

PROSTOROVÉ ANALÝZY DAT

prof. Dr. Ing. Jiří Horák

VŠB-TU Ostrava, HGF, Katedra geoinformatiky, 2022

Obsah:

1	Prostorové analýzy - vymezení, rozdělení.....	6
1.1	Definice prostorových analýz.....	6
1.2	Historie prostorových analýz.....	7
1.3	Cíle prostorových analýz.....	8
1.4	Typy používaných metod.....	9
1.4.1	Rozdělení metod podle využitých postupů.....	9
1.4.2	Rozdělení podle typu prostorové reprezentace.....	10
1.4.3	Statistické prostorové analýzy (s.s.).....	10
1.4.3.1	Tři základní typy prostorové distribuce.....	10
2	Typy dat a vztah k prostorovým analýzám.....	12
2.1	Grafické atributy.....	12
2.2	Popisné atributy.....	13
3	Kruhová (cirkulární) statistika.....	15
3.1	Popisná statistika.....	17
3.1.1	Směrový průměr.....	18
3.1.2	Další kruhové statistiky.....	19
3.1.3	Vizualizace dat jako součást EDA.....	20
3.2	Statistická rozdělení pro cirkulární data (Cirkulární pravděpodobnostní modely).....	21
3.2.1	Rovnoměrné rozdělení pro cirkulární data.....	21
3.2.2	Von Misesovo rozdělení.....	21
3.3	Inferenční statistické testy pro kruhová data.....	22
3.3.1	Testy rovnoměrnosti.....	22
3.3.2	Testy rovnoměrnosti pro seskupená data.....	23
3.3.3	Jednovýběrový test pro směrový průměr.....	25
3.3.4	Dvouvýběrové testy pro směrový průměr.....	26
3.4	Implementace v SW.....	29
3.5	Sférické pravděpodobnostní rozdělení.....	29
4	Teoretické modely distribuce bodů.....	30
4.1	Modely náhodné distribuce.....	30
4.1.1	CSR - homogenní Poissonův proces.....	30
4.1.2	Heterogenní Poissonův proces.....	31
4.1.3	Coxův proces.....	31
4.2	Modely shlukové distribuce.....	31
4.2.1	Poissonův shlukovací proces.....	31
4.3	Modely pravidelné distribuce.....	33
4.3.1	Sekvenční inhibiční proces.....	33
4.3.2	Straussův proces.....	33
4.4	Univerzální modely.....	34
4.4.1	Markovovy bodové procesy.....	34
4.5	Srovnání jiných modelů než CSR s prostorovým bodovým procesem.....	35
5	Popisná statistika pro body.....	36
5.1	Charakteristiky střední polohy.....	36
5.1.1	Průměrný střed (<i>mean centre</i>).....	36
5.1.2	Vážený průměrný střed (<i>weighted mean centre</i>).....	37
5.1.3	Mediánový střed.....	37
5.1.4	Geometrický střed (<i>geometric mean</i>).....	39
5.1.5	Harmonický střed (<i>harmonic mean</i>).....	39
5.1.6	Směrový střed (<i>mean angle</i>).....	39
5.1.7	Trojúhelníkový střed (<i>triangulated mean</i>).....	40
5.2	Charakteristiky rozptýlení.....	41
5.2.1	Směrodatná vzdálenost (<i>standard distance</i>).....	41
5.2.2	Koeficient relativního rozptýlení (<i>coefficient of relative dispersion</i>).....	41
5.2.3	Elipsa standardizované odchylky (<i>standard deviation ellipse</i>).....	42

6	Inferenční statistické testy pro body.....	44
6.1	Kvadrantové testy náhodnosti	44
6.1.1	Index disperze VMR.....	46
6.1.1.1	X^2 test pro index disperze.....	47
6.1.1.2	T-test pro index disperze	47
6.1.1.3	Klasický X^2 test	47
6.1.2	Problémy při kvadrantových metodách.....	48
6.2	Metoda nejbližších vzdáleností	48
6.2.1	Graf závislosti $G'(w)$ na $F'(x)$	50
6.2.2	Graf závislosti $G'(w)$ na W a graf závislosti $F'(x)$ na X	50
6.2.3	Test NNI.....	51
6.2.4	Rozšíření NNI pro k -nejbližších sousedů.....	53
6.2.5	Lineární NNI	54
6.3	K funkce	54
6.3.1	Definice K-funkce	55
6.3.2	Vyhodnocení K-funkce	55
6.4	Pokročilé funkce pro hodnocení distribuce bodů	58
6.4.1	Kd funkce	59
6.4.2	M funkce.....	59
6.4.3	W funkce	60
7	Inferenční statistické metody pro vícenásobné typy událostí a časoprostorová data	62
7.1	Analýza více typů událostí	62
7.1.1	Kvadrantová metoda s χ^2 testem	62
7.1.2	Metoda nejbližších vzdáleností	63
7.1.3	K funkce	63
7.2	Časoprostorové analýzy.....	65
7.2.1	Popisné časoprostorové analýzy	65
7.2.2	Inferenční časoprostorové analýzy	65
7.2.3	χ^2 test.....	65
7.2.4	Knoxův test.....	66
7.2.5	Mantelův test	66
7.2.6	Časoprostorová K funkce	67
7.2.7	D funkce	69
7.2.8	Prostor-čas-atributový analytický stroj.....	70
7.2.9	Problematika časové proměnlivosti procesu	70
8	Transformace bodové textury do kontinuálního pole.....	71
8.1	Kvadrantová metoda.....	71
8.2	Jádrové vyhlazení	72
8.2.1	Problémy u jádrového odhadu.....	77
8.2.2	Jádrové odhady na linii.....	78
9	Linie.....	79
9.1	Základy teorie grafů	80
9.1.1	Základní operace v grafu	84
10	Popisná statistika sítí	88
10.1	Lokální statistiky centrality	88
10.1.1	Stupeň uzlu (degree centrality), nodalita uzlu (nodality)	88
10.1.2	Relativní stupeň uzlu	89
10.1.3	Centralita z excentricity uzlu (Eccentricity Centrality).....	90
10.1.4	Centralita měřená blízkostí středu (Closeness centrality)	90
10.1.5	Centralita měřená středovou mezípolohou (Betweenness centrality)	90
10.1.6	Centralita z vektoru vlastních hodnot (Eigenvector centrality).....	92
10.1.7	Stránkové hodnocení (Page Rank)	93
10.2	Ostatní lokální statistiky	95
10.2.1	Kosinová podobnost (cosine similarity)	96
10.2.2	Lokální reciprocita (local reciprocity).....	96

10.2.3	Shlukovací koeficient (lokální)	97
10.3	Globální statistiky	98
10.3.1	Průměrný stupeň grafu (průměrná nodalita).....	98
10.3.2	Průměr grafu	99
10.3.3	Globální centralita	99
10.3.4	Dosah centrality	100
10.3.5	Průměrná vzdálenost v grafu	100
10.3.6	Harmonická střední vzdálenost grafu (harmonic mean distance).....	100
10.3.7	Tranzitivita – shlukovací koeficient	100
10.3.8	Globální reciprocita (Reciprocity).....	101
10.3.9	Gama index.....	101
10.3.10	Alfa index	101
10.3.11	Kompletnost grafu	101
11	Teoretické modely sítí	102
11.1	Pravidelný graf	102
11.2	Náhodné grafy	103
11.3	Model malého světa.....	105
11.3.1	Model Watts-Strogatz (WS).....	106
11.3.2	Model Watts-Newman.....	107
11.4	Mocninný model.....	107
12	Optimalizační algoritmy a metody v sítích.....	109
12.1	Hledání nejkratší cesty	113
12.1.1	Dantzigův algoritmus	114
12.1.2	Floydův algoritmus.....	115
12.1.3	Dijkstrův algoritmus.....	117
12.1.4	A* algoritmus	119
12.1.5	Rozšíření hledání nejkratší cesty	119
12.2	Nejlevnější kostra grafu.....	119
12.2.1	Základní algoritmus pro nalezení nejlevnější kostry	120
12.2.2	Hladový algoritmus (Kruskalův žravý)	120
12.2.3	Borůvkův algoritmus	120
12.2.4	Jarníkův-Primův algoritmus	121
12.3	Gabrielova síť.....	122
12.4	Steinerův strom.....	124
12.5	Eulerova cesta a Eulerova kružnice.....	125
12.6	Úloha obchodního cestujícího	125
12.6.1	Trasování vozidel s kapacitou (Capacitated vehicle routing).....	129
12.7	Problém optimalizace procházení celou sítí (ARP).....	131
13	Metody hodnocení dopravní dostupnosti	132
13.1	Skupina infrastrukturních ukazatelů	133
13.1.1	Dostupnost zastávek VHD	133
13.1.2	Počet spojů VHD.....	134
13.2	Skupina kumulativních ukazatelů.....	134
13.2.1	Míra přímé dostupnosti euklidovské	134
13.2.2	Míra cestní dostupnosti.....	134
13.2.3	Časové míry dostupnosti	135
13.2.4	Přímá topologická dostupnost	135
13.2.5	Nepřímá topologická dostupnost	135
13.2.6	Cenové míry dostupnosti.....	136
13.2.7	Počet cílů	136
13.3	Skupina ukazatelů s využitím gravitačního modelování	139
14	Lokalizační a alokační úlohy.....	140
14.1.1	Rozšíření základních modelů	143
15	Využití gravitační teorie.....	145
15.1	Základní model.....	145

15.2	Oboustranně omezený gravitační model	146
15.3	Jiné gravitační modely a aplikace.....	147
16	Popisná statistika pro polygony	148
16.1	Sousedství polygonů.....	149
16.2	Hodnocení vývoje hodnot pro polygony	150
16.2.1	Smans-Esteve ukazatele	150
16.2.2	Globální míry autokorelace	151
16.2.3	Lokální míra prostorové asociace.....	153
17	Multivariační analýzy v prostorových aplikacích	155
17.1	Shluková analýza.....	155
17.1.1	Míry blízkosti či separace.....	155
17.1.2	Proces shlukování.....	157
17.1.3	Hierarchické shlukovací postupy	157
17.1.3.1	Prostorové hierarchické shlukování.....	159
17.1.4	Nehierarchické shlukovací metody.....	161
17.1.4.1	Metoda nejbližších těžišť K-means	161
17.2	Analýza hlavních komponent	162
17.3	Faktorová analýza.....	165
17.4	Diskriminační analýza	166
18	Regresní modely.....	168
18.1	Neprostorový regresní model	168
18.2	Regresní modely s explicitním geografickým faktorem.....	170
18.3	Prostorový regresní model.....	171
18.3.1	Prostorový autoregresní model.....	172
18.3.2	Geograficky vážená regrese	175
18.3.3	Generalizované lineární modely	177
19	Seznam literatury.....	179

1 Prostorové analýzy - vymezení, rozdělení

1.1 Definice prostorových analýz

Většina informací, se kterými se setkáváme a které využíváme, má prostorový charakter. Jistým způsobem je vázána k určitému místu a reprezentuje ho. Toto místo je třeba chápat v širším slova smyslu - může to být bod, sada bodů, linie, sada (svazek) linií, areál nebo buňka pravidelného rastru. V této souvislosti pak hovoříme o **geoinformacích**. Formalizací informace získáváme data, obdobně formalizací geoinformace získáváme **geodata** (resp. prostorová data). Analogicky bychom mohli specifikovat chápání prostorových analýz jako analýzu prostorových dat, to však není správné, protože ne každá analýza prostorových dat je prostorovou analýzou - pokud např. vytvoříme histogram úplné sady prostorových dat či vypočítáme jejich základní statistické charakteristiky, nevyužili jsme prostorový aspekt těchto dat a nejde tedy o prostorovou analýzu.

Prostorové analýzy představují kolekci technik, které vznikly v různých oborech a jejichž cílem byla analýza dat s důrazem na jejich prostorové vztahy. Významné postavení mezi těmito obory zaujímá statistika, ale řada postupů byla odvozena v geografii, geostatistice, ekonometrii, epidemiologii, v územním plánování a urbanizmu. Tyto postupy jsou používány v ještě širší škále aplikací včetně např. zdravotnictví a kriminalistiky.

Prostorové analýzy můžeme definovat následovně: **Prostorové analýzy jsou souborem technik pro analýzu a modelování lokalizovaných objektů, kde výsledky analýz závisí na prostorovém uspořádání těchto objektů a jejich vlastností.**

Objektem pro tento účel rozumíme geografické objekty a jiné objekty s prostorovou lokalizací (např. hvězdy nebo útvary v obraze), ať již fyzické nebo abstraktní povahy, velmi často i události a jevy.

Vymezení pojmu prostorové analýzy nebylo dříve tak univerzálně chápáno a často se vztahovalo jen k určité oblasti aplikací či použitých postupů. Jako příklad můžeme uvést několik starších definic:

Unwin (1981): „Prostorové analýzy se zabývají uspořádáním prostorových dat na mapách (tedy bodů, linií, ploch, povrchů).“

Johnston, Gregory, Smith (1994): „Prostorové analýzy jsou kvantitativní (hlavně statistické) procedury a techniky aplikované v lokalizačních (umístovacích) úlohách.“

Goodchild (1988): „Prostorové analýzy jsou techniky umožňující popis uspořádání na mapách a srovnání 2 a více map s cílem identifikace jejich vztahů.“

*Někteří autoři chápou termín „prostorové analýzy“ jako synonymum pojmu **kvantitativní geografie**, část z nich pak tento pojem uplatňuje jen pro tu část prostorových analýz, která využívá stochastické povahy jevů.*

Bez ohledu na konkrétní vyjádření je zjevné, že prostorové analýzy představují sadu analytických metod, vyžadujících přístup k atributům studovaných objektů i k informaci o jejich lokalizaci. Na rozdíl od jiných forem analýz tedy vyžadují prostorové analýzy atributová data i geografickou lokalizaci objektů.

Prostorové analýzy dat jsou spjaty se studiem uspořádání prostorových dat. Zvláště se zabývají vyhledáváním nových vztahů mezi uspořádáním a atributy objektů nebo geoprvky ve studované oblasti a s modelováním těchto vztahů s cílem dosáhnout jejich lepšího porozumění a předpovídání vývoje v oblasti.

Pozorované uspořádání objektů či jevů je možné označit za **texturu** (*pattern*), což je vhodnější než používání pojmu vzor nebo vzorek, které mají zavádějící homonyma (vzor jako něco co je vhodné následovat, vzorek (*example*) jako výběr jistých zástupců pro sledování celkových charakteristik).

Prostorové analýzy řeší řadu rozdílných prostorových problémů - od korekce obrazu a rozpoznání textury obrazu, přes interpolaci ovzorkovaného surovinového ložiska, průzkum prostorových a časoprostorových shluků nehod, modelování socioekonomických trendů až po studium migrace zvířat

a lidí. Díky svému rozmanitému zaměření postrádají prostorové analýzy jasný systém kodifikace nebo ucelený koncepční či teoretický rámec.

Při úvahách o členění prostorových analýz musíme zohlednit i způsob organizace dat, protože některé funkce je možné aplikovat jen pro jistý typ dat.

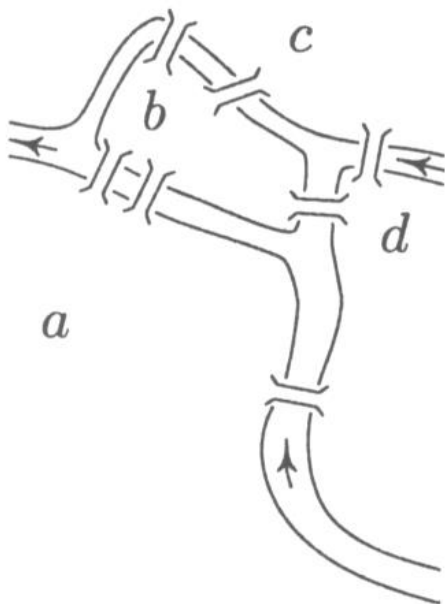
1.2 Historie prostorových analýz

Jak již bylo uvedeno, historie prostorových analýz je spojena s celou řadou oborů.

Snad nejstarší kořeny mají lokalizační úlohy (hledající optimální umístění), kde již v roce 1629 formuloval Fermat úlohu nalezení bodu s minimálním součtem vzdáleností od daných 3 bodů, avšak teprve v roce 1746 ji vyřešil Torricelli. V roce 1837 úlohu zobecnil Steiner pro n -bodů a v roce 1909 umožnil Weber používat různé váhy bodů v úloze (různá atraktivita bodů) a popsal její ekonomickou interpretaci.

Jeden z prvních dokladů geografické aplikace prostorových analýz je analýza Halleye. Halley již v roce 1686 zobrazil na podkladové mapě území směry větrů a monzuny v blízkosti tropického pásma a snažil se najít jejich fyzikální příčinu.

V oblasti teorie grafů již roku 1736 řešil německý matematik Euler tzv. úlohu 7 mostů (mosty v městě Kaliningrad). Úloha má za cíl nalézt takovou trasu, která obsahuje všechny hrany (tj. mosty) právě jednou a která začíná a končí ve stejném místě. V roce 1859 pak Hamilton řešil tzv. problém obchodního cestujícího, kdy je nutné navštívit všechny uzly v systému (vybranou sadu míst) a minimalizovat procestovanou trasu.



Obr. 1-1 Mosty ve městě Kaliningrad

Řada metod byla odvozena v epidemiologii, kde první uváděnou analýzou je studie doktora Snowa z roku 1854 o způsobu přenosu cholery ve vztahu ke změnám v pozorované mortalitě v Londýně. Společně zobrazil umístění studní, výskyt nemoci a úmrtí a síť ulic a snažil se najít vztah mezi nimi (obr. 1-2). Jednou z ranných geografických analýz je i použití geografické analýzy k prokázání vztahu mezi nedostatkem slunečního záření a výskytem křivice, kterou prováděl Palm v roce 1890.



Obr. 1-2 Mapa Dr. Snowa - úmrtí na cholera (tečky) a výskyt studní (křížky, nakažená studna v centru obrázku), londýnská čtvrt Soho 1854 (Goodchild, Janelle 2004)

Mezi prostorové analýzy je možné zařadit i využití kvadrantové metody, kdy v roce 1907 Student pomocí ní sledoval distribuci částic v kapalině a zjistil, že počet částic v kvadrantu odpovídá Poissonově distribuci.

Velmi významný metodický přínos také představuje oblast geostatistiky, jejíž základy formuloval Matheron v letech 1962 a 1963 s aplikací poznatků z ložiskové geologie, výpočtu zásob ložisek rud, matematiky a statistiky.

1.3 Cíle prostorových analýz

Cíle prostorových analýz se opět značně liší podle oblasti aplikací a je obtížné nalézt univerzální rozdělení. Řada autorů se pouze omezuje na výčet cílů, které reprezentují oblast zájmu pro danou aplikaci. Jako příklad může posloužit **výběr cílů síťových úloh** dle Laurini, Thompson (1994):

- 1) Najděte všechny možné trasy pro nákladní automobil v silniční síti mezi počátkem a cílem cesty.
- 2) Najděte místo, kde je "služba" přerušena díky přerušení nebo špatné funkci sítě.
- 3) Najděte takovou trasu, na které se nachází nejvíce zákazníků.
- 4) Najděte nejbližší elektrickou rozvodnu nebo telefonní ústřednu pro nového zákazníka.
- 5) Umístěte nový servis v dálniční síti (typická lokalizační úloha).
- 6) Rozmístěte děti do nejbližších škol na základě dopravního času při cestování ulicemi (typická alokační úloha)

Při obecnějším vymezení cílů prostorových analýz můžeme rozlišit následující cíle:

- 1) Popis objektů resp. událostí ve sledovaném prostoru (včetně popisu jejich uspořádání - tj. textury). Zahnuje odvození statistických charakteristik pozorované textury geoprvků (bodů, linií či areálů) a jejich srovnání; dále testování, zda je pozorovaná distribuce významně odlišná od určité hypotetické textury (což je významné pro následující interpretaci procesů); zkoušení

prostorových vztahů a vazeb mezi entitami, ale i běžný popis vývoje pole např. výpočet hodnoty v neznámých místech (interpolace).

Zajímá nás, proč jsou určité fenomény více seskupeny v některých místech, zda to není jen vliv náhody, jak lze porovnat texturu v různých oblastech, jak lze takový rozdíl kvantifikovat, zda dochází ke změnám v čase.

- 2) Výběr určitého místa na základě splnění jisté sady podmínek (či obecněji podle jistého rozhodovacího schématu) nebo zkoumání míry splnění daných podmínek v určitém místě nebo území.
- 3) Interpretace procesů, které vedly k pozorovanému stavu uspořádání objektů či událostí ve sledovaném prostoru (systematický průzkum), např. interpretace vzniku pozorovaného uspořádání bodů, vysvětlení vývoje území v čase (jak střední hodnoty tak variability).
- 4) Optimalizace uspořádání objektů/jevů ve sledovaném prostoru např. na lokalizační a alokační úlohy, volba způsobu distribuce toků (rozmístění dětí do škol, zboží), ale také např. návrh vhodného systému vzorkování.
- 5) Zlepšení schopnosti předpovídat a kontrolovat objekty či události ve sledovaném prostoru (využití prediktivních modelů).
- 6) Redukce původního množství dat do menší, úspornější a přehlednější sady dat. Provádíme např. generalizaci původních dat pro lepší popis sledovaného jevu nebo jen za účelem snadnější manipulace. Pro řadu praktických úloh je důležité zajistit jednoduchost řešení (Okamova břitva).

Uvedený přehled cílů prostorových analýz jistě není a ani nemůže být úplný, protože s rozvojem geoinformačních technologií se nacházejí nové formy uplatnění prostorových analýz a s tím i nové cíle.

1.4 Typy používaných metod

K rozdělení metod prostorové analýzy je možné přistoupit z různých hledisek, např. z hlediska využitých postupů, způsobu zpracování, úrovně zpracování, počtu současně studovaných jevů či podle typu reprezentace prostorových objektů či jevů. Významnou skupinu tvoří statistické prostorové analýzy (s.s.).

1.4.1 Rozdělení metod podle využitých postupů

Rozdělení má zjevnou úzkou vazbu na členění disciplín, ve kterých techniky vznikaly. Podle tohoto postupu dělíme prostorové analýzy na:

- statistické prostorové analýzy dat (*spatial statistics*) - úzce spjaty s matematickou statistikou,
- mapová analýza - ve smyslu mapové algebry, především překryvné operace
- metody matematického modelování - např. tvorba a analýzy multivariačních či regresních modelů
- interpolační metody
- lokalizační a alokační metody
- síťové analýzy - ve smyslu geografických analýz, kde předmětnou sítí bývají dopravní, hydrologické či inženýrské sítě
- ostatní analýzy okolí a spojitosti - např. techniky zpracování obrazu, používané pro získání geometrických charakteristik obrazu či textury; gravitační analýzy apod.

V případě síťové analýzy je potřebné odlišit geografickou síťovou analýzu od homonyma síťové analýzy z operačního výzkumu, uplatňované zvláště při projektovém řízení. Každá z nich má jiný význam, i když v obou případech se zpravidla řeší problém optimalizace grafů. Analýzy většinou

využívají poznatky z teorie grafů, v některých případech to však není možné (nebo to není efektivní) - např. při hledání cesty terénem, který je popsán pomocí kontinuálního modelu.

Při lokalizačních úlohách řešíme problém optimálního umístění (rozmístění, lokalizace) objektů. Naproti tomu alokační úlohy řeší problém zásobování (model řízení zásob). Tyto metody se často řadí mezi síťové, protože využíváme šíření v síti. Příkladem lokalizačního problému je výběr vhodného místa pro stavbu obchodního centra, kdy vycházíme ze známé lokalizace zákazníků a známé dopravní sítě. Optimalizačním kritériem je pak maximalizace zisku plánovaného obchodního centra.

1.4.2 Rozdělení podle typu prostorové reprezentace

Dělení metod podle **typu prostorové reprezentace** odráží rozdělení prostorové reprezentace. Metody lze tedy dělit na metody vhodné pro kontinuální reprezentaci a pro diskrétní reprezentaci, kterou lze dále dělit podle typu geometrických primitiv použitých k reprezentaci.

1.4.3 Statistické prostorové analýzy (s.s.)

Statistické prostorové analýzy zahrnují metody založené na stochastické (náhodné) povaze uspořádání a vztahů. Nabízejí poměrně široké spektrum aplikací. Někdy jsou přímo označovány jako prostorová statistika.

Podle počtu současně zkoumaných charakteristik můžeme používané statistické metody rozdělit na **monovariační** (jednorozměrné) a **multivariační** (analýzy vícerozměrných objektů/událostí). Používání alternativních názvů, uvedených v závorce, není příliš vhodné vzhledem k jejich snadné záměně za počet dimenzí u geometrické reprezentace objektů.

Monovariační statistické analýzy pracují současně pouze s jednou charakteristikou objektu, zatímco multivariační statistiky využívají více charakteristik současně. U multivariačních technik lze ještě specifikovat, zda studují více charakteristik současně jen vizuálně (a pak analýza a interpretace probíhá vizuálně a mentálně), nebo zda jde skutečně o multivariační metody s.s.

Dělení **podle povahy statistických technik** využívá analogie z tradičního rozdělení statických technik na popisné (typicky výpočet statistických charakteristik) a indukční (na základě studia výběru usuzujeme na vlastnosti celku, provádíme testování hypotéz). Podle tohoto principu se dělí techniky statistické prostorové analýzy na:

- a) **popisné** (deskriptivní, centrografické techniky) – především kvantitativní měření charakteristiky polohy a charakteristiky rozptýlení
- b) **inferenční** (analýzy textury) – ty určují, zda distribuce je nebo není náhodná, popisují vztahy mezi 2 a více veličinami

Pokud hovoříme o distribuci geoprvků, máme na mysli texturu (vzor), kterou vytváří geoprvky svým rozmístěním ve sledované části prostoru.

1.4.3.1 Tři základní typy prostorové distribuce

Z hlediska statistického uspořádání geoprvků rozlišujeme 3 základní typy prostorové distribuce:

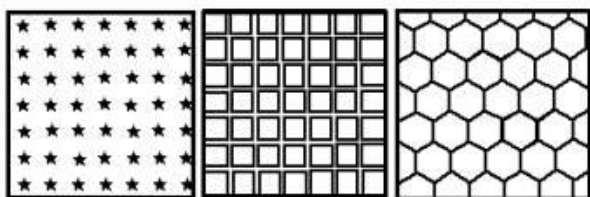
- a) **shluková** (clustered), případně skupinová
- b) **pravidelná** (regular)
- c) **náhodná** (random)

Někteří autoři ještě vymezují rovnoměrně rozmístěnou distribuci jevů, kterou lze zařadit mezi pravidelnou a náhodnou, Ivanička (1983) popisuje také aglomerizovanou a heterogenní distribuci. Většina autorů však vymezuje pouze uvedené 3 základní typy.

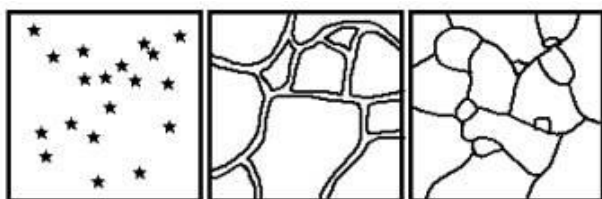
Uvedené dělení se využívá, pokud je naším cílem zjištění, zda (s jakou pravděpodobností) je prostorové rozložení geoprvků náhodné, resp. zda je statisticky průkazný jeho shlukový či pravidelný charakter. Skutečné distribuce mohou být testovány vůči těmto 3 ideálním typům, často však pouze vůči náhodné distribuci. Statisticky prokázaný výskyt shlukového či pravidelného vzorku může být základem pro zjišťování příčin, které vedly k pozorovanému uspořádání. Např. prokázaný shlukový výskyt případů jisté choroby může (pokud byla data správně standardizována, a to i v časové ose) podpořit hypotézu infekčního charakteru (etiologie) choroby.



Obr.1-3 Shlukový typ distribuce pro 3 typy geoprvků: body, linie, areály



Obr.1-4 Pravidelný typ distribuce pro 3 typy geoprvků: body, linie, areály



Obr.1-5 Náhodný typ distribuce pro 3 typy geoprvků: body, linie, areály

2 Typy dat a vztah k prostorovým analýzám

Správné využití prostorových analýz není možné bez dostatečného poznání té části světa (reality), kterou popisujeme, zkoumáme, analyzujeme nebo modelujeme. Realita je popisována na základě určitého konceptuálního modelu pomocí dat, která představují formalizovaný záznam reality (přesný význam definuje ČSN 369001). Proto je pro nás zásadní důkladné seznámení s daty, jejich správný výběr a výběr i vhodných metod pro jejich zpracování.

Prostorová data představují popis geoprůvku, který zahrnuje geometrickou složku, atributovou (popisnou) složku, časovou, funkční a vztahovou složku.

2.1 Grafické atributy

Významná část prostorových dat vyjadřuje svou geometrickou složku popisu (tedy svou lokalizaci a prostorovou reprezentaci) pomocí grafického popisu, grafickým vyjádřením lokalizace.

Z hlediska typu vazby mezi grafickou a atributovou složkou dat můžeme vymezit následující typy dat:

a) **lokalizační data** (*locational data, event data, point process*). Tato data obsahují jen lokalizaci objektů či událostí. Předpokládáme, že sledujeme výskyt pouze jednoho typu objektu nebo události, o kterých kromě jejich lokalizace nic dalšího nevíme. Zajímá nás tedy, kde se to stalo (kde se vyskytly události), ne co se stalo (nezajímá nás druh či popis události). Příkladem může být lokalizace případů choroby (obr.1-1), lokalizace dopravních nehod apod.

Pokud při zpracování využíváme údaje o rozdílných typech objektů/událostí, musíme použít multivariační techniky, resp. analýzu vícenásobných typů událostí.

Lokalizační data se vztahují k jednomu místu a nepotřebují popisné atributy. Prakticky se jedná o pouze grafická data. Vzhledem k charakteristice dat se uplatňují i postupy známé z počítačové grafiky. Kardinalita a parcialita vazby mezi grafickou a atributovou složkou je zpravidla 1:0.

b) **atributová data** (*attribute data*). Taková data obsahují hodnoty (atributy) spojené s nějakými objekty či událostmi. Lokalizace bývá vyjádřena body, buňkami pravidelného gridu nebo polygony. Jako příklad můžeme uvést půdní vzorky lokalizované bodem (protože mají z geografického hlediska zanedbatelný objem) a popsány např. výsledky geomechanických zkoušek či chemických analýz. Nebo jde o data z dálkového průzkumu Země uložená v pravidelné mřížce, která (po radiometrických a geometrických korekcích) odpovídají velikosti odrazivosti a emisivity příslušné části zemského povrchu. Poslední příklad se vztahuje k polygonům (resp. k areálům) - úmrtnost v jednotlivých okresech je reprezentována polygony.

Opět se tedy jedná o data vztažená k jednomu místu, ke kterému se váží jisté atributy. Z hlediska kardinality vazby mezi grafickou a atributovou složkou jde u monovariačních dat o vztah 1:1 (případně N:1), u multivariačních pak běžně o M:N.

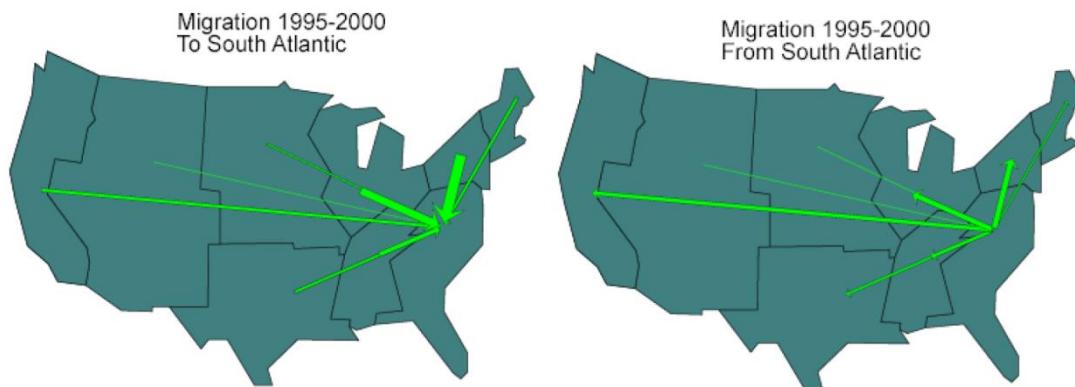
Multivariační postupy je nutné použít v případech, kdy sledujeme současně více atributů u každého objektu. Jedním z nich může být i čas.

V řadě případů je možné využít konceptu regionalizované proměnné, tj. považovat data za geostatistická.

c) **interakční data** (*interaction*). Typicky jsou to kvantitativní měření spojená s liniemi nebo páry míst (často 2 body, mohou to být ale i sady polygonů). Příkladem může být tok spotřebního zboží z míst uskladnění do obchodů nebo migrace obyvatel mezi územními celky (obr. 2-1).

Typicky jde o data vztažená ke 2 místům, proto bychom mohli hovořit o charakteristické vazbě mezi grafickou a atributovou složkou dat 2:1 či obecněji M:N.

Realita je ale pestřejší a čistě lokalizační data se již vyskytují ojediněle, zpravidla u nich máme další popis vyjádřený atributy.



Obr.2-1 Velikosti migračních toků v letech 1995 až 2000 směřujících do a z amerického jihovýchodu (<http://www.csiss.org/clearinghouse/FlowMapper/FlowTutorial.pdf>)

2.2 Popisné atributy

K tématickému popisu objektů používáme atributy, přesněji popisné atributy. Atributy nám slouží k vyjádření vlastností objektů.

Postupem času (v průběhu rozvoje informatiky) se ukázalo, že je účelné přes velmi pestrou škálu informací, se kterými pracujeme, vymezit základní způsoby kódování (formalizace) dat, což má bezprostřední vliv na způsob uložení dat. Vymezení těchto základních tříd kódování vede k definici domén. Doménu je možné charakterizovat jako potenční množinu dat, ze kterých je vybírána hodnota atributu. V jednoduché podobě se definuje datovým typem (např. celé kladné číslo, desetinné číslo, text, datum), které jsou běžné využívané v databázích. Toto vymezení domén je založeno na **způsobu uložení dat**, i když určitým způsobem orientuje i dominantní způsob zpracování dat.

