathbf{f}_2 + \cdots + a_{mn}\mathbf{f}_m \end{aligned}$$

a příslušné souřadnice napíšeme jako *sloupce* matice $[\mathcal{A}]_{\mathcal{E},\mathcal{F}}$:

$$[\mathcal{A}]_{\mathcal{E},\mathcal{F}} = \begin{bmatrix} a_{11}, & a_{12}, & \dots, & a_{1n} \\ a_{21}, & a_{22}, & \dots, & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}, & a_{m2}, & \dots, & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

V případě, že $\mathcal{U} = \mathcal{V}$ a $\mathcal{E} = \mathcal{F}$, budeme hovořit o *matici lineární transformace* vzhledem k bázi $\mathcal{E}$ a psát stručně $[\mathcal{A}]_{\mathcal{E}}$ místo $[\mathcal{A}]_{\mathcal{E},\mathcal{E}}$.

Jsou-li $\mathcal{U}$, $\mathcal{V}$ vektorové prostory s bázemi $\mathcal{E} = (\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$, $\mathcal{F} = (\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_m)$ a $[\mathcal{A}]_{\mathcal{E},\mathcal{F}}$ matice lineárního zobrazení $\mathcal{A} : \mathcal{U} \to \mathcal{V}$ vzhledem k těmto bázím, vypočteme *souřadnice obrazu* vektoru $\mathbf{x} \in \mathcal{U}$ podle vzorce

$$[\mathcal{A}(\mathbf{x})]_{\mathcal{F}} = [\mathcal{A}]_{\mathcal{E},\mathcal{F}} [\mathbf{x}]_{\mathcal{E}}. \tag{3.11}$$

Příklad 1 Nechť $\mathbb{R}^{n,1}$, $\mathbb{R}^{m,1}$ jsou vektorové prostory všech sloupcových aritmetických vektorů dimenze n, m a nechť $\mathcal{A} : \mathbb{R}^{n,1} \to \mathbb{R}^{m,1}$ je libovolné lineární zobrazení. Ukažte, že existuje taková matice $\mathbf{A} = [a_{ik}]_{m\times n}$, že pro každé $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n,1}$ platí

$$\mathcal{A}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x}. \tag{3.12}$$

Řešení: Lineární zobrazení na vektorovém prostoru konečné dimenze je jednoznačně určeno obrazy jakékoliv báze. Zvolme tedy standardní bázi vektorového prostoru $\mathbb{R}^{n,1}$: $\mathcal{S} = \left(\mathbf{s}_1^{\mathbf{I}}, \mathbf{s}_2^{\mathbf{I}} \dots, \mathbf{s}_n^{\mathbf{I}}\right)$, kde $\mathbf{s}_1^{\mathbf{I}} = [1, 0, \dots, 0]^T$, $\mathbf{s}_2^{\mathbf{I}} = [0, 1, \dots, 0]^T$, ..., $\mathbf{s}_n^{\mathbf{I}} = [0, 0, \dots, 1]^T$, a označme si její obrazy například

$$\mathcal{A}\left(\mathbf{s}_1^{\mathbf{I}}\right) = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}, \mathcal{A}\left(\mathbf{s}_2^{\mathbf{I}}\right) = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix}, \dots, \mathcal{A}\left(\mathbf{s}_n^{\mathbf{I}}\right) = \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Buď nyní $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T \in \mathbb{R}^{n,1}$ libovolný vektor. Potom platí

$$\mathbf{x} = x_1\mathbf{s}_1^{\mathbf{I}} + x_2\mathbf{s}_2^{\mathbf{I}} + \cdots + x_n\mathbf{s}_n^{\mathbf{I}},$$

a následně

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(\mathbf{x}) &= x_1\mathcal{A}\left(\mathbf{s}_1^{\mathbf{I}}\right) + x_2\mathcal{A}\left(\mathbf{s}_2^{\mathbf{I}}\right) + \cdots + x_n\mathcal{A}\left(\mathbf{s}_n^{\mathbf{I}}\right) \\ &= x_1 \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix} + \cdots + x_n \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{bmatrix}. \end{aligned} \tag{3.13}$$

Výsledný vektor v (3.13) je součinem matice $\mathbf{A} = [a_{ik}]_{m\times n}$ a vektoru $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \ldots, x_n]^T$, čímž je rovnost (3.12) dokázána.

Příklad 2. Buďte $\mathcal{E} = (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)$, $\mathcal{F} = (\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_n)$ uspořádané báze vektorového prostoru $\mathcal{U}$. Nechť $[\mathcal{A}]_{\mathcal{E}}$ je matice lineárního zobrazení $\mathcal{A} : \mathcal{U} \to \mathcal{U}$ vzhledem k uspořádané bázi $\mathcal{E}$ a nechť $[\mathcal{A}]_{\mathcal{F}}$ je matice tohoto zobrazení vzhledem k uspořádané bázi $\mathcal{F}$. Dokažte, že platí

$$[\mathcal{A}]_{\mathcal{F}} = \mathbf{P}^{-1}[\mathcal{A}]_{\mathcal{E}}\mathbf{P}, \tag{3.14}$$

kde $\mathbf{P}$ je *matice přechodu* od uspořádané báze $\mathcal{E}$ k uspořádané bázi $\mathcal{F}$:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} | & | & & | \\ [\mathbf{f}_1]_{\mathcal{E}} & [\mathbf{f}_2]_{\mathcal{E}} & \cdots & [\mathbf{f}_n]_{\mathcal{E}} \\ | & | & & | \end{bmatrix}, \tag{3.15}$$

tj. matice, jejíž ***sloupce*** tvoří souřadnice vektorů báze $\mathcal{F}$ vzhledem k bázi $\mathcal{E}$.

Řešení: Pro libovolný vektor $\mathbf{x} \in \mathcal{U}$ platí

$$\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + \cdots + x_n\mathbf{e}_n,$$

resp.

$$\mathbf{x} = \tilde{x}_1\mathbf{f}_1 + \tilde{x}_2\mathbf{f}_2 + \cdots + \tilde{x}_n\mathbf{f}_n. \tag{3.16}$$

Rovnice (3.16) je po dosazení souřadnic ekvivalentní s rovnicí

$$\begin{aligned} [\mathbf{x}]_{\mathcal{E}} &= \tilde{x}_1[\mathbf{f}_1]_{\mathcal{E}} + \tilde{x}_2[\mathbf{f}_2]_{\mathcal{E}} + \cdots + \tilde{x}_n[\mathbf{f}_n]_{\mathcal{E}} \\ &= \begin{bmatrix} | & | & & | \\ [\mathbf{f}_1]_{\mathcal{E}} & [\mathbf{f}_2]_{\mathcal{E}} & \cdots & [\mathbf{f}_n]_{\mathcal{E}} \\ | & | & & | \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \\ \vdots \\ \tilde{x}_n \end{bmatrix} \\ &= \mathbf{P}[\mathbf{x}]_{\mathcal{F}}. \end{aligned}$$

Matice $\mathbf{P}$ je regulární, takže pro souřadnice vektoru $\mathbf{x}$ v bázích $\mathcal{E}$ a $\mathcal{F}$ dostáváme:

$$[\mathbf{x}]_{\mathcal{E}} = \mathbf{P}[\mathbf{x}]_{\mathcal{F}}, \tag{3.17}$$

$$[\mathbf{x}]_{\mathcal{F}} = \mathbf{P}^{-1}[\mathbf{x}]_{\mathcal{E}}. \tag{3.18}$$

Přejděme teď k našemu důkazu. Vzorec (3.11) umožňuje vypočítat souřadnice obrazu vektoru pomocí matice lineárního zobrazení. Je-li $\mathcal{U} = \mathcal{V}$ a $\mathcal{E} = \mathcal{F}$, můžeme jej uvést v jednom z těchto tvarů:

$$[\mathcal{A}(\mathbf{x})]_{\mathcal{E}} = [\mathcal{A}]_{\mathcal{E}}\,[\mathbf{x}]_{\mathcal{E}}\,, \tag{3.19}$$

$$[\mathcal{A}(\mathbf{x})]_{\mathcal{F}} = [\mathcal{A}]_{\mathcal{F}}\,[\mathbf{x}]_{\mathcal{F}}\,. \tag{3.20}$$

S přihlédnutím k (3.17) položíme v rovnici (3.19) $[\mathcal{A}(\mathbf{x})]_{\mathcal{E}} = \mathbf{P}\,[\mathcal{A}(\mathbf{x})]_{\mathcal{F}}\,,\ [\mathbf{x}]_{\mathcal{E}} = \mathbf{P}\,[\mathbf{x}]_{\mathcal{F}}\,,$ takže dostane tvar

$$\mathbf{P}\,[\mathcal{A}(\mathbf{x})]_{\mathcal{F}} = [\mathcal{A}]_{\mathcal{E}}\,\mathbf{P}\,[\mathbf{x}]_{\mathcal{F}}\,,$$

neboli

$$[\mathcal{A}(\mathbf{x})]_{\mathcal{F}} = \left(\mathbf{P}^{-1}\,[\mathcal{A}]_{\mathcal{E}}\,\mathbf{P}\right)[\mathbf{x}]_{\mathcal{F}}\,. \tag{3.21}$$

Ze vztahů (3.20) a (3.21) už pak vyplývá platnost vzorce (3.14).

Příklad 3. Určete matici lineárního zobrazení $\mathcal{A}:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, pro které platí

$$\begin{aligned}\mathcal{A}([2,-3]) &= [\,2,-1,\,3]\,,\\ \mathcal{A}([-1,\,1]) &= [-3,\,2,\,0]\,,\end{aligned}$$

vzhledem ke standardním bázím vektorových prostorů $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$ a použijte ji k určení obrazu vektoru $\mathbf{x} = [7,-9]\,$.

Řešení: Sestavíme matici (3.10) v bázích $\mathcal{E} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ a $\mathcal{F} = (\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3)\,$, kde $\mathbf{e}_1 = [1,0]\,,\ \mathbf{e}_2 = [0,1]\,;$ $\mathbf{f}_1 = [1,0,0]\,,\ \mathbf{f}_2 = [0,1,0]\,,\ \mathbf{f}_3 = [0,0,1]\,$. Potřebné obrazy vektorů $\mathbf{e}_1 = [1,0]\,,\ \mathbf{e}_2 = [0,1]$ najdeme způsobem, který jsme už tady jednou použili, takže mu čtenář jistě porozumí i bez podrobného komentáře. Označme $\mathbf{u} = [2,-3]\,,\ \mathbf{v} = [-1,\,1]\,$. Platí

$$\begin{aligned}\mathbf{e}_1 &= \alpha_1\mathbf{u} + \alpha_2\mathbf{v},\\ \mathbf{e}_2 &= \beta_1\mathbf{u} + \beta_2\mathbf{v}.\end{aligned}$$

Obě rovnice vedou k soustavám lineárních rovnic, jež vyřešíme pomocí jedné rozšířené matice:

$$\left[\begin{array}{rr|rr} 2, & -1 & 1, & 0\\ -3, & 1 & 0, & 1\end{array}\right] \sim \cdots \sim \left[\begin{array}{rr|rr} 1, & 0 & -1, & -1\\ 0, & 1 & -3, & -2\end{array}\right] \Rightarrow \alpha_1 = -1,\ \alpha_2 = -3;\ \beta_1 = -1,\ \beta_2 = -2.$$

Odtud

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(\mathbf{e}_1) &= -1\mathcal{A}(\mathbf{u}) + (-3)\,\mathcal{A}(\mathbf{v})\,,\\ \mathcal{A}(\mathbf{e}_2) &= -1\mathcal{A}(\mathbf{u}) + (-2)\,\mathcal{A}(\mathbf{v})\,,\end{aligned}$$

tj. $\mathcal{A}(\mathbf{e}_1) = [\,7,-5,-3]\,,\ \mathcal{A}(\mathbf{e}_2) = [\,4,-3,-3]\,$. Hledaná matice je tedy

$$\begin{aligned}[\mathcal{A}]_{\mathcal{E},\mathcal{F}} &= \begin{bmatrix} | & | \\ [\mathcal{A}(\mathbf{e}_1)]_{\mathcal{F}} & [\mathcal{A}(\mathbf{e}_2)]_{\mathcal{F}} \\ | & | \end{bmatrix}\\ &= \begin{bmatrix} 7, & 4\\ -5, & -3\\ -3, & -3\end{bmatrix}.\end{aligned}$$

Užitím vzorce (3.11) získáme souřadnice obrazu vektoru $\mathbf{x}$ v bázi $\mathcal{F}$ a tím prakticky i obraz vektoru $\mathbf{x}$:

$$[\mathcal{A}(\mathbf{x})]_{\mathcal{F}} = \begin{bmatrix} 7, & 4\\ -5, & -3\\ -3, & -3\end{bmatrix}\begin{bmatrix} 7\\ -9\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13\\ -8\\ 6\end{bmatrix}, \text{ a tudíž } \mathcal{A}(\mathbf{x}) = [13,-8,\,6]\,.$$

Poznámka. V úlohách tohoto typu studenti často chybují v tom, že vytvoří matici

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2, & -3 \\ -1, & 2 \\ 3, & 0 \end{bmatrix},$$

kterou pak vydávají za matici zadaného lineárního zobrazení vzhledem ke standardním bázím. Ve skutečnosti však vytvořili matici daného zobrazení vzhledem k bázím $\mathcal{X} = ([2,-3], [-1,1])$ a $\mathcal{F} = ([1,0,0], [0,1,0], [0,0,1])$, z nichž pouze báze $\mathcal{F}$ je standardní. Nebude tedy na škodu, když si znovu prostudujete, jak sestavíme správně matici lineárního zobrazení vzhledem k daným bázím. Pro jistotu věnujme matici lineárního zobrazení ještě dvě úlohy.

Příklad 4. Lineární transformace $\mathcal{A} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ je definována předpisem

$$\mathcal{A}([x,y,z]) = [y,x,z].$$

Najděte její matici vzhledem k bázi $\mathcal{F} = (\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3)$, kde $\mathbf{f}_1 = [1,1,0]$, $\mathbf{f}_2 = [0,1,1]$, $\mathbf{f}_3 = [1,0,1]$.

Řešení: Zobrazení $\mathcal{A}$ zaměňuje první a druhou složku vektoru, takže $\mathcal{A}(\mathbf{f}_1) = \mathbf{f}_1$, $\mathcal{A}(\mathbf{f}_2) = \mathbf{f}_3$, $\mathcal{A}(\mathbf{f}_3) = \mathbf{f}_2$. Hledanou matici označíme stručně $[\mathcal{A}]_{\mathcal{F}}$ místo $[\mathcal{A}]_{\mathcal{F},\mathcal{F}}$. Druhé označení však vhodně připomíná jak ji máme sestavit. Sloupce matice $[\mathcal{A}]_{\mathcal{F}}$ budou tvořit souřadnice obrazů vektorů báze $\mathcal{F}$ vzhledem k bázi $\mathcal{F}$. Ježto

$$\mathcal{A}(\mathbf{f}_1) = 1\mathbf{f}_1 + 0\mathbf{f}_2 + 0\mathbf{f}_3,\ \mathcal{A}(\mathbf{f}_2) = 0\mathbf{f}_1 + 0\mathbf{f}_2 + 1\mathbf{f}_3,\ \mathcal{A}(\mathbf{f}_3) = 0\mathbf{f}_1 + 1\mathbf{f}_2 + 0\mathbf{f}_3,$$

dostaneme

$$[\mathcal{A}]_{\mathcal{F}} = \begin{bmatrix} | & | & | \\ [\mathcal{A}(\mathbf{f}_1)]_{\mathcal{F}} & [\mathcal{A}(\mathbf{f}_2)]_{\mathcal{F}} & [\mathcal{A}(\mathbf{f}_3)]_{\mathcal{F}} \\ | & | & | \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} | & | & | \\ [\mathbf{f}_1]_{\mathcal{F}} & [\mathbf{f}_3]_{\mathcal{F}} & [\mathbf{f}_2]_{\mathcal{F}} \\ | & | & | \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 1 \\ 0, & 1, & 0 \end{bmatrix}.$$

Příklad 5. Napište matici lineární transformace z předešlé úlohy vzhledem ke standardní bázi prostoru $\mathbb{R}^3$.