Jinou možností je vymezení typů domén podle **způsobu zpracování dat**. Vycházíme z toho, že z hlediska uložení dat pro nás může být výhodné použít např. doménu přirozených čísel, avšak interpretace těchto dat (jejich sémantika) může být velmi odlišná a může zásadně determinovat smysluplné možnosti zpracování dat. S číselnou doménou (zvláště racionálních čísel) je možné z matematického hlediska provádět plnou škálu matematických či statistických operací (aritmetické, goniometrické, statistické operace), při vědomí významu dat však může být množina operací omezena.

Příklad - typ pokryvu krajiny může být kódován pomocí číselného kódu. 1 pak může označovat např. lesní porost, 2 zástavbu a 3 např. vodní plochy. Předpokládejme, že jsou data zaznamenána pomocí rastrového datového modelu a že chceme provést generalizaci pokryvu spočívající v zanedbání malých odlišných oblastí. Generalizaci můžeme provádět na základě posouzení výskytu hodnot v širší oblasti (zpravidla posuvné okno, konvoluce). Přestože z hlediska uložení dat jde o číselné hodnoty, nelze použít pro charakteristiku oblasti např. vážený průměr (lesní a vodní plochy ukazují v „průměru“ na zástavbu!). Vhodnou možností je zde použít nejčtenější hodnoty. Tedy převažuje-li v regionu les, budeme celý region klasifikovat jako les.

Velmi jednoduché dělení nabízí rozdělení dat na **kvalitativní** a **kvantitativní**, vhodnější je ale následující přesnější vymezení čtyř tříd.

Z hlediska **zpracování dat** tedy rozlišujeme následující typy domén:

- **poměrová (ratio)** - odpovídá hodnotě na kalibrované, lineární škále ve vztahu k pevnému bodu. Takové hodnoty lze libovolně zpracovávat matematickými funkcemi. Patří sem věk, četnost, vzdálenost, cena apod. Z hlediska způsobu uložení dat jde pouze o číselnou doménu.
- **intervalová (interval)** - používá hodnoty s pozicí na kalibrované, lineární škále, která však nemá vztah k fixnímu bodu. Takové hodnoty lze porovnávat, ale ne např. násobit nebo poměřovat. Typickým příkladem je teplota: -5 stupňů C je o 10 stupňů méně než +5 stupňů C,

ale nemá smysl vyjádřit jejich poměr (podobně i stupnice F versus C). Často charakterizují relativní pozici v prostoru, čase nebo velikost - zeměpisná šířka, nadmořská výška (problém různé srovnávací hladiny), délka, normalizované skóre apod. Z hlediska způsobu uložení dat jde pouze o číselnou doménu.

Z intervalových dat je vhodné vymežit skupinu **kruhových (cirkulárních) dat**. Jejich stupnice je sice kalibrovaná a lineární ve smyslu rovnoměrného dělení, ale fixní bod je současně počátkem i koncem stupnice. Typicky jde o cyklická data, kdy po dosažení číselného maxima následuje minimální hodnota. Příkladem jsou měření směru, azimut, čas během dne, den v týdnu, měsíce v roce apod. Kvůli cyklickému charakteru nelze ani použít sčítání a odečítání. Je jim věnována samostatná kapitola.

- **pořadová (ordinal)** - vyjadřuje hodnotu na nekalibrované, lineární škále. Lze získat pouze kvalitativní rozdíl, ne kvantitativní. Hodnoty se tedy dají rozlišovat pořadím, ale ne velikostí. Např. 1., 2. a 3. místo na závodech nebo hodnoty „tmavě šedá“, „šedá“, „světle šedá“, „šedobílá“. Pavlík, Kühnl (1981) označují jevy popisované pomocí pořadové škály jako topologické (na rozdíl od metrických pro poměrovou škálu).
- **nominální, výčtová (nominal)** - hodnoty nemají vztah k lineární škále. Nelze je řadit, lze je pouze porovnat na rovnost či nerovnost. Reprezentují kvalitativní hodnoty. Typickým příkladem může být doména: {jehličnatý, smíšený, listnatý}. Nejsou kvantifikovatelné, ale pouze klasifikovatelné.

Shrneme-li, přestože použijeme k uložení dat doménu např. přirozených čísel, je aplikace matematických funkcí smysluplná pouze pro poměrová data. U intervalových dat (vyjma cirkulárních) je možné použít i rozdíl hodnot. Funkce maximum, minimum lze aplikovat i na pořadové hodnoty. Na výčtové hodnoty lze uplatnit pouze takové funkce jako testování shody, zjišťování variability, modus apod.

Někteří autoři (Pavlík, Kühnl 1981) vyčleňují z nominálních (výčtových) dat ještě binární data (ve smyslu dvouhodnotové logiky). Je zjevné, že pro takovou doménu by bylo možné uplatnit pouze testování shody a zjišťování variability už je smysluplné pouze při uplatnění prostorového charakteru úlohy (např. iterační testy náhodnosti sekvence jako je 11000101...).

Kraak, Ormelling (1996) uvádí vazbu těchto domén ke kartografickým výrazovým prostředkům (velikost, barva, tvar, textura, hodnota) a k požadovanému efektu (odlišení, uspořádání, vzdálenost, proporce). Popisuje vztah k diskrétním a kontinuálním objektům a jakým způsobem se mapují. DeMers (1997) uvádí tabulku možností využití 4 základních typů domén ve vztahu k základním grafickým formám reprezentace objektů.

Přiřazení zkoumaných dat k jednomu z uvedených typů domén však představuje pouze 1. krok při jejich poznání nezbytném pro volbu správného způsobu zpracování dat až po prezentaci výsledků.

Uvedené rozdělení je pouze základní. U poměrových hodnot je vhodné rozlišit veličiny **absolutní a relativní**.

Absolutní veličiny zahrnují např. počet nebo hmotnost, často primární měřená či zjištěná data.

Relativní veličiny jsou poměrná čísla (např. míra nezaměstnanosti). U relativních veličin nemá smysl provádět součet při agregaci hodnot do větších jednotek. Relativní veličiny můžeme dále rozdělit na:

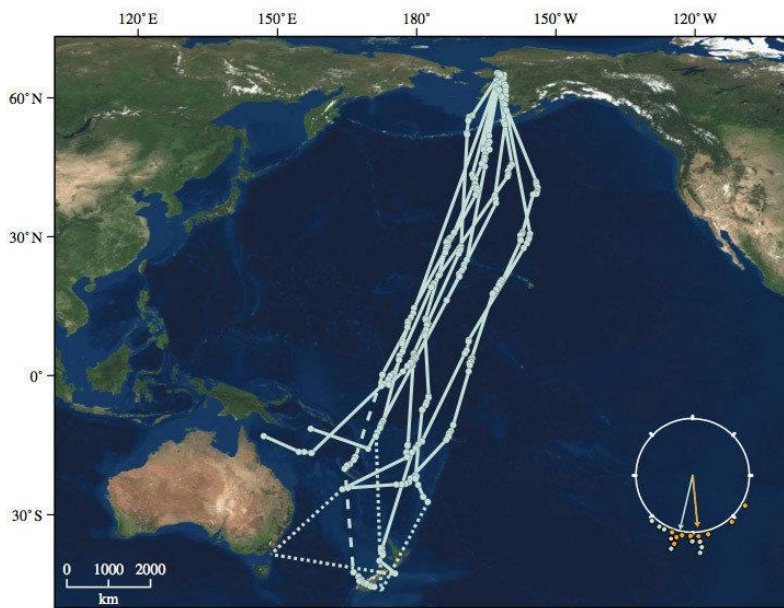
- extenzivní (ukazatele struktury, představují podíl z celku),
- intenzivní (ukazatele intenzity), dále dělené na:
 - míry,
 - kvocienty,
- indexy, které vyjadřují časový nebo geografický vývoj.

V anglosaské literatuře se ve smyslu absolutní - relativní používá označení extenzivní - intenzivní, je třeba však upozornit, že jiní autoři používají toto označení v jiném smyslu. Extenzivní data podle nich představují měřitelné vlastnosti a intenzivní data neměřitelné vlastnosti, často složené pojmy jako „hornatost“.

3 Kruhová (cirkulární) statistika

Zvláštním typem intervalových dat jsou **data kruhová, neboli cirkulární**. Setkáváme se s nimi v geologii, sedimentologii, geomorfologii, kde se využívají směrové analýzy ke zkoumání zlomových linií a puklinových systémů, glaciálního zvrstvení, litologických vzorů, v zoologii, botanice a ekologii ke studiu chování živých organismů a jejich šíření, v krizovém řízení např. pro lokální předpovídání směru větru z lokální topografie, v medicíně, epidemiologii, kriminalistice při zkoumání distribuce kriminálních událostí, archeologii atd.

Data jsou typicky uložena ve formě směru linií (např. směry geologických zlomů či směry migračních tras obr. 3-1) nebo přímo jako atribut u bodů (např. záznamy počátečních směrů migrace ptáků z jistého místa nebo směr rozsívání semen ze stromu, či směr větru zaznamenaný na meteorologických stanicích). Někdy je potřebné vygenerovat směry mezi body (např. pro analýzu směrové distribuce bodů vůči určitému objektu jako je směr určitého typu kriminality kolem obchodního centra).



Obr.3-1 Záznamy migračních tras břehouše rudého z Aljašky na Nový Zéland
(<https://www.npr.org/sections/kruhwich/2011/09/14/140467059/the-toughest-little-bird-youve-never-heard-of?t=1537134096099>)

Je třeba dávat pozor na to, jak byla směrová data získána resp. zaznamenána (zejména problém přesnosti, *precision*). Např. pokud jsou výsledkem směrové analýzy rastru, může být počet směrů limitován použitým typem sousedství v rastru (osmisousedství řádu 1 poskytuje jako výsledek jen 8 orientovaných směrů).

Cirkulární data jsou v zásadě 2 typů:

- orientovaná data (vektorová), kde je určen směr zpravidla jako úhel v rozsahu $[0, 360 \text{ st.}]$ nebo $[0, 2\pi \text{ radiánů}]$;
- obousměrná data (neorientovaná), někdy označovaná jako osová data (*axial data*), kde je určen směr linie (např. $[0, 180]$) a ne její orientace.

U neorientovaných linií se používá sjednocení měření do 1 poloviny (pokud existují směrová měření, sjednotí se do stejné orientace). Následně se mohou aplikovat stejné míry

a interpretace samozřejmě určuje směr a ne orientaci. Pokud jsou všechna data neorientovaná, lze je pro potřeby analýzy zdvojit a zaznamenat oba směry. Po provedení analýzy se pak výsledky konvertují zpět do rozsahu $[0,180]$ či $[0,\pi]$.

Užití směrové statistiky není omezeno pouze na analýzu směrů, ale je použitelné na mnoho jiných cyklických (periodických) proměnných (viz tab. 3-1). Když jsou analyzována časově-periodická data, časová perioda (den, měsíc, rok, atd.) souvisí s cyklem 360. Pozorování v určitém čase jsou určeny úhlové hodnoty odpovídající poměru časové periody uplynuté před pozorováním. Rovnice představuje tuto skutečnost symbolicky, kde P je perioda, t_i je pozorování v čase t a θ_i je stejný bod vyjádřený jako úhel (Vítková, 2013):

$$\theta_i = \left(\frac{t_i}{P}\right) * 360$$

Pokud jsou data seskupeny podle měsíce, musí být četnosti upraveny pro případ nestejnosti třídních intervalů. Toho můžeme dosáhnout vytvořením nového roku s 360 dny, majícího 12 měsíců po 30 dnech:

$$f_\theta = f_i \left(\frac{30}{D_i}\right) * \left(\frac{N}{N'}\right)$$

kde f_i je primární údaj, tedy počet zaznamenaný v daném měsíci i , D_i je počet dní v měsíci i , N je původní celkový součet, N' je nový celkový součet před korekcí:

$$N' = \sum_{i=1}^{12} f_i \left(\frac{30}{D_i}\right)$$

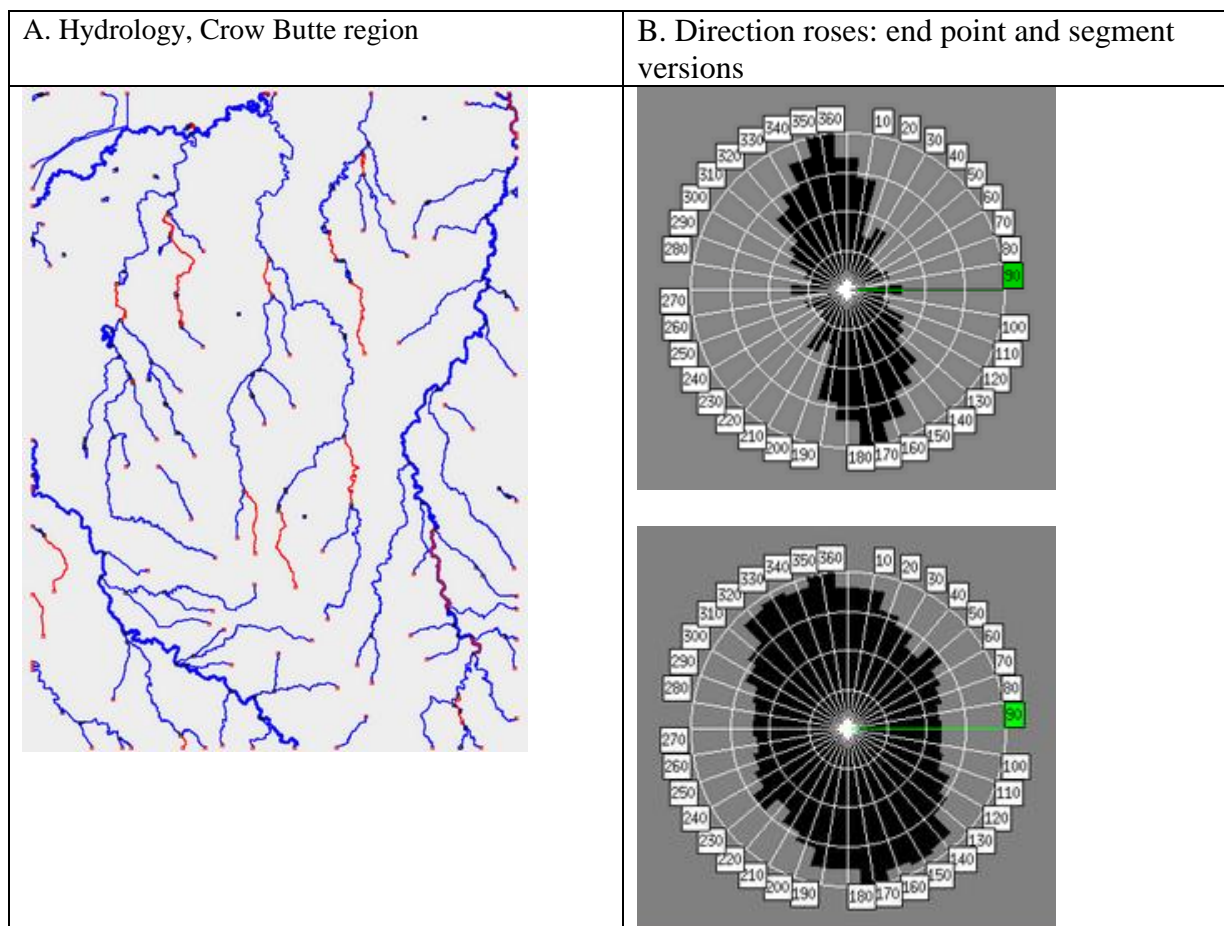
Tab. 3-1 Vybrané přestupky §147/1b (rušení nočního klidu) z evidence Městské policie Ostrava v lednu 2012 a nesmyslný aritmetický průměr z času spáchání přestupku

1:50	Hlasitá mluva	Okoli Kauflandu
1:20	Hlasitý křik	Prodejna Hruška
22:05	Hlasitým pokřikováním rušil noční klid.	náměstí
22:35	Rušil noční klid hlasitou reprodukovanou hudbou.	
2:10	hlasitou televizí	ubytovna Pod Mostem
0:05	Hl. křik	
2:30	Hl. křik	
23:10	hlasitý křik	zastávka tramvaje
1:20	Hlasitý projev.	
0:10	Rušení NK zpěvem	
22:50	křik	
22:25	Hlasitý křik na veřejnosti.	Před OD Kotva.
23:05	rušila noční klid hlasitým rozhovorem	
22:45	rušení nočního klidu	Bazén
3:25	rušení nočního klidu	u stadionu
1:30		Byt ve čtvrtém patře.
23:00	hlasitý křik	
23:45	Rušil noční klid hlasitým zpěvem	
23:10	hlasitý křik	SPŠ
3:15	Hlasitým křikem	x Kolejní
3:10	Rušení nočního klidu hlasitým zpěvem.	
23:45	Hlasitá hudba.	Koruna
0:15	Hlasitá hudba.	Bowling Sky
	11:53 průměr	

Určování směrů a jejich zpracování je v GIS problematičké z řady důvodů (http://www.spatialanalysisonline.com/HTML/index.html?directional_operations.htm):

- způsob reprezentace linie, zobrazený detail a úroveň generalizace objektů reálného světa

- Proces záznamu linie je různorodý a není jasné, kde je skutečný začátek a konec linie pro potřeby směrové analýzy. Jen stěží lze např. použít první a poslední bod ze série GPS měření.
- Povaha cyklického měření: orientace osové linie s úhlem 90 st. je neodlišitelná od linie s 270 st.; navíc rozdíl mezi 280 a 90 není 280-90=190, ale 360-280+90=170. Podobně pro 2 azimuty 350 a 10 je zřejmé, že průměrný směr nemůže být 180 (tj. k jihu).
- Při zpracování více datových sad lze srovnávat 2D geodata pouze se stejným souřadnicovým systémem a zobrazením, navíc také pořízená v přibližně stejném měřítku. Jinou možností je použití sférických zeměpisných souřadnic. Pro malé oblasti (pod 100x100 km) lze ovšem problém zkruslení pro většinu aplikací zanedbat.



Obr.3-2 Směrová hydrologická analýza. Zdrojová data (A) a růžicové diagramy směrů vypočtených z koncových bodů (z uzlů) (B nahoře) nebo ze všech segmentů (B dole)

(http://www.spatialanalysisonline.com/HTML/index.html?directional_operations.htm)

3.1 Popisná statistika

Problém cyklického charakteru dat se řeší s použitím skládání vektorů a adekvátních goniometrických funkcí. Každý zaznamenaný směr θ_i je považován za jednotkový vektor daného směru. Každý vektor má 2 složky, horizontální a vertikální vzhledem k souřadnicovým osám:

$$\Delta X_i = \cos \theta_i \text{ a } \Delta Y_i = \sin \theta_i .$$

Pozor, to platí pro běžnou matematickou orientaci, tj. orientace 0° je na kladné ose X a otáčení je proti směru hodinových ručiček, tj. úhel θ_i se počítá od osy X k ose Y. Jak to bude v případě azimutu? Nejjednodušší řešení je azimut přepočítat do „matematického“ úhlu následovně (pro stupně):

$$\theta_i = 450 - \lambda_i$$

kde λ_i je azimut.

3.1.1 Směrový průměr

Směrový průměr představuje aritmetický průměr pro cirkulární data. Musí se počítat jako směr výsledného vektoru, který vznikne složením individuálních vektorů. Pokud má každý záznam směr stejnou váhu (např. je znám pouze směr a ne délka cesty či síla větru), vypočte se následovně (Gaile, Burt, 1980):

$$\bar{x}_0 = \arctg\left(\frac{\sum_{i=1}^n \Delta Y_i}{\sum_{i=1}^n \Delta X_i}\right) = \arctg\left(\frac{\sum_{i=1}^n \sin \theta_i}{\sum_{i=1}^n \cos \theta_i}\right)$$

U výsledku je však nutné připočítat konstantu, která řeší různé kvadranty.

Tedy:

$$Q_i = \bar{x}_0 + k$$

		Znaménko čitatele	
		+	-
Znaménko jmenovatele	+	k=0 (I. kvadrant)	k=360 (IV. kvadrant)
	-	k=180 (II. kvadrant)	k=180 (III. kvadrant)

Směrový průměr \bar{x}_0 má zajímavé vlastnosti. Například lze dokázat, že platí (Gaile, Burt, 1980):

$$\sum_{i=1}^n \sin(\theta_i - \bar{x}_0) = 0$$

$$\sum_{i=1}^n \cos(\theta_i - \bar{x}_0) = \max$$

Z toho vyplývá, že součet odchylek od průměru roven nule je podobný té podmínce, kterou má aritmetický průměr. Druhá vlastnost uvádí, že ze všech možných úhlů je x_0 právě ten, který způsobí, že součet kosinů odchylek je maximalizován. Právě z tohoto důvodu je ten druhý vztah užitečný pro popis rozptylu nebo rozložení výběru.

Délka (*magnitude*) výsledného vektoru při jednotkové velikosti jednotlivých vektorů je dána:

$$R = \sqrt{\Delta X_i^2 + \Delta Y_i^2}$$

Pokud $\{\theta_i\}=0$ pro všechna i , pak všechny ΔY_i komponenty budou 0 a všechny komponenty ΔX_i budou 1, pak $R=N$. Naopak, složení opačně orientovaných vektorů způsobí nulovou délku výsledného vektoru. Proto výsledná délka R naznačuje rozptyl výběru. Velká hodnota R tedy indikuje hustý svazek vektorů s malým rozptylem. V praxi je R vyděleno N pro snadnější srovnání mezi výběry různých velikostí a získáváme průměrnou výslednou délkou r^* , která leží v rozmezí $[0,1]$. Větší hodnota udává větší seskupení vektorů kolem průměru, tedy menší rozptyl.

V případě seskupení směrových měření do tříd se pracuje s nimi podobně jako s váženým průměrem – použije se směr středu třídy a váha odpovídající četnosti třídy.

Jiné popisné statistiky, jako například medián směru a cirkulární průměrná odchylka pro směrová data, jsou ukázány v následující tabulce. Ve většině případů je jejich výpočet přímý a smysl každého je srovnatelný s jeho lineární analogií.

3.1.2 Další kruhové statistiky

Kruhový (cirkulární) rozptyl (*circular variance*) je jednoduše $S^2_{\text{circ}}=1-R/N$, neboli $S^2_{\text{circ}}=1-r^*$. Je důležité poznamenat, že S^2_{circ} (stejně jako r^*) leží vždy mezi nulou a jedničkou včetně, čímž je velmi rozdílný od své lineární analogie, která může nabývat jakoukoliv kladnou hodnotu.

Kruhová (cirkulární) směrodatná odchylka (*circular standard deviation*) je definována jako (http://www.spatialanalysisonline.com/HTML/index.html?directional_operations.htm):

$$sd = \sqrt{-2\ln(r^*)}$$

Pro výpočet **směrového mediánu** se musí hodnoty směru seřadit, vybrat prostřední prvek. V případě sudého počtu se musí určit průměrná hodnota mezi prostředními směry. V případě tříd se kumulativně sčítají jejich četnosti a interpoluje se dosažení poloviční relativní četnosti.

Pro **směrový modus** M se hledá nejčetnější třída a v ní se určí střed:

$$M = L + \frac{f_0 - f_{-1}}{2f_0 - f_{-1} - f_1} h$$

kde L je dolní mez modální třídy, f_0 je četnost modální třídy, f_{-1} a f_1 jsou četnosti předcházející a následující třídy, h je délka třídy intervalu.

Cirkulární rozsah se vypočte ze seřazených hodnot směru vzestupně:

$$W = 2 * \pi - \max(T_1 \dots T_n)$$

kde

$$T_i = \theta_{i+1} - \theta_i \quad \text{pro všechna } i = 1 \text{ až } n-1$$

$$T_n = 2\pi - \theta_n + \theta_1$$

T_i udává rozdíl mezi následujícími úhlovými měřeními, zatímco T_n popisuje doplněk vzdálenosti mezi posledním a prvním úhlovým měřením.

Výpočet je v radiánech, lze analogicky upravit pro stupně.

Příklad pro přestupky rušení veřejného klidu v roce 2012 v Ostravě:

Celkem je 2382 přestupků, po seřazení jsou pochopitelně hodnoty od půlnoci až po maximální hodnotu před půlnocí. Lze dohledat, že první čas hlášení přestupku večer byl 20:30, poslední čas pak 5:55. Vzhledem k požadovanému času klidu 22:00 až 6:00 je zřejmé, že skutečný interval je ještě širší, přestupky se hlásí i dříve večer. Rozsah mezi 20:30 a 5:55 je 9 hod 25 min. Postup a výpočet podle vzorce je: převést čas během 24 hodin na úhel, seřadit vzestupně, výpočet T_i rozdílu mezi sousedními hodnotami, maximální rozdíl vznikne mezi 5:55 a 20:30, což je v úhlové míře 218,75 stupňů, a tedy rozsah je 141,25 stupňů, což je právě 9:25.

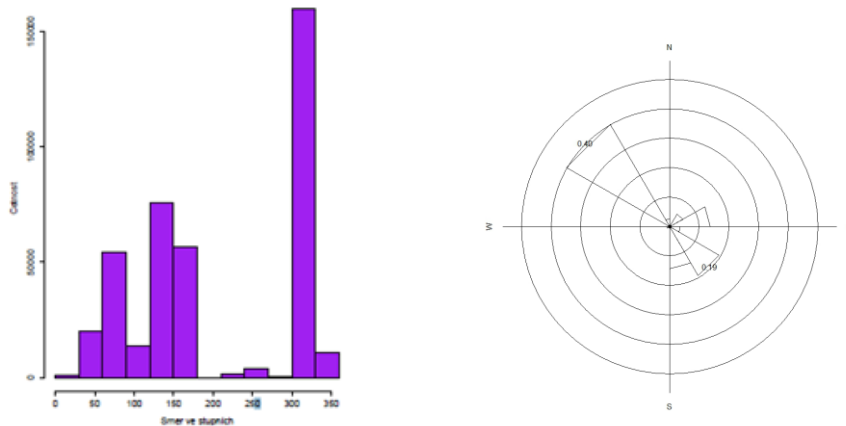
Tab.3-2 Část tabulky přestupků seřazených podle času (resp. úhlu) ukazující krajní body rozsahu

Datum a čas	Hodina	rok	hod	min	hoddes	úhel	Ti (rozdíl)
6.3.12 5:50	05:50:00	2012	5	50	5.83	87.50	0.00
6.3.12 5:50	05:50:00	2012	5	50	5.83	87.50	1.25
16.6.12 5:55	05:55:00	2012	5	55	5.92	88.75	218.75
25.9.12 20:30	20:30:00	2012	20	30	20.50	307.50	11.25
29.9.12 21:15	21:15:00	2012	21	15	21.25	318.75	3.75
21.5.12 21:30	21:30:00	2012	21	30	21.50	322.50	2.50

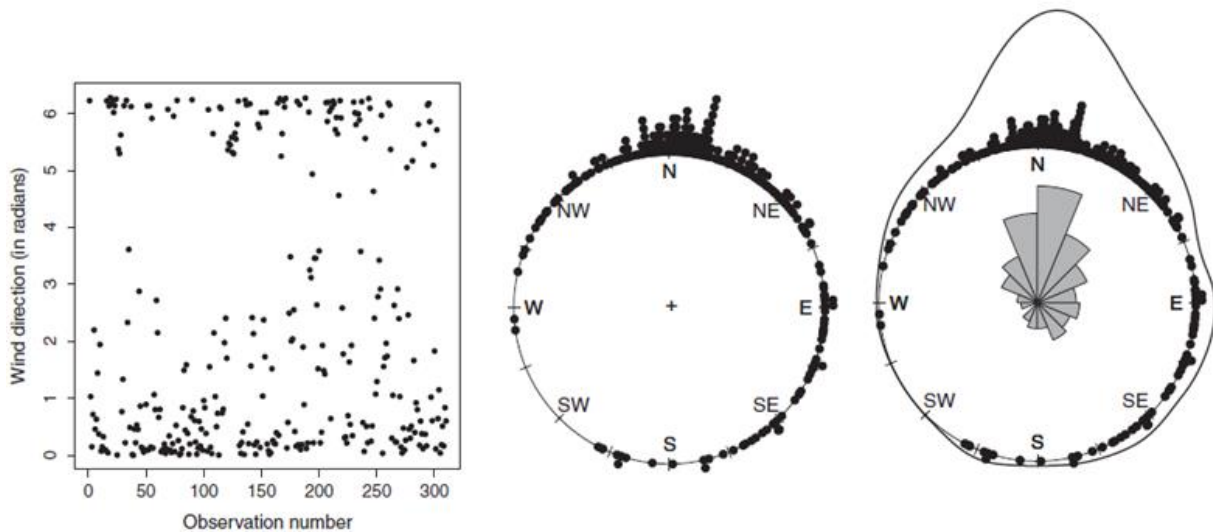
Pokud je známa i velikost vektoru v_i (např. síla větru, délka 1 linie), pracuje se s ní jako s vahou daného směru a výpočet směrového průměru lze vážit velikostí následovně jako $\Delta Y_i = \sum v_i \cos \theta_i$ a $\Delta X_i = \sum v_i \sin \theta_i$.

3.1.3 Vizualizace dat jako součást EDA

Pro vizualizaci rozložení dat je vhodnější místo histogramu (obr. 3-4) použít směrový (růžicový) diagram (Vítková, 2013).



Obr.3-3 Lineární histogram směrů pošty v Nairobi a odpovídající růžicový diagram (Vítková, 2013)



Obr.3-4 Směry větru, jejich kruhový histogram a jeho jádrové vyhlazení (Pewsey et al., 2013)

Směrové analýzy bodové sady jsou popsány v http://www.spatialanalysisonline.com/HTML/index.html?directional_analysis_of_point_.htm.

3.2 Statistická rozdělení pro cirkulární data (Cirkulární pravděpodobnostní modely)

Zvažme náhodnou veličinu X , která má hodnoty rozloženy jenom po obvodu jednotkové kružnice. Jakákoliv hodnota náhodné veličiny X může být spojena s úhlem θ měřeného od libovolného počátečního směru.

Distribuční funkce F náhodné veličiny X je definovaná pravděpodobností P jako (Pewsey et al., 2013):

$$F(\theta) = P(0 < X \leq \theta) \text{ pro } 0 < \theta \leq 2\pi$$

Mimo interval $(0, 2\pi)$ lze provést rozšíření s využitím skutečnosti, že $F(\theta+2\pi) - F(\theta) = 1$ v intervalu od $-\infty$ do $+\infty$.

Spojité distribuční funkce F má pravděpodobnostní hustotu ρ takovou, že platí (Vítková, 2013):

$$(i) \quad \int_{\theta_1}^{\theta_2} \rho(\theta) d\theta = F(\theta_2) - F(\theta_1)$$

pro $-\infty < \theta_1 < \theta_2 < \infty, |\theta_1 - \theta_2| < 2\pi$

$$(ii) \quad \rho(\theta) \geq 0$$

$$(iii) \quad \int_0^{2\pi} \rho(\theta) d\theta = 1$$

3.2.1 Rovnoměrné rozdělení pro cirkulární data

Jde o nejjednodušší variantu rozdělení. Spojitá varianta rozdělení reprezentuje stejnou pravděpodobnost pro každý směr. Z podmínky (iii) (tj. suma pravděpodobností se rovná 1) lze snadno odvodit, že tedy pravděpodobnostní hustota je všude stejná a rovna $1/2\pi$ (Gaile, Burt, 1980):

$$\rho(\theta) = \frac{1}{2\pi} \quad \text{pro } 0 < \theta \leq 2\pi$$

V případě diskrétní varianty rozdělení je přípustných m směrů a pak bude pravděpodobnostní hustota rovna $1/m$ (stejně jako u lineární varianty) (Gaile, Burt, 1980):

$$P\left(\theta = v + \frac{2\pi k}{m}\right) = \frac{1}{m} \quad k=0, 1, \dots, m-1$$

kde v je parametr posunutí, který slouží k tomu, aby nulový úhel mohl mít nulovou pravděpodobnost.

3.2.2 Von Misesovo rozdělení

Nejdůležitějším rozdělením pro cirkulární data je Von Misesovo rozdělení. Má podobnou roli jako v lineární statistice normální rozdělení. Toto rozdělení má 2 parametry – směrový průměr μ_0 a parametr koncentrace k .

Pravděpodobnostní hustota se vypočte (Gaile, Burt, 1980):

$$\rho(\theta) = \frac{e^{k \cdot \cos(\theta - \mu_0)}}{2\pi I_0(k)}, \quad 0 < \theta < 2\pi, 0 < \mu_0 < 2\pi, k > 0$$

$$I_0(k) = \sum_{r=0}^{\infty} \left(\frac{1}{r!}\right)^2 * \left(\frac{1}{2} * k\right)^2$$

kde μ_0 je směrový průměr distribuce v rozsahu $[0, 2\pi)$, a $\kappa > 0$ je tvarový parametr označovaný jako koncentrace (efektivně ekvivalentní směrodatné odchylce). $I_0(\kappa)$ je tzv. modifikovaná Besselova funkce proměnné k prvního druhu a řádu 0.

Hustota je největší tam, kde je $\cos = 0$, tj. θ je rovno směrovému průměru. Směrový průměr je současně také módem (nejčetnější hodnotou). Rozdělení je symetrické kolem středu, protože $\cos(\theta) = \cos(-\theta)$.

Zajímavé je chování při změně parametru koncentrace k . Když se k blíží 0, exponenciální funkce a Besselova funkce dosahují 1 a hustota pravděpodobnosti se pak blíží $1/2\pi$. To znamená, že rozdělení přechází do rovnoměrného rozdělení. Pokud k roste, rozdělení se soustřeďuje kolem směrového průměru.

Toto rozdělení se někdy nepřesně označuje jako cirkulární normální rozdělení (ale není to správné).

3.3 Inferenční statistické testy pro kruhová data

3.3.1 Testy rovnoměrnosti

Testy rovnoměrnosti zkoumají hypotézu, že data pochází z rovnoměrné distribuce, tj. jsou náhodně rovnoměrně rozdělena v celém spektru směrů a nejsou významně koncentrována kolem 1 či více směrů. Tento typ problému je velmi běžný v prostorové analýze.

Testy pro rovnoměrnost mohou být užity na hypotézy týkající se Von Thunenových prstenců (http://cs.wikipedia.org/wiki/Von_Thunenův_prostorový_model_hospodářství), Weberových transportních nákladů (http://cs.wikipedia.org/wiki/Alfred_Weber), Christallerových kolonizačních vzorců (http://cs.wikipedia.org/wiki/Teorie_centrálních_míst) apod.

Vzhledem k Von Misesově rozdělení je nulová hypotéza rovnoměrnosti: $H_0: k=0$

V případě sledování, zda neexistuje 1 výrazný vrchol v distribuci, je vhodný Rayleighův test (Rayleigh, 1919) rovnoměrnosti, který je dostatečně silný. Rayleighův test posuzuje velikost vypočteného r^* , spočítá hodnotu testové proměnné a pravděpodobnosti výsledku. Kritická hodnota r^* je asymptoticky úměrná ke k . Pro jednodušší použití je k dispozici tabulka kritických hodnot 5.1. Rayleighův test zavrhuje hypotézu rovnoměrnosti pro velké hodnoty r^* . Dále se doporučuje Moorův modifikovaný Rayleighův test (Mueller, 1968) jako neparametrické varianty k Rayleighovu testu a Hotellingův test pro vážená data (Thakur, Scheidegger 1968).

V komplexnějších případech (více vrcholů apod.) se používá společná skupina testů, které jsou ale méně průkazné. Jde o Ajne's A_n , Kuiper's V_n , Watson's U^2 a Rao's test mezerovitosti (spacing test).

Rao test mezerovitosti analyzuje mezery mezi sousedními směry, jestli jsou přibližně rovnoměrně rozmístěny po obvodu kruhu. Test je silnější než Rayleighův test.

Další 2 testy (Kuiper's V_n a Watson's U^2) jsou více univerzální, protože dovolí testovat rozdíly nejen proti von Misesově distribuci, ale i jiným distribucím.

Testovací charakteristika V u Kuiperova testu je založena na největších vertikálních odchylkách od diagonální linie, která představuje žádoucí distribuci (Thakur, Scheidegger 1968).

Watsonův test (Gumbel 1954) používá průměr čtverce odchylek vůči požadované teoretické distribuci.

Poslední 3 testy jsou implementovány v R. Nelze říci, který je lepší, záleží na okolnostech. Proto se používá společně celá skupina testů. Jejich popis je v Batschelet (1981), Upton and Fingleton (1989) a Mardia, Jupp (1999). U všech se posuzuje pravděpodobnost (p-value) výsledku, je-li menší než běžné hranice statistické významnosti (max. 0,01), nejlépe u všech, zamítá se nulová hypotéza o rovnoměrnosti distribuce.

Tab. 3-3 Kritické hodnoty Rayleighova testu rovnoměrnosti s testovanou statistikou r^* (Gaile, Burt 1980)

n	$\alpha \rightarrow$	0.10	0.05	0.025	0.01	0.001
5		0.677	0.754	0.816	0.879	0.991
6		0.618	0.690	0.753	0.825	0.941
7		0.572	0.642	0.702	0.771	0.891
8		0.535	0.602	0.660	0.725	0.847
9		0.504	0.569	0.624	0.687	0.808
10		0.478	0.540	0.594	0.655	0.775
11		0.456	0.516	0.567	0.627	0.743
12		0.437	0.494	0.544	0.602	0.716
13		0.420	0.475	0.524	0.580	0.692
14		0.405	0.458	0.505	0.560	0.669
15		0.391	0.443	0.489	0.542	0.649
16		0.379	0.429	0.474	0.525	0.630
17		0.367	0.417	0.460	0.510	0.613
18		0.357	0.405	0.447	0.496	0.597
19		0.348	0.394	0.436	0.484	0.583
20		0.339	0.385	0.425	0.472	0.569
21		0.331	0.375	0.415	0.461	0.556
22		0.323	0.367	0.405	0.451	0.544
23		0.316	0.359	0.397	0.441	0.533
24		0.309	0.351	0.389	0.432	0.522
25		0.303	0.344	0.381	0.423	0.512
26		0.277	0.315	0.348	0.387	0.470
27		0.256	0.292	0.323	0.359	0.436
28		0.240	0.273	0.302	0.336	0.409
29		0.226	0.257	0.285	0.318	0.386
50		0.214	0.244	0.270	0.301	0.367
100		0.15	0.17	0.19	0.21	0.26
$2n\bar{R}^2 \sim \chi^2_k$		4.605	5.991	7.378	9.210	13.816

Příklad 1: Situace v Keni (Gaile, Burt 1980)

Podle příkladu nalezneme pro $n=63$ interpolací z následující tabulky kritickou hodnotu 0,2225. Protože v tomto případě je $r^* = 0,2888$ (viz dříve), hypotézu rovnoměrnosti zamítneme. To znamená, že nelze považovat distribuci směrů v Keni za rovnoměrnou.

3.3.2 Testy rovnoměrnosti pro seskupená data

Jednou z možností je použít jednoduchý X^2 test pro agregovaná data seskupená do tříd (viz příklad 2). Někteří autoři před tím varují, protože to nezohlední ordinální charakter dat (Steele, Chaseling, 2006) či alespoň sousedství.

Pro **seskupená data** je k dispozici řada testů viz např. Mardia and Jupp (1999, Chapter 6) diskutují verzi Kuiperova testu navrženou Freedman (1979), a 3 verze Watsonova testu navržené Freedman (1981), Choulakian et al. (1994) a Brownem (1994). Žádný z nich není implementován dosud v R, ani kritické hodnoty pro ně nejsou obecně dostupné. V R se doporučuje pro tento účel použití goodness-of-fit testy specifické distribuce seskupených dat. Naopak pro seskupená data se nedoporučuje použití Rao spacing test.

Implementace viz Oriana software či R.

Příklad 2:

Data pocházejí z evidence přestupků rušení nočního klidu Městské policie Ostrava z let 2010-2013. Z celkem 4 proměnných mají dvě (měsíc v roce a den v týdnu) seskupená data do tříd. Základní statistika je v tab. 3-4.

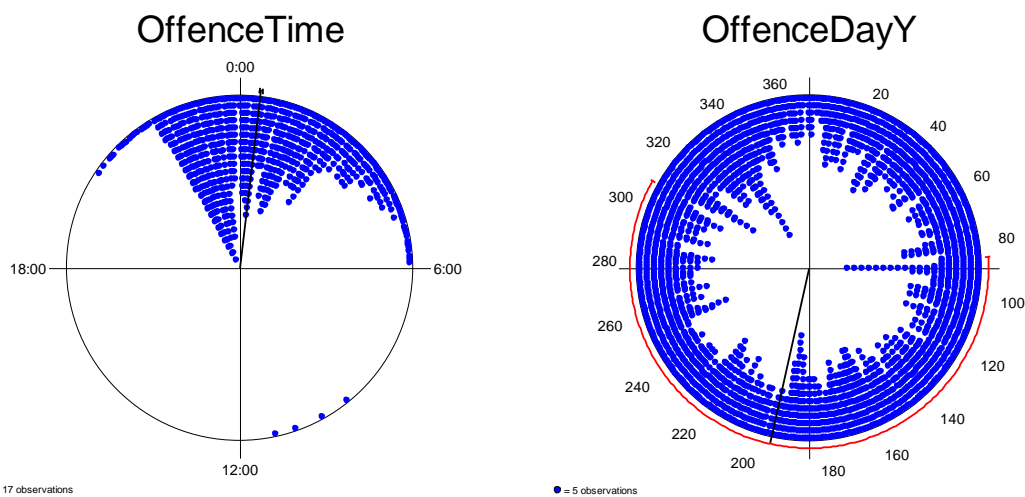
Tab. 3-4 Základní statistika přestupků rušení nočního klidu z evidence Městské policie Ostrava z let 2010-2013

Variable	Time of year	Month of year	Day of year	Day of week
Number of Observations	12062	12062	12062	12062
Data Grouped?	No	Yes	No	Yes
Group Width (& Number of Groups)	30° (12)			51.4° (7)
Mean Vector (μ)	00:27 (7°)	220°	193°	297°
Mean Group		August	196	Saturday
Length of Mean Vector (r)	0.899	0.012	0.007	0.114
Median	00:20 (5°)	195°	179.508°	282.857°
Median Group		July	183	Saturday
Concentration	5.263	0.024	0.014	0.23
Circular Variance	0.101	0.988	0.993	0.886
Circular Standard Deviation	1:45 (26°)	170°	181°	119°
One Sample Tests				
Rayleigh Test (Z)	9758.093	1.731	0.557	157.316
Rayleigh Test (p)	< 1E-12	0.177	0.573	< 1E-12
Rao's Spacing Test (U)	349.017	-----	349.076	-----
Rao's Spacing Test (p)	< 0.01	-----	< 0.01	-----
Watson's U2 Test (Uniform, U2)	571.87	-----	0.77	-----
Watson's U2 Test (p)	< 0.005	-----	< 0.005	-----
Kuiper's Test (Uniform, V)	78.574	-----	4.005	-----
Kuiper's Test (p)	< 0.01	-----	< 0.01	-----

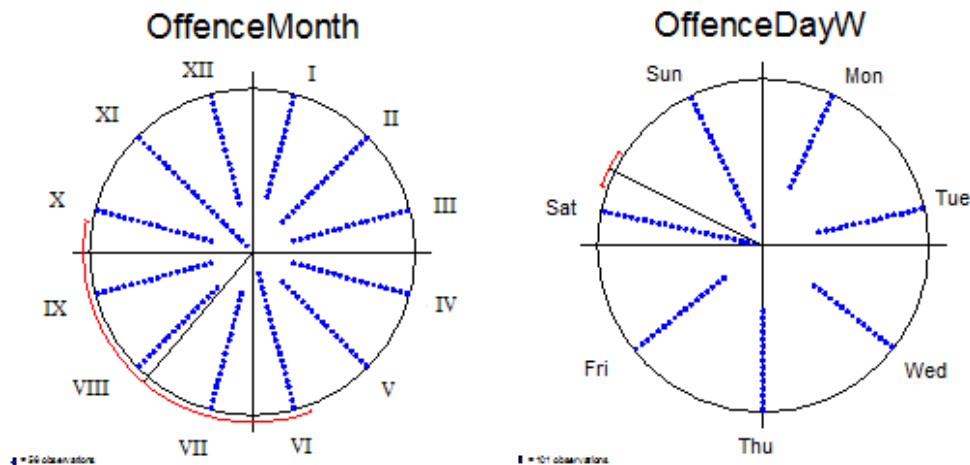
Průměrný čas přestupku je 27 minut po půlnoci (zatímco aritmetický průměr by byl 11:09, což ukazuje na nesmyslnost výpočtu běžného průměru pro kruhová data).

Vysoká koncentrace dat je doložena velkou hodnotou $r^*=0.899$. Tato proměnná vykazuje velmi výraznou odchylku od rovnoměrné distribuce, což je potvrzeno všemi testy.

Den v roce již vykazuje rozporné výsledky – Rayleighův test neodmítnul možnost rovnoměrné distribuce, i když další testy ji odmítly, nelze jednoznačně potvrdit významnou odchylku od rovnoměrné distribuce.



Obr.3-5 Distribuce času přestupku během dne (vlevo) a dne přestupku během roku (vpravo)(Horák, Orlíková, 2019)



Obr.3-6 Distribuce měsíce přestupku během roku (vlevo) a dne přestupku během týdne (vpravo) (Horák, Orliková, 2019)

Měsíc v roce jasně ukazuje rovnoměrnou distribuci, což je o potvrzeno Rayleighovým testem (obr. 3-6). Naopak distribuce přestupků v dnech týdnu není rovnoměrná (Rayleighův test odmítl takovou možnost).

3.3.3 Jednovýběrový test pro směrový průměr

Předpokládá se, že distribuce má von Misesovo rozdělení se střední hodnotou μ , která odpovídá ověřovanému směru. Vypočtou se intervaly spolehlivosti kolem μ a pokud směrový průměr zjištěný z měřených dat (pozorování) bude ležet mimo interval spolehlivosti, lze odmítnout tvrzení, že by soubor mohl mít ověřovaný směrový průměr.

Využívá se implementace v SW (Oriana, R) a lze případně použít i odečtení z tzv. Batscheletova schématu (Batschelet, 1971), nomogramu kde se dosazuje r^* a δ podle obrázku 3-7.

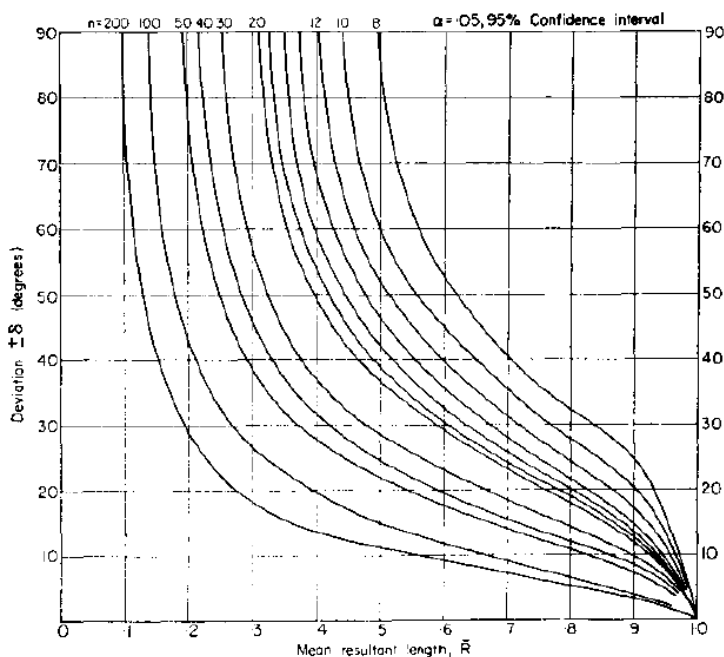


Figure 7 Confidence intervals for μ_0 . Batschelet chart for obtaining a 95% confidence interval for the mean direction μ_0 . $\Pr(-\delta < \mu_n < \delta) = 0.95$

Obr.3-7 95% intervaly spolehlivosti pro středový průměr μ_0 (Batschelet, 1981).

Příklad 3:

Posuzuje se soubor 63 směrů distribuce dopisů v Keni s orientací hlavní železnice s cílem potvrdit její dominantní vliv na prostorovou distribuci. Generelní směr železnice je 272° , tedy $H_0: 2\mu_0=272^\circ$. Protože tento test bere v úvahu orientaci, jsou všechny úhly zdvojené. Výběrový průměr \bar{x}_0 je 246° a průměr výslednice délky r^* je 0,4145. Velikost intervalů spolehlivosti pro \bar{x}_0 závisí zčásti na odchylce populace. Protože parametr koncentrace pro populaci je neznámý, při testu uplatníme jedno z Batscheletových schémat k získání intervalu spolehlivosti okolo výběrového průměru (použijeme r^* a pomocí d určíme interval – viz též tabulka 7 v Gaile, Burt, 1980). Pro $n = 63$ a $r^* = 0,4145$ nalezneme 95% interval spolehlivosti (229;273). Protože předpokládaný střední směr 272° spadá dovnitř intervalu spolehlivosti, nulová hypotéza nemůže být zamítnuta na 5% hladině významnosti. Současný směrový průměr distribuce dopisů v Keni tedy není významně odlišný od orientace železniční osy.

3.3.4 Dvouvýběrové testy pro směrový průměr

Testujeme, zda mají výběry ze dvou populací stejný směrový průměr. Testy tohoto typu předpokládají, že parametry koncentrace obou populací (k_1 a k_2) jsou stejné, a že populace mají Von Misesovo rozložení se směrovými průměry μ_1 a μ_2 .

Pro tento účel se používá dvouvýběrový Watsonův a Williamsův test (Watson, Williams, 1956). Ten je podmíněný jenom r^* a nezávisí na \bar{x}_0 , čímž se liší od jiných podobných testů, které jsou závislé na \bar{x}_0 i na r^* .

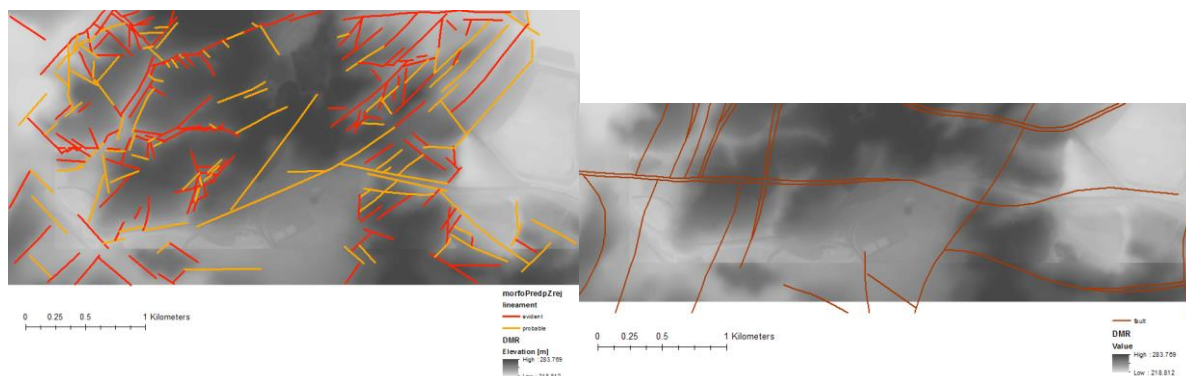
Pro výslednici celkového (společného) výběru (R) narůstají součty jednotlivých výslednic výběrů délek (r_1^*, r_2^*) (jak se jejich směry vzdalují). Proto je H_0 zamítnuto pro velké hodnoty $r_1^* + r_2^*$. Pokud je R blízko jedničky ($>0,7$), může se vypočítat kritická hodnota F-rozdělení podle následující rovnice (Gaile, Burt 1980):

$$F_{+,n-2} = \left(1 + \frac{3}{8k}\right) (n - 2) \frac{r_1^* + r_2^* - R}{n - r_1^* - r_2^*}$$

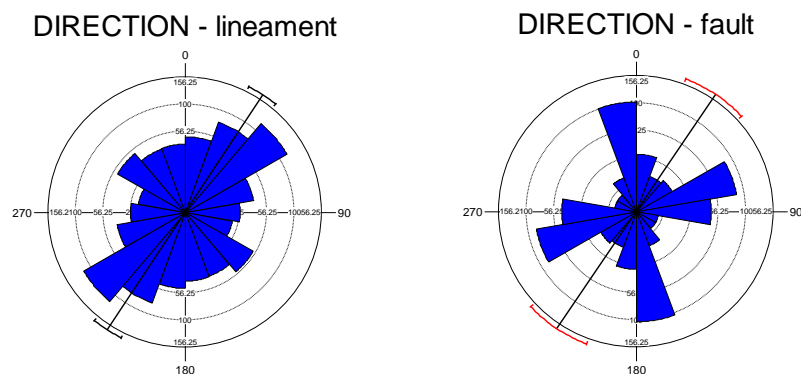
kde k je odhadnuto užitím Gumbelovy tabulky 2 (Gumbel, 1954) nebo Batscheletovy tabulky B (Batschelet, 1971). Pohodlnější použití nabízí implementace v SW Oriana nebo R.

Příklad 3:

Cílem je posoudit, zda mají morfologické lineamenty na povrchu (odvozené z DMR) stejnou orientaci a tedy i možný genetický původ ve starých zlomových strukturách variského patra. Pilotní území bylo blízko Orlové.



Obr.3-8 Morfolineamenty (vlevo) a průběh zlomů na karbonském paleoreliéfu (vpravo) (Horák, Orliková, 2019)



Obr.3-9 Distribuce směrů lineamentů (vlevo) a zlomů (vpravo) (Horák, Orliková, 2019)

Tab. 3-5 Statistické porovnání směrů zlomů a lineamentů a výsledky testů (Horák, Orliková, 2019)

Variable	DIRECTION	DIRECTION
Subgroup	fault	lineament
Data Type	Axial	Axial
Number of Observations	306	457
Mean Vector (μ)	33.893°	33.12°
Length of Mean Vector (r)	0.166	0.28
Median	26.154°	38.332°
Concentration	0.336	0.584
Circular Variance	0.417	0.36
Circular Standard Deviation	54.318°	45.683°
One Sample Tests		
Rayleigh Test (Z)	8.402	35.937
Rayleigh Test (p)	2.24E-04	< 1E-12
Rao's Spacing Test (U)	214.726	161.834
Rao's Spacing Test (p)	< 0.01	< 0.01
Watson's U2 Test (Uniform, U2)	2.268	2.386
Watson's U2 Test (p)	< 0.005	< 0.005
Kuiper's Test (Uniform, V)	5.204	5.113
Kuiper's Test (p)	< 0.01	< 0.01
Second Order Statistics		
Grand Mean Vector (GM)	33.407°	
Length of Grand Mean Vector (r)	0.223	
Number of Means	2	
Hotelling's Test (F)	0	
Hotelling's Test (p)	< 1E-12	
Moore's Modified Rayleigh Test (R*)	1.061	
Moore's Modified Rayleigh Test (p)	< 0.025	

Obě distribuce mají téměř totožný směrový průměr (33°, tab. 3-4), který je ale zejména o zlomů nesmyslný, protože z distribuce směrů je zřejmá koncentrace do 2 odlišných směrů. Přestože všechny testy (Rayleighův, Rao, Watson, Kuiper) potvrdili rovnoměrnost distribuce jak pro zlomy, tak pro lineamenty, je to zavádějící.

Bohužel i porovnání obou směrových průměrů (second order statistics) neodhalilo rozdílnost distribucí. Až X^2 testy (se šířkou třídy 10°) a Mardia-Watson-Wheeler testy potvrdily odlišnost obou distribucí (tab. 3-6).

Tab. 3-6 Výsledky X^2 testu a Mardia-Watson-Wheeler testu pro porovnání distribucí zlomů a lineamentů (Horák, Orliková, 2019)

CHI-SQUARED TESTS				
Variables (& observations)	Chi-Squared	p	df	Class

				width
LINEAM & FAULT (457 & 306)	263.675	< 1E-12	17	10°
MARDIA-WATSON-WHEELER TESTS				
Variables (& observations)	W	p		
LINEAM & FAULT (457 & 306)	36.742	1.05E-08		

Příklad 4 (podle Gaile, Burt 1980):

V San Franciscu i Tucsonu napadlo v roce 1971 jen kolem 12-ti palců srážek a přešlo přibližně stejný počet dní na obou místech (tab. 3-7).

Určíme si nulovou hypotézu $H_0: \mu_1 = \mu_2$.

Podle nulové hypotézy se předpokládá, že směrový průměr a tudíž i sezónní srážky obou populací jsou si rovny. Jednotlivé směrové průměry odpovídají konkrétní době v roce, kdy vrcholí deštivé období.

Tab. 3-7 Četnosti srážek ve městech San Francisco a Tucson (Gaile, Burt 1980, upravila Vítková, 2013)

Výběr 1 - San Francisco				
Měsíc	θ	f_i pozorovaná četnost	$f_i(\frac{30}{D_i})$	f_θ upravená četnost
Leden	0	8	7.74	7.85
Únor	30	5	5.36	5.43
Březen	60	5	4.84	4.91
Duben	90	6	6.00	6.08
Květen	120	3	2.90	2.94
Červen	150	0	0.00	0.00
Červenec	180	0	0.00	0.00
Srpen	210	1	0.97	0.98
Září	240	2	2.00	2.03
Říjen	270	3	2.90	2.94
Listopad	300	7	7.00	7.00
Prosinec	330	14	13.55	13.74
		N=54	N'=53.26	54.00
Výběr 2 - Tucson				
Měsíc	θ	f_i pozorovaná četnost	$f_i(\frac{30}{D_i})$	f_θ upravená četnost
Leden	0	1	0.97	0.99
Únor	30	3	3.21	3.28
Březen	60	0	0.00	0.00
Duben	90	2	2.00	2.04
Květen	120	1	0.97	0.99
Červen	150	0	0.00	0.00
Červenec	180	8	7.74	7.90
Srpen	210	15	14.52	14.82
Září	240	5	5.00	5.10
Říjen	270	7	6.77	6.91
Listopad	300	2	2.00	2.04
Prosinec	330	6	5.81	5.93
		N=50	N'=48.99	50.00

Tab. 3-8 Četnosti srážek ve spojeném datovém souboru za obě města (Gaile, Burt 1980, upravila Vítková, 2013)

Měsíc	θ	Spojený výběr		
		f_i pozorovaná četnost	$f_i(\frac{30}{D_i})$	f_{θ} upravená četnost
Leden	0	9	8.71	8.86
Únor	30	8	8.57	8.72
Březen	60	5	4.84	4.92
Duben	90	8	8.00	8.14
Květen	120	4	3.87	3.94
Červen	150	0	0.00	0.00
Červenec	180	8	7.74	7.87
Srpen	210	16	15.48	15.75
Září	240	7	7.00	7.12
Říjen	270	10	9.68	9.84
Listopad	300	9	9.00	9.15
Prosinec	330	20	19.35	19.68
		N=104	N'=102.25	104.00

Protože $R = 0,241$ není blízko jedničky, použije se pro tento příklad jako kritická 5% hodnota R' , kde $R' = (r_1^* + r_2^*)/n$. Kritická hodnota pro Watsonův a Williamův dvouvýběrový test je rovna 0,27. Pro San Francisco-Tucson příklad vyšla testové kritérium $R'=0,51$ a proto je hypotéza o rovnosti směrových průměrů silně zamítnuta. Tím je dokázáno, že existuje významný rozdíl v sezónnosti počtu srážek mezi oběma lokalitami.

3.4 Implementace v SW

V ArcGIS od verze 10.3 je k dispozici funkce Linear Directional Mean facility (<http://desktop.arcgis.com/en/arcmap/10.3/tools/spatial-statistics-toolbox/linear-directional-mean.htm>). Vstupem musí být linie. Vypočítá směrový průměr (ve 2 variantách – pro matematické osy DirMean a pro azimut CompassA), kruhový rozptyl (CirVar), souřadnice těžiště (AveX, AveY) a délku výsledného vektoru (AveLen). Ale i když je zde k dispozici výběr metriky (Euklidovská nebo Manhattan) a výběr, zda jde o vektorový nebo směrový (osní) výpočet, není k dispozici výběr alternativních módů pro interpretaci linií (zda udělat analýzu vektorů mezi uzly nebo všech segmentů tj. mezi lomovými body) takže linie je nutné předem segmentovat (nebo naopak spojovat) podle požadavků.

Úplná nabídka nástrojů se nalezne ve specializovaném SW jako je [Oriana](#).

3.5 Sférické pravděpodobnostní rozdělení

V řadě geologických (a jiných) aplikacích je nutné nehodnotit distribuci směrů pouze v rovině, ale je nutné ji posuzovat ve 3D.

K této problematice se lze více dočíst v Gaile, Burt (1980).

4 Teoretické modely distribuce bodů

Pro interpretaci zjištěné distribuce bodů a pro testování jejího typu potřebujeme mít teoretické modely distribuce bodů, které odpovídají jistým typovým situacím se zřejmou interpretací.

Typické je porovnávání pozorované distribuce bodového vzoru s 3 základními teoretickými typy distribuce, tedy náhodnou, shlukovou a pravidelnou distribucí.

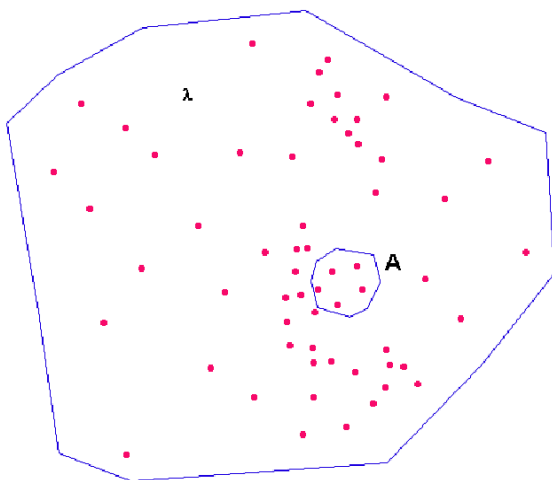
Nejčastěji se využívá model úplné prostorové náhodnosti CSR (*complete spatial randomness*). Často se ale vyskytují situace, kdy CSR není vhodným modelem. Při průzkumové analýze je diskutován typ struktury, který je přítomen v datech a obecně indikuje shlukování nebo pravidelnost, které mohou být zřejmé a priori díky povaze dat. Pokud chceme „vysvětlit“ určitou povahu pravidelnosti nebo shlukování, potřebujeme pro to formální modely, které jsou vztažené k jiným modelům než CSR

4.1 Modely náhodné distribuce

4.1.1 CSR - homogenní Poissonův proces

CSR používá model založený na homogenním procesu Poissonovy distribuce ve studované oblasti \mathfrak{R} . Pro model jsou podstatné 2 aspekty:

1. Je homogenní, což znamená, že λ je konstantní v \mathfrak{R} , není zde přítom žádný efekt 1.řádu (např. trend)
2. Má Poissonovu distribuci, což znamená prostorovou nezávislost ve výskytu událostí. Počet událostí, který se vyskytuje ve dvou sousedících regionech, není korelován, a není zde přítom žádný efekt 2.řádu.



Obr. 4-1. Distribuce událostí a podoblast A

A je podoblast \mathfrak{R} , $Y(A)$ je počet událostí v oblasti A. Je-li prostorový bodový proces považován za sadu náhodných proměnných $\{Y(A), A \in \mathfrak{R}\}$, pak to znamená, že $Y(A_i)$ a $Y(A_j)$ jsou nezávislé pro jakýkoliv výběr A_i a A_j a dále, že distribuce pravděpodobnosti $Y(A)$ je Poissonovou distribucí

$$f_{Y(A)}(y) = \frac{(\lambda \cdot A)^y}{y!} e^{-\lambda A}$$

A je plocha A

λ je konstanta, intenzita neboli průměrný počet událostí na jednotku plochy.

Průměrná hodnota je $\lambda \cdot A$.

Z toho vyplývá, že n událostí je nezávisle a jednotně distribuováno v \mathfrak{R} . Jinak řečeno – libovolná událost má stejnou pravděpodobnost výskytu v libovolném místě \mathfrak{R} a umístění události nezávisí na poloze jiné události, tedy mezi událostmi nejsou interakce.

Podstatné je, jak můžeme **tuto distribuci vytvořit**.

Můžeme simulovat n událostí z takového procesu uzavřením \mathfrak{R} do obdélníku $\{(x,y): x_1 \leq x \leq x_2; y_1 \leq y \leq y_2\}$, konkrétně generováním událostí se souřadnicí x z rovnoměrné distribuce na intervalu (x_1, x_2) a y souřadnicí z jednoduché distribuce na intervalu (y_1, y_2) a odmítnutím těch událostí, které neleží v \mathfrak{R} . Jinými slovy vyberte náhodně 1 číslo z intervalu (x_1, x_2) a to bude souřadnice x náhodně vygenerovaného bodu, podobně pro souřadnici y ; přitom se kontroluje, zda výsledný bod je uvnitř požadované oblasti. Události jsou generovány až do dosažení požadovaného počtu.

4.1.2 Heterogenní Poissonův proces

Heterogenní Poissonův proces je asi nejjednodušší alternativou k CSR. Konstantní intenzita λ pro CSR je nahrazena proměnnou funkcí intenzity $\lambda(s)$, ale výskyt každé události zůstává nezávislý na jiné. Výsledný proces je jednoduchým typem nestacionárního bodového pole s projevem vlivu pouze efektu 1.řádu. Nejjednodušší cestou k simulaci procesu je simulovat CSR na \mathfrak{R} s intenzitou $\lambda_{\max} = \max(\lambda(s))$ a pak vypustit v oblasti S tolik bodů, aby zbylý počet v místě odpovídal místní hodnotě $\lambda(s)$, tedy nezávisle ponechat události v oblasti S s pravděpodobností $\lambda(s) / \lambda_{\max}$.

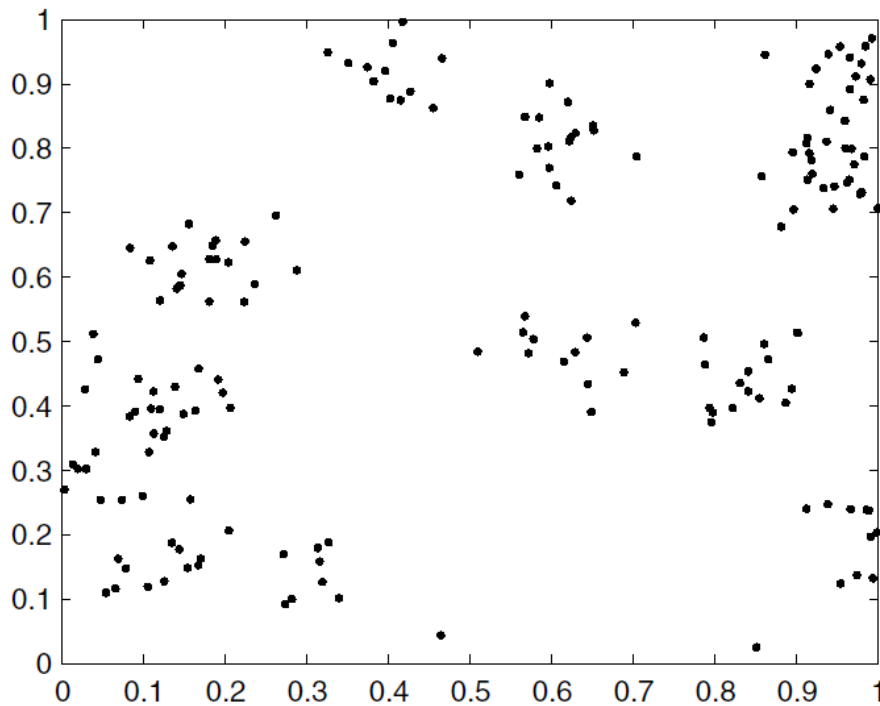
4.1.3 Coxův proces

Coxův proces je přirozeným rozšířením heterogenního Poissonova procesu, tedy intenzita $\lambda(s)$ kolísá náhodně a ne deterministicky. Takový proces je často popisován jako dvojnásobně náhodný (stochastický). $\lambda(s)$ je odvozena z pravděpodobnostní funkce přes \mathfrak{R} , a pak podmíněně na hodnotě $\lambda(s)$ události tvoří heterogenní Poissonův proces s intenzitou $\lambda(s)$. Výsledný proces může být stacionární i nestacionární. Bude stacionární jen tehdy, pokud distribuce pravděpodobnosti, ze které je intenzita generována, je stacionární. V principu může být takový proces simulován nejdříve simulací distribuce pravděpodobnosti pro $\lambda(s)$ přes \mathfrak{R} (tak se stanoví maximální počet $\lambda(s)$ v daném místě) a pak použít vylučovací techniku popsanou u heterogenního Poissonovu procesu.