Řešení: Úlohu vyřešíme nejprve složitějším způsobem. Vzorec (3.14) udává vztah mezi maticemi lineární transformace v různých bázích. Označíme-li $\mathcal{E}$ standardní bázi prostoru $\mathbb{R}^3$, vypočteme matici $[\mathcal{A}]_{\mathcal{E}}$ podle vztahu

$$[\mathcal{A}]_{\mathcal{E}} = \mathbf{P}\,[\mathcal{A}]_{\mathcal{F}}\,\mathbf{P}^{-1}, \tag{3.22}$$

kde $\mathbf{P}$ je příslušná matice přechodu od uspořádané báze $\mathcal{E}$ k uspořádané bázi $\mathcal{F}$:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1, & 0, & 1 \\ 1, & 1, & 0 \\ 0, & 1, & 1 \end{bmatrix}.$$

Určíme $\mathbf{P}^{-1}$ a po dosazení do vzorce (3.22) obdržíme

$$[\mathcal{A}]_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 1, & 0, & 1 \\ 1, & 1, & 0 \\ 0, & 1, & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 1 \\ 0, & 1, & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.5, & 0.5, & -0.5 \\ -0.5, & 0.5, & 0.5 \\ 0.5, & -0.5, & 0.5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0, & 1, & 0 \\ 1, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 1 \end{bmatrix}.$$

Matici $[\mathcal{A}]_{\mathcal{E}}$ lze však záskat velmi jednoduše. Jelikož $\mathcal{A}(\mathbf{e}_1) = \mathbf{e}_2$, $\mathcal{A}(\mathbf{e}_2) = \mathbf{e}_1$, $\mathcal{A}(\mathbf{e}_3) = \mathbf{e}_3$, vyjde

$$[\mathcal{A}]_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} | & | & | \\ [\mathcal{A}(\mathbf{e}_1)]_{\mathcal{E}} & [\mathcal{A}(\mathbf{e}_2)]_{\mathcal{E}} & [\mathcal{A}(\mathbf{e}_3)]_{\mathcal{E}} \\ | & | & | \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} | & | & | \\ [\mathbf{e}_2]_{\mathcal{E}} & [\mathbf{e}_1]_{\mathcal{E}} & [\mathbf{e}_3]_{\mathcal{E}} \\ | & | & | \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0, & 1, & 0 \\ 1, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 1 \end{bmatrix}.$$

Cvičení:

1. Určete matici lineárního zobrazení $\mathcal{A} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definovaného předpisem

$$\mathcal{A}([x_1, x_2, x_3]) = [x_1 - x_2, x_1 + x_2, x_1 + x_2 + x_3]$$

vzhledem ke standardní bázi prostoru $\mathbb{R}^3$.

2. Sestavte matici lineárního zobrazení

$$\mathcal{A} : \mathbb{R}^3 \ni [x, y, z] \quad \longmapsto \quad [2x - z, y + 4z] \in \mathbb{R}^2$$

v bázích $\mathcal{G} = ([1, 1, 0], [0, 2, 0], [0, -1, 1])$, $\mathcal{H} = ([0, 1], [1, 1])$.

3. Jsou dána lineární zobrazení $\mathcal{A} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ a $\mathcal{B} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ taková, že

$$\mathcal{A}([2, 1]) = -1,\ \mathcal{A}([1, -2]) = 3;$$

$$\mathcal{B}([2, 3]) = [0, 1],\ \mathcal{B}([1, -2]) = [2, 1].$$

Najděte matice lineárních zobrazení $\mathcal{A}$ (v bázích $\mathcal{E}$, $\mathcal{F}$), $\mathcal{B}$ (v bázi $\mathcal{E}$) i složeného zobrazení $\mathcal{AB}$ (v bázích $\mathcal{E}$, $\mathcal{F}$), kde $\mathcal{E} = ([1, 0], [0, 1])$ a $\mathcal{F} = (1)$. Ověřte, že platí

$$[\mathcal{AB}]_{\mathcal{E},\mathcal{F}} \quad = \quad [\mathcal{A}]_{\mathcal{E},\mathcal{F}} [\mathcal{B}]_{\mathcal{E}}.$$

Výsledky:

1. $[\mathcal{A}]_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 1, & -1, & 0 \\ 1, & 1, & 0 \\ 1, & 1, & 1 \end{bmatrix}.$

2. $[\mathcal{A}]_{\mathcal{G},\mathcal{H}} = \begin{bmatrix} -1, & 2, & 4 \\ 2, & 0, & -1 \end{bmatrix}.$

3. $[\mathcal{A}]_{\mathcal{E},\mathcal{F}} = \left[\frac{1}{5}, -\frac{7}{5}\right]$, $[\mathcal{B}]_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 6/7, & -4/7 \\ 5/7, & -1/7 \end{bmatrix}$, $[\mathcal{AB}]_{\mathcal{E},\mathcal{F}} = \left[-\frac{29}{35}, \frac{3}{35}\right]$;

$$\left[-\frac{29}{35}, \frac{3}{35}\right] \quad = \quad \left[\frac{1}{5}, -\frac{7}{5}\right] \begin{bmatrix} 6/7, & -4/7 \\ 5/7, & -1/7 \end{bmatrix}.$$

3.3 Bilineární formy

Říkáme, že na reálném vektorovém prostoru $\mathcal{V}$ je dána *bilineární forma* B, jestliže každé uspořádané dvojici vektorů $(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ je přiřazeno reálné číslo $B(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ tak, že pro libovolné $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w} \in \mathcal{V}$ a $\alpha \in \mathbb{R}$ platí:

$$B(\mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{w}) = B(\mathbf{u}, \mathbf{w}) + B(\mathbf{v}, \mathbf{w}); \tag{3.23}$$
$$B(\alpha\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \alpha B(\mathbf{u}, \mathbf{v}); \tag{3.24}$$
$$B(\mathbf{u}, \mathbf{v} + \mathbf{w}) = B(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + B(\mathbf{u}, \mathbf{w}); \tag{3.25}$$
$$B(\mathbf{u}, \alpha\mathbf{v}) = \alpha B(\mathbf{u}, \mathbf{v}). \tag{3.26}$$

Matici

$$[B]_{\mathcal{E}} \quad = \quad \begin{bmatrix} B(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1), & B(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2), & \dots, & B(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_n) \\ B(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1), & B(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2), & \dots, & B(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B(\mathbf{e}_n, \mathbf{e}_1), & B(\mathbf{e}_n, \mathbf{e}_2), & \dots, & B(\mathbf{e}_n, \mathbf{e}_n) \end{bmatrix}, \tag{3.27}$$

jejíž prvky jsou určeny hodnotami formy na vektorech báze $\mathcal{E} = (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)$ vektorového prostoru $\mathcal{V}$ $(b_{ij} = B(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j), i, j \in \{1, \ldots, n\})$, nazýváme *maticí bilineární formy* v uspořádané bázi $\mathcal{E}$.

V dané bázi $\mathcal{E} = (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)$ lze každou bilineární formu v n-rozměrném prostoru psát ve tvaru

$$B(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = [\mathbf{u}]_{\mathcal{E}}^T [B]_{\mathcal{E}} [\mathbf{v}]_{\mathcal{E}}, \tag{3.28}$$

kde $[\mathbf{u}]_{\mathcal{E}}$, $[\mathbf{v}]_{\mathcal{E}}$ jsou příslušné souřadnicové vektory vektorů $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ v této bázi.

Mezi maticemi bilineární formy B v různých bázích $\mathcal{E}$, $\mathcal{F}$ vektorového prostoru $\mathcal{V}$ platí vztah

$$[B]_{\mathcal{F}} = \mathbf{P}^T [B]_{\mathcal{E}} \mathbf{P}; \tag{3.29}$$

$\mathbf{P}$ je matice přechodu od uspořádané báze $\mathcal{E}$ k uspořádané bázi $\mathcal{F}$ (viz (3.15)).

Bilineární forma B se nazývá *symetrická*, jestliže pro každé $\mathbf{u}$, $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$ platí

$$B(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = B(\mathbf{v}, \mathbf{u}). \tag{3.30}$$

Platí-li pro každé $\mathbf{u}$, $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$

$$B(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = -B(\mathbf{v}, \mathbf{u}), \tag{3.31}$$

řekneme, že bilineární forma B je *antisymetrická*.

Každou bilineární formu B můžeme jednoznačně rozložit na symetrickou a *antisymetrickou část:*

$$B^S(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \frac{1}{2}(B(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + B(\mathbf{v}, \mathbf{u})); \tag{3.32}$$

$$B^A(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \frac{1}{2}(B(\mathbf{u}, \mathbf{v}) - B(\mathbf{v}, \mathbf{u})). \tag{3.33}$$

Příklad 1. Buď $\mathcal{F}$ vektorový prostor všech reálných funkcí jedné reálné proměnné. Ukažte, že zobrazení $B : \mathcal{F} \times \mathcal{F} \to \mathbb{R}$, definované pro každé f, $g \in \mathcal{F}$ vztahem

$$B(f, g) = 4f(0)g(1) + f(2)g(3),$$

je bilineární forma na $\mathcal{F}$.

Řešení: Zobrazení musí mít pro libovolné funkce f, g, $h \in \mathcal{F}$ a $\alpha \in \mathbb{R}$ vlastnosti (3.23) - (3.26):

$$\begin{aligned}
B(f+g, h) &= 4(f+g)(0)h(1) + (f+g)(2)h(3) \\
&= 4(f(0)+g(0))h(1) + (f(2)+g(2))h(3) \\
&= 4f(0)h(1) + f(2)h(3) + 4g(0)h(1) + g(2)h(3) \\
&= B(f,h) + B(g,h); \\
B(\alpha f, g) &= 4(\alpha f)(0)g(1) + (\alpha f)(2)g(3) \\
&= 4\alpha f(0)g(1) + \alpha f(2)g(3) \\
&= \alpha(4f(0)g(1) + f(2)g(3)) \\
&= \alpha B(f,g); \\
B(f, g+h) &= 4f(0)(g+h)(1) + f(2)(g+h)(3) \\
&= 4f(0)(g(1)+h(1)) + f(2)(g(3)+h(3)) \\
&= 4f(0)g(1) + f(2)g(3) + 4f(0)h(1) + f(2)h(3) \\
&= B(f,g) + B(f,h); \\
B(f, \alpha g) &= 4f(0)(\alpha g)(1) + f(2)(\alpha g)(3) \\
&= 4f(0)\alpha g(1) + f(2)\alpha g(3) \\
&= \alpha(4f(0)g(1) + f(2)g(3)) \\
&= \alpha B(f,g).
\end{aligned}$$

Zobrazení B je bilineární forma.

Příklad 2. Budiž $\mathcal{F}$ opět vektorový prostor všech reálných funkcí. Zobrazení $B : \mathcal{F} \times \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ nechť je pro libovolné $f,\ g \in \mathcal{F}$ definováno předpisem

$$B(f,g) \quad = \quad f(1)\, g^2(1)\,.$$

Je zobrazení B bilineární forma na $\mathcal{F}$?

Řešení: Při ověřování axiomů bilineární formy zjistíme, že například axiom (3.25) neplatí:

$$\begin{aligned} B(f,g+h) &= f(1)\,(g+h)^2(1) \\ &= f(1)\,(g(1)+h(1))^2 \\ &= f(1)\left(g^2(1)+2g(1)\,h(1)+h^2(1)\right); \\ B(f,g)+B(f,h) &= f(1)\,g^2(1)+f(1)\,h^2(1)\,. \end{aligned}$$

Je zřejmé, že $B(f,g+h) \neq B(f,g)+B(f,h)$, a tudíž se nejedná o bilineární formu.

Poznámka 1. Nesplnění jednoho z axiomů bilineární formy pochopitelně stačí, abychom dané zobrazení za bilineární formu nepovažovali. Čtenář nechť si však sám zkusí propočítat, které z axiomů bilineární formy zde platí a které ne.

Příklad 3. Dokažte, že zobrazení

$$B : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \ni (\mathbf{x},\mathbf{y}) \quad \longmapsto \quad x_1y_1+2x_2y_2+3x_3y_3 \in \mathbb{R}$$

je bilineární forma na prostoru $\mathbb{R}^3$.

Řešení: Opět se podíváme, má-li zobrazení B všechny vlastnosti bilineární formy. Nechť $\mathbf{x} = [x_1,x_2,x_3]$, $\mathbf{y} = [y_1,y_2,y_3]$, $\mathbf{z} = [z_1,z_2,z_3]$ a $\alpha \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} B(\mathbf{x}+\mathbf{y},\mathbf{z}) &= (x_1+y_1)\,z_1+2\,(x_2+y_2)\,z_2+3\,(x_3+y_3)\,z_3 \\ &= (x_1z_1+2x_2z_2+3x_3z_3)+(y_1z_1+2y_2z_2+3y_3z_3) \\ &= B(\mathbf{x},\mathbf{z})+B(\mathbf{y},\mathbf{z})\,; \\ B(\alpha\mathbf{x},\mathbf{y}) &= (\alpha x_1)\,y_1+2\,(\alpha x_2)\,y_2+3\,(\alpha x_3)\,y_3 \\ &= \alpha\,(x_1y_1+2x_2y_2+3x_3y_3) \\ &= \alpha B(\mathbf{x},\mathbf{y})\,; \\ B(\mathbf{x},\mathbf{y}+\mathbf{z}) &= x_1\,(y_1+z_1)+2x_2\,(y_2+z_2)+3x_3\,(y_3+z_3) \\ &= (x_1y_1+2x_2y_2+3x_3y_3)+(x_1z_1+2x_2z_2+3x_3z_3) \\ &= B(\mathbf{x},\mathbf{y})+B(\mathbf{x},\mathbf{z})\,; \\ B(\mathbf{x},\alpha\mathbf{y}) &= x_1\,(\alpha y_1)+2x_2\,(\alpha y_2)+3x_3\,(\alpha y_3) \\ &= \alpha\,(x_1y_1+2x_2y_2+3x_3y_3) \\ &= \alpha B(\mathbf{x},\mathbf{y})\,. \end{aligned}$$

Zobrazení B má všechny vlastnosti bilineární formy.

Příklad 4. Najděte matici bilineární formy z předchozího příkladu v bázi $\mathcal{F} = (\mathbf{f}_1,\mathbf{f}_2,\mathbf{f}_3)$, je-li $\mathbf{f}_1 = [1,\,1,\,1]$, $\mathbf{f}_2 = [1,\,1,-1]$, $\mathbf{f}_3 = [1,-1,-1]$.