4.2 Modely shlukové distribuce

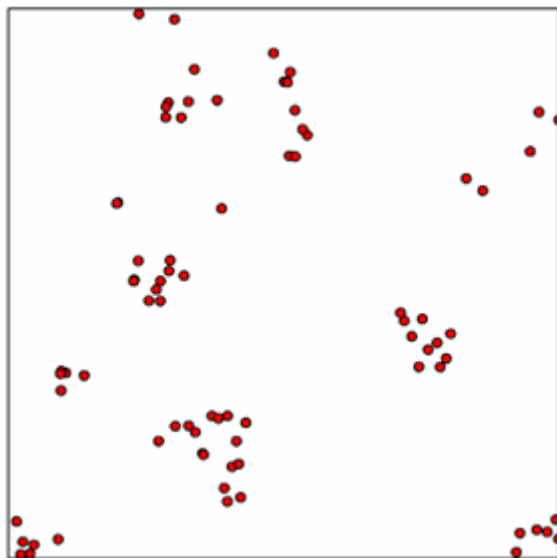
4.2.1 Poissonův shlukovací proces

Poissonův shlukovací proces vzniká z explicitního zahrnutí prostorového shlukovacího mechanismu přímo do modelu. Rodičovské události tvoří CSR proces a každý rodič produkuje náhodný počet potomků realizovaný nezávisle a stejně pro každého rodiče podle distribuce pravděpodobnosti $f(\cdot)$. Nakonec jsou pozice potomků k rodičům nezávislé a stejně distribuované podle určité biviační (2 rozměrné) hustotní funkce $g(\cdot)$. Konečný proces zahrnuje jen potomky. Tento proces je stacionární, je také izotropní, pokud je funkce $g(\cdot)$ radiálně symetrická. Metoda simulace takového procesu vychází přímo z jeho definice. Nejdříve je simulován rodičovský proces, aby byla získána místa umístění rodičovských událostí. Pak je pro každého rodiče nezávisle simulován počet potomků podle funkce $f(\cdot)$. Nakonec je každý z nich umístěn kolem jeho rodiče podle funkce $g(\cdot)$. Potomci potom tvoří realizaci procesu. Abychom se vyhnuli hraničním problémům, musí být rodiče simulováni pro větší oblast než je \mathfrak{R} , aby nebyli ztraceni potomci, kteří leží v oblasti \mathfrak{R} a jejichž rodiče leží vně \mathfrak{R} .



Obr. 4-2. Bodová textura vytvořená Poissonovým shlukovacím procesem (Martinez, Martinez, 2002)

Simulování za uvedených podmínek někteří autoři označují jako **Thomasův proces** (obr. 4-3). V případě použití rovnoměrné distribuce pro rozmístění potomků kolem rodičů jde o **Matérnův proces**. Obecnější modelem je Neyman-Scottův proces (Smith et al. 2011).



Obr. 4-3. Thomasův PSP proces s parametry 20 shluků, směrodatná odchylka 0,03, průměr 5 (Smith et al, 2011)

4.3 Modely pravidelné distribuce

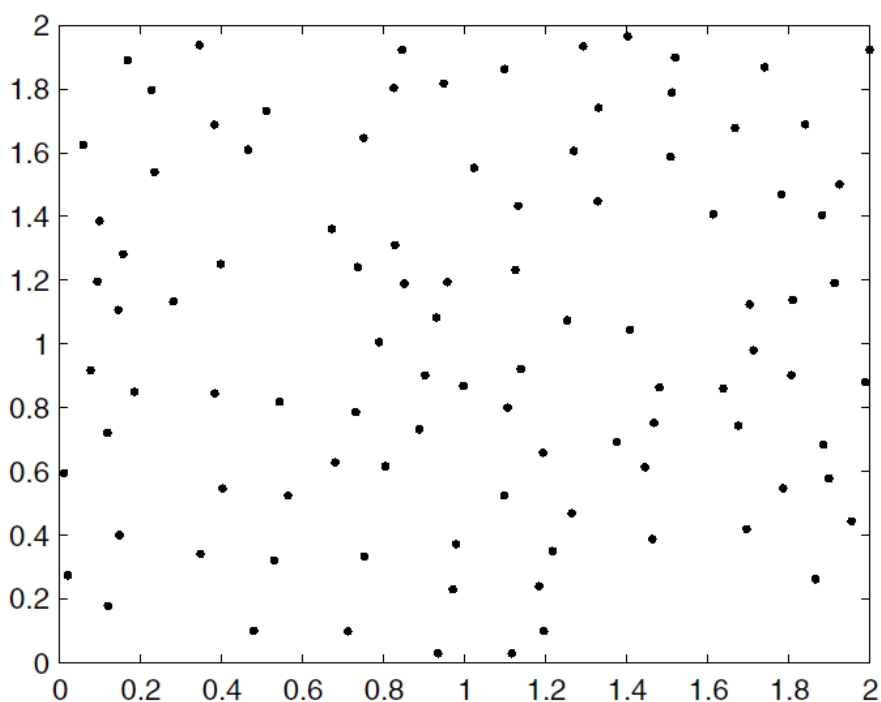
4.3.1 Sekvenční inhibiční proces

Inhibiční proces je jedním, z těch, které často vykazují **pravidelnost**. Pro simulaci takového procesu se využívá mechanismu, který dodržuje minimální vzdálenost mezi 2 událostmi. Označujeme ji jako inhibiční vzdálenost δ (Martinez, Martinez, 2002, s. 510).

Jednou z cest k dosažení takového modelu je nejdříve vygenerovat homogenní Poissonův proces v regionu \mathfrak{R} . Seznam událostí je pak zeštíhlen tak, že jsou vyloučeny všechny páry událostí bližší než δ .

Jinou metodou je generovat kandidáty událostí pomocí homogenního Poissonova procesu vždy po 1 události v daný čas a vypustit kandidáty, které jsou do vzdálenosti δ od již existující události. Tento typ procesu se označuje jako **sekvenční inhibiční proces** (*Sequential Spatial Inhibition*, SSI) (Ripley, 1981).

Pochopitelně pokud bude inhibiční vzdálenost δ velká vzhledem k \mathfrak{R} , pak bude obtížné až nemožné vygenerovat dostatečný počet bodů (obr.4-4).



Obr. 4-4 Bodová textura vytvořená SSI (Martinez, Martinez, 2002, s. 510)

4.3.2 Straussův proces

Straussův proces (Ripley, 1981) vytváří bodovou texturu, kde je povolen pouze určitý podíl událostí do jisté vzdálenosti δ k jiné události. Generování začíná umístěním 1. události rovnoměrně náhodně v \mathfrak{R} . Následuje generování dalších událostí, podobně jako u SSI procesu. Pokud existuje jiná událost uvnitř poloměru δ nově navrhované lokality, je akceptována s pravděpodobností c^m , kde m je počet událostí bližších než δ . Inhibiční parametr je dán c s hodnotami v intervalu $[0,1]$ (Martinez, Martinez, 2002, s. 513).

Inhibiční parametr specifikuje podíl událostí, který je povolen uvnitř inhibiční vzdálenosti. Pokud je $c=0$, je výsledný proces stejný jako SSI. Podobně jako u SSI procesu je třeba dávat pozor na specifikování parametrů procesu, abychom zajistili, že bude vygenerován požadovaný počet událostí.

Postup (Martinez, Martinez, 2002, s. 513):

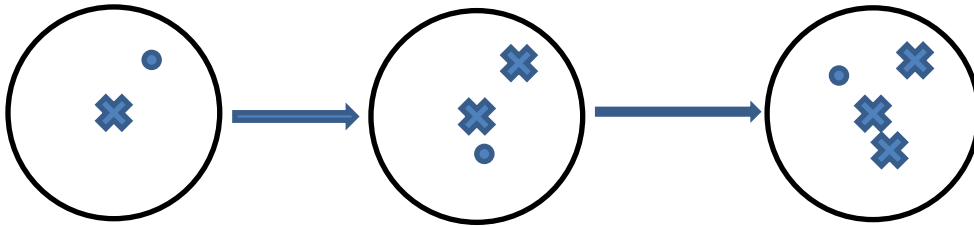
1. Vyberte parametry n , c a δ .
2. Vygenerujte 1. událost lokalizovanou v s_1 rovnoměrně náhodně v \mathfrak{R} (CSR proces)
3. Vygenerujte kandidáta lokalizace další události s_i opět rovnoměrně náhodně v \mathfrak{R}

4. Spočítejte pravděpodobnost c^m , akceptujte kandidáta s_i
5. Opakujte kroky 3 a 4 až do dosažení požadovaného počtu událostí n . Pochopitelně všechny události musí být umístěny uvnitř regionu \mathfrak{R} .

Příklad:

Volíme $c=0,5$ a postupně generujeme body a rozhodujeme, zda jsou platné nebo ne podle jejich pravděpodobnosti (viz obr. 4-5):

- a) $m=0$ $p=0.5^0=1$ Bod je zcela jistě umístěn.
- b) $m=1$ $p=0.5^1=0.5$ Bod je umístěn s poloviční pravděpodobností, tedy např. ANO.
- c) $m=2$ $p=0.5^2=0.25$ Bod je umístěn se čtvrtinovou pravděpodobností, tedy např. NE.



a) $m=0$ $p=0.5^0=1$

1.bod bude zcela jistě umístěn.

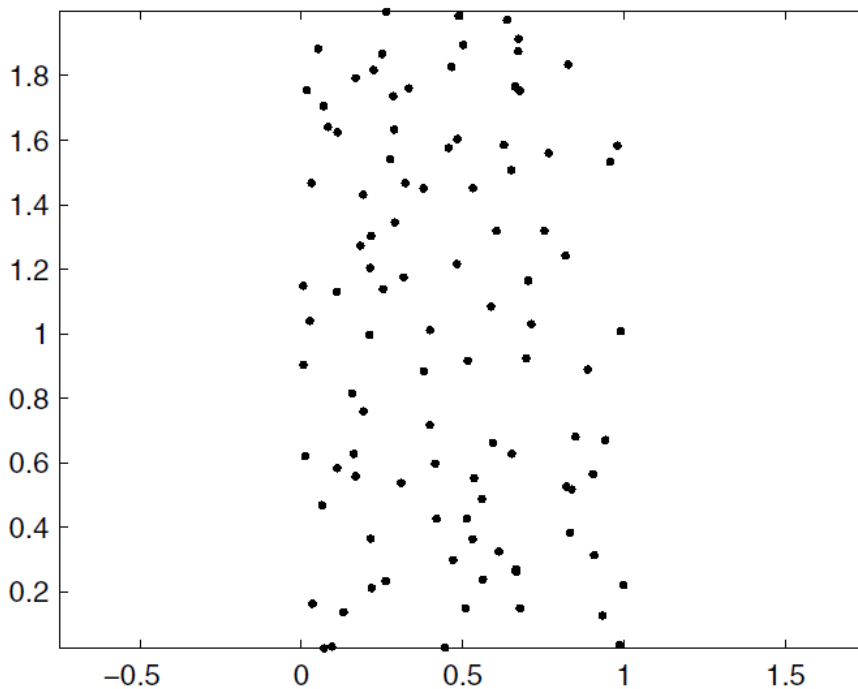
b) $m=1$ $p=0.5^1=0.5$

Při $p=0.5$ bylo rozhodnuto o umístění 2.bodu.

c) $m=2$ $p=0.5^2=0.25$

Při $p=0.25$ bylo rozhodnuto o neumístění 3.bodu.

Obr. 4-5 Demonstrace Straussova procesu.



Obr. 4-6. Bodová textura vygenerovaná Straussovým procesem s $\delta=0.1$ a $c=0.5$ (Martinez, Martinez, 2002, s. 513)

4.4 Univerzální modely

4.4.1 Markovovy bodové procesy

Markovovy bodové procesy umožňují vytvořit více obecnou skupinu pravděpodobnostních modelů pro bodové procesy. Zvláště někteří členové této rodiny poskytují flexibilnější rámec pro

modelování pravidelnosti než je jednoduchý inhibiční proces. Takové modely např. dovolují realizovat případ, který může být nepravděpodobný, ale ne nemožný - 2 události se vyskytnou v těsné blízkosti a přitom jde o pravidelný vzorek. Markovovy procesy jsou teoreticky poněkud komplexní modely. Spojená hustotní funkce pro n bodových umístění (s_1, s_2, \dots, s_n) v \mathfrak{R} , která obsahuje m různých párů sousedů, je určena jako (Bailey, Gatrell 1995):

$$f(s_1, \dots, s_n) = \alpha \beta^n \gamma^m \quad \beta > 0 \quad 0 \leq \gamma \leq 1$$

kde α je normalizační konstanta, β sleduje intenzitu procesu a γ popisuje interakce mezi sousedy. Například při $\gamma = 1$ získáváme CSR proces; při $\gamma = 0$ získáváme plně inhibiční proces s mezibodovou vzdáleností δ ; střední hodnoty γ reprezentují formu mírné inhibice.

Obecná simulace Markovových procesů může být dosti komplexní a výpočetně náročná a proto zde nebudeme popisovat její detaily.

4.5 Srovnání jiných modelů než CSR s prostorovým bodovým procesem

Určité Poissonovy shlukovací procesy a určité Coxovy procesy mohou být statisticky nerozlišitelné. Bailey, Gatrell (1995) uvádí, že pokud je distribuce potomků $f(\cdot)$ opět Poissonovou distribucí, je možné dokázat, že se vždy najde distribuce pravděpodobnosti pro $\lambda(s)$ v Coxově procesu, která bude produkovat úplně stejný efekt jako ve shlukovacím procesu pro libovolné $g(\cdot)$. To je zajímavý a jistým způsobem nešťastný výsledek. V takových případech nemáme žádnou metodu statistické analýzy, abychom rozlišili oba procesy (data vzniklá z obou procesů), ačkoliv interpretace těchto modelů je zásadně odlišná (první je projevem heterogenity 1.řádu a prostorové nezávislosti, druhý reprezentuje stacionární efekt 2.řádu). Tak například při studiu výskytu vzácné nemoci nemůžeme být nakonec schopni najít správnou příčinu - jde o důsledek vystavení různému riziku (např. v důsledku faktorů životního prostředí) nebo se potvrzuje infekční charakter šíření choroby v důsledku existence kontaktů mezi jednotlivými případy.

Při výběru možného modelu můžeme použít průzkumné metody. Hlavním problémem je určit stupeň variability pozorované intenzity událostí v \mathfrak{R} a do jaké míry je dán stupněm variability pozorované intenzity událostí v \mathfrak{R} a do jaké míry je to způsobeno heterogenitou procesu nebo prostorovou závislostí 2.řádu. Možnou cestou odhadu intenzity v \mathfrak{R} je použití nějakého typu jádrových metod nebo redukovanou mírou 2.momentu nebo K-funkce, které sledují prostorové závislosti mezi regiony za předpokladu, že proces je izotropní. Informace získané z těchto průzkumných analýz mohou být použity k navržení vhodného typu modelu pro bodový proces - např. heterogenní Poissonův proces nebo Coxův proces.

Je jasné, že tyto přístupy nejsou jednoduché a mohou zahrnovat jak komplexní teoretické úvahy, tak intenzivní výpočty. Často jsou technicky založeny na simulacích. Nemusíme vědět, např. jaká je teoretická K-funkce nebo jaká relevantní vlastnost by měla odpovídat realizaci určitého modelu v naší oblasti \mathfrak{R} . Často je to pro obtíže s hraničním efektem. V tomto případě bychom mohli opakovaně simulovat navrhovaný model v \mathfrak{R} a odhadnout zájmovou vlastnost z těchto simulací. To může být potom srovnáno s odpovídajícím měřením odvozeným z pozorovaného bodového pole a významnost odchylek oceněna pomocí intervalu spolehlivosti určeného ze simulací.

5 Popisná statistika pro body

Body představují nejčastější způsob reprezentace geografických fenoménů. Zpravidla jde ve skutečnosti o 3D objekty. Body jsou umísťovány v těžišti objektů, které reprezentuje centrum pro analýzy. Těžiště se konstruuje např. v místě křížení nejdelší a nejkratší osy objektu (zpravidla plochy). U konvexních objektů se tak může těžiště dostat i mimo vlastní objekt. Pokud je to problém, řešení může být založeno na středu vepsané kružnice, který vždy bude ležet uvnitř objektu.

Při analýze bodového vzoru (distribuce bodů v prostoru) popisujeme příbuznost vzoru k pravidelné, shlukové nebo náhodné prostorové distribuci (viz inferenční testy pro body).

Popisné metody se zabývají určením charakteristiky polohy (např. určení geografického středu, mediánu) a charakteristiky rozptýlení (např. směrodatná vzdálenost nebo směrodatná elipsa). Popisují distribuci bodů pomocí základních statistických charakteristik. Používají se ke srovnání více bodových vzorů nebo ke sledování jejich vývoje v čase.

Velmi jednoduchým, ale také značně hrubým kritériem popisu bodového vzoru je **hustota bodů v ploše** (počet/plocha = n/R), které nepříjemně závisí na definici hranic oblasti (resp. na velikosti oblasti). Z tohoto důvodu jsou lepší charakteristiky založené na **vzdálenosti mezi body** nebo na relativních vzdálenostech jako je např. d_i/d_{max} .

Při výpočtech v relativně malých oblastech používáme euklidovskou geometrii, protože se v nich neprojeví zakřivení Země.

5.1 Charakteristiky střední polohy

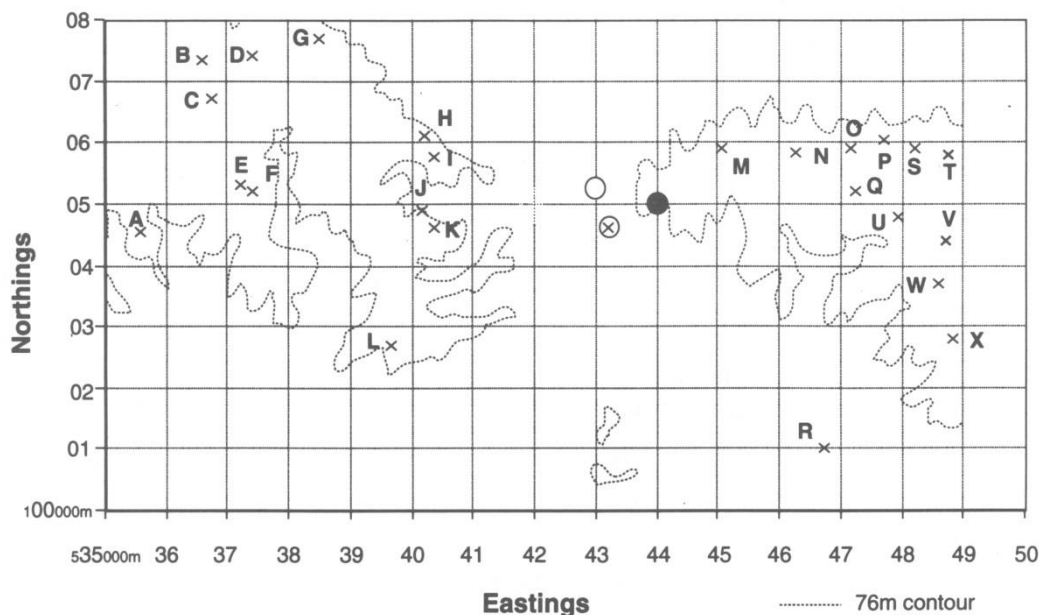
5.1.1 Průměrný střed (*mean centre*)

Průměrný střed leží na průměru souřadnic x_i a y_i .

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}; \bar{Y} = \frac{\sum_{i=1}^n y_i}{n}$$

kde n je počet bodů.

Příklad:



Obr.5-1 Rozmístění mohyl a určení průměrného a váženého průměrného středu (Walford 1995)

Tab. 5-1 Rozmístění mohyl ve východním Sussexu v Anglii a postup výpočtu středu (podle Walford 1995)

Místo	X	Y	Počet mohyl (W)	X*W	Y*W
A	3560	455	1	3560	455
B	3660	735	1	3660	735
C	3675	670	1	3675	670
D	3740	740	1	3740	740
E	3720	530	4	14880	2120
F	3740	520	2	7480	1040
G	3850	770	2	7700	1540
H	4020	610	1	4020	610
I	4035	575	1	4035	575
J	4015	490	1	4015	490
K	4035	460	1	4035	460
L	3965	270	1	3965	270
M	4505	590	1	4505	590
N	4625	585	1	4625	585
O	4715	590	2	9430	1180
P	4770	605	5	23850	3025
Q	4725	520	3	14175	1560
R	4675	100	4	18700	400
S	4820	590	2	9640	1180
T	4875	580	3	14625	1740
U	4795	480	1	4795	480
V	4870	440	2	9740	880
W	4860	370	1	4860	370
Y	4885	280	1	4885	280
	103135	12555	43	188595	21975

Příklad výpočtu středu : $x = 103135/43 = 4297$ $y = 12555/43=523$

Střed je vyznačen prázdným kroužkem na obr. 5.1.

5.1.2 Vážený průměrný střed (weighted mean centre)

Používá se v případě výskytu více událostí či objektů na stejném místě. Pak má každý bod váhu přímo úměrnou počtu událostí/objektů na tomto místě.

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i \cdot w_i}{\sum_{i=1}^n w_i}; \bar{Y} = \frac{\sum_{i=1}^n y_i \cdot w_i}{\sum_{i=1}^n w_i}$$

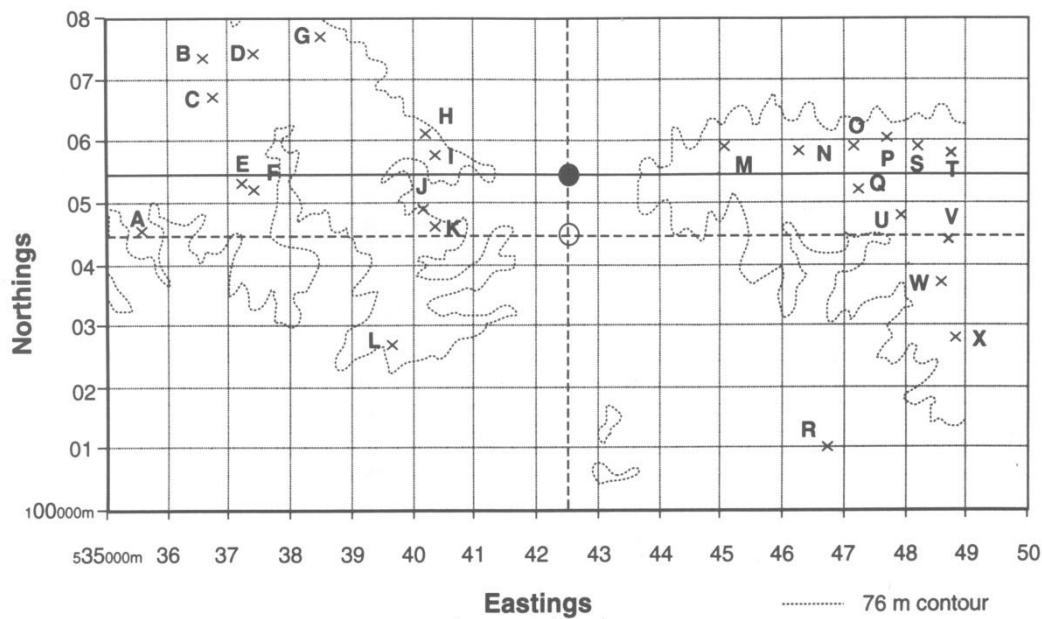
Příklad: $x = 188595/43 = 4386$ $y = 21975/43=511$

5.1.3 Mediánový střed

Jedná se o analogii mediánu, jsou ale rozdílné názory na způsob definice mediánového středu.

- a) najdeme medián na ose X a Y a vedeme z nich linie kolmé na směr osy. Takto definovaný „medián ze souřadnic“ ale nemusí odpovídat mediánu souboru bodů, protože distribuce nemusí být mezi kvadranty vyrovnaná.

Příklad:



Obr. 5-2 Rozmístění mohyl a určení mediánového středu (Walford 1995)

X=4235 Y=553

Střed je vyznačen plným kroužkem na obr. 4.2.

- b) Rozdělíme počet bodů do 4 stejně početných skupin pomocí průměrů horizontální a vertikální linie. Problémem je, že je to nejednoznačná úloha, protože může existovat více řešení (více proložených linií).

Příklad: X=4235 Y=450

Střed je vyznačen prázdným kroužkem.

Na obr.5-2 je vykreslena izolinie 76 m. Většina bodů leží ve výše položených místech ve sledovaném území a tvoří 2 výrazné shluky. Vypočtené průměry však nepatří ani k jednomu bloku a dokonce spíše leží v údolí (pod uvedenou vrstevnicí).

- c) v severní Americe se prosazuje střed s nejvyšší dostupností (minim. vzdálenosti do všech bodů). Někdy se používá pro něj označení MAT (minimum aggregated travel). Tento mediánový střed o souřadnicích X a Y (obě s vlnovkou) musí splňovat následující podmínku:

$$\min \sum_{i=1}^n \sqrt{(x_i - \bar{X})^2 + (y_i - \bar{Y})^2}$$

Praktický výpočet je založen na optimalizaci popsané v Smith et al. 2011 (s.119-120). Toto řešení však již spadá do lokálních statistik s využitím teorie grafů. Konkrétně jde o místo s nejlepší centralitou měřenou blízkostí středu (*closeness centrality*).

Vzdálenosti jsou zde uvažovány jako euklidovské, mohly by být ale použity i jiné metriky.

5.1.4 Geometrický střed (*geometric mean*)

Geometrický střed $GM(x,y)$ je jako charakteristika střední polohy méně citlivá na odlehlé hodnoty. Implementace je k dispozici v CrimeStat.

$$GM(x) = \prod_{i=1}^n \sqrt[n]{x_i}; \quad GM(y) = \prod_{i=1}^n \sqrt[n]{y_i}$$

5.1.5 Harmonický střed (*harmonic mean*)

Harmonický střed $HM(x,y)$ je také charakteristika střední polohy méně citlivá na odlehlé hodnoty. Pozor na hodnoty souřadnic blízké nule. Implementace je k dispozici v CrimeStat.

$$HM(x) = \frac{n}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i}}; \quad HM(y) = \frac{n}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{y_i}}$$

5.1.6 Směrový střed (*mean angle*)

Vychází se z výpočtu směrového průměru u kruhové statistiky, kde jednotlivé směry θ_i reprezentují spojnice bodů se zvoleným počátkem (např. bod o souřadnicích min. X a min. Y, neboli levý dolní roh MBR). Vedle směru se počítá rovněž vzdálenost od počátku d_i . Střední směrová vzdálenost je jednoduše aritmetický průměr z délek d . Střední úhel se vypočte jako:

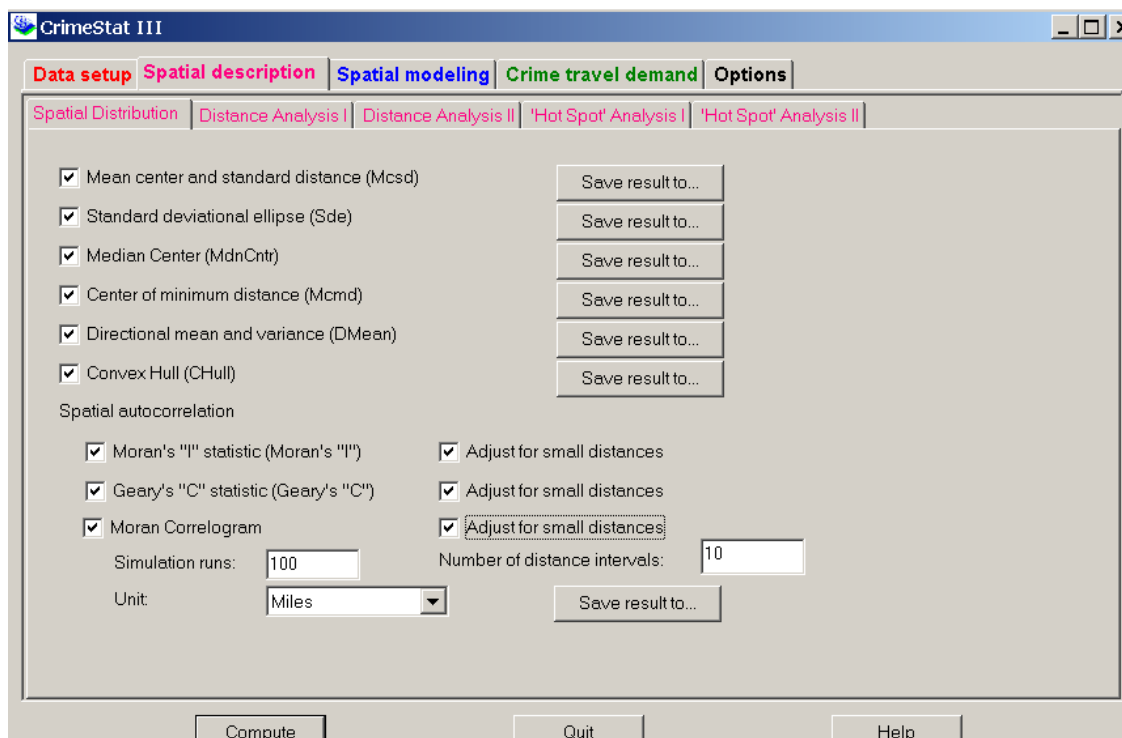
$$\bar{\theta} = \left| \arctan \left(\frac{\sum_{i=1}^n d_i \sin \theta_i}{\sum_{i=1}^n d_i \cos \theta_i} \right) \right|$$

V čitateli je suma ΔY_i , ve jmenovateli suma ΔX_i . Jejich poměr udává průměrný tangens, arctan tedy příslušný úhel.

Směrový střed se získá vnesením úhlu z počátku a na něj příslušná střední vzdálenost. Souřadnice středu $MA(x,y)$ jsou:

$$MA(x) = \frac{1}{\sum_{i=1}^n d_i} \sum_{i=1}^n d_i \cos \theta_i; \quad MA(y) = \frac{1}{\sum_{i=1}^n d_i} \sum_{i=1}^n d_i \sin \theta_i$$

Výpočet je k dispozici v CrimeStat (obr. 5-3).

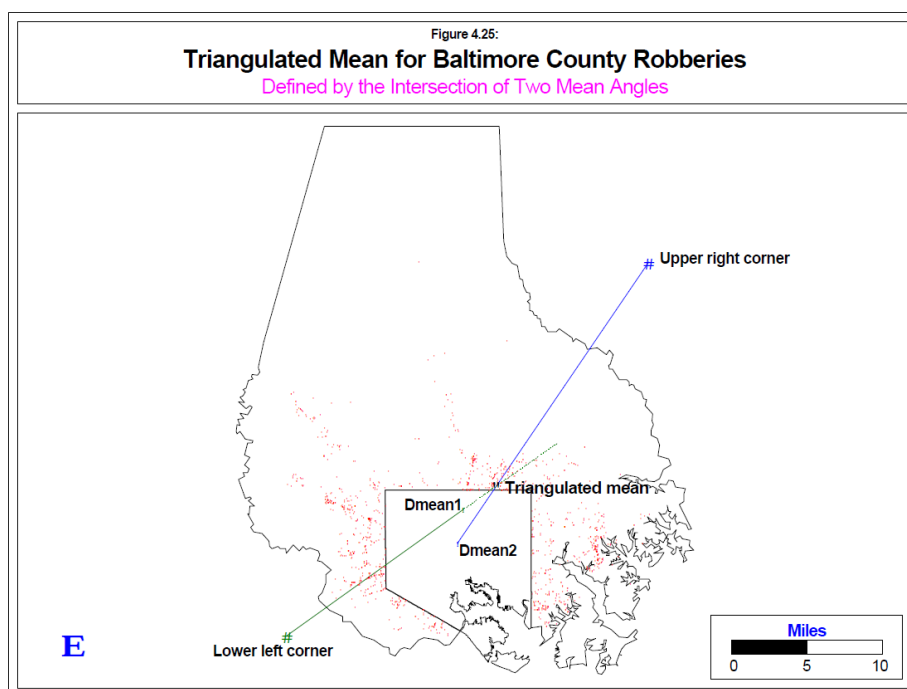


Obr. 5-3 Nabídka funkcí pro popisnou statistiku sady bodů v programu CrimeStat III (Levine and Associates, 2004, kap. 4)

5.1.7 Trojúhelníkový střed (*triangulated mean*)

Vynesou se 2 polopřímky z počátku v levém dolním a pravém horním rohu MBR do příslušných směrových středů. Jejich průsečík udává trojúhelníkový střed.

Výpočet je k dispozici v CrimeStat (obr. 5-3).



Obr. 5-4 Konstrukce trojúhelníkového středu (Levine and Associates, 2004, kap. 4)

5.2 Charakteristiky rozptýlení

5.2.1 Směrodatná vzdálenost (standard distance)

Směrodatná vzdálenost je analogií výpočtu směrodatné odchylky (odmocnina z rozptylu) ze souřadnic jednotlivých bodů. Měří tedy variabilitu kolem průměrného středu.

$$S_d = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n} + \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}{n}}$$

Příklad:

Tab. 5-2 Rozmístění mohyl ve východním Sussexu v Anglii a postup výpočtu směrodatné vzdálenosti (podle Walford 1995)

Místo	X	Y	Počet mohyl (W)	(X-x)*(X-x)	(Y-y)*(Y-y)
A	3560	455	1	543169	4624
B	3660	735	1	405769	44944
C	3675	670	1	386884	21609
D	3740	740	1	310249	47089
E	3720	530	4	332929	49
F	3740	520	2	310249	9
G	3850	770	2	199809	61009
H	4020	610	1	76729	7569
I	4035	575	1	68644	2704
J	4015	490	1	79524	1089
K	4035	460	1	68644	3969
L	3965	270	1	110224	64009
M	4505	590	1	43264	4489
N	4625	585	1	107584	3844
O	4715	590	2	174724	4489
P	4770	605	5	223729	6724
Q	4725	520	3	183184	9
R	4675	100	4	142884	178929
S	4820	590	2	273529	4489
T	4875	580	3	334084	3249
U	4795	480	1	248004	1849
V	4870	440	2	328329	6889
W	4860	370	1	316969	23409
X	4885	280	1	345744	59049
				5614849	556091

Poznámka: hodnoty jsou uvedeny bez desetinných míst; malé x a y znamenají hodnoty souřadnic průměrného středu.

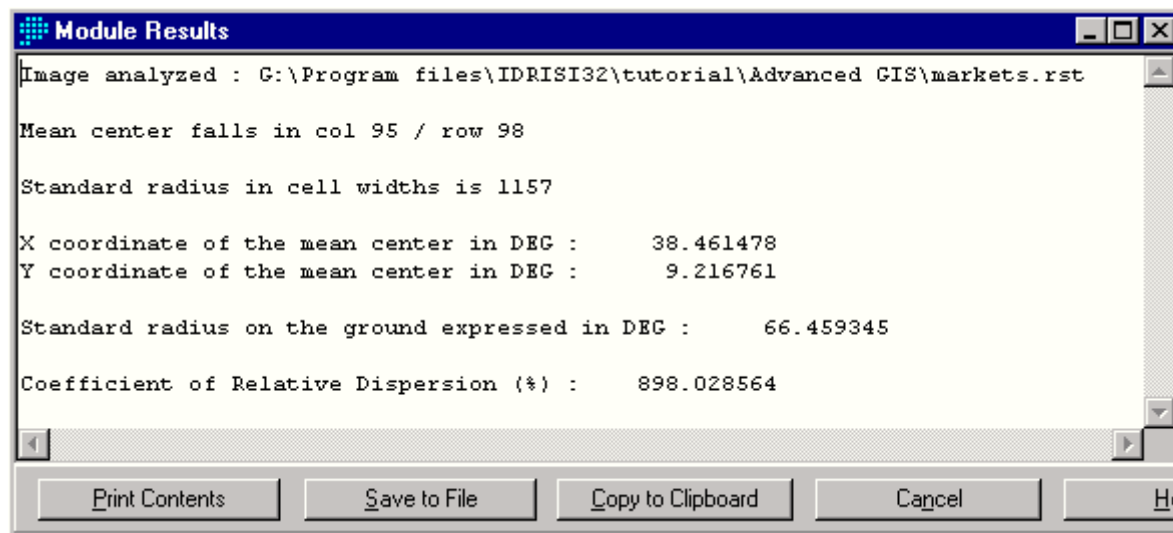
$$S_d = \sqrt{\frac{5614849}{24} + \frac{556091}{24}} = 5,071km$$

5.2.2 Koeficient relativního rozptýlení (*coefficient of relative dispersion*)

Koeficient relativního rozptýlení se vypočte jako směrodatná vzdálenost děleno poloměr kruhu A_k , tedy se stejnou plochou R jakou má studovaná oblast:

$$CRD = 100 * \frac{S_d}{A_k} = 100 * \frac{S_d}{\sqrt{\frac{R}{\pi}}} = 100 * S_d * \sqrt{\frac{\pi}{R}}$$

Je-li oblast různě velká (ohraničená), vznikají zavádějící hodnoty. Proto se někdy používá k získání relativního míry při studiu variability obyvatelstva poloměr země nebo státu místo poloměru kruhu se stejnou plochou jakou má studovaná oblast.



Obr. 5-5 Popisné statistiky bodového vzoru v prostředí programového produktu IDRISI

5.2.3 Elipsa standardizované odchylky (*standard deviation ellipse*)

Slouží k vyjádření směrové odchylky tam kde je výrazná anizotropie v distribuci bodů (protažení apod.). Ke konstrukci elipsy je potřebné určit 3 prvky: úhel rotace, délku delší poloosy a délku kratší poloosy.

Používá se rotace původních dat do nového souřadnicového systému.

Postup:

- 1) vypočtou se souřadnice průměrného středu X, Y.
- 2) pro každý bod se vypočtou transformované souřadnice (posun)

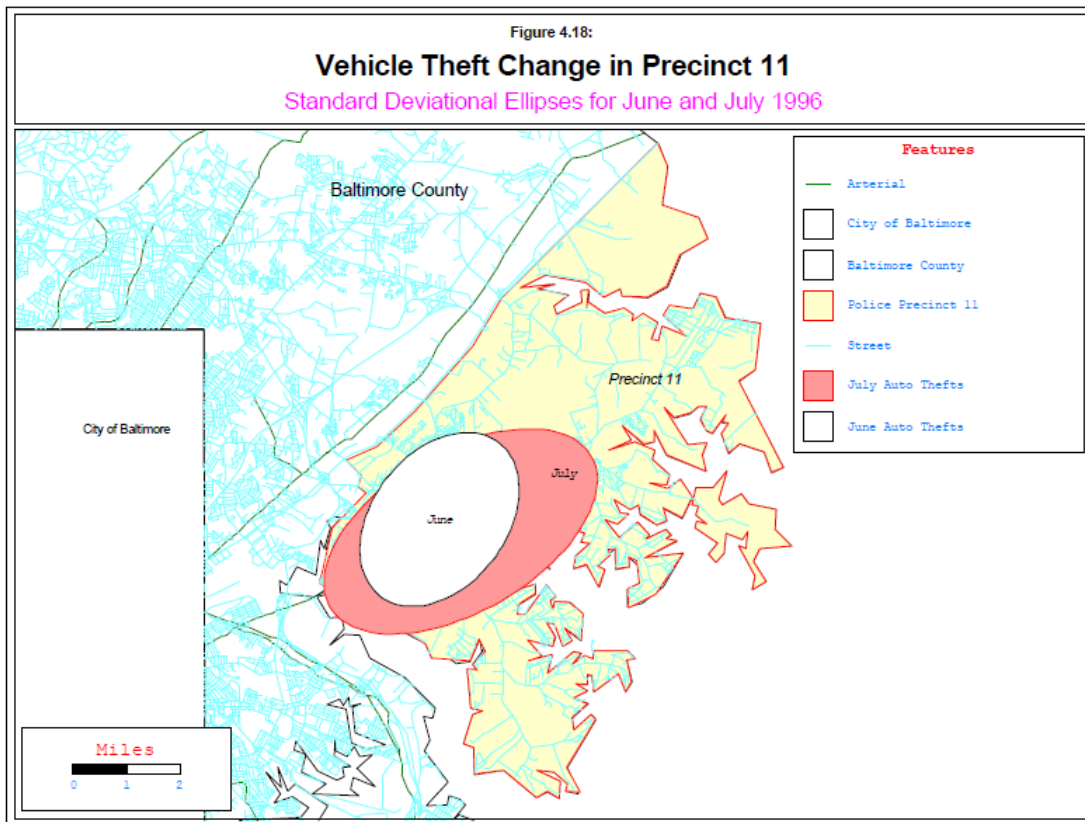
$$x'_i = x_i - \bar{X} \quad y'_i = y_i - \bar{Y}$$

- 3) vypočte se úhel rotace

$$\tan\theta = \frac{(\sum_{i=1}^n x_i'^2 - \sum_{i=1}^n y_i'^2) + \sqrt{(\sum_{i=1}^n x_i'^2 - \sum_{i=1}^n y_i'^2)^2 + 4(\sum_{i=1}^n x_i' \sum_{i=1}^n y_i')^2}}{2 \sum_{i=1}^n x_i' \sum_{i=1}^n y_i'}$$

- 4) vypočtou se délky poloos elipsy (Smith et al., 2018)

$$l_a = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x'_i \cos\theta - y'_i \sin\theta)^2}{n-2}} \quad l_b = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x'_i \sin\theta + y'_i \cos\theta)^2}{n-2}}$$



Obr. 5-6 Změny ve výskytu krádeží aut vyjádřené pomocí elips standardizované odchylky (Levine and Associates, 2004)

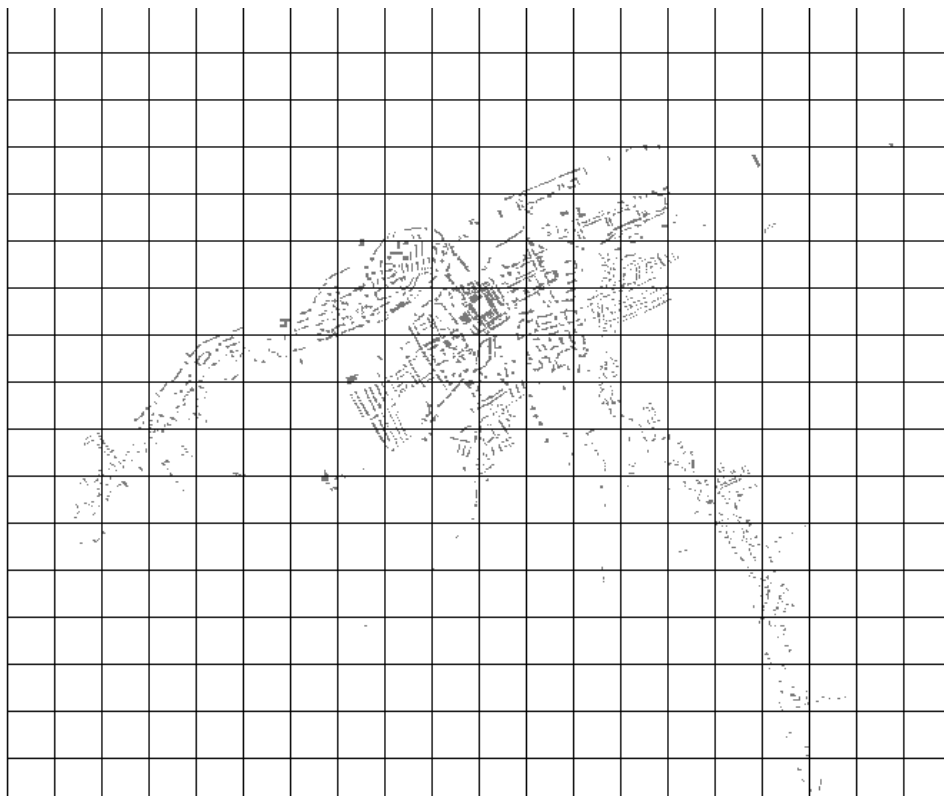
6 Inferenční statistické testy pro body

Určují pravděpodobnost, že určitá distribuce bodů vznikla náhodným procesem. Testy oceňují, zda rozdíl mezi očekávanou náhodnou distribucí a pozorovanou distribucí je významný.

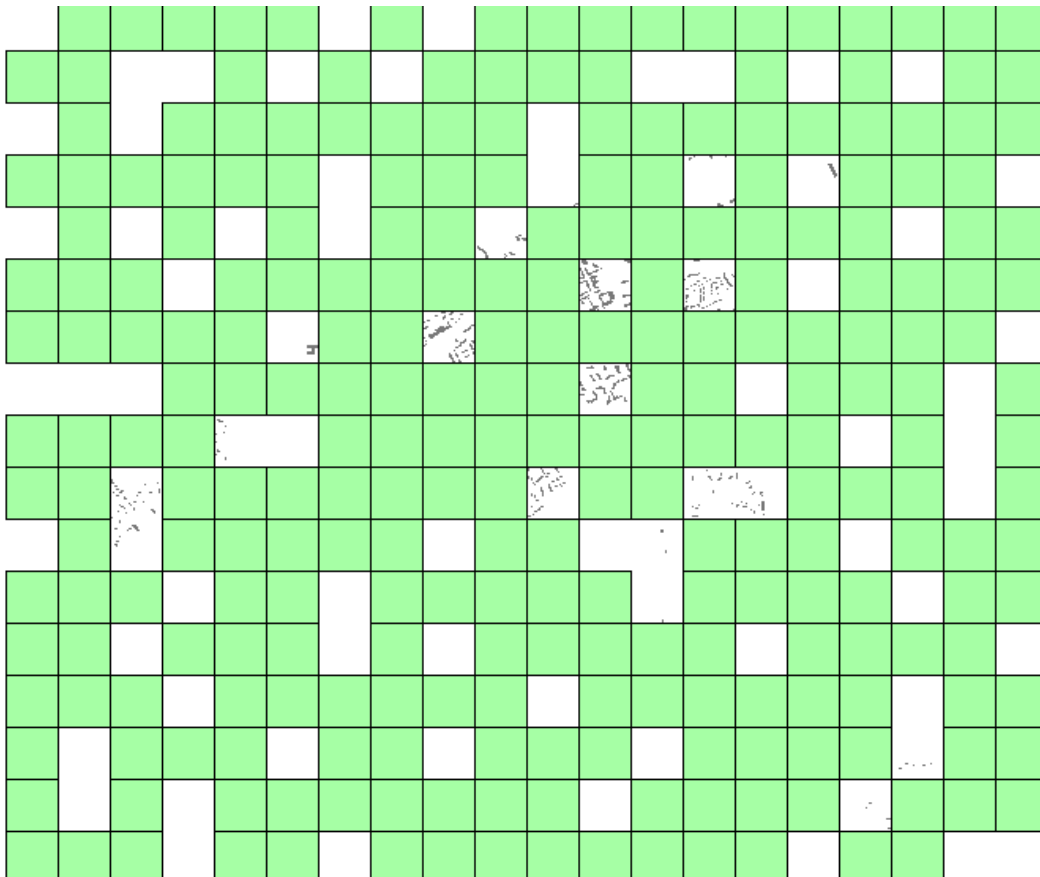
K posouzení náhodnosti pozorovaného bodového vzorku lze použít řady technik. K nejběžnějším patří **kvadrantové testy náhodnosti**, **metoda nejbližších vzdáleností** a její modifikace a v poslední době nejvíce doporučované testy využívající **K-funkce**. Náhodnost bodového vzorku se zkoumá především v situacích, kdy body reprezentují místa určitých událostí (kriminální činy, výskyty nemocí, výskyty různých environmentálních či společenských jevů). Vzhledem ke skutečnosti, že potřebujeme odlišit terminologicky pozorované body od například náhodně rozmístěných bodů, je výhodné označit body reprezentující sledované jevy jako události a označení „body“ ponechat pro bodové objekty, které nerepresentují sledovaný jev. V této souvislosti se tedy hovoří o analýze náhodnosti událostí. Náhodnost událostí pak lze zkoumat z pohledu geografického jako testování náhodnosti rozmístění událostí (zkráceně náhodnosti textury událostí) nebo z pohledu časového jako testování náhodnosti výskytu událostí. Řada technik se pak zabývá současným časoprostorovým zkoumáním náhodnosti výskytu událostí.

6.1 Kvadrantové testy náhodnosti

Základem kvadrantových testů náhodnosti je sledování četnosti událostí v uměle vymezených buňkách (kvadrantech). Předpokládáme, že četnost událostí má Poissonovu distribuci. Události musí být rozmístěny rovnoměrně v území, tvořit homogenní distribuci bez zjevného trendu (Smith et al. 2011, s. 251). Buňky mohou být různého tvaru (zpravidla však kruhové nebo čtvercové) a velikosti, v jedné oblasti \mathcal{R} se však používá konstantní tvar a velikost buněk. Mohou být rozmístěny pravidelně (obr. 6-1) nebo náhodně (obr. 6-3) v oblasti \mathcal{R} . Možnost náhodného rozmístění buněk může být výhodná v situaci, kdy neznáme všechny výskyty událostí a považujeme je pouze za vzorek. Podobně i v případě pravidelného rozmístění buněk (často tvořících pravidelnou mřížku), lze náhodný vzorek simulovat náhodným výběrem z těchto buněk (obr. 6-2).



Obr. 6-1 Pravidelná mřížka



Obr. 6-2 Pravidelná mřížka s náhodným výběrem (vybrány prázdná okénka)



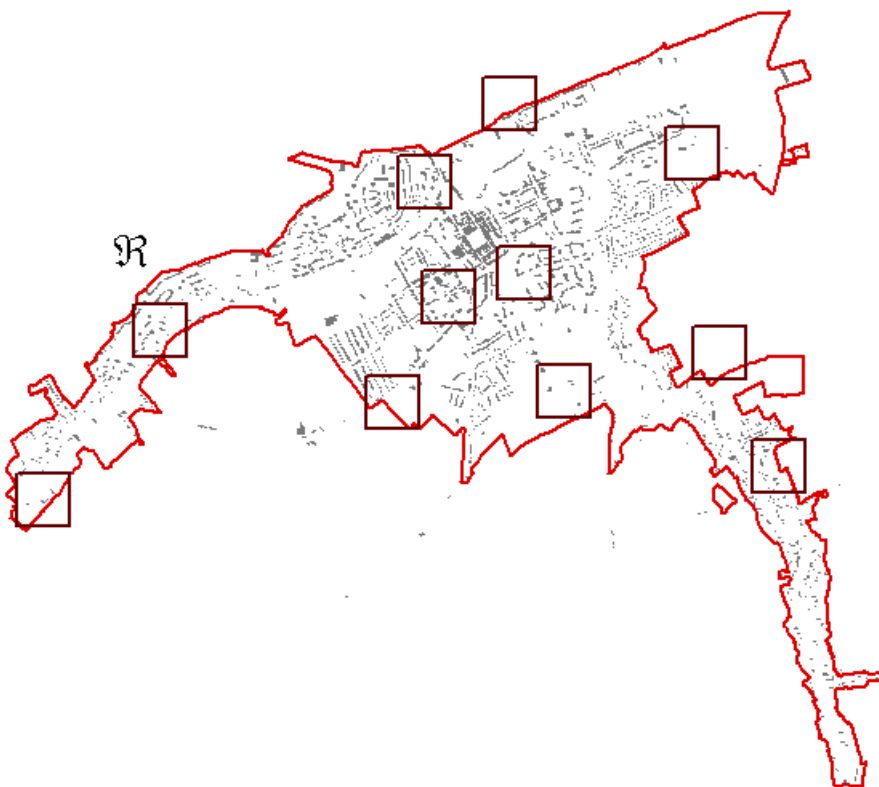
Obr. 6-3 Náhodně rozmístěné buňky

Označme m počet buněk vybraných k testování, x_i pozorovaný počet událostí v buňce i a tedy (x_1, x_2, \dots, x_m) je vektor počtu událostí v m buňkách v oblasti \mathcal{R} .

Doporučuje se volit takovou sadu buněk, kde je průměrný počet událostí > 1 .

Náhodně rozmístěné buňky se mohou překrývat, a to způsobuje problémy v evidenci výskytů událostí, protože pak již počet x_i není nezávislý. Musíme proto přijmout takové vzorkovací schéma, abychom vyloučili překrývající se buňky.

Také překryv kvadrantu s hranicí \mathcal{R} může způsobovat problémy (Obr.6-4). Proto se doporučuje vytvářet ochranné pásmo uvnitř \mathcal{R} , aby k tomuto překrytu nedošlo.



Obr. 6-4 Náhodně rozmístěné buňky, část z nich postižena hraničním problémem (hranici tvoří červená linie)

6.1.1 Index disperze VMR

Jednoduché testy využívají základní vlastnosti Poissonovy distribuce, že aritmetický průměr se rovná rozptylu. Vypočteme tedy $E(x)$ jako aritmetický průměr a $VAR(x)$ jako rozptyl počtu událostí v m buňkách v oblasti \mathcal{R} . Potom poměr **VMR** (*variance-mean ratio*) se nazývá **indexem disperze** a ICS (*index of cluster size*) **indexem velikosti shluků** (Bailey, Gatrell, 1995).

$$VMR = \frac{VAR(X)}{E(X)} \quad ICS = VMR - 1$$

Pokud $VMR = 1$, resp. $ICS = 0$, jde o **náhodný vzorek**, protože distribuce odpovídá parametrům Poissonovy distribuce. Pokud je $VMR > 1$ (resp. $ICS > 0$), indikuje se **shlukování událostí**. V případě, že $VMR < 1$ (resp. $ICS < 0$), naznačuje to existenci **pravidelného vzorku**.

Pozor při hodnocení na autokorelační efekt, který může výsledky deformovat.

Testování náhodnosti je založeno na prokázání významnosti odchylky jedním či druhým směrem od náhodného stavu ($VMR=1$, $ICS=0$). K testování se používá t test nebo X^2 test dobré shody. Ve

všech případech (t test i X^2 test) bývá nulová hypotéza zamítnuta, je-li pravděpodobnost testované charakteristiky menší než kritická hodnota (běžně 0.05).

6.1.1.1 X^2 test pro index disperze

$$X^2 = (m - 1) * VMR = \frac{(m - 1) * VAR(x)}{E(x)} = \frac{\sum_{i=1}^m (x_i - \bar{X})^2}{\bar{X}}$$

kde m je počet čtverců (buněk) (Bailey, Gatrell, 1995).

6.1.1.2 T-test pro index disperze

Výpočet t testu vyžaduje standardizovanou chybu poměru VMR, odhadovanou jako (Bailey, Gatrell, 1995):

$$s_{VMR} = \frac{4}{m - 1}$$

Potom:

$$t = \frac{VMR - 1}{s_{VMR}} = \frac{\frac{VAR(x)}{E(x)} - 1}{s_{VMR}} = \frac{(m - 1) * (VMR - 1)}{4}$$

s $m-1$ stupni volnosti.

6.1.1.3 Klasický X^2 test

Klasický X^2 test se používá ve tvaru, kde O_i je četnost pozorovaná a E_i četnost očekávaná s $k-2$ stupni volnosti (k je počet tříd).

$$X^2 = \sum_{i=1}^k \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i}$$

Spočítáme počet událostí ve čtvercích, každý čtverec je klasifikován podle pozorované četnosti a tak získáme hodnoty O_i . Aby byl výpočet dostatečně věrohodný, měla by mít každá třída alespoň 5 čtverců, jinak se třídy spojují.

Očekávané četnosti E_i vypočteme z Poissonovy distribuce:

$$p(x) = \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda}$$

kde x bude četnost bodů ve čtverci a λ očekávaná střední hodnota (intenzita).

$$E_i = p(x) * m$$

kde m je celkový počet čtverců

Příklad:

počet událostí ve čtverci	počet čtverců O_i	k	p (výskytu n událostí)	očekávaný počet čtverců E_i
0 událostí	10	1	$p(0)=0,195$	$0,195*52=10$
1 událost	17	2	$p(1)=0,319$	$0,319*52=17$

2 události	12	3	p(2)=0,261	0,261*52=14
3 události	8	4	p(3)=0,142	0,142*52=7
4 události	5	5	p(4)=0,058	0,058*52=3
suma	52			

$$\lambda = 85/52=1,6346$$

Pro 0 událostí je:

$$p(0) = \frac{1,6346^0}{0!} e^{-1,6346}$$

Analogicky se vypočítají pravděpodobnosti pro další třídy počtu událostí.

$$X^2 = (10-10)^2/10 + (17-17)^2/17 + (12-14)^2/14 + (8-7)^2/7 + (5-3)^2/3=0,29+0,14+1,33=1,76$$

Výslednou hodnotu porovnáme s kritickou hodnotou pro 3 třídy.

6.1.2 Problémy při kvadrantových metodách

Při kvadrantové analýze je citlivou volba sítě (při pravidelné mřížce) - počátek a velikost buněk. Pokud změním velikost kroku sítě, změní se i VMR. Na základě empirických zkušeností se doporučuje, aby střední hodnota počtu událostí v kvadrantu byla kolem 1,6 nebo alespoň větší než 1.

Obecným nedostatkem kvadrantových metod je, že se nebere ohled na relativní polohu kvadrantů a relativní polohu událostí v kvadrantu.

Někdy se namísto testování X^2 distribuce používá Kolmogorov-Smirnovův test jako silnější a pružnější přístup (Smith et al., 2011, s.251)

Problém volby velikosti buňky sítě pomáhá eliminovat Greig-Smithova procedura, která přináší i možnost částečně využít informaci o relativní poloze buňky.

Greig-Smith procedura vypočítává rozptyl počtu událostí v buňkách z originální mřížky a pak rozptyl pro další odvozené mřížky, které jsou vytvářeny postupným spojováním sousedních buněk v originální mřížce do bloků větší velikosti. Odhady rozptylu jsou vykresleny do grafu proti velikosti bloku (buňky) a opět vrcholy a poklesy na křivce jsou interpretovány jako přítomnost shlukování či pravidelného vzoru. Odkazy na použití této metody:

<http://www.jstor.org/pss/2530919>

http://www.apsnet.org/phyto/PDFS/1993/Phyto83n04_419.pdf

Existují i průzkumné metody založené na „řezu“ (tedy zjišťování počtu událostí v řádku). To může být užitečné pro hledání vzorkovacího schématu při terénních pracích.

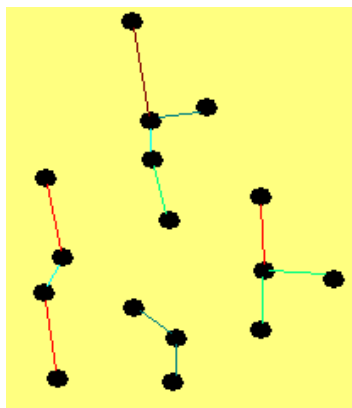
6.2 Metoda nejbližších vzdáleností

Analýza nejbližších vzdáleností (*nearest neighbour distances*) studuje vzdálenosti mezi body, a to především mezi nejbližšími sousedními body. Neposuzuje tedy celkový vzorek a tak nepředchází základnímu nedostatku kvadrantového přístupu.

Při aplikaci této metody je nutné nejdříve rozhodnout, jaký typ vzdáleností se bude používat. Můžeme definovat různé druhy vzdáleností mezi událostmi. Budeme popisovat především vzdálenosti zjišťované podle principu nejbližšího souseda. Zvláště se zajímáme o vzdálenosti událost – událost W, které představují vzdálenosti mezi náhodně vybranou událostí a nejbližší událostí. Jinou možností

představují vzdálenosti bod – událost X , tedy vzdálenosti mezi náhodně vybraným bodem ve studované oblasti a nejbližší pozorovanou událostí. Obě tyto míry mohou být použity, pokud jsou k dispozici všechny události v \mathfrak{R} . W je nedefinované, pokud nemůžeme provést náhodný výběr z událostí nebo pokud nejsou v oblasti všechny události. Naproti tomu X je užitečné i při testování vzorkování – můžeme vybrat náhodný bod v \mathfrak{R} a pak nalézt nejbližší událost a měřit vzdálenost k ní.

Metoda nejbližších vzdáleností je založena na zkoumání pozorované distribuce jedné nebo obou z těchto nejbližších vzdáleností (W nebo X). Mějme na paměti, že nejbližší vzdálenosti poskytují informaci jenom o interakcích mezi událostmi ve velkém měřítku, tedy do relativně malých vzdáleností. Často ale můžeme využít i studia variací ve větších vzdálenostech bodového vzorku v celém \mathfrak{R} .



Obr. 6-5 Nejbližší vzdálenosti W mezi událostmi (barevně rozlišená délka spojnice)

Nejčastěji se studuje kumulativní relativní křivka výskytu zjištěných vzdáleností (kumulativní křivka pravděpodobnosti), tedy distribuční funkce $G(w)$ pro W , respektive $F(x)$ pro X (Bailey, Gatrell, 1995):

$$G'_{(w)} = \frac{COUNT(w_i \leq w)}{n} \quad F'_{(x)} = \frac{COUNT(x_i \leq x)}{m}$$

kde n je počet událostí, resp. m počet náhodně vygenerovaných bodů.

Tytéž funkce lze lépe vyjádřit pomocí indikátorové funkce I :

$$G'_{(w)} = \frac{\sum_{i=1}^n I_i(w)}{n} \quad I_i = \begin{cases} 0 & \dots w_i > w \\ 1 & \dots w_i \leq w \end{cases}$$

$$F'_{(x)} = \frac{\sum_{i=1}^m I_i(x)}{m} \quad I_i = \begin{cases} 0 & \dots x_i > x \\ 1 & \dots x_i \leq x \end{cases}$$

Postupy vyhodnocení distribuce vzdáleností lze rozdělit na **grafické** (zkoumají průběh grafu distribuce vzdáleností) a **numerické** (které vypočítají jistou číselnou charakteristiku a prověřují její náhodnost).

Z grafických metod lze doporučit vykreslení a interpretaci:

1. Graf závislosti $G'(w)$ na W (nejlépe s doplněním simulačních obálek)
2. Graf závislosti $F'(x)$ na X (nejlépe s doplněním simulačních obálek)
3. Graf závislosti $G'(w)$ na $F'(x)$

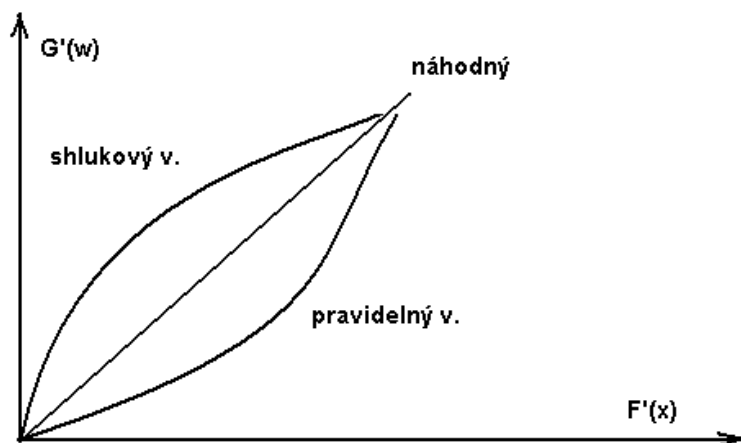
U některých grafických postupů je potřebné odvodit teoretickou funkci $G(w)$ resp. $F(x)$, tedy funkce odpovídající distribuci CSR. Znalost teoretické distribuce W a X při CSR nám dovoluje odvodit (přínejmenším přibližně) distribuci statistických charakteristik z pozorovaných nejbližších

vzdáleností. Ty můžeme použít jako základ pro testování CSR. Měli bychom poznamenat, že distribuční teorie pro většinu takových testů předpokládá, že nejbližší vzdálenosti použité k výpočtu sumární statistiky jsou nezávisle vzorkované z \mathcal{R} a že žádná z nich není vychýlena hraničním faktorem.

Další problém je oprava **hraničního efektu**. Nejbližší vzdálenosti pro události blízké hranici \mathcal{R} budou vychýlené a budou mít tendenci být větší než vzdálenosti pro události uvnitř regionu. Nejlepším řešením je použití simulací.

6.2.1 Graf závislosti $G'(w)$ na $F'(x)$

Vykresluje se $G'(w)$ proti $F'(x)$ do grafu. Pokud se neprojevuje interakce, budou si obě distribuce podobné a měli bychom očekávat přímou linii v grafu. V případě pozitivní interakce (shlukování) budou vzdálenosti bod-událost x_i větší než vzdálenosti událost-událost w_i a můžeme očekávat, že $G'(w)$ překročí $F'(x)$. Opačný případ nastane pro pravidelný vzorek. Posuzování je ale subjektivní a je vhodné doplnit simulační obálky podobně jako pro $G(w)$.

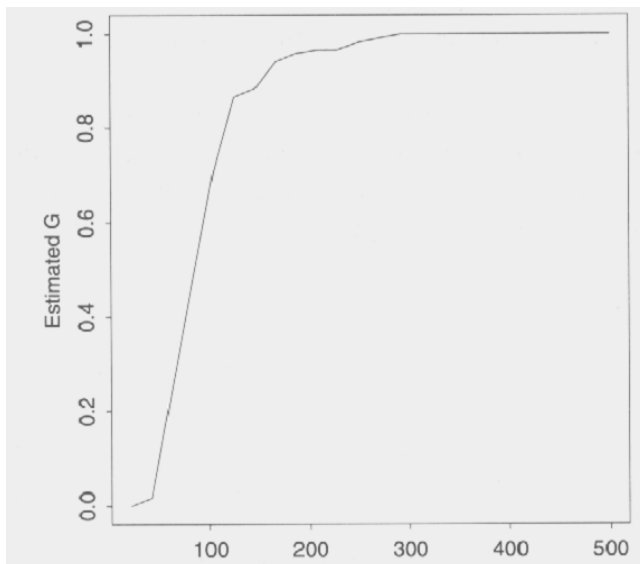


Obr. 6-6 Graf závislosti $G'(w)$ na $F'(x)$

Z numerických postupů uvedeme jen nejběžnější test NNI.

6.2.2 Graf závislosti $G'(w)$ na W a graf závislosti $F'(x)$ na X

Výsledná empirická distribuční funkce $G'(w)$ nebo $F'(x)$ je vynesena do grafu v závislosti na W resp. X a interpretována. Např. pokud distribuční funkce roste příkře na začátku rozsahu a pak se vyrovná, naznačuje to, že je zastoupeno hodně krátkých vzdáleností na rozdíl od dlouhých, a že tedy zřejmě půjde o vzorek se shluky událostí. Naopak, pokud křivka roste až při konci rozsahu vzdáleností, naznačuje to jisté opakování nebo pravidelnost.



Obr. 6-7 Distribuční funkce nejbližších vzdáleností $G(w)$ pro lokalizaci sopek v Ugandě (Bailey, Gatrell 1995)

Pro zlepšení interpretace je potřebné doplnit **simulační obálky**. Představíme tuto metodu na příkladu W , analogický přístup lze použít pro X . Pro účely ocenění významnosti odchylek mezi simulovanou CSR distribucí $G(w)$ m nezávislých simulací n událostí při CSR v \mathcal{R} , a tou, která byla skutečně pozorována $G'(w)$, se také definuje horní a dolní simulační obálka (Bailey, Gatrell, 1995):

$$U(w) = \max_{i=1, \dots, m} \{G_i(w)\}$$

$$L(w) = \min_{i=1, \dots, m} \{G_i(w)\}$$

Do grafu $G'(w)$ přidáme $U(w)$ a $L(w)$. $U(w)$ a $L(w)$ nám pomohou ocenit význam odchylek, protože pokud průběh $G'(w)$ překračuje $U(w)$, resp. $L(w)$ jde o nenáhodný jev s pravděpodobností:

$$Pr(G'(w) > U(w)) = Pr(G'(w) < L(w)) = \frac{1}{m+1}$$

To také ilustruje, jakou hodnotu bychom měli použít pro m , tedy kolik simulací bychom měli provést, abychom byli schopni rozeznat odchylky na zvolené hladině významnosti.