Řešení: Matice bilineární formy je určena hodnotami formy na vektorech dané báze. Forma je symetrická ($B(\mathbf{x},\mathbf{y}) = B(\mathbf{y},\mathbf{x})$ pro libovolné $\mathbf{x},\ \mathbf{y} \in \mathbb{R}^3$), matice formy bude tedy také symetrická

($b_{ij} = b_{ji}$, i, $j \in \{1, 2, 3\}$). Její prvky dostaneme v souladu s (3.27) :

$$\begin{aligned}
b_{11} &= B(\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_1) = 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 \cdot 1 + 3 \cdot 1 \cdot 1 = 6; \\
b_{12} &= B(\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2) = 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 \cdot 1 + 3 \cdot 1 \cdot (-1) = 0; \\
b_{13} &= B(\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_3) = 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 \cdot (-1) + 3 \cdot 1 \cdot (-1) = -4; \\
b_{22} &= B(\mathbf{f}_2, \mathbf{f}_2) = 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 \cdot 1 + 3 \cdot (-1) \cdot (-1) = 6; \\
b_{23} &= B(\mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3) = 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 \cdot (-1) + 3 \cdot (-1) \cdot (-1) = 2; \\
b_{33} &= B(\mathbf{f}_3, \mathbf{f}_3) = 1 \cdot 1 + 2 \cdot (-1) \cdot (-1) + 3 \cdot (-1) \cdot (-1) = 6;
\end{aligned}$$

tj.

$$[B]_{\mathcal{F}} = \begin{bmatrix} 6, & 0, & -4 \\ 0, & 6, & 2 \\ -4, & 2, & 6 \end{bmatrix}.$$

Poznámka 2. Mohli jsme také nejprve sestavit matici dané formy vzhledem ke standardní bázi prostoru $\mathbb{R}^3$ a využít vzorce (3.29). Vzhledem k bázi $\mathcal{E} = ([1, 0, 0], [0, 1, 0], [0, 0, 1])$ má matice formy tvar

$$[B]_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 1, & 0, & 0 \\ 0, & 2, & 0 \\ 0, & 0, & 3 \end{bmatrix},$$

a matice přechodu od báze $\mathcal{E}$ k bázi $\mathcal{F}$ je

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1, & 1, & 1 \\ 1, & 1, & -1 \\ 1, & -1, & -1 \end{bmatrix}.$$

Odtud

$$\begin{aligned}
[B]_{\mathcal{F}} &= \begin{bmatrix} 1, & 1, & 1 \\ 1, & 1, & -1 \\ 1, & -1, & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1, & 0, & 0 \\ 0, & 2, & 0 \\ 0, & 0, & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1, & 1, & 1 \\ 1, & 1, & -1 \\ 1, & -1, & -1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 6, & 0, & -4 \\ 0, & 6, & 2 \\ -4, & 2, & 6 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Poznámka 3. Označíme-li ξ_1, ξ_2, ξ_3, resp. η_1, η_2, η_3 souřadnice vektoru $\mathbf{x}$, resp. $\mathbf{y}$ v bázi $\mathcal{F}$, můžeme danou bilineární formu napsat vzhledem k bázi $\mathcal{F}$ ve tvaru (3.28):

$$\begin{aligned}
B(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= [\mathbf{x}]_{\mathcal{F}}^T [B]_{\mathcal{F}} [\mathbf{y}]_{\mathcal{F}} \\
&= [\xi_1, \xi_2, \xi_3] \begin{bmatrix} 6, & 0, & -4 \\ 0, & 6, & 2 \\ -4, & 2, & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \end{bmatrix} \\
&= 6\xi_1\eta_1 - 4\xi_1\eta_3 + 6\xi_2\eta_2 + 2\xi_2\eta_3 - 4\xi_3\eta_1 + 2\xi_3\eta_2 + 6\xi_3\eta_3.
\end{aligned}$$

Ve standardní bázi $\mathcal{E}$ má tato forma tvar

$$\begin{aligned}
B(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= [\mathbf{x}]_{\mathcal{E}}^T [B]_{\mathcal{E}} [\mathbf{y}]_{\mathcal{E}} \\
&= [x_1, x_2, x_3] \begin{bmatrix} 1, & 0, & 0 \\ 0, & 2, & 0 \\ 0, & 0, & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} \\
&= x_1y_1 + 2x_2y_2 + 3x_3y_3.
\end{aligned}$$

Příklad 5. Na vektorovém prostoru $\mathbb{R}^3$ je dána bilineární forma

$$B(\mathbf{x},\mathbf{y}) = 3x_1y_1 + 2x_1y_2 - 5x_1y_3 + x_2y_2 + 2x_2y_3 + x_3y_1 - x_3y_2.$$

Určete symetrickou a antisymetrickou část bilineární formy B.

Řešení: Symetrickou část B^S, resp. antisymetrickou část B^A formy B určíme pomocí vzorce (3.32), resp. (3.33). Můžeme také najít nejprve matici zadané bilineární formy vzhledem ke standardní bázi $\mathcal{E}$ vektorového prostoru $\mathbb{R}^3$ a použít analogické vzorce k vzorcům (3.32), resp. (3.33) k určení její symetrické, resp. antisymetrické části. Ve standardní bázi $\mathcal{E}$ má forma matici (sestavte sami!)

$$[B]_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 3, & 2, & -5 \\ 0, & 1, & 2 \\ 1, & -1, & 0 \end{bmatrix}.$$

Označme ji pro jednoduchost $\mathbf{B}$ (tedy $\mathbf{B} = [B]_{\mathcal{E}}$). Pro symetrickou, resp. antisymetrickou část matice $\mathbf{B}$ platí:

$$\begin{aligned} \mathbf{B}^S &= \frac{1}{2}\left(\mathbf{B} + \mathbf{B}^T\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\begin{bmatrix} 3, & 2, & -5 \\ 0, & 1, & 2 \\ 1, & -1, & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3, & 0, & 1 \\ 2, & 1, & -1 \\ -5, & 2, & 0 \end{bmatrix}\right) \\ &= \begin{bmatrix} 3, & 1, & -2 \\ 1, & 1, & \frac{1}{2} \\ -2, & \frac{1}{2}, & 0 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

resp.

$$\begin{aligned} \mathbf{B}^A &= \frac{1}{2}\left(\mathbf{B} - \mathbf{B}^T\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\begin{bmatrix} 3, & 2, & -5 \\ 0, & 1, & 2 \\ 1, & -1, & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3, & 0, & 1 \\ 2, & 1, & -1 \\ -5, & 2, & 0 \end{bmatrix}\right) \\ &= \begin{bmatrix} 0, & 1, & -3 \\ -1, & 0, & \frac{3}{2} \\ 3, & -\frac{3}{2}, & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Odtud obdržíme hledanou symetrickou, resp. antisymetrickou část formy B:

$$\begin{aligned} B^S(\mathbf{x},\mathbf{y}) &= [\mathbf{x}]_{\mathcal{E}}^T\, \mathbf{B}^S\, [\mathbf{y}]_{\mathcal{E}} \\ &= [x_1, x_2, x_3] \begin{bmatrix} 3, & 1, & -2 \\ 1, & 1, & \frac{1}{2} \\ -2, & \frac{1}{2}, & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} \\ &= 3x_1y_1 + x_1y_2 - 2x_1y_3 + x_2y_1 + x_2y_2 + \frac{1}{2}x_2y_3 - 2x_3y_1 + \frac{1}{2}x_3y_2; \end{aligned}$$

resp.

$$\begin{aligned} B^A(\mathbf{x},\mathbf{y}) &= [\mathbf{x}]_{\mathcal{E}}^T\, \mathbf{B}^A\, [\mathbf{y}]_{\mathcal{E}} \\ &= [x_1, x_2, x_3] \begin{bmatrix} 0, & 1, & -3 \\ -1, & 0, & \frac{3}{2} \\ 3, & -\frac{3}{2}, & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} \\ &= x_1y_2 - 3x_1y_3 - x_2y_1 + \frac{3}{2}x_2y_3 + 3x_3y_1 - \frac{3}{2}x_3y_2. \end{aligned}$$

Cvičení:

1. Na vektorovém prostoru $\mathcal{P}_2$ všech polynomů stupně nejvýše 2 je dána bilineární forma B tak, že pro libovolné polynomy p, $q \in \mathcal{P}_2$ platí:
$$B(p,q) = 4p(0)\,q(1) + p(2)\,q(3). \tag{3.34}$$
Napište její matici v bázi $\mathcal{P} = \left(1, x, x^2\right)$ a pomocí vztahu (3.28) vypočtěte hodnotu formy na polynomech $p(x) = x^2 + 1$, $q(x) = x^2 - 1$.

2. Nechť $\mathcal{P}_2$ je opět vektorový prostor všech polynomů stupně nejvýše 2. Bilineární forma B je pro každé p, $q \in \mathcal{P}_2$ definována předpisem
$$B(p,q) = p(1)\,q(0).$$
Určete matice bilineární formy B i její symetrické části B^S v bázi $\widetilde{\mathcal{P}} = \left(1, x+1, (x+1)^2\right)$.

3. Buď B taková bilineární forma na $\mathbb{R}^2$, že pro libovolné $\mathbf{x}$, $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^2$ platí
$$B(\mathbf{x},\mathbf{y}) = 2x_1y_1 - 3x_1y_2 + 5x_2y_1 - x_2y_2.$$
Jaký tvar bude mít forma B vzhledem k bázi $\mathcal{F} = ([2,-1], [1, 3])$?

4. Nechť $\mathcal{F}$ je vektorový prostor všech reálných funkcí, které jsou spojité v intervalu $\langle 0, 1\rangle$. Ukažte, že zobrazení
$$B : \mathcal{F} \times \mathcal{F} \ni (f,g) \longmapsto \int_0^1 f(x)\,g(x)\,dx \in \mathbb{R}$$
je bilineární forma na $\mathcal{F}$.

Výsledky:

1. $[B]_{\mathcal{P}} = \begin{bmatrix} 5, & 7, & 13 \\ 2, & 6, & 18 \\ 4, & 12, & 36 \end{bmatrix}$, (např.: $b_{13} = B\left(1, x^2\right) = 4 \cdot 1 \cdot 1^2 + 1 \cdot 3^2$); $B(p,q) = 40$.
Hodnotu formy na polynomech p, q můžeme pro kontrolu také určit přímo ze vztahu (3.34).

2. $[B]_{\widetilde{\mathcal{P}}} = \begin{bmatrix} 1, & 1, & 1 \\ 2, & 2, & 2 \\ 4, & 4, & 4 \end{bmatrix}$, $[B]^S_{\widetilde{\mathcal{P}}} = \begin{bmatrix} 1, & 3/2, & 5/2 \\ 3/2, & 2, & 3 \\ 5/2, & 3, & 4 \end{bmatrix}$.

3. $B(\mathbf{x},\mathbf{y}) = 3\xi_1\eta_1 - 16\xi_1\eta_2 + 40\xi_2\eta_1 - \xi_2\eta_2$.

4. Využijte vlastnosti určitého integrálu.

3.4 Kvadratické formy

Kvadratickou formou na reálném vektorovém prostoru $\mathcal{V}$ příslušnou dané bilineární formě B nazýváme zobrazení $Q_B : \mathcal{V} \to \mathbb{R}$ definované pro každé $\mathbf{u} \in \mathcal{V}$ předpisem
$$Q_B(\mathbf{u}) = B(\mathbf{u},\mathbf{u}). \tag{3.35}$$
Stejnou kvadratickou formu také vytváří i symetrická část dané bilineární formy B, takže lze psát
$$Q_B(\mathbf{u}) = B^S(\mathbf{u},\mathbf{u}).$$

Z tohoto důvodu definujeme matici kvadratické formy Q_B v dané bázi $\mathcal{E}$ jako symetrickou matici

$$[Q_B]_{\mathcal{E}} \quad = \quad \left[B^S\right]_{\mathcal{E}}, \tag{3.36}$$

kde $\left[B^S\right]_{\mathcal{E}}$ je matice symetrické části bilineární formy B. Podobně jako v (3.28) můžeme každou kvadratickou formu $Q_B(\mathbf{u})$ v dané bázi $\mathcal{E}$ vyjádřit pomocí souřadnic vektoru $\mathbf{u}$ a matice formy vzhledem k této bázi vzorcem

$$Q_B(\mathbf{u}) \quad = \quad [\mathbf{u}]_{\mathcal{E}}^T [Q_B]_{\mathcal{E}} [\mathbf{u}]_{\mathcal{E}}. \tag{3.37}$$

V dalším textu budeme u označení kvadratické formy vynechávat index udávající příslušnou bilineární formu.

Řekneme, že kvadratická forma Q je *pozitivně (negativně) definitní,* jestliže pro každé $\mathbf{u} \in \mathcal{V}$, $\mathbf{u} \neq \mathbf{o}$ platí $Q(\mathbf{u}) > 0$ *(*$Q(\mathbf{u}) < 0$*)*. Platí-li pro každé $\mathbf{u} \in \mathcal{V}$, $\mathbf{u} \neq \mathbf{o}$ $Q(\mathbf{u}) \geq 0$ *(* $Q(\mathbf{u}) \leq 0$*)*, nazýváme formu Q *pozitivně (negativně) semidefinitní.* Existují-li takové vektory $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{V}$, že například $Q(\mathbf{x}) > 0$ a zároveň $Q(\mathbf{y}) < 0$, pak se kvadratická forma nazývá *indefinitní.* Podobně o *symetrické* matici $\mathbf{A}$ stupně n říkáme, že je *pozitivně definitní*, jestliže pro každý sloupcový nenulový vektor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n,1}$ platí $\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x} > 0$, tj. příslušná kvadratická forma $Q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x}$ je pozitivně definitní.

Přejdeme-li od uspořádané báze $\mathcal{E}$ k uspořádané bázi $\mathcal{F}$ (matici přechodu od báze $\mathcal{E}$ k bázi $\mathcal{F}$ označíme jako obvykle $\mathbf{P}$), změní se matice kvadratické formy podle vztahu

$$[Q]_{\mathcal{F}} \quad = \quad \mathbf{P}^T [Q]_{\mathcal{E}} \mathbf{P}. \tag{3.38}$$

Tento vztah mezi maticemi se nazývá *kongruence.* Při studiu kvadratických forem je zvlášť důležité najít takovou bázi $\mathcal{F}$, vzhledem k níž je matice kvadratické formy *diagonální*, tj.

$$[Q]_{\mathcal{F}} \quad = \quad \begin{bmatrix} d_{11}, & 0, & \dots, & 0 \\ 0, & d_{22}, & \dots, & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0, & 0, & \dots, & d_{nn} \end{bmatrix},$$

neboť pak má forma Q v bázi $\mathcal{F}$ pro každé $\mathbf{x} \in \mathcal{V}$ tvar *lineární kombinace čtverců:*

$$\begin{aligned} Q(\mathbf{x}) &= [\mathbf{x}]_{\mathcal{F}}^T [Q]_{\mathcal{F}} [\mathbf{x}]_{\mathcal{F}} \\ &= [\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n] \begin{bmatrix} d_{11}, & 0, & \dots, & 0 \\ 0, & d_{22}, & \dots, & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0, & 0, & \dots, & d_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_n \end{bmatrix} \\ &= d_{11}\xi_1^2 + d_{22}\xi_2^2 + \dots + d_{nn}\xi_n^2, \end{aligned} \tag{3.39}$$

z něhož typ formy snadno určíme. Existenci takové vhodné báze zajišťuje věta pojednávající o kongruenci symetrické a diagonální matice:

Ke každé symetrické matici $\mathbf{A}$ *existuje regulární matice* $\mathbf{T}$ *a diagonální matice* $\mathbf{D}$ *tak, že*

$$\mathbf{D} \quad = \quad \mathbf{T}\mathbf{A}\mathbf{T}^T. \tag{3.40}$$

Matice $\mathbf{D}$ a $\mathbf{T}$ najdeme následovně:

1. Matici $\mathbf{A}$ upravíme pomocí ***elementárních kongruencí*** (po každé elementární řádkové operaci provedeme i její sloupcovou variantu) na diagonální matici $\mathbf{D}$.

2. Stejné elementární řádkové operace pak provedeme na jednotkové matici téhož stupně, čímž získáme matici $\mathbf{T}$.

Vztah (3.40) můžeme interpretovat jako změnu matice kvadratické formy při změně báze s maticí přechodu $\mathbf{T}^T$. Redukce symetrické matice $\mathbf{A}$ na diagonální matici $\mathbf{D}$ nemusí být jednoznačná. To ale nevadí. Podle *zákona setrvačnosti kvadratických forem* má diagonální matice vždy *stejný počet* kladných, záporných i nulových prvků.

Příklad 1. Na vektorovém prostoru $\mathbb{R}^2$ je dána bilineární forma B předpisem

$$B(\mathbf{x},\mathbf{y}) = 2x_1y_1 - 3x_1y_2 + 5x_2y_1 - x_2y_2.$$

Napište příslušnou kvadratickou formu Q a její matici vzhledem ke standardní bázi $\mathcal{E}$ prostoru $\mathbb{R}^2$.