6.2.3 Test NNI

Test NNI vychází z výpočtu poměru mezi pozorovanou a očekávanou střední hodnotou minimální vzdálenosti mezi událostmi NNI (*near neighbour index*). Doporučuje se mít alespoň 100 událostí (Smith et al., 2011, s. 261).

Platí, že průměrné vzdálenosti mezi událostmi u shlukového vzorku jsou menší než u náhodně rozptýlených událostí a ty jsou opět menší než u pravidelně rozmístěných událostí.

Platí, že:

NNI ≥ 0 AND NNI ≤ 2.1491

NNI = 0 ... shlukový vzorek

NNI = 1 ... čistě náhodný vzorek

maximální hodnota NNI – pravidelně rozptýlený vzorek

Postup (Bailey, Gatrell, 1995):

a) výpočet očekávané hodnoty (pro CSR) r_e

$$r_e = 0,5 * \sqrt{\frac{R}{n}}$$

kde R je plocha oblasti \mathfrak{R} a n počet událostí.

b) výpočet průměrné hodnoty r_0 z měření

Zjištěn nejbližší soused pro každou událost, evidována příslušná vzdálenost w a nakonec vypočtena průměrná hodnota této minimální vzdálenosti.

$$r_0 = \frac{\sum_{i=1}^n w_i}{n}$$

c) výpočet NNI

$$NNI = \frac{r_0}{r_e}$$

NNI se někdy používá jako popisná statistika ke srovnání distribuce různých fenoménů v téže oblasti (např. vzdálenosti mezi stromy různých druhů v téže zalesněné oblasti)

d) test významnosti

Provádí se statistický test významnosti rozdílu mezi r_0 a r_e .

Nulová hypotéza: „NNI je odlišná od 1 jen jako výsledek vzorkovací chyby“ (NNI = 1 pro náhodné rozmístění událostí, odchylka od 1 je náhodná).

Používá se Z-test, založený na směrodatné odchylce. (Z jako normovaná veličina pro normální distribuci, tedy tzv. Z-skóre.)

$$Z = \frac{|r_0 - r_e|}{S_d} \quad S_d = \frac{0,26136}{\sqrt{\frac{n*n}{R}}} = \frac{0,26136}{n} * \sqrt{R}$$

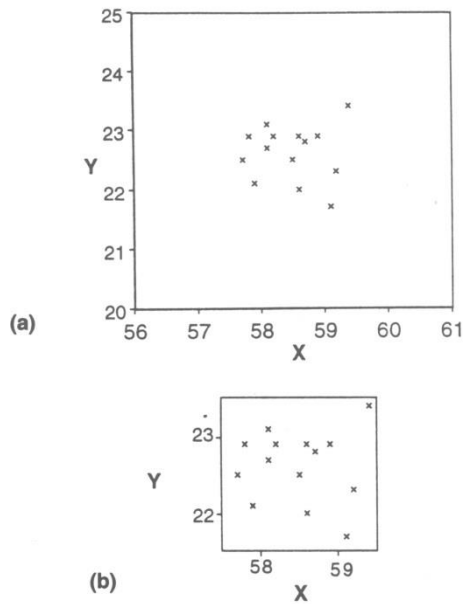
kde R je plocha oblasti \mathfrak{R} a n počet událostí.

Je-li $Z >$ kritická hodnota (pro hladinu významnosti 0.05 nebo 0.01) pro normovanou normální distribuci, pak se zamítá nulová hypotéza, tedy konstatujeme, že vzorek je významně odlišný od náhodného.

Interval spolehlivosti pro hladinu 0.05 : $NNI - 1.96 S_d$ až $NNI + 1.96 S_d$

S analýzou nejbližšího souseda jsou spojeny 2 hlavní problémy:

a) Charakteristika NNI a směrodatná odchylka silně závisí na velikosti studované oblasti.



Obr. 6-8 Stejný vzorek ve 2 různě velkých oblastech (Bailey, Gattrell, 1995)

- b) Někdy je minimální vzdálenost mezi událostmi nevhodná pro výpočet *NNI* např. jsou-li události v pravidelně rozmístěných shlucích (každý s podobným počtem bodů a vzdálenostmi mezi nimi). Pak totiž analýza *NNI* indikuje shlukovaný vzorek, i když jsou shluky rozptýleny. Někdy se proto používá 2., 3. nebo 4. nejbližší vzdálenost. Např. distribuce živočišných druhů může být charakterizována "rodinami" zabydlujícími určité teritorium (stádo jelení zvěře, smečka ...). Vzdálenosti uvnitř skupiny jsou malé. Proto, i když jsou vzdálenosti mezi skupinami velké, bude *NNI* odpovídat jednomu shluku.

6.2.4 Rozšíření *NNI* pro k-nejbližších sousedů

Pro každý řád k se vypočítá hodnota nejbližší vzdálenosti a poté se provede jejich průměrování. Tedy např. pro k=3 se pro každou událost zjistí 3 nejbližší události a z nich se vypočítá průměr.

$$r_{ok} = \frac{1}{kn} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^k d_{ij}$$

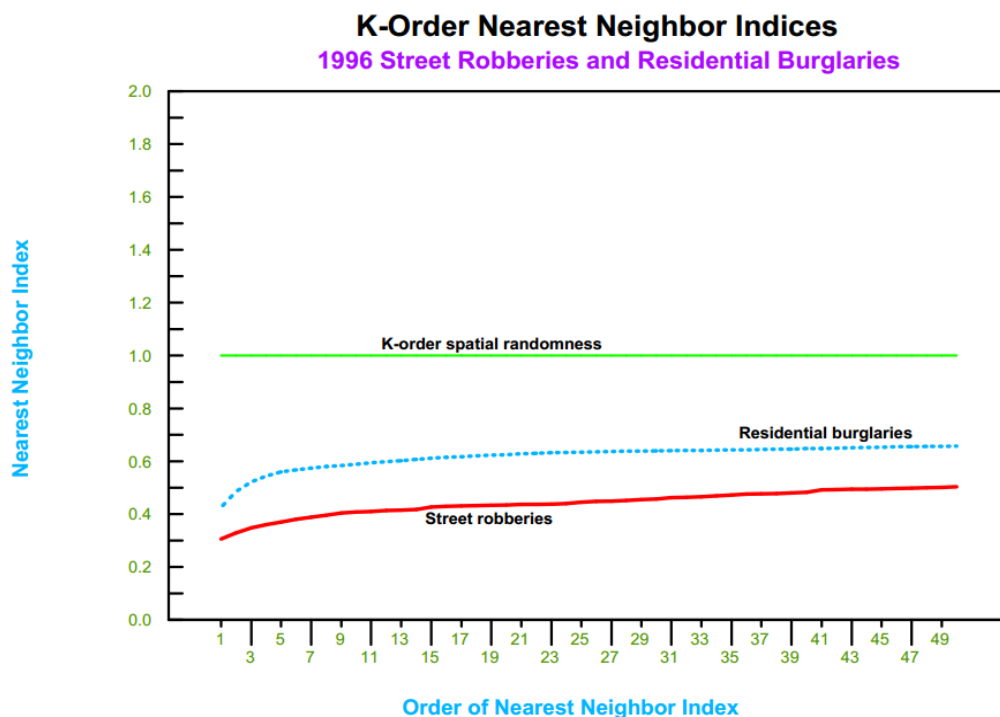
kde j reprezentuje pořadí nejbližších bodů.

Vypočte se očekávaná průměrná hodnota k nejbližší vzdálenosti:

$$r_{ek} = \frac{k(2k)!}{(2^k k!)^2 \sqrt{\frac{n}{R}}}$$

Výsledná NNI_k je pak

$$NNI_k = \frac{r_{ok}}{r_{ek}}$$



Obr. 6-9 Vztah NNI k rozšiřujícímu se sousedství (nárůstu řádu sousedství)

6.2.5 Lineární NNI

Lineární NNI představuje obdobu klasického testu NNI, který je aplikován na uliční síti.

Je vhodný pro zkoumání distribuce událostí, které se mohou vyskytovat jen na linii. Např. trestných činů, které se udály podél cest (krádeže z vozidel, kapesní krádeže apod.).

Pozorovaná průměrná cestní vzdálenost nejbližšího souseda $Ld(NN)$ je vypočtena jako průměr cestních vzdáleností mezi všemi body a jejich nejbližšími sousedy.

Očekávaná (tj. náhodná) hodnota této vzdálenosti je dána vztahem:

$$Ld_e = 0.5 * \left(\frac{L}{n-1} \right)$$

kde L je celková vzdálenost využití uliční sítě, n je celkový počet zkoumaných bodů.

Výpočet LNNI:

$$LNNI = \frac{Ld(NN)}{Ld_e}$$

Pro LNNI se vypočte směrodatná odchylka a standardizovaná chyba. Významnost výsledku se posuzuje t testem významnosti.

6.3 K funkce

Redukovaná míra druhého momentu neboli K funkce poskytuje efektivní přehled prostorové závislosti událostí pro široký rozsah měřítek. Je těsně korelovaná s variabilitou intenzity 2.řádu, která nemůže být z pozorovaných událostí přímo odvozena.

Pro odvozování K-funkce a její interpretaci musí platit 2 základní předpoklady – distribuce událostí v \mathfrak{R} odpovídá homogennímu a izotropnímu procesu pro sledovaná měřítka (stacionarita). Nelze totiž rozlišit změny ve variacích intenzity 1.řádu (typu trend) a 2.řádu (typu kovariance). Pokud existují změny 1.řádu v celé oblasti \mathfrak{R} , lze někdy vybrat menší části oblasti a v nich studovat změny 2.řádu za předpokladu, že v malé oblasti budou změny 1.řádu zanedbatelné.

6.3.1 Definice K-funkce

K funkce odpovídá standardizovanému průměrnému počtu událostí do vzdálenosti h od libovolné události. Standardizace se provádí pomocí intenzity λ .

Tedy (Bailey, Gatrell, 1995):

$$K_h = \frac{1}{\lambda} * E(N_h) = \frac{1}{\lambda} * \frac{1}{n} * \sum N_h$$

K_h	hodnota K funkce ve vzdálenosti h ,
N_h	počet událostí do vzdálenosti h od libovolné události,
$E()$	označuje střední hodnotu.
λ	intenzita neboli střední počet událostí v plošné jednotce, který by měl být konstantní v celé \mathfrak{R}

Hodnota K funkce představuje vypočtenou hustotu standardizovanou intenzitou λ , která je nezbytná k eliminování závislosti na konkrétní hustotě událostí v určité oblasti, neboť střední hodnota K funkce bude na celkovém počtu událostí a intenzitě událostí samozřejmě záviset.

Význam $K(h)$ jako sumárního měření efektu 2.řádu je v tom, že jsme schopni odvodit z pozorovaného bodového vzorku jeho odhad $K'(h)$, zatímco nejsme schopni odhadnout přímo variabilitu intenzity 2.řádu.

Je-li R plocha oblasti \mathfrak{R} , pak očekávaný počet událostí v \mathfrak{R} je $n=\lambda*R$. Z definice K-funkce plyne, že očekávaný počet uspořádaných párů událostí ve vzdálenosti do h je $\lambda^2*R*K_{(h)}$ (tento způsob výpočtu je samozřejmě výhodnější než realizace vyplývající z definice - tj. navštívit každý bod a počítat vzdálenosti k okolním bodům). Proto vhodným odhadem $K_{(h)}$ bude:

$$K'_{(h)} = \frac{1}{\lambda^2 R} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1, i \neq j}^n I_h(d_{ij}) = \frac{R}{n^2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1, i \neq j}^n I_h(d_{ij})$$

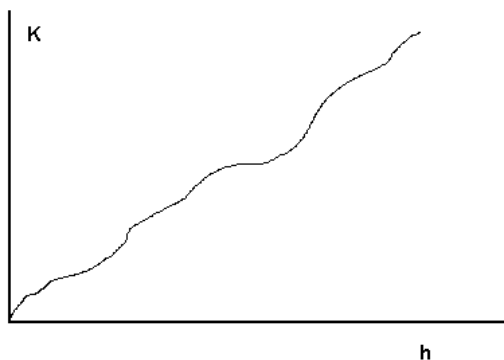
kde d_{ij} je vzdálenost mezi i -tou a j -tou pozorovanou událostí v \mathfrak{R} a I je

$$I_h(d_{ij}) = \begin{cases} 0 & \dots h < d_{ij} \\ 1 & \dots h \leq d_{ij} \end{cases}$$

Význam K-funkce se nejlépe pochopí z demonstrace. Kolem vybrané události se vytvoří sada koncentrických kruhů a zjišťuje se počet událostí v každém kruhu (větší kruh obsahuje automaticky i menší kruhy, jde o kumulativní funkci). Postupně jsou navštíveny všechny další události a celkové součty jsou přepočítány faktorem R/n^2 (samozřejmě při zanedbání okrajového efektu).

6.3.2 Vyhodnocení K-funkce

Pokud vypočteme $K(h)$, vykreslíme funkci do grafu v závislosti na hodnotách h , abychom ocenili prostorové závislosti sledovaných událostí. Avšak na rozdíl od odhadované distribuce nejbližších vzdáleností, kde bylo možné alespoň částečně interpretovat graf, u K-funkce nejsme schopni interpretaci provést, protože nevíme, jak by měl vypadat graf v případě nulové prostorové závislosti (tj. plné náhodnosti výskytu bodových vzorků).



Obr. 6-10 Ukázka K funkce

Musíme proto transformovat K funkci na jinou funkci, kterou lze již hodnotit. Odvozuje se $K_{(h)}$ pro náhodný proces (tedy výskyt událostí v libovolném bodě v oblasti \mathfrak{R} je nezávislý od všech dalších událostí a je stejný pro celou oblast \mathfrak{R}). Tedy pro náhodný proces bude očekávaný počet událostí do vzdálenosti h roven $n = \lambda * R = \lambda \pi r^2 = \lambda \pi h^2$. To znamená, že podle definice K-funkce bychom měli očekávat $K_{(h)} = \pi h^2$ pro homogenní proces bez prostorových závislostí.

Pravidelný vzorek bude mít $K_{(h)}$ (tedy počet událostí) menší než je očekávaných πh^2 , vzorek se shluky bude mít $K_{(h)}$ větší než πh^2 . Proto běžně srovnáváme odhad K-funkce s hodnotou πh^2 . Běžně se vykresluje graf závislosti hodnoty $L(h)$ na h , kde:

$$L(h) = \sqrt{\frac{K_h}{\pi}} - h$$

V tomto grafu vrcholy s kladnou hodnotou indikují shlukování („přitažlivost“) událostí a poklesy se zápornou hodnotou indikují pravidelnost.

Alternativa k použití odmocninové transformace je využití logaritmické transformace a vykreslování $l(h)$ proti h :

$$l'_{(h)} = \frac{1}{2} \log \left(\frac{k'_h}{\pi} \right) - \log(h)$$

Opět vrcholy indikují shlukování a poklesy pravidelnost pro určité hodnoty h .

Řešení lze zjednodušit vykreslováním hodnoty " $K(h) - \pi h^2$ " proti h .

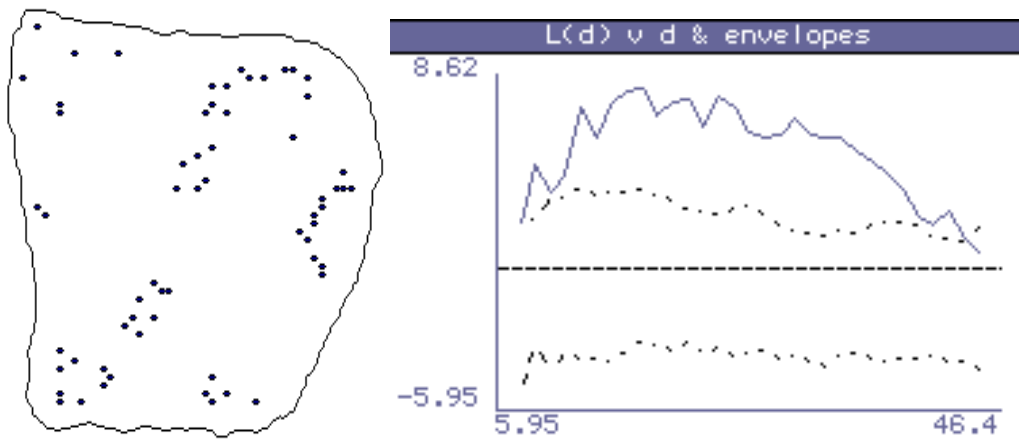
Formální ocenění významnosti těchto vrcholů/poklesů vyžaduje znalost distribuce $L(h)$ a tedy $K(h)$ pro CSR. Ta je neznámá a problematicky zjistitelná díky hraničním korekcím obsaženým v $K(h)$. Je však možné použít simulační odhad pozorované distribuce. Je potřebné zkonstruovat horní a dolní simulační obálky (limity):

$$U(h) = \max_{i=1, \dots, m} \{L_i(h)\}$$

$$L(h) = \min_{i=1, \dots, m} \{L_i(h)\}$$

z m nezávislých simulací n událostí v \mathfrak{R} při CSR, při kterých je pozorována funkce $L_i(h)$.

Tyto limity $U(h)$ a $L(h)$ jsou potom vykreslovány v grafu aktuálně pozorované $L(h)$ proti h (obr. 6-11).



Obr. 6-11 Shluková textura bodových událostí a odpovídající L funkce, probíhající nad horním limitem

Významnost vrcholů a poklesů je oceněna na základě vztahu:

$$Pr(L'(h) > U(h)) = Pr(L'(h) < L(h)) = \frac{1}{m + 1}$$

Význam m je dán počtem simulací nezbytných pro dosažení potřebné hladiny významnosti.

Jako metoda sumarizace a průzkumu dat má K-funkce několik výhod: poskytuje informace o prostorovém vzorku v různých měřítkách, zahrnuje používání přesné lokalizace událostí a využívá všechny vzdálenosti mezi událostmi, nejenom nejbližší vzdálenost. Navíc je znám teoretický tvar funkce $K(h)$ pro různé prostorové bodové modely. $K(h)$ tedy nemusí být použit jenom k průzkumu prostorových závislostí, ale také k návrhu modelů vhodných k reprezentaci a odhadu parametrů modelů.

ESRI implementuje Ripley K funkci ve Spatial Analyst. Přitom srovnáváme hodnotu vypočtené L funkce pro pozorování a L funkce očekávané, získané na základě vztahů (Kukuliac 2011).

Vypočtená K funkce:

$$K_h = \frac{A}{n*(n-1)} * \sum_{i=1}^n \sum_{j=1, i \neq j}^n I_{ij} \quad I_{ij} = \begin{cases} 0 & \dots d_{ij} > d \\ 1 & \dots d_{ij} \leq d \end{cases}$$

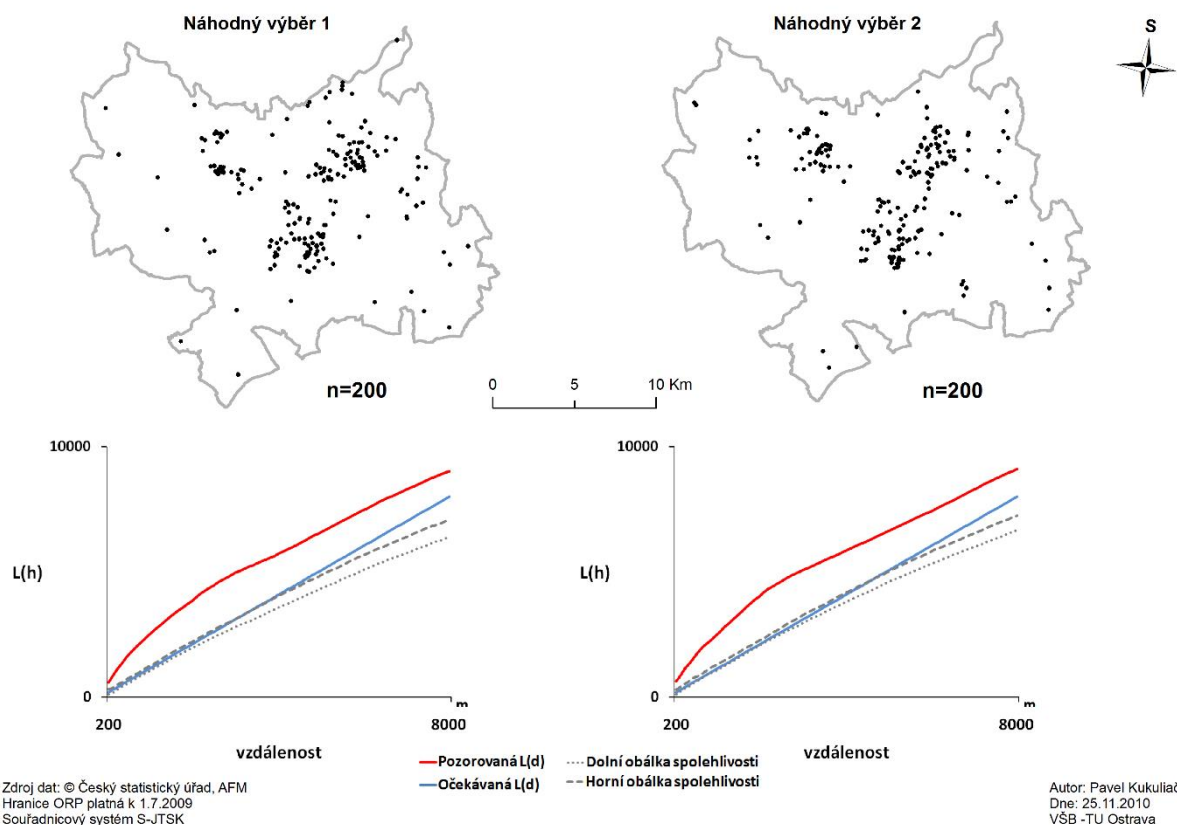
kde $d_{i,j}$ je vzdálenost mezi i -tou a j -tou událostí v R. Je zřejmé, že jediný rozdíl je ve jmenovateli zlomku, kde se dělí $n*(n-1)$ místo n^2 . Vzhledem k počtu párů při kombinaci bodů je vhodnější $n*(n-1)$, i když praktické rozdíly jsou zanedbatelné.

Funkce L se vyjádří jako:

$$L_h = \sqrt{\frac{K_h}{\pi}}$$

Z toho vyplývá, že je rostoucí a že v případě náhodné distribuce se rovná vzdálenosti h (a tedy stoupá v grafu pod úhlem 45 st.).

TESTOVÁNÍ K-FUNKCE PRO NÁHODNÝ VÝBĚR ADRESNÝCH BODŮ PODNIKŮ NA ÚZEMÍ ORP OSTRAVA PRO ROK 2009



Obr. 6-12 Shlukování podniků na území Ostravy (L funkce probíhá výrazně nad pásmem spolehlivosti) pro 2 náhodné výběry (Kukuliáč, 2010)

6.4 Pokročilé funkce pro hodnocení distribuce bodů

Ripleyova K funkce v obecné podobě není vhodná pro analýzy heterogenní distribucí jevů (tj. nestacionární bodové procesy) (Marcon, Puech 2003), protože předpokládá homogenitu bodové distribuce.

Nověji se bere v potaz nehomogenita geografického prostoru, kde příslušné zařízení (aktivita, jev) může být lokalizována pouze (nebo je preferována) v některých lokalitách. Jde o vliv exogenních faktorů. Podniky jsou nehomogenně distribuovány kvůli řekám, horám, regulacím územního plánu apod.

Proto se pro vyhodnocení situace srovnává s nějakou benchmarkovou (srovnávací) distribucí. Pak je pozitivní (negativní) shlukování indikováno pouze tehdy, jestliže je jev více (méně) shlukován než pro srovnávací distribuci. V případě hodnocení určitého podnikatelského sektoru může být takovým srovnávacím etalonem distribuce všech podniků.

Ideální index pro měření prostorové koncentrace má splňovat následující podmínky (Combes et al. 2008; Durantou and Overman, 2005):

- (1) umožňuje srovnání mezi typy jevů
- (2) umožňuje srovnání pro různá měřítka
- (3) je nevychýlený vzhledem k libovolným změnám prostorové klasifikace
- (4) provádí se s dobře definovaným benchmarkem
- (5) dovoluje určit zda existují významné rozdíly mezi pozorovanou distribucí a benchmarkem.

Následující Kd , M , m i W funkce splňují tato kritéria. U všech je výsledek je vykreslován jako funkce vzdálenosti, srovnávaná s průběhem konfidenčního intervalu nulové hypotézy. Statistická významnost je testována pomocí Monte Carlo simulace.

6.4.1 Kd funkce

Kd funkce (Duranton, Overman, 2005) vyhodnocuje absolutní koncentraci. Samostatně její hodnoty nelze interpretovat a musí se testovat proti nulové hypotéze. Kd posuzuje distribuci vzdáleností párů objektů a srovnává s hypotetickým výsledkem pro stejný počet náhodně vygenerovaných bodů. Jinými slovy Kd posuzuje významnost odchylky zjištěného vzoru od náhodného.

Základní myšlenkou Kd funkce je verifikovat, zda počet sousedů do jistého vzdálenostního intervalu d je významně vyšší nebo nižší než náhodná distribuce těchto bodů (Duranton, Overman, 2005):

$$\hat{K}(d) = \frac{1}{N_A(N_A - 1)\tau} \sum_{i=1}^{N_A} \sum_{j=1, i \neq j}^{N_A} k(\|x_{A_i} - x_{A_j}\|, d)$$

kde N_A představuje počet n událostí a k je kernelová funkce, která poskytuje odhad hustoty vzdáleností pro každé d . τ je šířka pásma (volený parametr ovlivňující velikosti vyhlazeného výsledku).

Metodologie popsaná Duranton a Overman (2005) zahrnuje následující kroky:

- 1) vyberte vhodné objekty (např. všechny daného typu průmyslu)
- 2) spočítejte hustotu bilaterálních vzdáleností mezi všemi páry sledovaných objektů
- 3) spočítejte hypotetickou sadu objektů se stejným počtem, které představují simulovaná místa náhodně umístěných objektů kolem známých míst
- 4) spočítejte lokální a globální konfidenční intervaly založené na všech simulovaných lokalitách.

D funkce představuje diferenci tedy rozdíl mezi 2 distribucemi. Je definována jako $D(d) = K_{AA}(d) - K_{BB}(d)$ (Arbia et al., 2008; Marcon, Puech, 2012). AA reprezentuje vzdálenosti mezi body typu A a A, tedy body reprezentující události téhož typu, podobně BB. Podle nulové hypotézy je $K_{(A,A)} = K_{(B,B)}$, tedy $D=0$.

Upravená verze je:

$D_i(d) = K_{(A,A)}(d) - K_{(A,N)}(d)$, kde N reprezentuje všechny události v oblasti.

Význam zahrnutí celého souboru objektů N (např. celý průmysl) je v tom, že kontroluje distribuce celé populace. Zatímco tradiční D funkce je rozdílem 2 K funkcí z odlišných bodových vzorů, nová D funkce srovnává K funkce odhadnuté kolem stejného bodu A.

6.4.2 M funkce

M funkce (Marcon, Puech, 2010) vyhodnocuje relativní koncentraci, tj. funkce, která srovnává lokální podíl zájmových objektů v okolí referenčního místa k podílu zájmových objektů v celé oblasti (Marcon and Puech, 2012).

Nověji se používá také hustotní varianta M funkce, označovaná jako m , která používá relativní hustotní funkci, popisující lokální texturu mnohem přesněji než jiné kumulativní funkce.

m funkce srovnává 2 distribuce pomocí poměru (s normalizací, aby bylo jisté, že benchmark je jednotkový). m funkce tedy počítá poměr 2 Kd funkcí, jedna pro typ A objektů kolem sektoru A a druhá pro typ N objektů kolem sektoru A. Nulová hypotéza je, že nejsou významné rozdíly mezi oběma distribucemi.

Odhad m funkce (Lang et al., 2015):

$$\hat{m}(d) = \frac{\sum_{i=1}^{N_A} \sum_{j=1, i \neq j}^{N_A} k(\|x_{A_i} - x_{A_j}\|, d) w(x_{A_j})}{\sum_{j=1, i \neq j}^N k(\|x_{A_i} - x_j\|, d) w(x_j)} / \frac{\sum_{i=1}^{N_A} W_A - w(x_{A_i})}{W - w(x_{A_i})}$$

kde W_A je celková váha okolních zájmových bodů, a W je celková váha všech bodů. Pokud např. body reprezentují podniky, bude váhou počet zaměstnanců v každé z nich. $k(\cdot)$ je kernelový odhad (funkce), jejíž sumace se používá pro odhad počtu sousedů k bodu x_{A_i} do vzdálenosti d . Používá se Gaussovský kernel s optimální šířkou pásma (Silverman, 1986). Referenční hodnota m funkce je 1 pro všechny hodnoty vzdálenosti d . Hodnota m větší než 1 indikuje prostorovou koncentraci bodů, zatímco hodnoty menší než 1 vyjadřují rozptýlení (Lang et al., 2015). Pokud je např. hodnota m funkce 1.5 při vzdálenosti d , je podíl okolních zájmových bodů o 50% vyšší než v celé oblasti. Významnost odhadu m se testuje MonteCarlo simulací. Globální konfidenční intervaly se počítají stejně jako u Kd funkce.

6.4.3 W funkce

W funkce (Kukuliač, Horák, 2017) vyhodnocuje relativní koncentraci. Podobně jako m funkce, srovnává distribuci bodů zájmového typu A a distribuci všech objektů (bodů) (včetně typu A).

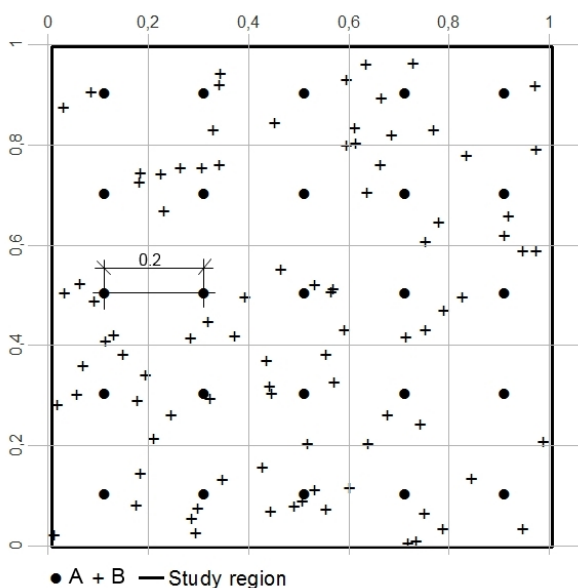
$$W(d) = Kd_{(A,A)}(d) - Kd_{(A,N)}(d)$$

Srovnává se tedy Kd funkce zájmového typu v místě A se Kd funkcí všech objektů ve stejném místě. Proti Kd funkci jde o relativní míru, která posuzuje míru koncentrace (či zředění) ne absolutně ale relativně vůči projevům srovnávací (celkové) distribuce. Rovněž interpretace je stejná. Pokud je w významně větší než 0, jev A se shlukuje.

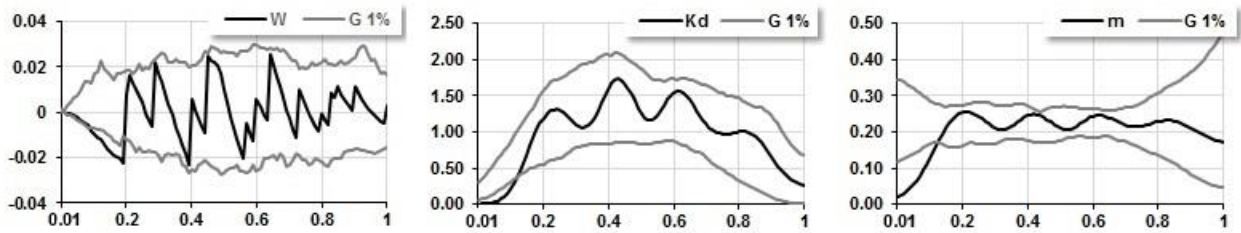
Výsledek je lepší než Kd a někdy i m funkce, oproti které pomáhá lépe odhalit některé místní koncentrace přesněji.

W funkce řeší také problém objektů umístěných na stejném místě (tj. jejich vzdálenost by byla nulová) pomocí limitní vzdálenosti (*threshold distance*). Limit je definován jako minimální vzdálenost mezi body pozorované textury – pokud některý pár má menší vzdálenost, je nahrazena limitní vzdáleností.

Příklady:

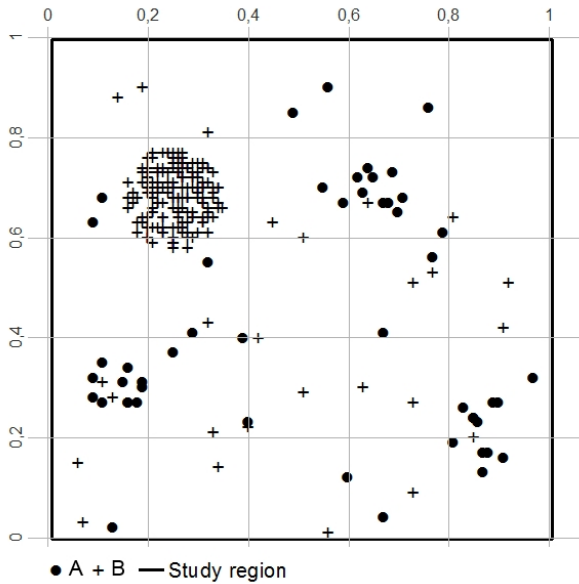


Obr. 6-13 Pravidelná distribuce bodů typu A a celková distribuce bodů B (Kukuliač, Horák, 2017)

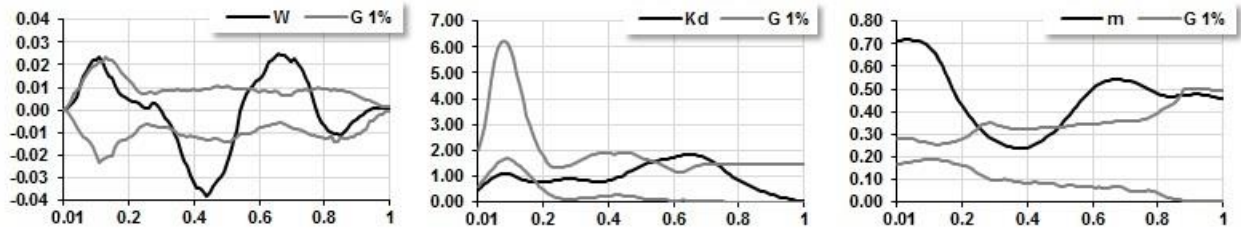


Obr. 6-14 W, Kd a m funkce bodů A (výsledky pro pravidelnou distribuci) (Kukuliač, Horák, 2017)

Pouze W funkce přesně detekovala rozměr pravidelné mřížky A (0.2).