Řešení: Ve shodě s definicí kvadratické formy platí

$$\begin{aligned} Q(\mathbf{x}) &= B(\mathbf{x},\mathbf{x}) \\ &= 2x_1^2 - 3x_1x_2 + 5x_2x_1 - x_2^2 \\ &= 2x_1^2 + 2x_1x_2 - x_2^2. \end{aligned} \tag{3.41}$$

Maticí kvadratické formy je podle definice matice symetrické části dané bilineární formy B. Určíme tedy symetrickou část formy B :

$$\begin{aligned} B^S(\mathbf{x},\mathbf{y}) &= \frac{1}{2}\left(B(\mathbf{x},\mathbf{y}) + B(\mathbf{y},\mathbf{x})\right) \\ &= \frac{1}{2}\left((2x_1y_1 - 3x_1y_2 + 5x_2y_1 - x_2y_2) + (2y_1x_1 - 3y_1x_2 + 5y_2x_1 - y_2x_2)\right) \\ &= 2x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 - x_2y_2, \end{aligned}$$

a pak následně její matici

$$[B]^S_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 2, & 1 \\ 1, & -1 \end{bmatrix},$$

což je také i naše matice kvadratické formy.

Poznámka. Matici symetrické části B^S jsme také mohli odvodit přímo z matice formy B :

$$\begin{aligned} \left[B^S\right]_{\mathcal{E}} &= \frac{1}{2}\left([B]_{\mathcal{E}} + [B]^T_{\mathcal{E}}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\begin{bmatrix} 2, & -3 \\ 5, & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2, & 5 \\ -3, & -1 \end{bmatrix}\right) \\ &= \begin{bmatrix} 2, & 1 \\ 1, & -1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Jiný způsob jak najít matici kvadratické formy spočívá v tom, že ji vyjádříme v maticovém tvaru s horní trojúhelníkovou maticí, z níž pak odvodíme symetrickou matici. Snadno nahlédneme, že pro formu (3.41) platí

$$Q(\mathbf{x}) = [x_1, x_2]\begin{bmatrix} 2, & 2 \\ 0, & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix},$$

odkud dostaneme

$$\begin{aligned} [Q]_{\mathcal{E}} &= \frac{1}{2}\left(\begin{bmatrix} 2, & 2 \\ 0, & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2, & 0 \\ 2, & -1 \end{bmatrix}\right) \\ &= \begin{bmatrix} 2, & 1 \\ 1, & -1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Příklad 2. Určete typ kvadratické formy

$$Q(\mathbf{x}) = 2x_1^2 + 4x_2^2 + 29x_3^2 + 4x_1x_2 - 12x_1x_3 - 4x_2x_3$$

a napište bázi, v níž má forma Q tvar lineární kombinace čtverců.

Řešení: Sestavíme symetrickou matici kvadratické formy Q ve standardní bázi $\mathcal{E}$ prostoru $\mathbb{R}^3$ a užitím elementárních kongruencí ji upravíme na diagonální matici. Forma má maticové vyjádření

$$Q(\mathbf{x}) = [x_1, x_2, x_3] \begin{bmatrix} 2, & 4, & -12 \\ 0, & 4, & -4 \\ 0, & 0, & 29 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}.$$

Horní trojúhelníkovou matici označme $\mathbf{U}$. Příslušnou symetrickou matici $\mathbf{A}$ získáme známým způsobem:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \frac{1}{2}\left(\mathbf{U} + \mathbf{U}^T\right) \\ &= \begin{bmatrix} 2, & 2, & -6 \\ 2, & 4, & -2 \\ -6, & -2, & 29 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Nyní už můžeme přejít k elementárním kogruencím:

$$\begin{bmatrix} 2, & 2, & -6 \\ 2, & 4, & -2 \\ -6, & -2, & 29 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ -r_1 \\ +3r_1 \end{array} \sim \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 2, & 2, & -6 \\ 0, & 2, & 4 \\ 0, & 4, & 11 \end{bmatrix} \\ \quad -s_1 \;\; +3s_1 \end{array} \sim \begin{bmatrix} 2, & 0, & 0 \\ 0, & 2, & 4 \\ 0, & 4, & 11 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ -2r_2 \end{array} \sim \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 2, & 0, & 0 \\ 0, & 2, & 4 \\ 0, & 0, & 3 \end{bmatrix} \\ \qquad\quad -2s_2 \end{array} \sim$$

$$\begin{bmatrix} 2, & 0, & 0 \\ 0, & 2, & 0 \\ 0, & 0, & 3 \end{bmatrix} = \mathbf{D}.$$

$$\begin{bmatrix} 1, & 0, & 0 \\ 0, & 1, & 0 \\ 0, & 0, & 1 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ -r_1 \\ +3r_1 \end{array} \sim \begin{bmatrix} 1, & 0, & 0 \\ -1, & 1, & 0 \\ 3, & 0, & 1 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ -2r_2 \end{array} \sim \begin{bmatrix} 1, & 0, & 0 \\ -1, & 1, & 0 \\ 5, & -2, & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{T}.$$

Všechny diagonální prvky matice $\mathbf{D}$ jsou kladné, kvadratická forma je tedy pozitivně definitní. Matice $\mathbf{T}^T$ je, jak víme, maticí přechodu od báze $\mathcal{E}$ k bázi $\mathcal{F}$, v níž je matice formy Q diagonální. Její sloupce (respektive řádky matice $\mathbf{T}$) tvoří pak hledanou bázi, tj.

$$\mathcal{F} = ([1, 0, 0], [-1, 1, 0], [5, -2, 1]).$$

V nové bázi má forma tvar:

$$\begin{aligned} Q(\mathbf{x}) &= [\mathbf{x}]_{\mathcal{F}}^T \mathbf{D} [\mathbf{x}]_{\mathcal{F}} \\ &= [\xi_1, \xi_2, \xi_3] \begin{bmatrix} 2, & 0, & 0 \\ 0, & 2, & 0 \\ 0, & 0, & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{bmatrix} \\ &= 2\xi_1^2 + 2\xi_2^2 + 3\xi_3^2. \end{aligned}$$

Příklad 3. Rozhodněte o typu kvadratické formy

$$Q(\mathbf{u}) = 2u_1u_2 + 2u_1u_3 - 6u_2u_3.$$

Řešení: Opět využijeme elementárních kongruencí. Forma Q má vzhledem ke standardní bázi prostoru $\mathbb{R}^3$ symetrickou matici

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0, & 1, & 1 \\ 1, & 0, & -3 \\ 1, & -3, & 0 \end{bmatrix}.$$

Převedeme ji na diagonální matici:

$$\begin{array}{c}\begin{bmatrix} 0, & 1, & 1 \\ 1, & 0, & -3 \\ 1, & -3, & 0 \end{bmatrix}\end{array}\begin{array}{l} +r_2 \\ \\ \\ \end{array} \sim \begin{array}{c}\begin{bmatrix} 1, & 1, & -2 \\ 1, & 0, & -3 \\ 1, & -3, & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{array}{lll} +s_2 & & \end{array}\end{array} \sim \begin{bmatrix} 2, & 1, & -2 \\ 1, & 0, & -3 \\ -2, & -3, & 0 \end{bmatrix}\begin{array}{l} \\ -\frac{1}{2}r_1 \\ +r_1 \end{array} \sim$$

$$\begin{array}{c}\begin{bmatrix} 2, & 1, & -2 \\ 0, & -\frac{1}{2}, & -2 \\ 0, & -2, & -2 \end{bmatrix} \\ \begin{array}{lll} & -\frac{1}{2}s_1 & +s_1 \end{array}\end{array} \sim \begin{bmatrix} 2, & 0, & 0 \\ 0, & -\frac{1}{2}, & -2 \\ 0, & -2, & -2 \end{bmatrix}\begin{array}{l} \\ \\ -4r_2 \end{array} \sim \begin{array}{c}\begin{bmatrix} 2, & 0, & 0 \\ 0, & -\frac{1}{2}, & -2 \\ 0, & 0, & 6 \end{bmatrix} \\ \begin{array}{lll} & & -4s_2 \end{array}\end{array} \sim \begin{bmatrix} 2, & 0, & 0 \\ 0, & -\frac{1}{2}, & 0 \\ 0, & 0, & 6 \end{bmatrix} = \mathbf{D}.$$

Kvadratická forma je indefinitní. Pro úplnost uvedeme ještě její vyjádření ve formě lineární kombinace čtverců:

$$Q(\mathbf{u}) \quad = \quad 2\xi_1^2 - \frac{1}{2}\xi_2^2 + 6\xi_3^2.$$

Cvičení:

1. Vypočtěte součin matic $\mathbf{TAT}^T$ z *příkladu 2* této podkapitoly.
2. Najděte matici přechodu od standardní báze $\mathcal{E}$ k bázi $\mathcal{F}$, ve které má kvadratická forma *z příkladu 3 (podkapitoly 3.4)* tvar lineární kombinace čtverců. Napište bázi $\mathcal{F}$.
3. Určete typ kvadratické formy $Q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, je-li
$$Q(\mathbf{x}) \quad = \quad -3x_1^2 - 5x_2^2 + 4x_1x_2.$$
4. Sestavte bázi $\mathcal{F}$, v níž je kvadratická forma
$$Q(\mathbf{u}) \quad = \quad 2u_1^2 + 6u_2^2 + 12u_3^2 - 4u_1u_2 - 8u_1u_3$$
vyjádřena jako lineární kombinace čtverců a určete její typ.
5. Rozhodněte o definitnosti matice
$$\mathbf{A} \quad = \quad \begin{bmatrix} 3, & 1, & -1 \\ 1, & 2, & 1 \\ -1, & 1, & 2 \end{bmatrix}.$$

Výsledky:

1. $\mathbf{TAT}^T = \begin{bmatrix} 2, & 0, & 0 \\ 0, & 2, & 0 \\ 0, & 0, & 3 \end{bmatrix}.$
2. $\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1, & -1/2, & 3 \\ 1, & 1/2, & -1 \\ 0, & 0, & 1 \end{bmatrix}$, $\mathcal{F} = \left([1,\ 1,\ 0], \left[-\frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ 0\right], [3, -1,\ 1]\right).$
3. Forma je negativně definitní.
4. $\mathcal{F} = ([1,\ 0,\ 0], [1,\ 1,\ 0], [3,\ 1,\ 1])$. Forma je pozitivně semidefinitní.
5. Matice $\mathbf{A}$ je pozitivně definitní.

Kapitola 4

Skalární součin a ortogonalita

4.1 Skalární součin vektorů

Skalárním součinem na reálném vektorovém prostoru $\mathcal{V}$ nazýváme zobrazení

$$(\, , \,) : \quad \mathcal{V} \times \mathcal{V} \quad \to \mathbb{R},$$

které má pro každé vektory $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w} \in \mathcal{V}$ a $\alpha \in \mathbb{R}$ následující vlastnosti:

$$\begin{aligned} (\mathbf{u}+\mathbf{v},\mathbf{w}) &= (\mathbf{u},\mathbf{w}) + (\mathbf{v},\mathbf{w})\,; && (4.1)\\ (\alpha\mathbf{u},\mathbf{v}) &= \alpha\,(\mathbf{u},\mathbf{v})\,; && (4.2)\\ (\mathbf{u},\mathbf{v}) &= (\mathbf{v},\mathbf{u})\,; && (4.3)\\ (\mathbf{u},\mathbf{u}) &\geq 0; && (4.4) \end{aligned}$$

přičemž rovnost v (4.4) nastane právě tehdy, když $\mathbf{u} = \mathbf{o}$. Jinak řečeno, skalárním součinem na $\mathcal{V}$ rozumíme symetrickou, pozitivně definitní bilineární formu na $\mathcal{V}$.

Zobrazení, které libovolnému vektoru $\mathbf{u} \in \mathcal{V}$ přiřazuje reálné číslo $\|\mathbf{u}\|$ se nazývá *norma*, jestliže pro libovolné $\mathbf{u}$, $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$ a $\alpha \in \mathbb{R}$ platí:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u}+\mathbf{v}\| &\leq \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|\,; && (4.5)\\ \|\alpha\mathbf{u}\| &= |\alpha|\,\|\mathbf{u}\|\,; && (4.6)\\ \|\mathbf{u}\| &\geq 0; && (4.7) \end{aligned}$$

rovnost v (4.7) nastane opět právě tehdy, když $\mathbf{u} = \mathbf{o}$. Norma vektoru, jež je pro každé $\mathbf{u} \in \mathcal{V}$ definována jako odmocnina ze skalárního součinu $(\mathbf{u},\mathbf{u})$:

$$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{(\mathbf{u},\mathbf{u})}, \qquad (4.8)$$

se nazývá *norma indukovaná skalárním součinem.*

Příklad 1. Nechť $\mathcal{V} = \mathbb{R}^{2,1}$ je vektorový prostor všech sloupcových aritmetických vektorů dimenze 2. Rozhodněte, zda zobrazení $(\, , \,) : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \to \mathbb{R}$ definované vztahem

$$(\mathbf{u},\mathbf{v}) = \mathbf{u}^T\mathbf{A}\mathbf{v},$$

kde

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2, & -1 \\ -1, & 2 \end{bmatrix},$$

je skalární součin.

Řešení: Podívejme se, zda-li dané zobrazení představuje symetrickou, pozitivně definitní bilineární formu:

$$
\begin{aligned}
&(4.1)\text{:}\quad (\mathbf{u}+\mathbf{v},\mathbf{w}) = (\mathbf{u}+\mathbf{v})^T\mathbf{A}\mathbf{w} = \left(\mathbf{u}^T+\mathbf{v}^T\right)\mathbf{A}\mathbf{w} = \mathbf{u}^T\mathbf{A}\mathbf{w}+\mathbf{v}^T\mathbf{A}\mathbf{w} = (\mathbf{u},\mathbf{w})+(\mathbf{v},\mathbf{w})\,;\\
&(4.2)\text{:}\quad (\alpha\mathbf{u},\mathbf{v}) = (\alpha\mathbf{u})^T\mathbf{A}\mathbf{v} = \alpha\left(\mathbf{u}^T\mathbf{A}\mathbf{w}\right) = \alpha(\mathbf{u},\mathbf{v})\,;\\
&(4.3)\text{:}\quad (\mathbf{u},\mathbf{v}) = \mathbf{u}^T\mathbf{A}\mathbf{v} = \left(\mathbf{u}^T\mathbf{A}\mathbf{v}\right)^T = \mathbf{v}^T\mathbf{A}^T\left(\mathbf{u}^T\right)^T = \mathbf{v}^T\mathbf{A}\mathbf{u} = (\mathbf{v},\mathbf{u})\,;\\
&(4.4)\text{:}\quad (\mathbf{u},\mathbf{u}) = [u_1,u_2]\begin{bmatrix} 2, & -1\\ -1, & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_1\\ u_2\end{bmatrix} = 2u_1^2-2u_1u_2+2u_2^2 = 2\left(u_1-\tfrac{1}{2}u_2\right)^2+\tfrac{3}{2}u_2^2 \geq 0.
\end{aligned}
$$

Zobrazení splňuje axiomy (4.1) - (4.4), a definuje tedy skalární součin.

Poznámka 1. Musíme si uvědomit, že $\mathbf{u}^T\mathbf{A}\mathbf{v}\in\mathbb{R}$, a tudíž skutečně $\mathbf{u}^T\mathbf{A}\mathbf{v} = \left(\mathbf{u}^T\mathbf{A}\mathbf{v}\right)^T$. Nakonec zbývalo ukázat, že kvadratická forma $(\mathbf{u},\mathbf{u}) = 2u_1^2-2u_1u_2+2u_2^2$ je pozitivně definitní. Zde jsme tentokrát použili metodu doplnění na čtverec.

Příklad 2. Ukažte, že předpis

$$\|\mathbf{u}\|_\infty \quad = \quad \max\{|u_1|,|u_2|\}$$

definuje normu na $\mathbb{R}^2$.

Řešení: Je evidentní, že $\|\mathbf{u}\|_\infty$ je nezáporné číslo a že $\|\mathbf{u}\|_\infty = 0$ pouze v případě, je-li $\mathbf{u} = [0,0]$. Zbývá tak ověřit platnost axiomů (4.5) a (4.6):

$$
\begin{aligned}
\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\|_\infty &= \max\{|u_1+v_1|,|u_2+v_2|\}\\
&\leq \max\{|u_1|+|v_1|,|u_2|+|v_2|\}\\
&\leq \max\{|u_1|,|u_2|\}+\max\{|v_1|,|v_2|\}\\
&= \|\mathbf{u}\|_\infty+\|\mathbf{v}\|_\infty\,;\\
\|\alpha\mathbf{u}\|_\infty &= \max\{|\alpha u_1|,|\alpha u_2|\}\\
&= \max\{|\alpha|\,|u_1|,|\alpha|\,|u_2|\}\\
&= |\alpha|\max\{|u_1|,|u_2|\}\\
&= |\alpha|\,\|\mathbf{u}\|_\infty\,.
\end{aligned}
$$

Oba axiomy platí, tj. daný předpis definuje normu na $\mathbb{R}^2$.