Obr. 6-15 Oboustranně shluková distribuce A i B (Kukuliač, Horák, 2017)



Obr. 6-16 W, Kd a m funkce bodů A (výsledky pro dvojitou shlukovou distribuci) (Kukuliač, Horák, 2017)

Kd funkce je zde neefektivní, protože si nedokáže poradit se shlukem B.

m funkce detekuje koncentraci bodů až po 0.22, což je příliš. Místo toho W funkce detekuje koncentraci při 0.05 až 0.1, což odpovídá průměru shluků.

Navíc W funkce identifikuje statisticky významný rozptyl bodů ve vzdálenosti 0.37 až 0.5, což odpovídá vzdálenosti mezi shluky, přitom m funkce nic statisticky významného nedetekuje.

7 Inferenční statistické metody pro vícenásobné typy událostí a časoprostorová data

7.1 Analýza více typů událostí

Zatím jsme předpokládali, že všechny sledované události jsou jednoho typu. Nyní předpokládejme, že máme 2 a více typů událostí.

Předchozí metody nám dovolily analyzovat události odděleně (pouze 1 typu) nebo všechny dohromady, ukázat shlukování nebo pravidelnost, avšak ne zodpovědět otázky typu:

*Je textura výskytu události 1 druhu ve vztahu k textuře výskytu události jiného typu?
Vysvětluje distribuce 1 typu událostí distribuci druhého typu událostí?*

Obecně bychom měli hledat a ověřit existenci **nezávislosti** mezi typy událostí v protikladu k přitahování jednotlivých typů událostí nebo jejich odpuzování. Testování je tedy založeno na pozorované bivariační nebo multivariační bodové textuře, kde za základní situaci považujeme nezávislost mezi výskytem různých typů událostí.

Nezávislost znamená, že celková textura událostí je tvořena z nezávislých dílčích procesů, každý pro 1 typ události. Je nutné si uvědomit, že nezávislost neznamená, že by nějaký z dílčích procesů musel být typu homogenního Poissonova procesu. Mohou být nezávislé např. i shlukovací proces a pravidelný proces. Obecně, každý z dílčích procesů může produkovat vzájemně odlišné textury nebo textury odlišné od celkové textury.

Při hledání teoretických modelů pro multivariační bodové procesy je možné generalizovat Poissonův, Poissonův shlukovací a Coxův procesy tak, aby byla zahrnuta myšlenka spojených procesů, které buď zobrazují přitahování nebo odpuzování – např. spojené Coxovy procesy nebo spojené párové procesy.

Jednoduché testy nezávislosti více typů událostí zahrnují:

1. χ^2 testu pro kvadrantovou metodu,
2. metodu nejbližších vzdáleností,
3. K funkce.

7.1.1 Kvadrantová metoda s χ^2 testem

Nejjednodušší přístup k testování nezávislosti prostorové distribuce 2 typů událostí je založen na sčítání počtu událostí v buňkách ve sledované oblasti \mathcal{R} . Sčítání se provádí v buňkách buď náhodně rozptýlených nebo pravidelně umístěných v mřížce v případě, kdy máme k dispozici úplný bodový vzorek.

Běžně se prezentují výsledky v podobě tabulky 2 x 2 („přítomnost – nepřítomnost“), kde je zapsán počet kvadrantů c_{ij} , které obsahují buď oba typy událostí (c_{12} nebo c_{21}) nebo pouze 1 typ (c_{11} , c_{22}).

Tab. 7-1 Sledování přítomnosti 2 typů událostí v buňkách

		Přítomnost událostí 2. typu v buňce	
		není	je
Přítomnost událostí 1. typu v buňce	není	C_{11}	C_{12}
	je	C_{21}	C_{22}

Výsledky mohou být testovány jednoduchým standardním χ^2 testem nezávislosti. Srovnáváme

$$\chi^2 = \frac{(c_{11}c_{22} - c_{12}c_{21})^2 \sum_i \sum_j c_{ij}}{\sum_j c_{1j} \sum_j c_{2j} \sum_i c_{i1} \sum_i c_{i2}}$$

s kritickými hodnotami χ^2 distribuce. Překročení kritické hodnoty (zpravidla 0,05) znamená zamítnutí hypotézy nezávislosti mezi 2 texturami.

Pro jednodušší zapamatování platí, že v závorce je součin prvků na hlavní diagonále mínus součin prvků na vedlejší diagonále, dvojitá sumace v čitateli odpovídá celkovému počtu prvků n , ve jmenovateli jsou sumace ve všech řádcích a sloupcích.

Problém u tohoto jednoduchého přístupu je stejný jako u jiných kvadrantových metod - velké množství informace o lokalizaci, které je obsaženo v pozorované textuře, je v testu ignorováno.

7.1.2 Metoda nejbližších vzdáleností

Distribuční funkce nejbližších vzdáleností typu událost-událost pro monovariační distribuci je nahrazena v multivariačním případě soustavou distribučních funkcí nejmenších vzdáleností $G_{ij}(h)$. $G_{ij}(h)$ je pravděpodobnost, že vzdálenost náhodně vybrané události typu i k nejbližší události typu j je menší nebo rovna h . Tedy:

$$G_{ij}(h) = \Pr(d_{ij} \leq h)$$

$F_j(h)$ je distribuční funkcí nejmenší vzdálenosti typu bod-událost a znamená pravděpodobnost toho, že vzdálenost náhodně vybraného bodu k nejbližší vzdálenosti typu j je menší nebo rovna h . Odhady těchto funkcí $F'_j(h)$ a $G'_{ij}(h)$ mohou být získány z pozorovaného bodového vzoru. V případě potřeby jsou do odhadů zahrnovány i okrajové korekce.

Pokud jsou jednotlivé (dílčí) bodové procesy v multivariačním bodovém vzoru nezávislé, potom by měla být distribuce nejmenších vzdáleností k události typu j tatáž, ať už je počátkem náhodně vybraný bod nebo náhodně vybraná událost typu i ($i \neq j$). Tedy:

$$G_{ij}(h) = F_j(h) \quad i \neq j$$

Vyhodnocení se provádí s pomocí grafu nebo se používá korelační analýza.

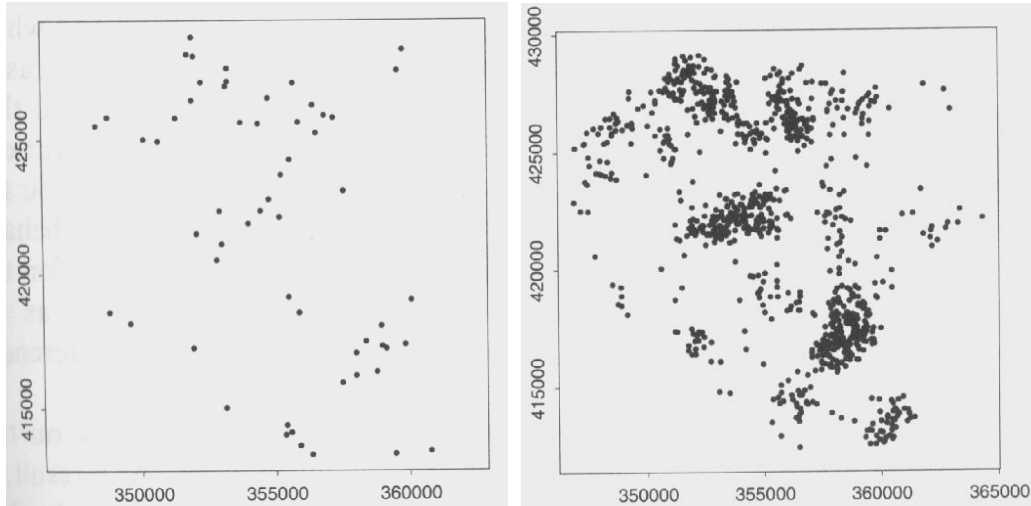
Při **grafickém hodnocení** se zpravidla vykresluje $F_j(h)$ a $G_{ij}(h)$ do jednoho grafu, kde h se mění od 0 do maximální vzdálenosti nejbližších sousedů typu událost-událost nebo bod-událost. Graf je pak zkoumán, zda se objevuje nějaká odchylka mezi 2 odhadovanými distribucemi. Hodnocení ale lze použít jen v případě, že jsme si jisti, že máme zjištěné všechny případy typu i i j .

Při **korelační analýze** se nemusí provádět plný odhad $G_{ij}(h)$ a $F_{ij}(h)$. Nejjednodušší z hlediska implementace je použít náhodný vzorek bodů v \mathfrak{R} a měřit nejbližší vzdálenosti bod-událost typu i a nejbližší vzdálenosti bod-událost typu j pro tytéž body. Vzdálenosti v každém vzorku jsou pak nahrazeny jejich pořadím (ve variační řadě) v příslušném vzorku. Výsledkem je sada párů pořadí vzdáleností bod-událost. Nezávislost může být testována Spearmanovým nebo Kendalovým koeficientem korelace pro pořadí. Jednou z výhod takového testu je, že může být použit i na pouhý vzorek bodů stejně jako na zcela zmapovanou distribuci, další výhodou je nezávislost na typu distribuce. Doporučuje se zavést okrajovou korekci – zpravidla se vypouští ze zpracování obou vzorků vzdálenosti, kde je náhodně zvolený bod blíže k hranicím \mathfrak{R} než k nejbližší události jakéhokoliv typu.

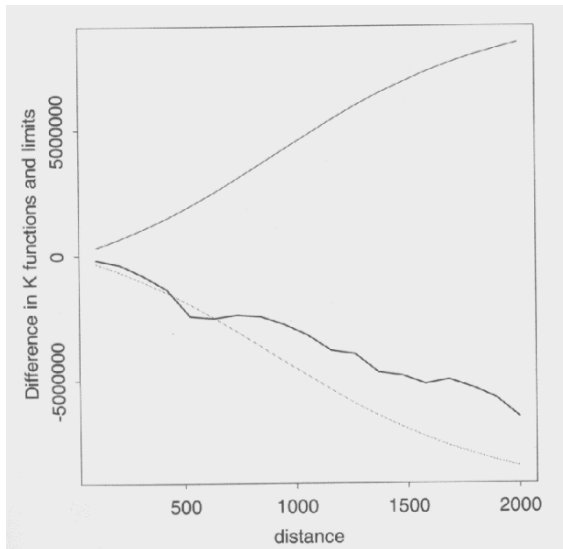
7.1.3 K funkce

V nejjednodušších případech se počítá rozdíl dvou K funkcí, viz obr. 7-2.

V uvedeném příkladu šlo o vyjádření nenáhodnosti shlukování případů rakoviny plic. I když se vizuálně jeví shlukování jako zcela zřejmé, nesmíme zapomínat, že jde o jev vázaný na distribuci populace, jejího věkového složení a dalších faktorů, ovlivňujících výskyt rakoviny plic. Není jednoduché posoudit, co je v daném případě „normální“ distribuce. Zde se použil jako benchmark jiný typ rakoviny (hrtanu), který také závisí na distribuci populace, stáří a dalších faktorech, ale jde o chorobu s jinými příčinami. Výpočet rozdílu obou K funkcí ukázal překročení simulační obálky pouze u vzdálenosti 500, tedy pouze pro tuto vzdálenost lze mluvit o nenáhodném shlukování případů rakoviny plic.



Obr. 7-1 Výskyty rakoviny hrtanu a plic (Bailey, Gatrell 1995)



Obr. 7-2 Rozdíl v K funkcích obou případů rakoviny a simulační obálky (Bailey, Gatrell 1995)

Pro multivariační sledování se provádí úprava monovariačních K funkcí podobným způsobem jako u metody nejbližších vzdáleností. Používá se funkce $K_{ij}(h)$ jako distribuční funkce počtu událostí j do vzdálenosti h od události i .

7.2 Časoprostorové analýzy

7.2.1 Popisné časoprostorové analýzy

Události/objekty jsou lokalizovány v bodech a čas je zaznamenán pouze 1 údajem.

Popisné charakteristiky jsou částečně uvedeny u kruhové statistiky (výpočet průměrného času apod.).

Sleduje se vývoj polohy těžiště v čase, sleduje se např. sekvence míst v čase a hledá se souvislost a predikce místa další události. Využití v analýzách kriminality, či výskytu zájmových organismů.

7.2.2 Inferenční časoprostorové analýzy

K testování náhodnosti časoprostorového shlukování se používá několik jednoduchých testů:

1. χ^2 test
2. Knoxův test
3. Mantelův test
4. D funkce
5. STAM (prostor-čas-atributový stroj)

V některých případech se transformuje rozdíl v čase 2 událostí t_{ij} na časovou funkci w_{ij} , tedy funkci času mezi událostmi i a j .

Vhodným typem může být např.:

$$W_{ij} = \frac{1}{(a + |t_i - t_j|)} \quad a \text{ je konstanta zajišťující, abychom nedělili 0 (např. } a = 0.1)$$

7.2.3 χ^2 test

Zvolíme limity D a T pro vzdálenost a čas a rozdělíme události podle tabulky 4-6.

Tab. 7-2 Distribuce událostí v čase a prostoru

		Rozdělení prostoru	
		$d_{ij} < D$	$d_{ij} > D$
Rozdělení času	$t_{ij} \leq T$	Události, které se staly blízko u sebe a současně	daleko od sebe, současně
	$t_{ij} > T$	Blízko, časově oddělené	daleko, časově oddělené

t_{ij} rozdíl mezi časy t_i a t_j událostí
 d_{ij} vzdálenost mezi událostmi

K testování lze použít standardní χ^2_1 test nezávislosti v tabulce 2 x 2.

Celou množinu dat pak můžeme klasifikovat do 4 kategorií a můžeme najít shluky událostí. Protože však uvedené rozdělení vyjadřuje vztahy pouze mezi 2 událostmi, je nutné v klasickém případě převést řešení na problém rozdělení do shluků.

Zpravidla se volí postupně více limitů (např. 500 m, 1 km apod.; 1 den, 1 týden, 1 měsíc atd.) a zkoumá se, zda se při některé kombinaci neprokáže nenáhodnost.

7.2.4 Knoxův test

Tento test zavedl epidemiolog George Knox.

Z n událostí je možno získat $n*(n-1)$ uspořádaných párů. Pro každý z párů měříme prostorovou vzdálenost a časový interval. Na základě vybraných limitů pak:

1. Spočítáme počet uspořádaných párů "blízkých v prostoru" (**S**).
2. Spočítáme počet uspořádaných párů "blízkých v čase" (**T**).
Tím se čas a prostor rozdělí opět do dvou kategorií - blízké x neblízké.
3. Spočítáme počet uspořádaných párů současně blízkých v čase i prostoru, získáme **X**.

Pokud platí úvodní předpoklad nezávislosti prostoru a času, pak **X** odpovídá Poissonově distribuci s průměrným počtem událostí λ

$$\lambda = \frac{S * T}{n * (n - 1)}$$

Vypočítáme pravděpodobnost jevu **X**:

$$p(x) = \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda}$$

Je-li $p(x)$ menší než standardně používané limity pravděpodobnosti 0.05 resp. 0.01, nelze jev považovat za náhodný a musíme odmítnout nezávislost tvorby shluků v čase a prostoru.

Nevýhodou Knoxova testu je, že pracuje jen s logikou ano/ne (události jsou/nejsou blízké) a nutnost nastavení příslušných limitů.

7.2.5 Mantelův test

Mantelův test nepoužívá Booleovskou logiku jako v případě χ^2 nebo Knoxova testu, ale sleduje skutečné velikosti intervalů (vzdálenosti v euklidovském i časovém prostoru). Používá se ukazatel:

$$\sum_{i \neq j} X_{ij} Y_{ij}$$

kde X_{ij} je prostorová blízkost událostí i a j ;
 Y_{ij} je časová blízkost mezi událostmi i a j ;

Pokud je vzdálenost tam a zpět, podělí se suma 2. X_{ij} a Y_{ij} lze vypočítat jako:

$$X_{ij} = \frac{1}{(k_s + d_{ij})}$$

$$Y_{ij} = \frac{1}{(k_t + t_{ij})}$$

kde k_s a k_t jsou libovolné konstanty vybrané tak, aby nedocházelo k dělení nulou při totožné poloze/času událostí.

Pro výše uvedený statistický ukazatel lze vypočítat aritmetický průměr a rozptyl podle teoretické distribuce a ty se použijí k posouzení významu vypočteného ukazatele. Tak se prověří náhodnost

distribuce událostí. Nebo je možné použít testování pomocí Monte Carlo simulací (náhodné permutace z řádků a sloupců).

Také lze vypočítat upravený korelační koeficient – Z-standardizace (standardizace) x_{ij} i y_{ij} a upravit počet párů, abychom získali správný počet stupňů volnosti:

$$r(XY) = \frac{1}{n(n-1)2-1} \sum_{i,j} \left(\frac{x_{ij} - \bar{x}}{s_x} \right) \left(\frac{y_{ij} - \bar{y}}{s_y} \right), i \neq j$$

Mantelův test se používá často v ekologii (http://en.wikipedia.org/wiki/Mantel_test), ovšem pro měření podobnosti hodnot. Používá se zpravidla ve standardizované formě (odečítá se průměr a dělí se odchylkou), jehož statistická pravděpodobnost se určuje permutačními testy (zaměňují se čísla v řádcích a sloupcích při velkém počtu iterací – aspoň 1000x). <http://www.nceas.ucsb.edu/scicomp/Dloads/SpatialAnalysisEcologists/SpatialEcologyMantelTest.pdf>

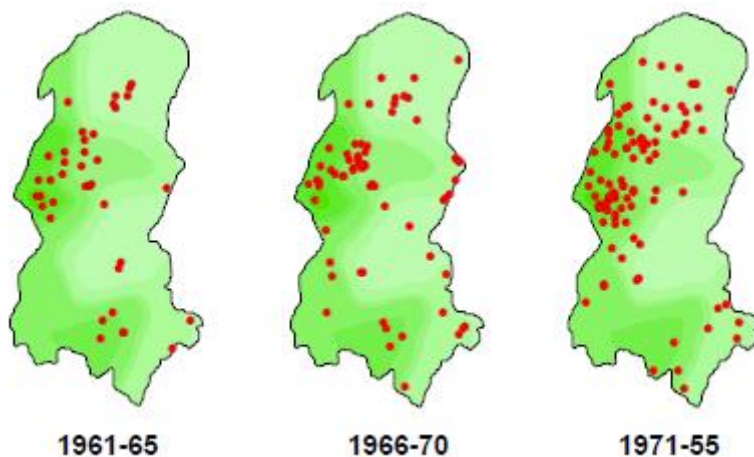
Obecné problémy – proč je to založeno na párech a ne třeba na trojicích? Závislost na nastavení kritického limitu času a vzdálenosti (Knox), závislost na velikost oblasti.

Podobný test navrhnul i Jaquez (1996) založený na upravené k-NN metodě, která je trochu výhodnější než Mantel či Knoxova metoda (<https://www.spatialanalysisonline.com/HTML/index.html>, Hot spot and cluster analysis)

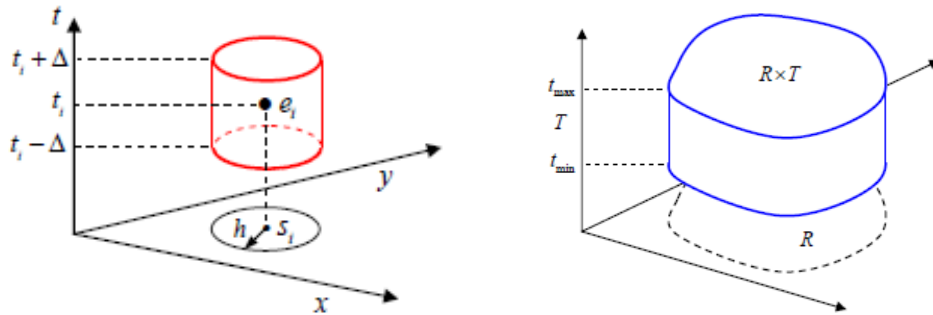
7.2.6 Časoprostorová K funkce

Jinou variantou je časoprostorová K funkce.

Příklad: Burkittův lymfom je sice druhem rakoviny, kde se obecně nepředpokládá infekční šíření resp. nakažlivost, jenže podle výzkumů zřejmě přispívá k výskytu malárie, a to je infekční choroba.



Obr. 7-3 Časový vývoj výskytu případů Burkittova lymfomu (červeně případy, zeleně hustota zalidnění), oblast západního Nilu (Smith, 2016)



Obr. 7-4 Časoprostorové sousedství (vlevo) a časoprostorový region pro analýzu (vpravo) (Smith, 2016)

Lze definovat časoprostorovou intenzitu událostí následovně:

$$\hat{\lambda}_{st} = \frac{n}{a(R) \cdot (t_{\max} - t_{\min})}$$

kde jmenovatel má významu objemu časoprostorového regionu $R \times T$.

Pak můžeme funkci K adaptovat následovně:

$$\hat{K}(h, \Delta) = \frac{1}{n \cdot \hat{\lambda}_{st}} \sum_{i=1}^n \sum_{j \neq i} I_{(h, \Delta)}(d_{ij}, t_{ij})$$

Statistická významnost se prověří technikou náhodného označení (random labelling), tedy defacto permutacemi.

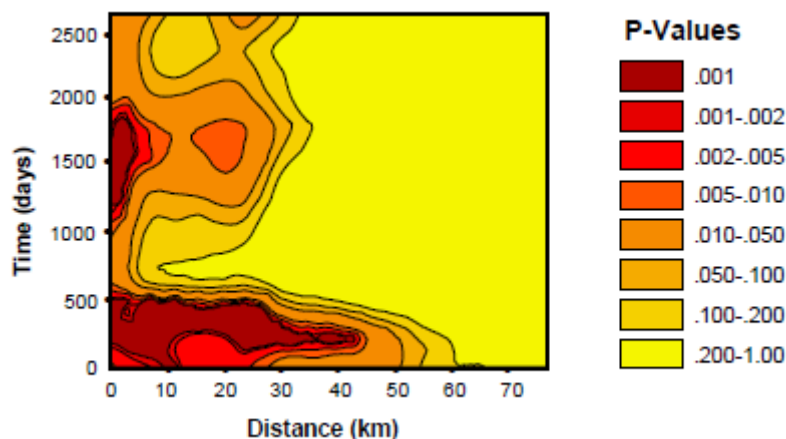
M^0_+ reprezentuje počet simulovaných událostí, kde byla splněna podmínka, že K funkce pozorovaného vzoru je větší než náhodného vzoru (jde tedy o důkaz shlukování). Pak pravděpodobnost takového jevu je:

$$\hat{P}_{st\text{-clustered}}(h_w, \Delta_v) = \frac{M^0_+ + 1}{N + 1}$$

Analogicky počet simulací s hodnotou K funkce menší je M^0_- a pravděpodobnost jevu:

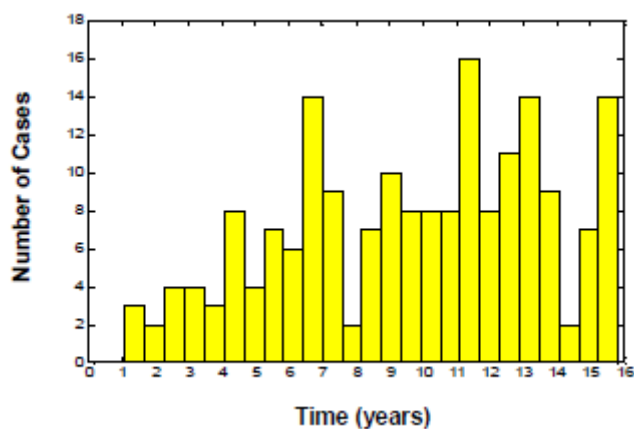
$$\hat{P}_{st\text{-dispersed}}(h_w, \Delta_v) = \frac{M^0_- + 1}{N + 1}$$

Výsledek lze následně pěkně vizualizovat:



Obr. 7-5 Statistická významnost časoprostorového shlukování

Shlukování cca 500 dní (cca 1.5 roku) napříč různých vzdáleností se pak projeví i na histogramu počtu případů (obr. 7-6), kde jsou patrné anomálie v čase 7, (9), 11, 13, 15.



Obr. 7-6 Histogram počtu případů

7.2.7 D funkce

Metoda využívá určitého rozšíření K funkcí. Funkce $K(h,t)$ udává očekávaný počet událostí do vzdálenosti h a do časového intervalu t , standardizovaná počtem událostí na plochu a čas. Vycházíme z předpokladu, že pokud jsou události nezávislé, pak platí:

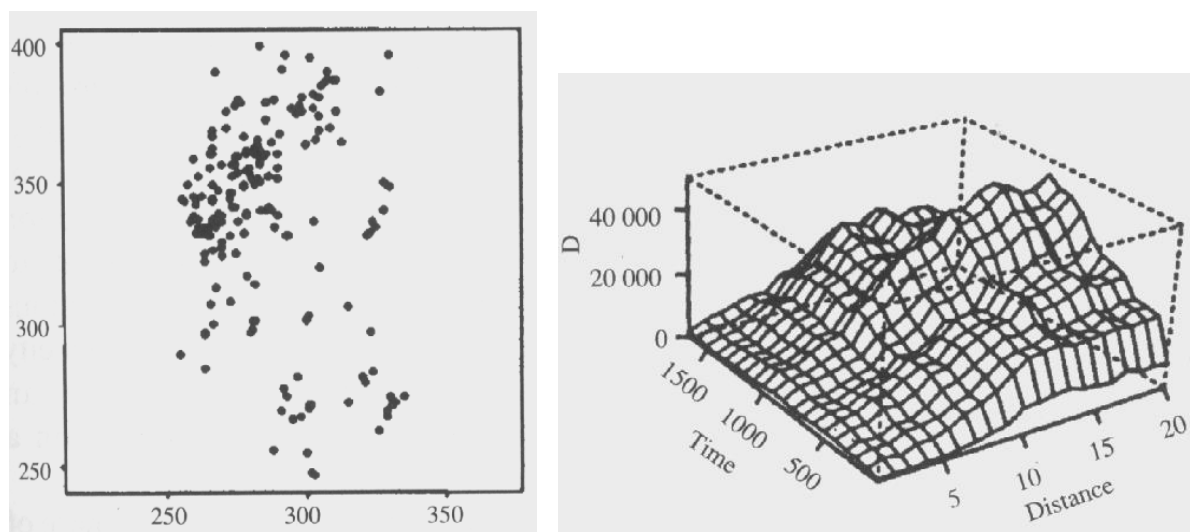
$$K(h,t) = K_S(h) * K_T(t)$$

$K_S(h)$ klasická K funkce pro pozorovaný vzorek událostí

$K_T(h)$ K funkce aplikovaná na výskyt událostí v čase

Proto se vyhodnocuje rozdílová funkce $D'(h,t) = K'(h,t) - K'_S(h) * K'_T(t)$

Výsledek se nejlépe interpretuje ve 3D grafu. Zvýšené hodnoty D funkce naznačují zvýšené interakce mezi událostmi. Např. na obr. 7-3 je nejvyšší odchylka při hodnotě vzdálenosti mezi událostmi 15 a časového rozdílu 1000. Validace je možná opět simulačními postupy.



Obr. 7-7 Výskyt případů Burkítova lymfomu a odpovídající $D(h,t)$ (Bailey, Gatrell 1995)

7.2.8 Prostor-čas-atributový analytický stroj

Prostor-čas-atributový analytický stroj (*space-time-attribute analysis machine STAM*) je příkladem nasazení jednoduché analytické metody ve velkém rozsahu. Prohledává všechny body v geografickém, časovém i atributovém „prostoru“ a hledá nenáhodné výskyty.

Příkladem může být analýza výskytu nemoci, kde je cílem nalézt podobný vzorek na základě všech 3 „prostorů“.

Algoritmus:

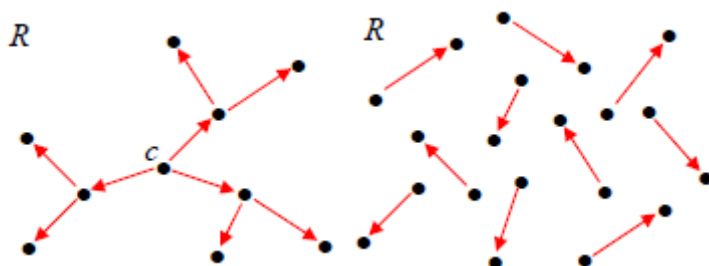
- 1) definice rozsahu prohledání (stanovení limitů) ve všech 3 prostorech
- 2) výběr pozorování, která do limitů spadají
- 3) definuje se geografická prohledávaná oblast se středem v pozorovaném případě (místě) a s poloměrem g_r odvozeným z velikosti limitu
- 4) definuje se prohledávaná oblast v čase se středem v pozorovaném případě a poloměrem t_r odvozeným z velikosti limitu
- 5) definuje se atributová prohledávaná oblast se středem v pozorovaném případě (atributu) a s poloměrem a_r odvozeným z velikosti limitu
- 6) prohledá se databáze, aby se našly záznamy, které leží uvnitř prohledávaných oblastí (vymezených v krocích 3-5)
- 7) použije se testovací procedura Monte Carlo, která určí významnost pro získaný výsledek hledání
- 8) je-li náhodnost výsledku nízká (tedy nelze-li korelaci výskytu vysvětlit jako náhodu), uloží se identifikátor záznamu a prohledávací parametry
- 9) vyzkouší se všechny kombinace g , t a a prohledávaných parametrů
- 10) zapíše se výsledek
- 11) změní se pozorovaný případ a opakují se body 3-11.

U atributů se měří shoda např. počtem shodných příznaků. Např. výskyty událostí jsou si podobné, jestliže se shodují alespoň v 5 atributech popisujících událost.

Geografický prostor se může např. prohledávat od 1 do 20 km s krokem 2 km.

7.2.9 Problematika časové proměnlivosti procesu

Obecnější problém detekce šíření (prostorový difúzní proces) u infekcí, protože závisí na stadiu infekce. Zatímco raná stádia mají typický rychlý rozvoj infekce a v důsledku snadno detekovatelný shlukový výskyt případů, jakmile infekce dospěje do stacionárního stavu (jistá úroveň rozšíření), pak sice difúze případů dále pokračuje, ale již ne běžně detekovatelným způsobem, protože prostorové shluky už nejsou patrné. Je nutné zapojit efektivně čas a testovat pravděpodobnost, že jsou nové případy významně blíže ke případům o časový krok zpět než by odpovídalo náhodnému procesu.



Obr. 7-8 Raná fáze a pozdní fáze epidemie

8 Transformace bodové textury do kontinuálního pole

Transformace bodové textury do kontinuálního pole slouží k převodu dat a reprezentaci jevu z bodové reprezentace do kontinuální. Je využívána např. pro vizualizaci dat původně lokalizovaných v bodech pomocí 2,5D povrchů.

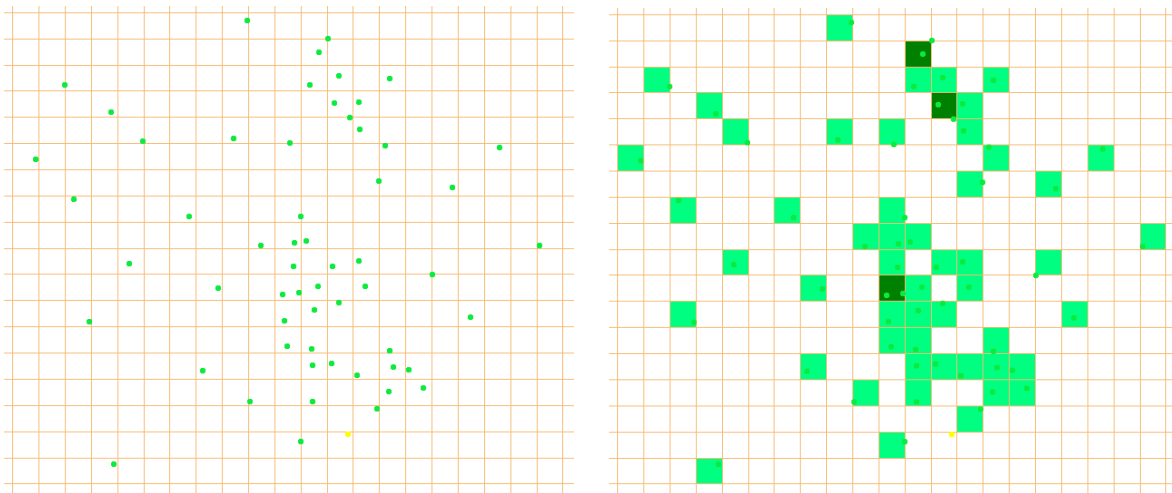
Používáme metody:

- Kvadrantová metoda
- Jádrové vyhlazení

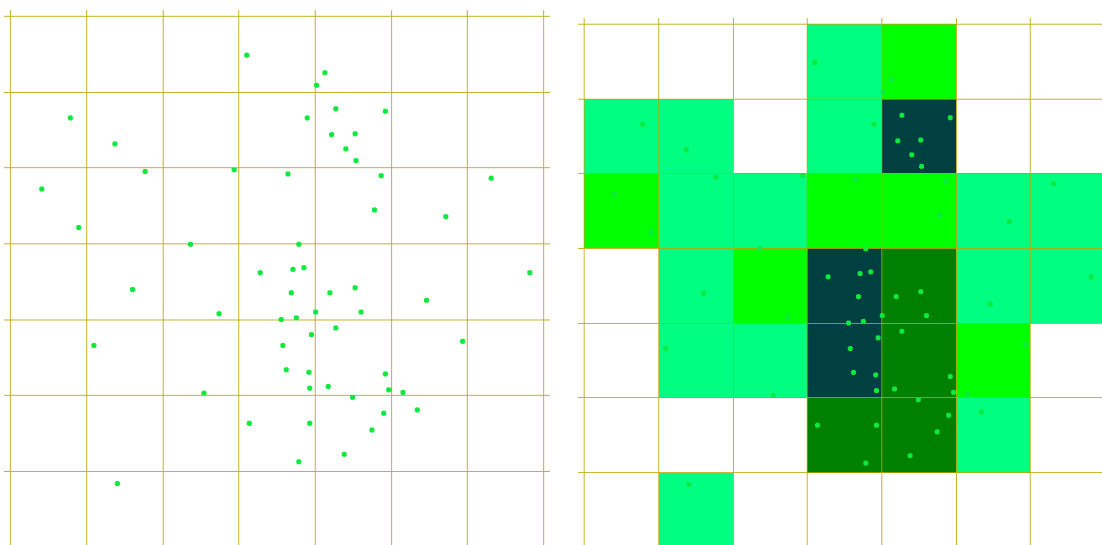
8.1 Kvadrantová metoda

Základem kvadrantových metod je sledování **četnosti událostí** ve vymezených buňkách (kvadrantech). Pro transformaci se používá pravidelná mřížka. Počet událostí v buňce tedy udává hodnotu kontinuálního povrchu v daném místě.