Poznámka 2. Při důkazu jsme využili vlastností absolutní hodnoty reálného čísla. Pro každé $x,\, y\in\mathbb{R}$ totiž platí:

$$
\begin{aligned}
|x+y| &\leq |x|+|y|\,;\\
|xy| &= |x|\,|y|\,.
\end{aligned}
$$

Cvičení:

1. Na vektorovém prostoru $\mathbb{R}^{2,1}$ všech sloupcových aritmetických vektorů dimenze 2 je definován skalární součin jako v *příkladu 1 (podkapitoly 4.1)*. Vypočtěte součiny $(\mathbf{u},\mathbf{v})$, $(\mathbf{u},\mathbf{w})$, $(\mathbf{v},\mathbf{w})$, jestliže:

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1\\ 0\end{bmatrix},\ \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1/2\\ 1\end{bmatrix},\ \mathbf{w} = \begin{bmatrix} 0\\ 1\end{bmatrix}.$$

2. Nechť $\mathbb{R}^{2,1}$ označuje vektorový prostor z předešlé úlohy. Je vzorcem
$$(\mathbf{u},\mathbf{v}) = \mathbf{u}^T\mathbf{B}\mathbf{v}$$
definován skalární součin na $\mathbb{R}^{2,1}$, je-li
$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0, & 1 \\ 1, & 0 \end{bmatrix}?$$

3. Buď $\mathbb{R}^n$ aritmetický vektorový prostor dimenze n. Ukažte, že *euklidovský skalární součin*
$$(\mathbf{u},\mathbf{v})_2 = u_1v_1 + u_2v_2 + \cdots + u_nv_n$$
má vlastnosti (4.1) - (4.4).

4. Buď $\mathbb{R}^n$ opět aritmetický vektorový prostor dimenze n. Dokažte, že *euklidovská norma*
$$\|\mathbf{u}\|_2 = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + \cdots + u_n^2}$$
vyhovuje axiomům (4.5) - (4.7).

Výsledky:

1. $(\mathbf{u},\mathbf{v}) = 0$, $(\mathbf{u},\mathbf{w}) = -1$, $(\mathbf{v},\mathbf{w}) = \frac{3}{2}$.
2. Není, neplatí axiom (4.4).

4.2 Ortogonalita

Množina vektorů $\mathcal{X} = \{\mathbf{a}_1,\dots,\mathbf{a}_n\}$ vektorového prostoru $\mathcal{V}$ je *ortogonální,* právě když skalární součin $(\mathbf{a}_i,\mathbf{a}_j) = 0$, je-li $i \neq j$ $(i,j = 1,\dots,n)$. Množina vektorů $\mathcal{X} = \{\mathbf{a}_1,\dots,\mathbf{a}_n\}$ se nazývá *ortonormální,* právě když $(\mathbf{a}_i,\mathbf{a}_j) = 0$, je-li $i \neq j$ a navíc $(\mathbf{a}_i,\mathbf{a}_j) = 1$, je-li $i = j$ $(i,j = 1,\dots,n)$. *Ortogonální maticí* rozumíme matici $\mathbf{U}$, pro niž platí $\mathbf{U}^T = \mathbf{U}^{-1}$. Jinak řečeno
$$\mathbf{U}\mathbf{U}^T = \mathbf{I}.$$
To vlastně znamená, že řádky i sloupce ortogonální matice jsou tvořeny ortonormálními vektory.

Z každé báze $\mathcal{F} = (\mathbf{f}_1,\dots,\mathbf{f}_n)$ prostoru $\mathcal{V}$ můžeme sestavit ortogonální bázi $\mathcal{E} = (\mathbf{e}_1,\dots,\mathbf{e}_n)$ pomocí Schmidtova ortogonalizačního procesu:
$$\begin{aligned}
\mathbf{e}_1 &= \mathbf{f}_1, \\
\mathbf{e}_2 &= \mathbf{f}_2 - \alpha_{21}\mathbf{e}_1, \\
\mathbf{e}_3 &= \mathbf{f}_3 - \alpha_{31}\mathbf{e}_1 - \alpha_{32}\mathbf{e}_2, \\
&\vdots \\
\mathbf{e}_n &= \mathbf{f}_n - \alpha_{n1}\mathbf{e}_1 - \cdots - \alpha_{nn-1}\mathbf{e}_{n-1};
\end{aligned} \tag{4.9}$$
kde
$$\alpha_{ji} = \frac{(\mathbf{f}_j,\mathbf{e}_i)}{(\mathbf{e}_i,\mathbf{e}_i)},\ j = 2,\dots,n;\ i = 1,\dots,j-1.$$

Poznámka. Algoritmus Schmidtova procesu spočívá v tom, že vektor $\mathbf{f}_1$ bereme jako první vektor hledané ortogonální báze a potom každý následující vektor $\mathbf{f}_j$ “rozštěpíme” na dvě ortogonální složky: vektor $\mathbf{e}_j$ a “ortogonální průmět” $\mathbf{f}_j$ do podprostoru $\langle\mathbf{e}_1,\dots,\mathbf{e}_{j-1}\rangle$.

Příklad 1. Ortogonalizujte vektory $\mathbf{s}_1^{\mathbf{I}} = [1,0]^T$, $\mathbf{s}_2^{\mathbf{I}} = [0,1]^T$ vektorového prostoru $\mathbb{R}^{2,1}$ vzhledem ke skalárnímu součinu

$$(\mathbf{u},\mathbf{v}) \quad = \quad \mathbf{u}^T\mathbf{A}\mathbf{v},$$

kde

$$\mathbf{A} \quad = \quad \begin{bmatrix} 2, & -1 \\ -1, & 2 \end{bmatrix}.$$

Řešení: Vektory $\mathbf{s}_1^{\mathbf{I}}$, $\mathbf{s}_2^{\mathbf{I}}$ netvoří ortogonální bázi prostoru $\mathbb{R}^{2,1}$ vzhledem k danému skalárnímu součinu:

$$\begin{aligned} \left(\mathbf{s}_1^{\mathbf{I}},\mathbf{s}_2^{\mathbf{I}}\right) &= [1,0]\begin{bmatrix} 2, & -1 \\ -1, & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= [1,0]\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} \\ &= -1. \end{aligned}$$

Ortogonální vektory $\tilde{\mathbf{e}}_1$, $\tilde{\mathbf{e}}_2$ najdeme Schmidtovým algoritmem:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{e}}_1 &= \mathbf{s}_1^{\mathbf{I}}, \\ \alpha_{21} &= \frac{\left(\mathbf{s}_2^{\mathbf{I}},\tilde{\mathbf{e}}_1\right)}{\left(\tilde{\mathbf{e}}_1,\tilde{\mathbf{e}}_1\right)} \\ &= \frac{[0,1]\begin{bmatrix} 2, & -1 \\ -1, & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}}{[1,0]\begin{bmatrix} 2, & -1 \\ -1, & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}} \\ &= -\frac{1}{2}, \\ \tilde{\mathbf{e}}_2 &= \mathbf{s}_2^{\mathbf{I}} - \left(-\frac{1}{2}\right)\tilde{\mathbf{e}}_1 \\ &= \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Hledané ortogonální vektory jsou $\tilde{\mathbf{e}}_1 = [1,0]^T$ a $\tilde{\mathbf{e}}_2 = \left[\frac{1}{2},1\right]^T$.

Příklad 2. Z vektorů $\mathbf{a} = [1,0,1]$, $\mathbf{b} = [0,1,2]$, $\mathbf{c} = [2,1,0]$ sestavte ortonormální bázi prostoru $\mathbb{R}^3$ vzhledem k euklidovskému skalárnímu součinu.

Řešení: Nejdříve najdeme ortogonální bázi:

$\mathbf{e}_1 = \mathbf{a}$, $\mathbf{e}_1 = [1,0,1]$; $\alpha_{21} = \frac{(\mathbf{b},\mathbf{e}_1)_2}{(\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_1)_2} = \frac{0\cdot1+1\cdot0+2\cdot1}{1\cdot1+0\cdot0+1\cdot1} = 1$, $\mathbf{e}_2 = \mathbf{b} - \alpha_{21}\mathbf{e}_1 = [-1,\,1,\,1]$;

$\alpha_{31} = \frac{(\mathbf{c},\mathbf{e}_1)_2}{(\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_1)_2} = \frac{2}{2}$, $\alpha_{32} = \frac{(\mathbf{c},\mathbf{e}_2)_2}{(\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_2)_2} = -\frac{1}{3}$, $\mathbf{e}_3 = \mathbf{c} - \alpha_{31}\mathbf{e}_1 - \alpha_{32}\mathbf{e}_2 = \left[\frac{2}{3},\,\frac{4}{3},-\frac{2}{3}\right]$.

Vypočteme normy vektorů $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$:

$\|\mathbf{e}_1\|_2 = \sqrt{1^2+0^2+1^2}$, $\|\mathbf{e}_2\|_2 = \sqrt{(-1)^2+1^2+1^2}$, $\|\mathbf{e}_3\|_2 = \sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^2+\left(\frac{4}{3}\right)^2+\left(-\frac{2}{3}\right)^2}$.

Hledanou ortonormální bázi tvoří vektory:

$\mathbf{e}_1/\|\mathbf{e}_1\|_2 = \left[\frac{1}{\sqrt{2}},0,\frac{1}{\sqrt{2}}\right]$, $\mathbf{e}_2/\|\mathbf{e}_2\|_2 = \left[-\frac{1}{\sqrt{3}},\,\frac{1}{\sqrt{3}},\,\frac{1}{\sqrt{3}}\right]$, $\mathbf{e}_3/\|\mathbf{e}_3\|_2 = \left[\frac{1}{\sqrt{6}},\,\frac{2}{\sqrt{6}},-\frac{1}{\sqrt{6}}\right]$.

Příklad 3. Jsou polynomy $p_1(x) = 1$, $p_2(x) = x$, $p_3(x) = x^2$ ortogonální vzhledem ke skalárnímu součinu

$$(p, q) = \int_{-1}^{1} p(x) q(x) dx?$$

Pokud ne, ortogonalizujte je.

Řešení: Nejdříve se podíváme, zda-li dané polynomy nejsou náhodou ortogonální:

$(1, x) = \int_{-1}^{1} (1 \cdot x) dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$; p_1, p_2 jsou ortogonální;

$\left(1, x^2\right) = \int_{-1}^{1} \left(1 \cdot x^2\right) dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1} = \frac{1}{3} - \left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{2}{3} \neq 0$; p_1, p_3 nejsou ortogonální.

Přistoupíme k ortogonalizaci p_1, p_2, p_3. Stačí položit $e_1(x) = 1$, $e_2(x) = x$ a dopočítat $e_3(x)$:

$$e_3(x) = p_3(x) - \alpha_{31} e_1(x) - \alpha_{32} e_2(x),$$

kde

$$\alpha_{31} = \frac{(p_3, e_1)}{(e_1, e_1)} = \frac{\int_{-1}^{1} x^2 dx}{\int_{-1}^{1} 1 dx} = \frac{\frac{2}{3}}{2} = \frac{1}{3},\ \alpha_{32} = \frac{(p_3, e_2)}{(e_2, e_2)} = \frac{\int_{-1}^{1} x^3 dx}{\int_{-1}^{1} x^2 dx} = \frac{0}{\frac{2}{3}} = 0,$$

takže

$$e_3(x) = x^2 - \frac{1}{3}.$$

Získali jsme tak dokonce ortogonální bázi prostoru $\mathcal{P}_2$ všech polynomů stupně nejvýše 2 vzhledem k danému skalárnímu součinu:

$$\mathcal{P}_0 = \left(1,\, x,\, x^2 - \frac{1}{3}\right).$$

Cvičení:

1. Využijte ortogonality vektorů $\mathbf{x} = [1, 0, 1]$, $\mathbf{y} = [-1, 1, 1]$, $\mathbf{z} = \left[\frac{2}{3}, \frac{4}{3}, -\frac{2}{3}\right]$ vzhledem ke skalárnímu součinu $(\mathbf{x}, \mathbf{y})_2 = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3$ k nalezení souřadnic vektoru $\mathbf{u} = [5, 3, -1]$ v bázi $\mathcal{X} = (\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$.
2. Ortogonalizujte vektory $\mathbf{f}_1 = [2, 0, 0, 0]$, $\mathbf{f}_2 = [-1, 2, 4, 0]$ a $\mathbf{f}_3 = [0, 4, 6, 2]$ ve skalárním součinu $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = u_1 v_1 + 2u_2 v_2 + u_3 v_3 + 2u_4 v_4$.
3. Najděte ortogonální bázi vektorového prostoru $\mathcal{P}_2$ všech polynomů stupně nejvýše 2 vzhledem ke skalárnímu součinu $(p, q) = \int_0^1 p(x) q(x) dx$.
4. Ukažte, že platí: Je-li matice $\mathbf{A}$ ortogonální, pak také matice $\mathbf{A}^2$ je ortogonální.

Výsledky:

1. $[\mathbf{u}]_{\mathcal{X}} = [2, -1, 3]^T$; nápověda: $\mathbf{u} = \alpha_1 \mathbf{x} + \alpha_2 \mathbf{y} + \alpha_3 \mathbf{z} \Rightarrow \alpha_1 = \frac{(\mathbf{u}, \mathbf{x})_2}{(\mathbf{x}, \mathbf{x})_2}$, atd.
2. $\mathbf{e}_1 = [2, 0, 0, 0]$, $\mathbf{e}_2 = [0, 2, 4, 0]$, $\mathbf{e}_3 = \left[0, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, 2\right]$.
3. $e_1(x) = 1$, $e_2(x) = x - \frac{1}{2}$, $e_3(x) = x^2 - x + \frac{1}{6}$.
4. Musí platit $\left(\mathbf{A}^2\right)^T = \left(\mathbf{A}^2\right)^{-1}$.

Kapitola 5

Determinanty

Matice $\mathbf{A}_{ij}$, která vznikne z čtvercové matice $\mathbf{A} = [a_{ij}]_{n\times n}$ vynecháním *i-tého* řádku a *j-tého* sloupce, se nazývá *submatice* řádu $n-1$. *Determinantem* matice $\mathbf{A} = [a_{11}]$ nazýváme číslo $|\mathbf{A}| = a_{11}$. Je-li $n > 1$ a jsou-li definovány determinanty matic stupně menšího než n, rozumíme determinantem matice $\mathbf{A} = [a_{ij}]_{n\times n}$ číslo

$$|\mathbf{A}| \quad = \quad a_{11}\,|\mathbf{A}_{11}| - a_{12}\,|\mathbf{A}_{12}| + \cdots + (-1)^{1+n}\,a_{1n}\,|\mathbf{A}_{1n}|\,, \tag{5.1}$$

kde $|\mathbf{A}_{1j}|$ jsou determinanty submatic $\mathbf{A}_{1j}$ $(j = 1, \ldots, n)$. Determinant $|\mathbf{A}_{ij}|$ se nazývá také *minor (subdeterminant)* řádu $n-1$. Opatříme-li subdeterminant $|\mathbf{A}_{ij}|$ znaménkem $(-1)^{i+j}$, dostaneme *algebraický doplněk* $\mathbf{A}^{\star}_{ij}$ *prvku* a_{ij}; tedy $\mathbf{A}^{\star}_{ij} = (-1)^{i+j}\,|\mathbf{A}_{ij}|$. Vzorec (5.1) zapsaný pomocí doplňků má potom podobu

$$|\mathbf{A}| \quad = \quad a_{11}\mathbf{A}^{\star}_{11} + a_{12}\mathbf{A}^{\star}_{12} + \cdots + a_{1n}\mathbf{A}^{\star}_{1n}. \tag{5.2}$$

Determinant regulární matice je vždy nenulový. Inverzní matici k dané regulární matici $\mathbf{A}$ *můžeme pak určit pomocí algebraických doplňků:*

$$\mathbf{A}^{-1} \quad = \quad \frac{1}{|\mathbf{A}|}\begin{bmatrix} \mathbf{A}^{\star}_{11}, & \mathbf{A}^{\star}_{12}, & \ldots, & \mathbf{A}^{\star}_{1n} \\ \mathbf{A}^{\star}_{21}, & \mathbf{A}^{\star}_{22}, & \ldots, & \mathbf{A}^{\star}_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{A}^{\star}_{n1}, & \mathbf{A}^{\star}_{n2}, & \ldots, & \mathbf{A}^{\star}_{nn} \end{bmatrix}^T. \tag{5.3}$$

Matice na pravé straně vzorce je tzv. *adjungovaná matice.*

Řešení $[x_1, \ldots, x_n]$ *soustavy lineárních rovnic* $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ *se čtvercovou regulární maticí řádu* n *lze vypočítat pomocí determinantů (Cramerových vzorců):*

$$x_i \quad = \quad \frac{\left|\mathbf{A}_i^{\mathbf{b}}\right|}{|\mathbf{A}|}, \tag{5.4}$$

kde $\left|\mathbf{A}_i^{\mathbf{b}}\right|$ je determinant matice, jež vznikne z matice $\mathbf{A}$ tak, že v ní *i-tý* sloupec nahradíme *sloupcem pravých stran.*

Příklad 1. Ukažte, že matice

$$\mathbf{A} \quad = \quad \begin{bmatrix} 4, & 0, & 1 \\ 2, & 2, & 0 \\ 3, & 1, & 1 \end{bmatrix}$$

je regulární a najděte inverzní matici $\mathbf{A}^{-1}$.

Řešení: Podíváme se, je-li determinant matice $\mathbf{A}$ různý od nuly. K jeho výpočtu zvolíme rozvoj podle 1. řádku (vzorec (5.1)):

$$
\begin{aligned}
|\mathbf{A}| &= 4 \cdot \begin{vmatrix} 2, & 0 \\ 1, & 1 \end{vmatrix} - 0 \cdot \begin{vmatrix} 2, & 0 \\ 3, & 1 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 2, & 2 \\ 3, & 1 \end{vmatrix} \\
&= 4\,(2 \cdot 1 - 1 \cdot 0) - 0 + (2 \cdot 1 - 3 \cdot 2) \\
&= 4.
\end{aligned}
$$

Matice $\mathbf{A}$ má nenulový determinant, je tedy regulární a můžeme přistoupit k výpočtu inverzní matice pomocí vzorce (5.3):

$$
\begin{aligned}
\mathbf{A}^{-1} &= \frac{1}{|\mathbf{A}|} \begin{bmatrix} \mathbf{A}^\star_{11}, & \mathbf{A}^\star_{12}, & \mathbf{A}^\star_{13} \\ \mathbf{A}^\star_{21}, & \mathbf{A}^\star_{22}, & \mathbf{A}^\star_{23} \\ \mathbf{A}^\star_{31}, & \mathbf{A}^\star_{32}, & \mathbf{A}^\star_{33} \end{bmatrix}^T \\
&= \frac{1}{4} \begin{bmatrix} (-1)^2 \begin{vmatrix} 2, & 0 \\ 1, & 1 \end{vmatrix}, & (-1)^3 \begin{vmatrix} 2, & 0 \\ 3, & 1 \end{vmatrix}, & (-1)^4 \begin{vmatrix} 2, & 2 \\ 3, & 1 \end{vmatrix} \\ (-1)^3 \begin{vmatrix} 0, & 1 \\ 1, & 1 \end{vmatrix}, & (-1)^4 \begin{vmatrix} 4, & 1 \\ 3, & 1 \end{vmatrix}, & (-1)^5 \begin{vmatrix} 4, & 0 \\ 3, & 1 \end{vmatrix} \\ (-1)^4 \begin{vmatrix} 0, & 1 \\ 2, & 0 \end{vmatrix}, & (-1)^5 \begin{vmatrix} 4, & 1 \\ 2, & 0 \end{vmatrix}, & (-1)^6 \begin{vmatrix} 4, & 0 \\ 2, & 2 \end{vmatrix} \end{bmatrix}^T \\
&= \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 2, & -2, & -4 \\ 1, & 1, & -4 \\ -2, & 2, & 8 \end{bmatrix}^T \\
&= \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 2, & 1, & -2 \\ -2, & 1, & 2 \\ -4, & -4, & 8 \end{bmatrix}.
\end{aligned}
$$

Příklad 2. Určete neznámou x_2 ze soustavy rovnic

$$
\begin{array}{rcrcrcrcl}
x_1 & + & x_2 & - & 3x_3 & + & x_4 & = & 1 \\
2x_1 & + & x_2 & & & + & 2x_4 & = & 0 \\
 & & x_2 & - & 6x_3 & - & x_4 & = & 5 \\
3x_1 & + & x_2 & & & + & x_4 & = & 1.
\end{array}
$$

Řešení: Neznámou x_2 vypočteme užitím Cramerova vzorce, tj. v (5.4) položíme $i = 2$:

$$
\begin{aligned}
x_2 &= \frac{|\mathbf{A}_2^{\mathbf{b}}|}{|\mathbf{A}|} \\
&= \frac{\begin{vmatrix} 1, & 1, & -3, & 1 \\ 2, & 0, & 0, & 2 \\ 0, & 5, & -6, & -1 \\ 3, & 1, & 0, & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1, & 1, & -3, & 1 \\ 2, & 1, & 0, & 2 \\ 0, & 1, & -6, & -1 \\ 3, & 1, & 0, & 1 \end{vmatrix}}.
\end{aligned}
$$

Při výpočtu determinantů přejdeme k efektivnějším postupům než nabízí vzorce (5.1), resp. (5.2):

$$
\begin{aligned}
\begin{vmatrix} 1, & 1, & -3, & 1 \\ 2, & 1, & 0, & 2 \\ 0, & 1, & -6, & -1 \\ 3, & 1, & 0, & 1 \end{vmatrix}
\begin{matrix} \\ \\ -2r_1 \\ \\ \end{matrix}
&= \begin{vmatrix} 1, & 1, & -3, & 1 \\ 2, & 1, & 0, & 2 \\ -2, & -1, & 0, & -3 \\ 3, & 1, & 0, & 1 \end{vmatrix} \\
&= -3\,(-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 2, & 1, & 2 \\ -2, & -1, & -3 \\ 3, & 1, & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ +r_1 \\ \\ \end{matrix} \\
&= -3 \begin{vmatrix} 2, & 1, & 2 \\ 0, & 0, & -1 \\ 3, & 1, & 1 \end{vmatrix} \\
&= -3\,(-1)\,(-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 2, & 1 \\ 3, & 1 \end{vmatrix} \\
&= 3.
\end{aligned}
$$

Poznámka 1. Využili jsme, že přičtení násobku jednoho řádku k jinému nezmění hodnotu determinantu a že determinant můžeme vypočítat rozvojem podle libovolného řádku, resp. sloupce. V našem případě to byl *3. sloupec* a *2. řádek.*

$$
\begin{aligned}
\begin{vmatrix} 1, & 1, & -3, & 1 \\ 2, & 0, & 0, & 2 \\ 0, & 5, & -6, & -1 \\ 3, & 1, & 0, & 1 \end{vmatrix}
\begin{matrix} \\ -2r_1 \\ \\ -3r_1 \end{matrix}
&= \begin{vmatrix} 1, & 1, & -3, & 1 \\ 0, & -2, & 6, & 0 \\ 0, & 5, & -6, & -1 \\ 0, & -2, & 9, & -2 \end{vmatrix}
\begin{matrix} \\ \\ +\frac{5}{2}r_2 \\ -r_2 \end{matrix} \\
&= \begin{vmatrix} 1, & 1, & -3, & 1 \\ 0, & -2, & 6, & 0 \\ 0, & 0, & 9, & -1 \\ 0, & 0, & 3, & -2 \end{vmatrix}
\begin{matrix} \\ \\ \\ -\frac{1}{3}r_3 \end{matrix} \\
&= \begin{vmatrix} 1, & 1, & -3, & 1 \\ 0, & -2, & 6, & 0 \\ 0, & 0, & 9, & -1 \\ 0, & 0, & 0, & -\frac{5}{3} \end{vmatrix} \\
&= 30.
\end{aligned}
$$

Poznámka 2. Zde jsme přičtení násobku řádku k jinému prováděli tolikrát, až jsme obdrželi *horní trojúhelníkovou matici*, jejíž determinant je roven jednoduše součinu *diagonálních prvků.* Neznámá $x_2 = 10$.

Poznámka 3. Při výpočtu determinantu úpravou matice na horní trojúhelníkovou matici musíme dávat pozor, zda-li skutečně přičítáme násobek řádku k jinému řádku, nebo násobek řádku k násobku řádku. Pokud by například někdo při výpočtu předchozího determinantu při poslední úpravě odečetl *3. řádek od trojnásobku 4. řádku,* změnil by zrovna tak *trojnásobně* i hodnotu determinantu!

$$
\begin{aligned}
\begin{vmatrix} 1, & 1, & -3, & 1 \\ 0, & -2, & 6, & 0 \\ 0, & 0, & 9, & -1 \\ 0, & 0, & 3, & -2 \end{vmatrix}
\begin{matrix} \\ \\ \\ 3r_4 - r_3 \end{matrix}
&= \begin{vmatrix} 1, & 1, & -3, & 1 \\ 0, & -2, & 6, & 0 \\ 0, & 0, & 9, & -1 \\ 0, & 0, & 0, & -5 \end{vmatrix} \\
&= 90.
\end{aligned}
$$

V takovém případě nesmíme zapomenout vynásobit hodnotu determinantu odpovídající *reciprokou (převrácenou)* hodnotou násobku:

$$\begin{vmatrix} 1, & 1, & -3, & 1 \\ 0, & -2, & 6, & 0 \\ 0, & 0, & 9, & -1 \\ 0, & 0, & 3, & -2 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ 3r_4 - r_3 \end{matrix} = \frac{1}{3} \begin{vmatrix} 1, & 1, & -3, & 1 \\ 0, & -2, & 6, & 0 \\ 0, & 0, & 9, & -1 \\ 0, & 0, & 0, & -5 \end{vmatrix} = 30.$$

Cvičení:

1. Vypočtěte determinanty daných matic:

$$\text{a) } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5, & 2, & 1 \\ 1, & -1, & 4 \\ 3, & 0, & 2 \end{bmatrix}; \text{ b) } \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2, & 0, & -1, & 7 \\ 6, & 1, & 0, & 4 \\ 8, & -2, & 1, & 0 \\ 4, & 1, & 0, & 2 \end{bmatrix}; \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0, & 1, & 4 \\ 2, & 3, & 1 \\ 1, & 4, & 1 \end{bmatrix}.$$

2. Pro které hodnoty λ je matice

$$\begin{bmatrix} 1-\lambda, & 0, & 2 \\ 0, & 4-\lambda, & 3 \\ 0, & 4, & -\lambda \end{bmatrix}$$

singulární.

3. Pomocí adjungované matice najděte inverzní matice $\mathbf{A}^{-1}$, $\mathbf{B}^{-1}$, je-li

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2, & 1, & 1 \\ 0, & 1, & 1 \\ -2, & 1, & 1 \end{bmatrix}; \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 3, & 0, & 3 \\ 4, & 1, & -2 \\ -5, & 1, & 4 \end{bmatrix}.$$

Výsledky:

1. a) $|\mathbf{A}| = 13$; b) $|\mathbf{B}| = -14$; c) $|\mathbf{C}| = 19$.
2. $1, 6, -2$.
3. $\mathbf{A}$ je singulární; $\mathbf{B}^{-1} = \frac{1}{15}\begin{bmatrix} 2, & 1, & -1 \\ -2, & 9, & 6 \\ 3, & -1, & 1 \end{bmatrix}$.

Kapitola 6

Úvod do spektrální teorie

6.1 Vlastní čísla a vektory

Nenulový vektor $\mathbf{x} \in \mathcal{V}$ a číslo $\lambda \in \mathbb{C}$ se nazývají *vlastní vektor* a *vlastní číslo* lineární transformace $\mathcal{A} : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$, jestliže platí

$$\mathcal{A}(\mathbf{x}) \quad = \quad \lambda \mathbf{x}. \tag{6.1}$$

Je-li $\mathcal{E} = (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)$ uspořádaná báze vektorového prostoru $\mathcal{V}$ a $[\mathcal{A}]_{\mathcal{E}}$ matice lineární transformace $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(\mathcal{V})$ vzhledem k bázi $\mathcal{E}$, můžeme rovnici (6.1) přepsat na rovnici (viz (3.19))

$$[\mathcal{A}]_{\mathcal{E}} [\mathbf{x}]_{\mathcal{E}} \quad = \quad \lambda [\mathbf{x}]_{\mathcal{E}}, \tag{6.2}$$

kde $[\mathbf{x}]_{\mathcal{E}} = [x_1, \ldots, x_n]^T$ je souřadnicový vektor vektoru $\mathbf{x}$ v bázi $\mathcal{E}$. Úloha najít vlastní čísla a vektory lineární transformace se potom shoduje s úlohou najít vlastní čísla a vektory matice $\mathbf{A} = [a_{ik}]_{n \times n}$, tj. najít takový sloupcový vektor $\mathbf{x} \neq \mathbf{o}$ a takové číslo λ, aby platilo

$$\mathbf{A}\mathbf{x} \quad = \quad \lambda \mathbf{x}. \tag{6.3}$$

Rovnice (6.3) je ekvivalentní s rovnicí

$$(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})\, \mathbf{x} \quad = \quad \mathbf{o}, \tag{6.4}$$

což je soustava homogenních lineárních rovnic. Výraz $\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})$ nazýváme *charakteristickým polynomem* matice $\mathbf{A}$ a rovnice

$$|\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}| \quad = \quad 0 \tag{6.5}$$

se nazývá *charakteristická rovnice.*

V komplexním prostoru $\mathcal{V}$ má každé lineární zobrazení $\mathbf{A}$ alespoň jeden vlastní vektor.

Příklad 1. Najděte všechna vlastní čísla a vlastní vektory matice

$$\mathbf{A} \quad = \quad \begin{bmatrix} 1, & -3, & 3 \\ 0, & -5, & 6 \\ 0, & -3, & 4 \end{bmatrix}.$$

Řešení: Hledáme netriviální řešení soustavy (6.4). Z kapitoly věnované determinantům je zřejmé, že soustava (6.4) bude mít netriviální řešení právě tehdy, když matice soustavy bude singulární. V případě regulární matice by totiž soustava měla pouze jediné řešení a to právě triviální řešení.

Determinant singulární matice je roven vždy nule, vlastní čísla matice $\mathbf{A}$ jsou tedy nulové body charakteristického polynomu, tj. kořeny rovnice (6.5):

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} 1-\lambda, & -3, & 3 \\ 0, & -5-\lambda, & 6 \\ 0, & -3, & 4-\lambda \end{vmatrix} &= (1-\lambda)\begin{vmatrix} -5-\lambda, & 6 \\ -3, & 4-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (1-\lambda)\left(\lambda^2+\lambda-2\right) \\ &= (1-\lambda)(\lambda-1)(\lambda+2)\,.\end{aligned}$$

Vlastní čísla jsou $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = -2$. Nyní je dosadíme do soustavy (6.4) a vyhledáme k nim příslušné vlastní vektory.

$$\lambda_{1,2} = 1: \left[\begin{array}{rrr|r} 0, & -3, & 3 & 0 \\ 0, & -6, & 6 & 0 \\ 0, & -3, & 3 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{rrr|r} 0, & -3, & 3 & 0 \\ 0, & 0, & 0 & 0 \\ 0, & 0, & 0 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} x_1 = r \\ x_2 = s \\ x_3 = s \end{array},\ \mathbf{x} = r\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + s\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Parametry r, s jsou libovolná reálná čísla, která se nesmí současně rovnat nule. Vlastnímu číslu 1 odpovídá tedy nekonečně mnoho vlastních vektorů, které jsou lineární kombinací dvou lineárně nezávislých vektorů $\mathbf{x}_1 = [1,0,0]^T$ a $\mathbf{x}_2 = [0,1,1]^T$, přičemž každý z nich je vlastním vektorem matice $\mathbf{A}$, o čemž se přesvědčíme dosazením do (6.3):

$$\begin{bmatrix} 1, & -3, & 3 \\ 0, & -5, & 6 \\ 0, & -3, & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 1\cdot\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 1, & -3, & 3 \\ 0, & -5, & 6 \\ 0, & -3, & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 1\cdot\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

$$\lambda_3 = -2: \left[\begin{array}{rrr|r} 3, & -3, & 3 & 0 \\ 0, & -3, & 6 & 0 \\ 0, & -3, & 6 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{rrr|r} 3, & -3, & 3 & 0 \\ 0, & -3, & 6 & 0 \\ 0, & 0, & 0 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} y_1 = t \\ y_2 = 2t \\ y_3 = t \end{array},\ \mathbf{y} = t\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Parametr t je opět libovolné nenulové reálné číslo. Vlastnímu číslu -2 odpovídá opět nekonečně mnoho vlastních vektorů, které jsou nenulovými násobky vektoru $\mathbf{x}_3 = [1,2,1]^T$:

$$\begin{bmatrix} 1, & -3, & 3 \\ 0, & -5, & 6 \\ 0, & -3, & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -4 \\ -2 \end{bmatrix} = -2\cdot\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Matice $\mathbf{A}$ má tři lineárně nezávislé vlastní vektory $\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ a $\mathbf{x}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Příklad 2. Určete všechna vlastní čísla a vlastní vektory lineární transformace $\mathcal{A} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definované předpisem

$$\mathcal{A}([x_1,x_2,x_3]) = [2x_1 + x_2, -x_1 + x_3, x_1 + 3x_2 + x_3]\,.$$

Řešení: Nejprve sestavíme matici lineární transformace $\mathcal{A}$ ve standardní bázi $\mathcal{E}$ prostoru $\mathbb{R}^3$. To už jistě není pro nás žádný problém. Matici označíme $\mathbf{A}$ místo $[\mathcal{A}]_{\mathcal{E}}$. Platí

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2, & 1, & 0 \\ -1, & 0, & 1 \\ 1, & 3, & 1 \end{bmatrix}.$$

Vlastní čísla a vektory matice **A** najdeme jako v předešlém příkladě:

$$
\begin{aligned}
\begin{vmatrix} 2-\lambda, & 1, & 0 \\ -1, & -\lambda, & 1 \\ 1, & 3, & 1-\lambda \end{vmatrix} &= (2-\lambda)\begin{vmatrix} -\lambda, & 1 \\ 3, & 1-\lambda \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} -1, & 1 \\ 1, & 1-\lambda \end{vmatrix} \\
&= (2-\lambda)\left(\lambda^2-\lambda-3\right)-(\lambda-2) \\
&= (2-\lambda)\left(\lambda^2-\lambda-2\right) \\
&= (2-\lambda)(\lambda+1)(\lambda-2)\,.
\end{aligned}
$$

Charakteristický polynom má kořeny $\lambda_1=-1$, $\lambda_{2,3}=2$. Známe tak vlastní čísla lineární transformace a můžeme přistoupit k určení vlastních vektorů.

$$
\lambda_1=-1:\ \left[\begin{array}{ccc|c} 3, & 1, & 0 & 0 \\ -1, & 1, & 1 & 0 \\ 1, & 3, & 2 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} -1, & 1, & 1 & 0 \\ 0, & 4, & 3 & 0 \\ 0, & 4, & 3 & 0 \end{array}\right],\ \mathbf{x}=\begin{bmatrix} r \\ -3r \\ 4r \end{bmatrix}=r\begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 4 \end{bmatrix},\ r\neq 0.
$$

$$
\lambda_{2,3}=2:\ \left[\begin{array}{ccc|c} 0, & 1, & 0 & 0 \\ -1, & -2, & 1 & 0 \\ 1, & 3, & -1 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1, & 3, & -1 & 0 \\ 0, & 1, & 0 & 0 \\ 0, & 1, & 0 & 0 \end{array}\right],\ \mathbf{y}=\begin{bmatrix} s \\ 0 \\ s \end{bmatrix}=s\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},\ s\neq 0.
$$

Matice **A** má tentokrát dva lineárně nezávislé vlastní vektory $\mathbf{x}_1=\begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 4 \end{bmatrix}$ a $\mathbf{x}_2=\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Napíšeme-li vektory $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$ jako řádky, dostaneme vlastní vektory naší lineární transformace:

$\mathcal{A}\left([1,-3,4]\right)=[2\cdot 1+(-3), -1+4, 1+3(-3)+4]=[-1,3,-4]=-1\cdot[1,-3,4]$;

$\mathcal{A}\left([1,0,1]\right)=[2\cdot 1+0, -1+1, 1+3\cdot 0+1]=[2,0,2]=2\cdot[1,0,1]$.

Příklad 3. Nechť $\mathcal{V}$ je n-rozměrný vektorový prostor. Má-li lineární transformace $\mathcal{A}:\mathcal{V}\to\mathcal{V}$ n lineárně nezávislých vlastních vektorů, pak jejich volbou za bázi prostoru $\mathcal{V}$ převedeme matici zobrazení $\mathcal{A}$ na diagonální tvar. Dokažte.

Řešení: Budiž $\mathcal{X}=(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2,\ldots,\mathbf{x}_n)$ uspořádaná báze prostoru $\mathcal{V}$, kde $\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_n$ jsou vlastní vektory zobrazení $\mathcal{A}$. Sestavíme matici zobrazení $\mathcal{A}$ v bázi $\mathcal{X}$ *(podkapitola 3.2):*

$$
\begin{aligned}
[\mathcal{A}]_{\mathcal{X}} &= \begin{bmatrix} | & | & & | \\ [\mathcal{A}(\mathbf{x}_1)]_{\mathcal{X}} & [\mathcal{A}(\mathbf{x}_2)]_{\mathcal{X}} & \cdots & [\mathcal{A}(\mathbf{x}_n)]_{\mathcal{X}} \\ | & | & & | \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} | & | & & | \\ [\lambda_1\mathbf{x}_1]_{\mathcal{X}} & [\lambda_2\mathbf{x}_2]_{\mathcal{X}} & \cdots & [\lambda_n\mathbf{x}_n]_{\mathcal{X}} \\ | & | & & | \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \lambda_1, & 0, & \ldots, & 0 \\ 0, & \lambda_2, & \ldots, & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0, & 0, & \ldots, & \lambda_n \end{bmatrix}.
\end{aligned}
$$

Označme **A** matici našeho zobrazení vzhledem k nějaké jiné bázi prostoru $\mathcal{V}$, příslušnou matici přechodu **P** a položme $\mathbf{D}=[\mathcal{A}]_{\mathcal{X}}$. Vzorec (3.14), který vyjadřuje vztah mezi maticemi lineárního zobrazení v různých bázích, teď můžeme napsat ve tvaru

$$
\mathbf{D} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}, \tag{6.6}
$$

jež tak představuje transformaci matice lineárního zobrazení $\mathcal{A}$ na diagonální matici.

Poznámka. Vztah (3.14), resp. (6.6) se nazývá *podobnost matic*. Má-li tedy matice $\mathbf{A} = [a_{ij}]_{n\times n}$ n lineárně nezávislých vlastních vektorů, je podobná diagonální matici, která má na diagonále její vlastní čísla. Tak například matice $\mathbf{A}$ z *příkladu 1* této podkapitoly je podobná diagonální matici

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \mathbf{1}, & 0, & 0 \\ 0, & \mathbf{1}, & 0 \\ 0, & 0, & -\mathbf{2} \end{bmatrix}.$$

Matici přechodu $\mathbf{P}$ tvoří po sloupcích vlastní vektory matice $\mathbf{A}$ odpovídající vlastním číslům v tom pořadí, jak jsou napsána na diagonále. K ověření vztahu (6.6) nemusíme hledat matici $\mathbf{P}^{-1}$, stačí jednoduše ověřit $\mathbf{PD} = \mathbf{AP}$:

$$\begin{bmatrix} 1, & 0, & 1 \\ 0, & 1, & 2 \\ 0, & 1, & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1, & 0, & 0 \\ 0, & 1, & 0 \\ 0, & 0, & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1, & -3, & 3 \\ 0, & -5, & 6 \\ 0, & -3, & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1, & 0, & 1 \\ 0, & 1, & 2 \\ 0, & 1, & 1 \end{bmatrix};$$

$$\begin{bmatrix} 1, & 0, & -2 \\ 0, & 1, & -4 \\ 0, & 1, & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1, & 0, & -2 \\ 0, & 1, & -4 \\ 0, & 1, & -2 \end{bmatrix}.$$

Na druhé straně lineární zobrazení $\mathcal{A} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *(příklad 2 podkapitola 6.1)* má jen dva lineárně nezávislé vektory, a tudíž matici zobrazení nelze převést na diagonální matici.

Příklad 4. Ukažte, že platí toto tvrzení: Odpovídají-li vlastní vektory $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k$ matice $\mathbf{A}$ navzájem různým vlastním číslům $\lambda_1, \dots, \lambda_k$, jsou lineárně nezávislé.

Řešení: Nechť platí předpoklady našeho tvrzení. Nezávislost vlastních vektorů dokážeme matematickou indukcí:

1. Je-li $k = 1$, tvrzení platí. Vlastní vektor $\mathbf{x}_1$ je nenulový, a tedy lineárně nezávislý.

2. Nechť $k > 1$ a nechť vlastní vektory $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{k-1}$ jsou lineárně nezávislé. Ukážeme, že také vektory $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k$ jsou lineárně nezávislé. Kdyby tomu tak nebylo, vektor $\mathbf{x}_k$ by byl lineární kombinací vektorů $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{k-1}$, tj.

$$\mathbf{x}_k = \alpha_1 \mathbf{x}_1 + \cdots + \alpha_{k-1} \mathbf{x}_{k-1}. \tag{6.7}$$

Rovnici (6.7) vynásobíme nejprve maticí $\mathbf{A}$ a potom vlastním číslem λ_k. Dostaneme tak dvě nové rovnice:

$$\begin{aligned} \lambda_k \mathbf{x}_k &= \alpha_1 \lambda_1 \mathbf{x}_1 + \cdots + \alpha_{k-1} \lambda_{k-1} \mathbf{x}_{k-1}, \\ \lambda_k \mathbf{x}_k &= \alpha_1 \lambda_k \mathbf{x}_1 + \cdots + \alpha_{k-1} \lambda_k \mathbf{x}_{k-1}. \end{aligned}$$

Jejich odečtením pak nakonec získáme rovnici

$$\mathbf{o} = \alpha_1 (\lambda_1 - \lambda_k) \mathbf{x}_1 + \cdots + \alpha_{k-1} (\lambda_{k-1} - \lambda_k) \mathbf{x}_{k-1}. \tag{6.8}$$

Z rovnice (6.8) tak vyplývá, že vektory $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{k-1}$ jsou lineárně závislé, neboť všechny skaláry na pravé straně nemohou být nulové. Tím se ale dostáváme do sporu s indukčním předpokladem. Vektory $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k$ jsou tudíž lineárně nezávislé.

Cvičení:

1. Najděte charakteristiký polynom, vlastní čísla a vektory daných matic:

a) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1, & -2 \\ 4, & 5 \end{bmatrix}$; b) $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 8, & 0, & 0 \\ 7, & -1, & -2 \\ -7, & 0, & 1 \end{bmatrix}$; c) $\mathbf{C} = \begin{bmatrix} -2, & 0, & 0 \\ -5, & -2, & -5 \\ 5, & 0, & 3 \end{bmatrix}$.

2. Mějme matici

$$\mathbf{A} \quad = \quad \begin{bmatrix} 1, & -1, & -1 \\ -1, & 1, & -1 \\ -1, & -1, & 1 \end{bmatrix}$$

a vektory $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$. Rozhodněte, který z vektorů je vlastním vektorem matice $\mathbf{A}$.

3. Určete součet a součin vlastních čísel matice

$$\mathbf{B} \quad = \quad \begin{bmatrix} 2, & 0, & 0 \\ 1, & -1, & -2 \\ -1, & 0, & 1 \end{bmatrix}.$$

4. Najděte bázi prostoru $\mathbb{R}^2$, v níž je matice lineární transformace $\mathcal{A} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ diagonální, jestliže

$$\mathcal{A}([x_1, x_2]) \quad = \quad [x_1, x_1 + 2x_2].$$

5. Vypočtěte vlastní čísla a vektory matice $\mathbf{A}$, potom sestavte regulární matici $\mathbf{P}$ a diagonální matici $\mathbf{D}$ tak, aby platilo $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} = \mathbf{D}$, je-li

a) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -2, & 0, & -1 \\ 0, & 2, & 0 \\ 3, & 0, & 2 \end{bmatrix}$; b) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1, & 0, & 1 \\ -7, & 2, & 5 \\ 3, & 0, & 1 \end{bmatrix}$.

6. Nechť $\mathbf{A}$ je libovolná regulární matice. Dokažte, že platí: Je-li λ vlastním číslem matice $\mathbf{A}$, pak λ^{-1} je vlastním číslem matice $\mathbf{A}^{-1}$.

Výsledky:

1. a) Charakteristický polynom: $\lambda^2 - 4\lambda + 3$, vlastní čísla: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 3$,

   vlastní vektory: pro $\lambda_1 = 1 : \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} -r \\ r \end{bmatrix}$, $r \neq 0$, pro $\lambda_2 = 3 : \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -s \\ 2s \end{bmatrix}$, $s \neq 0$;

   b) charakteristický polynom: $-\lambda^3 + 8\lambda^2 + \lambda - 8$, vlastní čísla: $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = 8$,

   vlastní vektory: $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ r \\ 0 \end{bmatrix}$, $r \neq 0$, $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -s \\ s \end{bmatrix}$, $s \neq 0$, $\mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} -t \\ -t \\ t \end{bmatrix}$, $t \neq 0$;

   c) charakteristický polynom: $-\lambda^3 - \lambda^2 + 8\lambda + 12$, vlastní čísla: $\lambda_1 = \lambda_2 = -2$, $\lambda_3 = 3$,

   vlastní vektory: pro $\lambda_{1,2} = -2 : \mathbf{x} = \begin{bmatrix} -r \\ s \\ r \end{bmatrix}$, r a s se nesmí současně rovnat 0,

   pro $\lambda_3 = 3 : \mathbf{y} = \begin{bmatrix} 0 \\ -t \\ t \end{bmatrix}$, $t \neq 0$. Vhodnou volbou parametrů r, s, t získáme 3 lineárně nezávislé vlastní vektory: $\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{x}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

2. Vlastní vektory matice $\mathbf{A}$ jsou $\mathbf{v}_1$ a $\mathbf{v}_3$. Jim odpovídají vlastní čísla -1 a 2. Vektor $\mathbf{v}_2$ není vlastním vektorem matice $\mathbf{A}$. (Vlastní čísla a vektory nemusíme počítat!)

3. $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 2$, $\lambda_1\lambda_2\lambda_3 = -2$. (Vlastní čísla opět nemusíme počítat!)

4. Hledaná báze je například $\mathcal{X} = ([-1, 1], [0, 1])$.

5. a) Vlastní čísla: $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = 2$,

   vlastní vektory: $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} -r \\ 0 \\ r \end{bmatrix}$, $r \neq 0$, $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -s \\ 0 \\ 3s \end{bmatrix}$, $s \neq 0$, $\mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ t \\ 0 \end{bmatrix}$, $t \neq 0$,

   $\mathbf{P} = \begin{bmatrix} -1, & -1, & 0 \\ 0, & 0, & 1 \\ 1, & 3, & 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{D} = \begin{bmatrix} -1, & 0, & 0 \\ 0, & 1, & 0 \\ 0, & 0, & 2 \end{bmatrix}$;

   b) vlastní čísla: $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 2$,

   vlastní vektory: pro $\lambda_1 = -2 : \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} -r \\ -3r \\ r \end{bmatrix}$, $r \neq 0$, pro $\lambda_{2,3} = 2 : \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ s \\ 0 \end{bmatrix}$, $s \neq 0$.

   Matice má pouze 2 lineárně nezávislé vlastní vektory, regulární matici $\mathbf{P}$ nelze sestavit.

6.2 Spektrální rozklad symetrické matice.

Ke každé reálné symetrické matici $\mathbf{A}$ *existují ortogonální matice* $\mathbf{U}$ *a diagonální matice* $\mathbf{D}$ *tak, že*

$$\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{D}\mathbf{U}^T. \tag{6.9}$$

Sloupce $\mathbf{s}_i^{\mathbf{U}}$ matice $\mathbf{U}$ jsou ortonormální vlastní vektory matice $\mathbf{A}$ příslušné vlasním číslům λ_i uvedeným na diagonále matice $\mathbf{D}$. Vzorci (6.9) lze také dát podobu

$$\mathbf{D} = \mathbf{U}^T\mathbf{A}\mathbf{U}.$$

Mluvíme potom o *ortogonální diagonalizaci* reálné symetrické matice.

Příklad 1. Určete spektrální rozklad matice

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2, & -1 \\ -1, & 2 \end{bmatrix}.$$

Řešení: Matice $\mathbf{A}$ má vlastní čísla $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 3$, kterým odpovídají vlastní vektory

$$\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Vektory $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$ jsou ortogonální, ale nejsou ortonormální. Ortonormální vlastní vektory získáme normalizováním těchto vektorů:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{x}}_1 &= \mathbf{x}_1 / \|\mathbf{x}_1\|_2 \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}, \\ \tilde{\mathbf{x}}_2 &= \mathbf{x}_2 / \|\mathbf{x}_2\|_2 \\ &= \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Nyní můžeme sestavit ortogonální matici

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}, & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}}, & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1, & -1 \\ 1, & 1 \end{bmatrix}.$$

Snadno si ověříme, že $\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{D}\mathbf{U}^T$:

$$\begin{bmatrix} 2, & -1 \\ -1, & 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1, & -1 \\ 1, & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1, & 0 \\ 0, & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1, & 1 \\ -1, & 1 \end{bmatrix}.$$

Příklad 2. Najděte co nejmenší část $\mathcal{S}$ komlexní roviny $\mathbb{C}$, v níž se nachází všechna vlastní čísla matice

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1, & -1, & -1 \\ -1, & 1, & -1 \\ -1, & -1, & 1 \end{bmatrix}$$

a potom sestavte ortogonální matici $\mathbf{U}$ a diagonální matici $\mathbf{D}$ tak, aby platilo $\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{D}\mathbf{U}^T$.

Řešení: Lokalizaci spektra provedeme pomocí *Geršgorinovy věty.* Ježto $\mathbf{A}$ je reálná symetrická matice, platí $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} r_1 = |-1| + |-1| = 2 \quad &\Rightarrow \quad \mathcal{S}_1 = \{x \in \mathbb{R} : |x-1| \le 2\} = \langle -1, 3\rangle\,; \\ r_2 = |-1| + |-1| = 2 \quad &\Rightarrow \quad \mathcal{S}_2 = \{x \in \mathbb{R} : |x-1| \le 2\} = \langle -1, 3\rangle\,; \\ r_3 = |-1| + |-1| = 2 \quad &\Rightarrow \quad \mathcal{S}_3 = \{x \in \mathbb{R} : |x-1| \le 2\} = \langle -1, 3\rangle\,. \end{aligned}$$

Odtud máme $\mathcal{S} \subset \mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2 \cup \mathcal{S}_3 = \langle -1, 3\rangle$.

Nyní přistoupíme k výpočtu vlastních čísel a vektorů naší matice:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 1-\lambda, & -1, & -1 \\ -1, & 1-\lambda, & -1 \\ -1, & -1, & 1-\lambda \end{vmatrix} &= (1-\lambda) \begin{vmatrix} 1-\lambda, & -1 \\ -1, & 1-\lambda \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1, & -1 \\ -1, & 1-\lambda \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -1, & 1-\lambda \\ -1, & -1 \end{vmatrix} \\ &= (1-\lambda)\left(\lambda^2 - 2\lambda\right) + (\lambda - 2) - (2 - \lambda) \\ &= (1-\lambda)(\lambda-2)\lambda + 2(\lambda-2) \\ &= (\lambda-2)\left(-\lambda^2 + \lambda + 2\right) \\ &= -(\lambda+1)(\lambda-2)^2. \end{aligned}$$

Matice má vlastní čísla $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 2$. Všimněme si, že $-1, 2 \in \langle -1, 3\rangle$. Dostáváme tak diagonální matici

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} -1, & 0, & 0 \\ 0, & 2, & 0 \\ 0, & 0, & 2 \end{bmatrix}.$$

$$\lambda_1 = -1 : \left[\begin{array}{ccc|c} 2, & -1, & -1 & 0 \\ -1, & 2, & -1 & 0 \\ -1, & -1, & 2 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} -1, & 2, & -1 & 0 \\ 0, & 3, & -3 & 0 \\ 0, & -3, & 3 & 0 \end{array}\right], \ \mathbf{x} = \begin{bmatrix} r \\ r \\ r \end{bmatrix}, \ r \ne 0.$$

$$\lambda_{2,3} = 2 : \left[\begin{array}{ccc|c} -1, & -1, & -1 & 0 \\ -1, & -1, & -1 & 0 \\ -1, & -1, & -1 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} -1, & -1, & -1 & 0 \\ 0, & 0, & 0 & 0 \\ 0, & 0, & 0 & 0 \end{array}\right], \ \mathbf{y} = \begin{bmatrix} -s-t \\ s \\ t \end{bmatrix}, \ s^2 + t^2 > 0.$$

Vlastnímu číslu -1 přísluší jeden lineárně nezávislý vlastní vektor $\mathbf{x}_1 = [1,1,1]^T$. Vlastnímu číslu 2, které je dvojnásobným kořenem charakteristické rovnice, odpovídají dva lineárně nezávislé vlastní vektory $\mathbf{x}_2 = [-1,\,1,\,0]^T$ (klademe $s=1$, $t=0$) a $\mathbf{x}_3 = [-1,\,0,\,1]^T$ (volíme $s=0$, $t=1$). Pro sestavení ortogonální matice $\mathbf{U}$ musíme z vektorů $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$, $\mathbf{x}_3$ vytvořit Schmidtovým procesem ortonormální vektory $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$, $\mathbf{u}_3$, tj. ortonormální bázi prostoru $\mathbb{R}^{3,1}$. Vektory $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$ jsou ortogonální, neboť patří různým vlastním číslům, takže stačí položit:

$$\begin{aligned}\mathbf{u}_1 &= \mathbf{x}_1/\,||\mathbf{x}_1||_2\\ &= \left[\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right]^T;\\ \mathbf{u}_2 &= \mathbf{x}_2/\,||\mathbf{x}_2||_2\\ &= \left[-\frac{1}{\sqrt{2}},\,\frac{1}{\sqrt{2}},\,0\right]^T.\end{aligned}$$

Zbývá tak jenom určit vektor $\mathbf{u}_3$. To uděláme tak, že nejprve najdeme vektor $\tilde{\mathbf{x}}_3$, pro který platí $(\tilde{\mathbf{x}}_3,\mathbf{x}_1)_2 = 0$, $(\tilde{\mathbf{x}}_3,\mathbf{x}_2)_2 = 0$:

$$\tilde{\mathbf{x}}_3 = \mathbf{x}_3 - \alpha_{31}\mathbf{x}_1 - \alpha_{32}\mathbf{x}_2,\ \alpha_{31} = \tfrac{(\mathbf{x}_3,\mathbf{x}_1)_2}{(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_1)_2} = 0,\ \alpha_{32} = \tfrac{(\mathbf{x}_3,\mathbf{x}_2)_2}{(\mathbf{x}_2,\mathbf{x}_2)_2} = \tfrac{1}{2},\ \tilde{\mathbf{x}}_3 = \left[-\tfrac{1}{2},-\tfrac{1}{2},\,1\right]^T.$$

Položíme

$$\begin{aligned}\mathbf{u}_3 &= \tilde{\mathbf{x}}_3/\,||\tilde{\mathbf{x}}_3||_2\\ &= \left[-\frac{1}{\sqrt{6}},-\frac{1}{\sqrt{6}},\,\frac{2}{\sqrt{6}}\right]^T.\end{aligned}$$

Teď už můžeme sestavit i ortogonální matici a ověřit vztah (6.9):

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3}, & -1/\sqrt{2}, & -1/\sqrt{6}\\ 1/\sqrt{3}, & 1/\sqrt{2}, & -1/\sqrt{6}\\ 1/\sqrt{3}, & 0, & 2/\sqrt{6}\end{bmatrix};$$

$$\begin{bmatrix} 1, & -1, & -1\\ -1, & 1, & -1\\ -1, & -1, & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}}, & -\frac{1}{\sqrt{2}}, & -\frac{1}{\sqrt{6}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}}, & \frac{1}{\sqrt{2}}, & -\frac{1}{\sqrt{6}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}}, & 0, & \frac{2}{\sqrt{6}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1, & 0, & 0\\ 0, & 2, & 0\\ 0, & 0, & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}}, & \frac{1}{\sqrt{3}}, & \frac{1}{\sqrt{3}}\\ -\frac{1}{\sqrt{2}}, & \frac{1}{\sqrt{2}}, & 0\\ -\frac{1}{\sqrt{6}}, & -\frac{1}{\sqrt{6}}, & \frac{2}{\sqrt{6}}\end{bmatrix}.$$

Příklad 3. Buď $\mathbf{A}$ ortogonální matice řádu n a $\mathbb{R}^{n,1}$ aritmetický vektorový prostor všech sloupcových vektorů dimenze n. Ukažte, že lineární transformace $\mathcal{A}:\ \mathbb{R}^{n,1} \to \mathbb{R}^{n,1}$ definovaná pro každé $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^{n,1}$ předpisem

$$\mathcal{A}:\ \mathbb{R}^{n,1} \ni \mathbf{u} \quad\longmapsto\quad \mathbf{Au} \in \mathbb{R}^{n,1},$$

zachovává euklidovský skalární součin a normu, tj. $(\mathbf{u},\mathbf{v})_2 = (\mathbf{Au},\mathbf{Av})_2$ a $\|\mathbf{u}\|_2 = \|\mathbf{Au}\|_2$.

Řešení: Euklidovský skalární součin na vektorovém prostoru $\mathbb{R}^{n,1}$ můžeme vyjádřit vzorcem:

$$\begin{aligned}(\mathbf{u},\mathbf{v})_2 &= \mathbf{u}^T\mathbf{v}\\ &= u_1v_1 + u_2v_2 + \cdots + u_nv_n.\end{aligned}$$

Pro skalární součin vektorů $\mathbf{Au}$ a $\mathbf{Av}$ potom platí:

$$(\mathbf{Au},\mathbf{Av})_2 = (\mathbf{Au})^T(\mathbf{Av}) = \mathbf{u}^T\left(\mathbf{A}^T\mathbf{A}\right)\mathbf{v} = \mathbf{u}^T\mathbf{I}\mathbf{v} = \mathbf{u}^T\mathbf{v} = (\mathbf{u},\mathbf{v})_2.$$

Zachování normy už je jenom důsledkem, neboť euklidovskou normu lze definovat pomocí skalárního součinu:

$$\|\mathbf{u}\|_2 = \sqrt{(\mathbf{u},\mathbf{u})_2}.$$

Cvičení:

1. Určete spektrální rozklad matice
$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3, & 2 \\ 2, & 0 \end{bmatrix}$$
a využijte jej pak k výpočtu matic $\mathbf{A}^{-1}$ a $\mathbf{A}^3$.

2. Lokalizujte vlastní čísla matice $\mathbf{A}$ a pak ji transformujte na diagonální matici:
$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0, & 1, & 1 \\ 1, & 2, & 1 \\ 1, & 1, & 0 \end{bmatrix}.$$

3. Najděte ortogonální transformaci $\mathbf{x} = \mathbf{Pz}$ ($\mathbf{P}$ je ortogonální matice), jež převádí kvadratickou formu
$$Q(\mathbf{x}) = 2x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3$$
na lineární kombinaci čtverců.

4. Dokažte, že platí: Je-li matice $\mathbf{A}$ ortogonální, pak $\det(\mathbf{A}) = \pm 1$.

5. Existuje taková matice $\mathbf{A} = [a_{ik}]_{2\times 2}$, že $\det(\mathbf{A}) = 1$ a není ortogonální?

6. Budiž dán nenulový vektor $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^{n,1}$. Dokažte, že
$$\mathbf{P} = \mathbf{I} - \frac{2}{\|\mathbf{w}\|_2^2}\left(\mathbf{w}\mathbf{w}^T\right)$$
je ortogonální matice.

Výsledky:

1. $\mathbf{D} = \begin{bmatrix} -1, & 0 \\ 0, & 4 \end{bmatrix}$, $\mathbf{U} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix} -1, & 2 \\ 2, & 1 \end{bmatrix}$; platí:
$$\begin{aligned} \mathbf{A}^{-1} &= \mathbf{U}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{U}^T \\ &= \frac{1}{5}\begin{bmatrix} -1, & 2 \\ 2, & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1, & 0 \\ 0, & \frac{1}{4} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1, & 2 \\ 2, & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0, & 1/2 \\ 1/2, & -3/4 \end{bmatrix}; \\ \mathbf{A}^3 &= \mathbf{U}\mathbf{D}^3\mathbf{U}^T \\ &= \frac{1}{5}\begin{bmatrix} -1, & 2 \\ 2, & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1, & 0 \\ 0, & 64 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1, & 2 \\ 2, & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 51, & 26 \\ 26, & 12 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

2. Všechna vlastní čísla matice patří do množiny $\mathcal{S} \subset \langle -2, 4 \rangle$.
$$\begin{aligned} \mathbf{D} &= \mathbf{U}^T\mathbf{A}\mathbf{U} \\ &= \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}}, & 0, & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}}, & -\frac{1}{\sqrt{3}}, & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}}, & \frac{2}{\sqrt{6}}, & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0, & 1, & 1 \\ 1, & 2, & 1 \\ 1, & 1, & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}}, & \frac{1}{\sqrt{3}}, & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0, & -\frac{1}{\sqrt{3}}, & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}}, & \frac{1}{\sqrt{3}}, & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -1, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 3 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

3. $\mathbf{P} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -\sqrt{2}, & 0, & \sqrt{2} \\ 1, & -\sqrt{2}, & 1 \\ 1, & \sqrt{2}, & 1 \end{bmatrix}$, tj. $\mathbf{x} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -\sqrt{2}, & 0, & \sqrt{2} \\ 1, & -\sqrt{2}, & 1 \\ 1, & \sqrt{2}, & 1 \end{bmatrix}\mathbf{z}$, respektive

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{2}\left(-\sqrt{2}z_1 + \sqrt{2}z_3\right), \\ x_2 &= \frac{1}{2}\left(z_1 - \sqrt{2}z_2 + z_3\right), \\ x_3 &= \frac{1}{2}\left(z_1 + \sqrt{2}z_2 + z_3\right). \end{aligned}$$

Návod: určete spektrální rozklad $\mathbf{A} = \mathbf{PDP}^T$ matice kvadratické formy:

$$Q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x} = (\mathbf{Pz})^T \mathbf{A}(\mathbf{Pz}) = \mathbf{z}^T\left(\mathbf{P}^T\mathbf{AP}\right)\mathbf{z} = \mathbf{z}^T\mathbf{D}\mathbf{z} = \left(2-\sqrt{2}\right)z_1^2 + 2z_2^2 + \left(2+\sqrt{2}\right)z_3^2.$$

4. Využijte: $\det\left(\mathbf{A}^T\right) = \det(\mathbf{A})$, $\det(\mathbf{AB}) = \det(\mathbf{A})\det(\mathbf{B})$.

5. Například

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2, & 1 \\ 1, & 1 \end{bmatrix}.$$

6. Využijte, že $||\mathbf{w}||_2^2 = \mathbf{w}^T\mathbf{w}$.