Při kvadrantové analýze je citlivou volba sítě (při pravidelné mřížce), tj. stanovení počátku a velikosti buněk. Obecným nedostatkem kvadrantových metod je, že se nebere ohled na relativní polohu kvadrantů a relativní polohu událostí v kvadrantu.



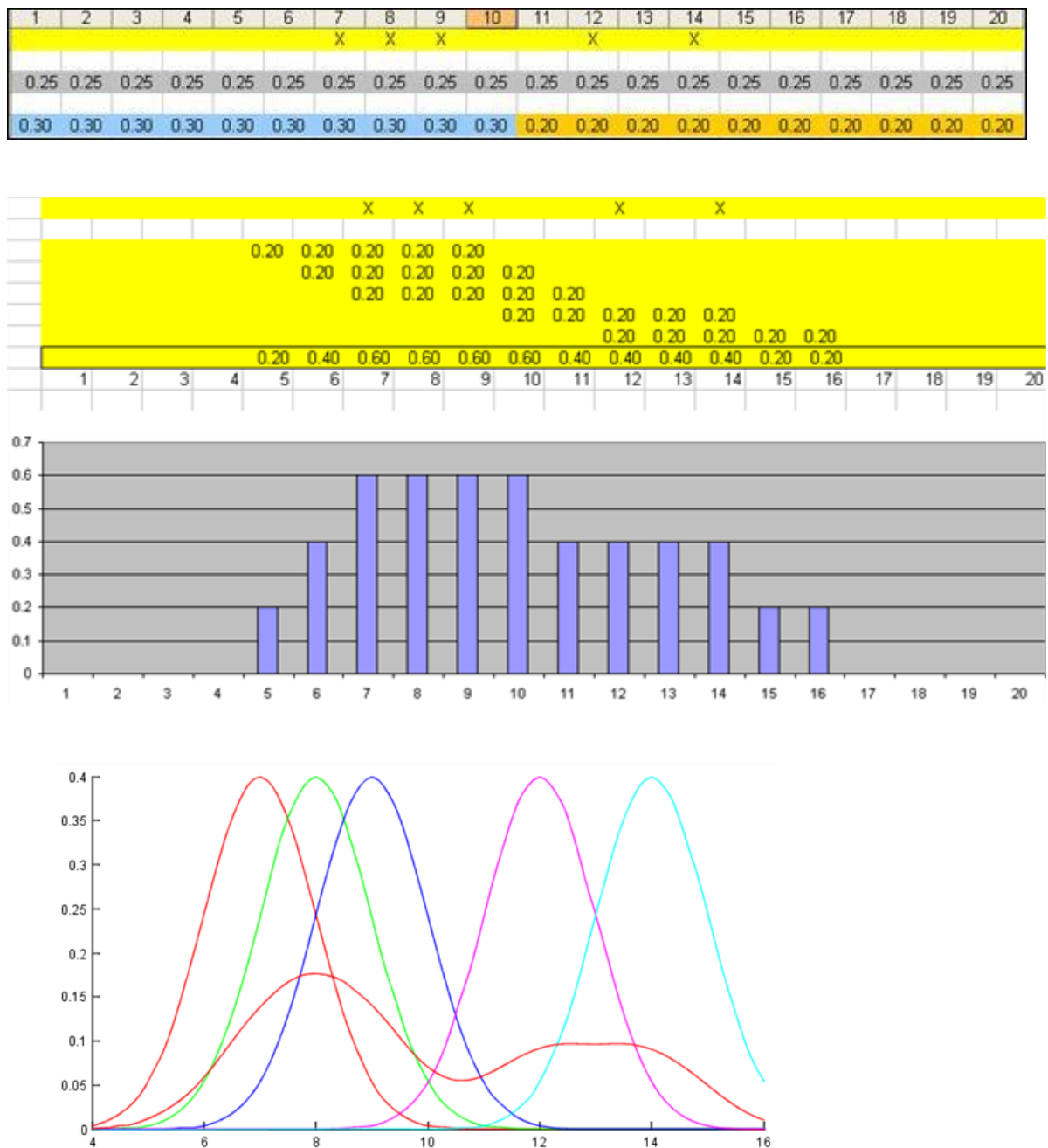
Obr. 8-1. Příliš jemná síť, kde není vidět kontinuální změna intenzity událostí



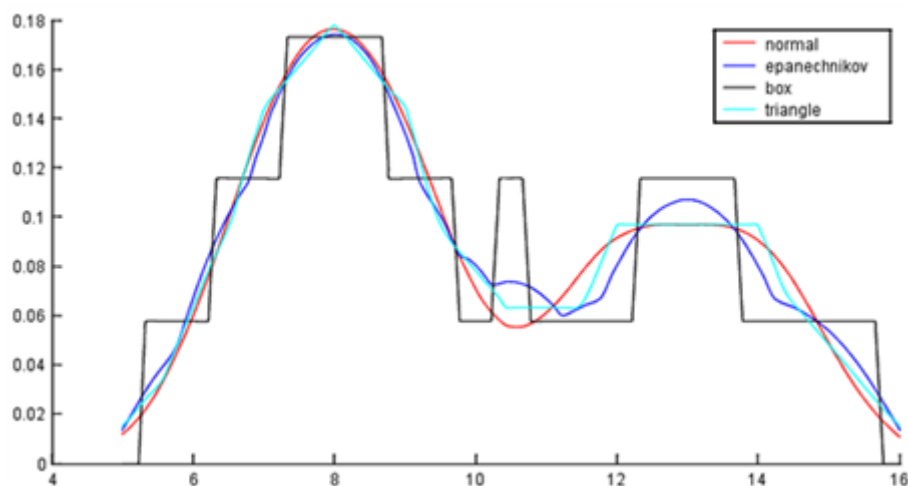
Obr. 8-2. Příliš hrubá síť s hrubým vymezením anomálních míst

8.2 Jádrové vyhlazení

Jádrový odhad byl původně vyvinut pro získání vyhlazeného odhadu monovariační nebo multivariační hustoty pravděpodobnosti (křivky četnosti) získaného vzorku pozorování, tedy k vyhlazení histogramu.



Obr. 8-3. Postup odvození jádrového odhadu v případě jednorozměrných dat (histogram). Směrodatná odchylka je 2. Sečtou se plochy pod křivkami a podělí počtem křivek (bodů).



Obr. 8-4. Čtyři varianty jádrového odhadu podle typu jádrové funkce pro histogram.

Jedná se o neparametrickou metodu, protože neurčuje tvar funkční závislosti regresního vztahu, podobně jako klouzavé aritmetické průměry, oproti nim však představuje jisté zobecnění.

Odhad intenzity prostorového bodového vzorku je velmi podobný odhadu dvojrozměrné hustoty pravděpodobnosti, a proto dvojrozměrný jádrový odhad může být snadno upraven k odhadu intenzity. Jestliže \mathbf{S} reprezentuje obecně místo v \mathfrak{R} , a $\mathbf{S}_1, \mathbf{S}_2, \dots, \mathbf{S}_n$ místa n pozorovaných událostí, potom intenzita v bodě \mathbf{S} označená $\lambda(\mathbf{s})$ může být odhadnuta jako (Bailey, Gatrell, 1995):

$$\lambda'_\tau(\mathbf{s}) = \frac{1}{\delta_\tau(\mathbf{s})} \sum_{i=1}^n \frac{1}{\tau^2} k\left(\frac{\mathbf{s} - \mathbf{s}_i}{\tau}\right)$$

$\mathbf{k}(\cdot)$ je vhodně vybraná funkce dvourozměrné hustoty pravděpodobnosti, známá jako kernel (jádro), která musí být symetrická kolem počátku. Parametr $\tau > 0$ se označuje jako šířka pásma (bandwidth) a určuje stupeň vyhlazení – v podstatě je to poloměr kruhu se středem v \mathbf{S} , v kterém každý bod \mathbf{S}_i významně přispívá do $\lambda'_\tau(\mathbf{s})$.

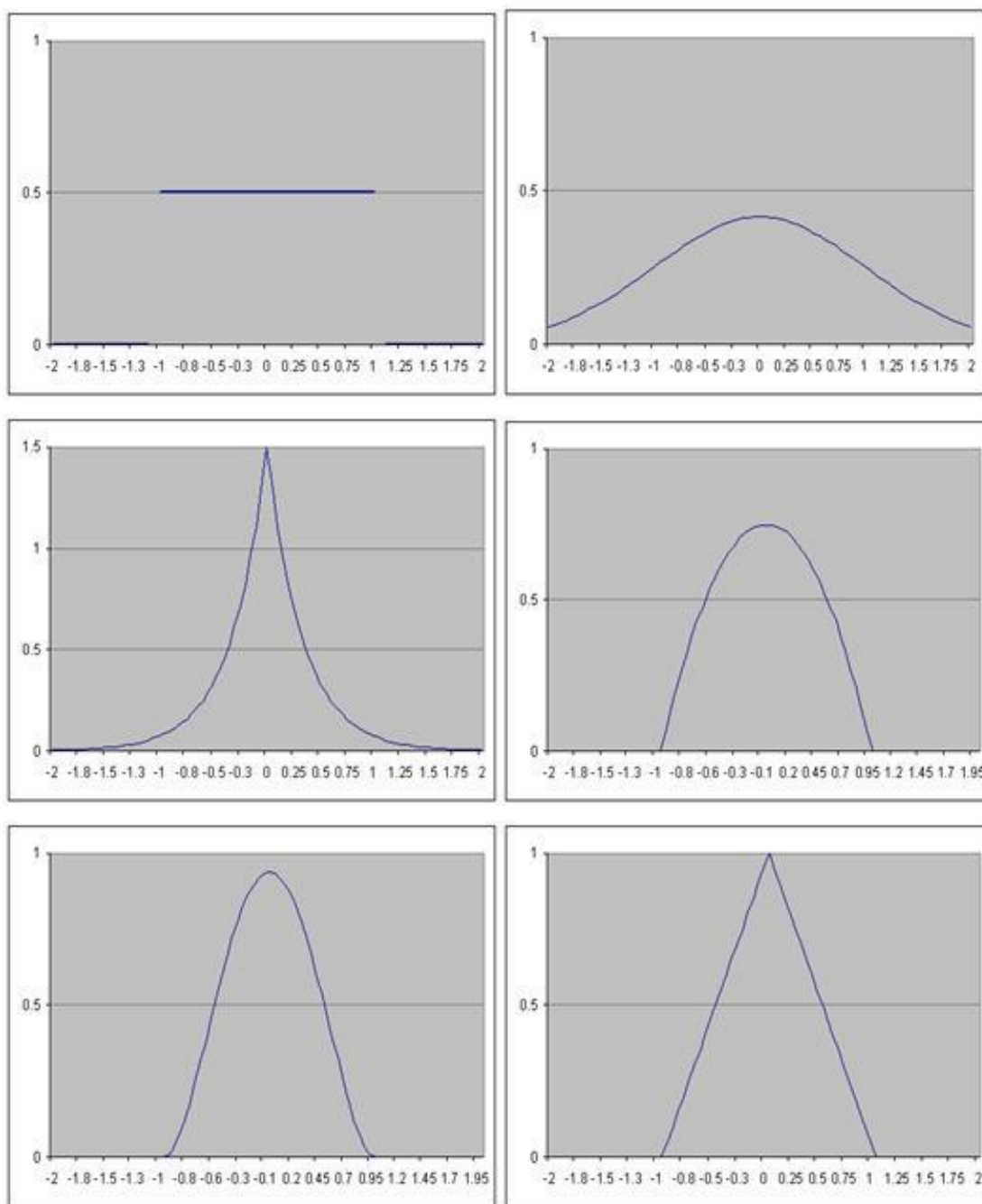
Faktor (Bailey, Gatrell, 1995)

$$\delta_\tau(\mathbf{s}) = \int_{\mathfrak{R}} \frac{1}{\tau^2} k\left(\frac{\mathbf{s} - \mathbf{u}}{\tau}\right) d\mathbf{u}$$

označuje okrajovou (hraniční) korekci – je to objem uzavřený pod kernelem se středem v \mathbf{S} , ležící uvnitř \mathfrak{R} .

Hodnoty $\lambda'_\tau(\mathbf{s})$ mohou být stanoveny pro každé místo ve vhodně vybrané jemné mřížce a reprezentují místní intenzitu $\lambda(\mathbf{s})$.

Výběr vhodné funkce pro kernel $\mathbf{K}(\cdot)$ je relativně snadný, protože pro většinu vybraných funkcí požadovaných vlastností je jádrový odhad pro určitou šířku pásma podobný (viz obr. 4-33). Jejich vyjádření bez hranových korekcí je uvedeno v tabulce 8-1.



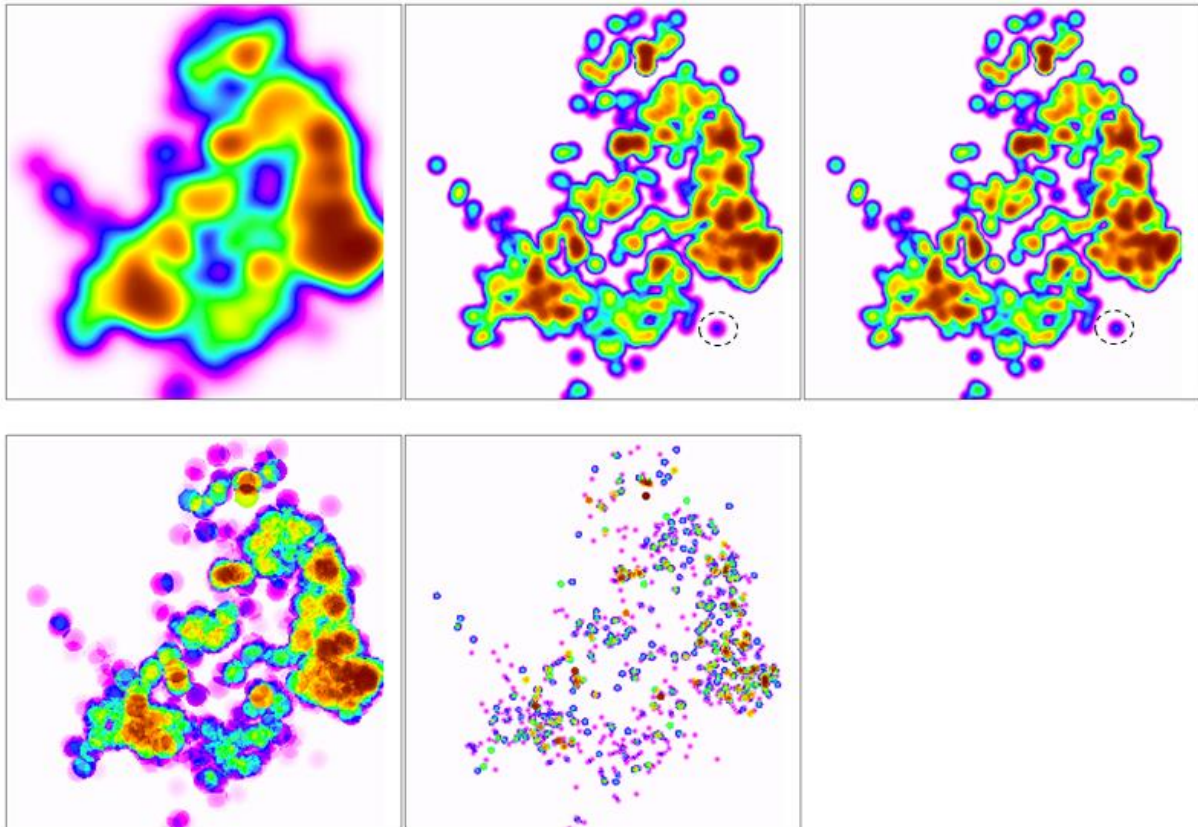
Obr. 8-5. Šest variant jádrové funkce - konstanta, N , exponenciální, kvadratický (Epanechnikov, parabola), kvartický, trojúhelníkový (lineární) (Levine, 2010)

Tab. 8-1 Vyjádření jednotlivých funkcí kernelu (upraveno podle Smith et al., 2018)

Název funkce pro kernel	Vzorec	Komentář
Normální (Gaussova) (<i>normal</i>)	$\frac{1}{2k} e^{-\frac{t^2}{2}}$	Neohraničená. Jako šířka pásma h se používá směrodatná odchylka (fixní nebo adaptivní).
Kvartická (bikvadratická, sférická, <i>quartic</i>)	pro $t \leq 1 \dots \frac{3}{k}(1-t^2)^2$ pro $t > 1 \dots 0$	Ohraničená. Aproximuje normální funkci. k je konstanta.
negativně exponenciální (<i>exponential</i>)	pro $ t \leq 1 \dots Ae^{-k* t }$ pro $ t > 1 \dots 0$	Může být ohraničená. A je konstanta (např. $A=1.5$) a k je parametr (např. $k=3$). Funkce je příkřejší a větší váhy jsou blízko středu

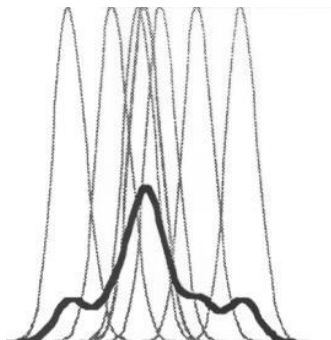
		než u jiných kernelových funkcí.
Kuželová, trojúhelníková (<i>conic, triangular</i>)	pro $ t \leq 1 \dots 1 - t $ pro $ t > 1 \dots 0$	Ohraničená. Jednoduchý lineární vzestup a pokles vah k centrálnímu bodu.
Rovnoměrná (konstantní) (<i>uniform, flat</i>)	pro $ t \leq 1 \dots k$ pro $ t > 1 \dots 0$	Ohraničená. k je konstanta. Ploché disk se stejnou výškou (váhou) kolem každého bodu.
Epanechnikova (kvadratická) (<i>Epanechnikov</i>)	pro $ t \leq 1 \dots \frac{3}{4}(1 - t^2)$ pro $ t > 1 \dots 0$	Ohraničená. Hladká funkce, používaná v řadě programů (GAM, ArcGIS).

Poznámka: $t = d_{ij}/h$, kde h je šířka pásma.

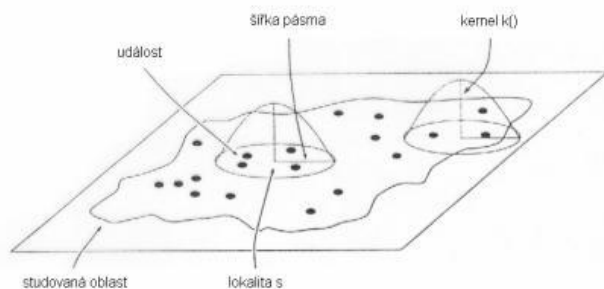


Obr. 8-6. Vliv typu vyhlazovací funkce na výsledek jádrového odhadu (shora a zleva postupně: normální, kuželová, kvartická, negativně exponenciální 150 m a 50 m) (Ivan, Horák, 2015)

U ohraničených funkcí se sumace provádí pouze pro $h_i \leq \tau$. Oblast vlivu, uvnitř které události přispívají do $\lambda'_\tau(s)$ je tedy kruh o poloměru τ kolem s . Na obr. 4-34 je nakreslen řez přes sadu radiálně symetrických funkcí $K(\cdot)$, které odpovídají lokalizaci jednotlivých událostí. Funkce $K(\cdot)$ je posunuta počátkem do S a přepočítána faktorem τ tak, aby poskytovala vhodné váhy pro události kolem S . Sumací příspěvků jednotlivých funkcí $K(\cdot)$ získáme výsledný odhad intenzity (obr. 4-36).



Obr. 8-7 Princip sumace příspěvků jednotlivých funkcí při tvorbě jádrového odhadu intenzity (Brunsdon 1995)



Obr. 8-8 Kernel jako 3D plovoucí funkce (podle Bailey, Gatrell 1995)

Pro lepší pochopení můžeme kernel považovat za 3D plovoucí funkci, která postupně navštíví každý bod S jemné mřížky (obr. 4-35). Vzdálenost ke každé pozorované události S_i , která leží uvnitř zóny vlivu (vzdálenost τ), je změřena a přispívá k výpočtu intenzity v místě S .

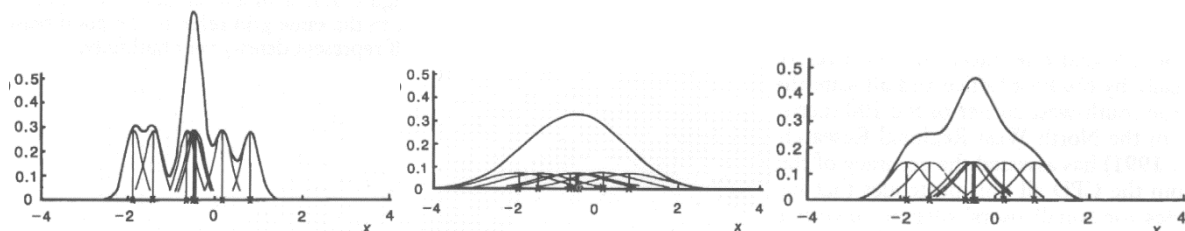
Nehledě na volbu funkce $K(\cdot)$, efekt zvětšení šířky pásma τ vede k roztažení pásma kolem bodu S , ve kterém události ovlivňují odhad intenzity. Pro velké τ je $\lambda'_\tau(s)$ značně ploché a chybí lokální prvky. Pokud je τ příliš malé, může se $\lambda'_\tau(s)$ projevovat jako sada vrcholů s centry v místech událostí.

Vhodnou velikost pro τ lze odhadnout jako:

$$\tau = 0,68 n^{-0,2} R$$

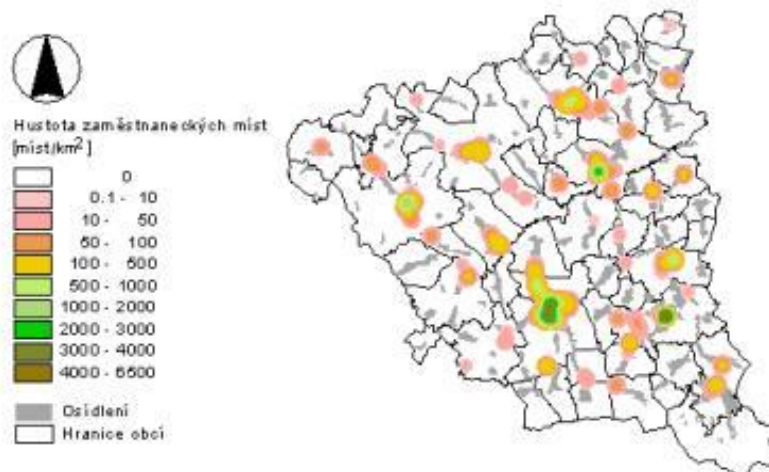
R plocha oblasti \mathfrak{R}
 n počet událostí v \mathfrak{R}

V praxi se ale optimální hodnota τ hledá zkoušením, zda výsledný obraz jádrového vyhlazení vyhovuje především z hlediska vhodného postizení variability pole.



Obr. 8-9 Příliš malá šířka pásma (vlevo), příliš velká šířka pásma (uprostřed) a optimální šířka pásma v řezu (vpravo) (Hearnshaw, Unwin 1994)

Další informace především o praktické aplikaci, algoritmizaci a implementaci v ArcGIS Spatial Analyst najdete na <http://www.quantdec.com/SYSEN597/GTKAV/section9/density.htm>.



Obr. 8-10 Hustota zaměstnaneckých míst v okrese Nový Jičín k 31.3.2000 (jádrový odhad s šířkou pásma 1000 m)

8.2.1 Problémy u jádrového odhadu

Jádrový odhad se zaměřuje na mapování intenzity bodové textury (zpravidla událostí), i když je možné ho uplatnit i pro jiné typy grafické reprezentace např. areály.

Výskyt některých geografických jevů je však podmíněn distribucí jiného „základního“ jevu. Pokud budeme sledovat výskyt jednoho druhu stromu v lese, není taková vazba (podmíněnost) zřejmá a výsledky můžeme interpretovat jako intenzitu výskytu tohoto druhu a zajímat se o příčiny pozorovaného uspořádání (textury). V řadě případů a zvláště u socioekonomických jevů tomu tak není. Např. pokud bychom sledovali výskyt bydlíšť obyvatel s vyšším odborným vzděláním, získáme po vyhlazení vzor, který zřejmě bude především ukazovat distribuci obydlí, stěží budeme identifikovat podíl intenzity příslušející tomuto typu vzdělání. Ještě horší situace bude u jevů, které jsou podmíněny hierarchicky nebo paralelně více jevy. Příkladem čisté hierarchické podmíněnosti může být např. počet uchazečů o zaměstnání v evidenci déle než 1 rok (tj. dlouhodobě nezaměstnaní). Zde se do výsledku postupně promítá distribuce bydlíšť obyvatelstva, distribuce ekonomicky aktivních obyvatel mezi bydlíci, distribuce uchazečů mezi ekonomicky aktivními a distribuce dlouhodobě nezaměstnaných mezi uchazeči (a to ještě zanedbáváme faktor skryté, tj. neregistrované nezaměstnanosti). Je zjevné, že mapování intenzity výskytu dlouhodobě nezaměstnaných nelze samostatně správně interpretovat.

V případě jádrového vyhlazení bodové textury lze použít funkce relativní intenzity (Bithell 2000), která měří intenzitu v bodě relativně k průměrné intenzitě nezávislého jevu jako poměr obou funkcí (zpravidla sledovaná proměnná ku hodnotám pozadí). Duální jádrový odhad poskytuje odhad relativní intenzity výskytu deliktů vůči jinému jevu a počítá se jako poměr 2 jádrových odhadů (Igor, Horák 2015). V některých případech se používá poměr logaritmů obou proměnných, případně rozdíl v intenzitách (bez nebo se standardizací), součet intenzit (bez nebo se standardizací). Používá se stejná šířka pásma. Problémy vznikají v případě, že se hodnota pozadí blíží nule.

V případě složitějších vazeb (více ovlivňujících jevů) se místo zahrnutí mnoha faktorů použijí kontrolní vzorky, které zabezpečí standardizaci (odvození kontrolních vzorků je vhodné realizovat stochastickou simulací).

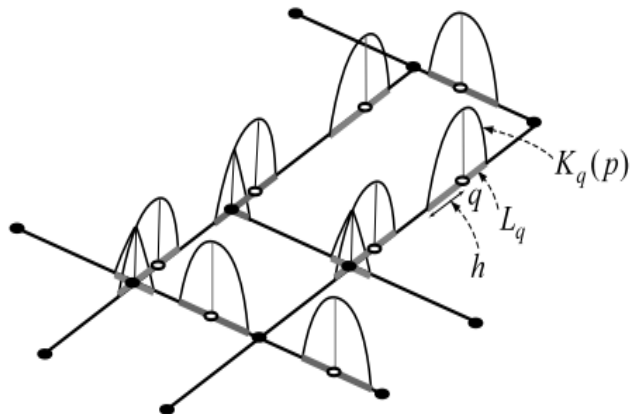
Zatím jsme se zaměřili na plošné jádrové odhady, kdy se účinek vyhlazovací funkce šíří všemi směry stejně z místa události. V případě bodově lokalizovaných událostí, které se mohou vyskytovat jen na linii, je třeba použít liniových jádrových odhadů, které jsou popsány např. v Ivan, Tesla (2015).

Levine (2010) poskytuje vhodný přehled různých technik a jejich parametrů, včetně alternativních metod pro výběr šířky pásma, a uvádí příklady pro analýzu kriminality, zdravotnické analýzy,

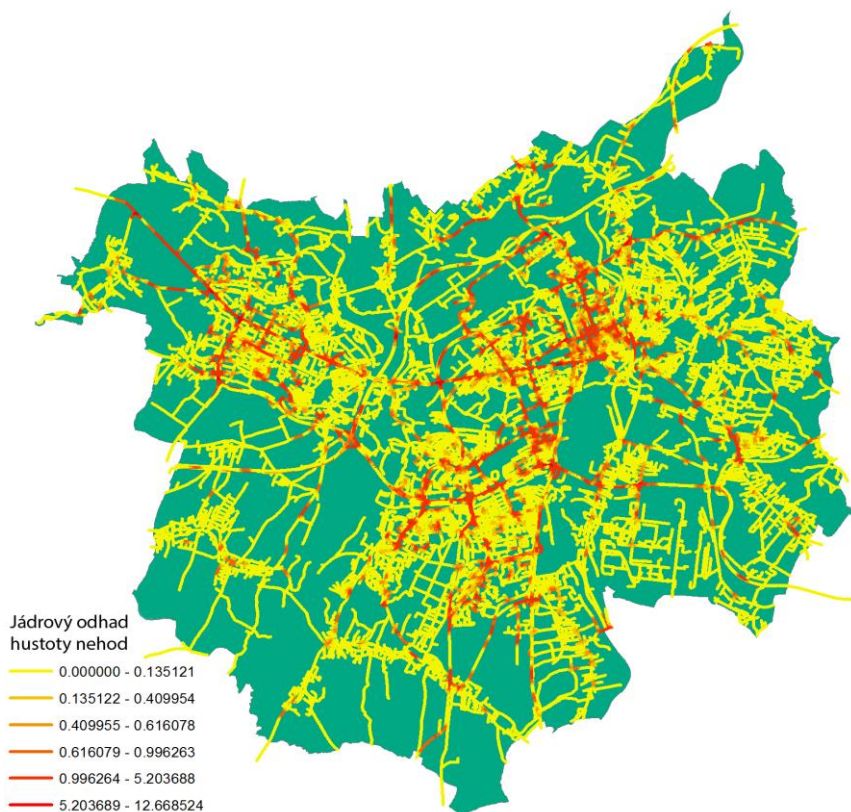
urbanistické a ekologické. Ivan, Horák (2015) připravili metodiku identifikace anomálních lokalit kriminality pomocí jádrových odhadů, kde jsou popsány doporučené metody a nastavení parametrů pro oblast kriminality.

8.2.2 Jádrové odhady na linii

V případě omezení distribuce událostí pouze na linie (např. dopravní nehody lokalizované pouze v dopravní síti) je potřebné zájmové území dělit ne na plošné buňky, ale na úseky linie, označované někdy jako lixely. Jednotlivé události působí pouze v rámci linií a k působení na jiný segment linie může dojít pouze v platném křížení linie (na křižovatce).



Obr. 8-11 Princip uplatnění jádrových funkcí na liniové síti (Okabe, Sugihara 2012)



Obr. 8-12 Jádrový odhad hustoty dopravních nehod v dopravní síti Ostravy v roce 2012 (Tesla, 2014)

9 Linie

Linie reprezentují na mapách 2 příbuzné fenomény:

- a) reprezentují a lokalizují skutečně lineární geografické fenomény (řeky, silnice, potrubí)
- b) rozdělují plochy a povrchy (hraniční linie, lomové linie)

Z hlediska analýzy liniového vzorku je první typ zajímavější. Statistické metody pro zkoumání liniového vzorku jsou ale méně často využívány ve srovnání s analýzami bodů nebo areálů.

Pro popis liniového vzorku je nutno si uvědomit subjektivní charakter záznamu "přírodní" linie.

Linie jsou popisovány sérií lomových bodů (vertexů), lokalizovaných 2 či 3 souřadnicemi, zpravidla mezi 2 lomovými body se používá přímá spojnice a pouze některé systémy, zejména blízké stavebnímu sektoru, používají oblouky. To nutně způsobuje zkreslení proti realitě. Většina linií na mapě (i při velkém měřítku) vykazuje určité zakřivení. Např. silniční linie mezi 2 městy není rovná, ale zakřivuje se, často podle jiných geoprvků. Ještě výraznější je problém na meandrující řece. S větší podrobností pochopitelně narůstá počet vertexů popisujících linii. Součet délky dílčích linií pak udává vzdálenost mezi 2 uzly (počátečním a koncovým). Někdy se místo měření vzdálenosti v délkových jednotkách používá cestovní čas a nebo dopravní náklady.

Pro analýzu liniového vzorku je významný také směr (viz kruhová statistika) a spojení. Existence spojení mezi soustavou bodů, které tvoří linii, znamená, že lokace (body) na sobě nejsou nezávislé, ale jsou spojené v určitém směru. Body spojené v určitém pořadí musí zachovávat tuto posloupnost.

Interakční metody umožňují analýzu interakčních dat, tj. dat, popisujících tok mezi zdroji a cíli. Na rozdíl od jiných typů dat jsou tato data typicky vztahována k páru míst (tj. 1 zdroj a 1 cíl). Tok vyjadřuje přenos materiálu, zboží, lidí, zvířat, ale také energie nebo myšlenek mezi minimálně 2 místy. Primárním cílem analýz je porozumění prostorovým tokům a jejich modelování.

Vzhledem k rozdílnému charakteru přenášené substance se také liší prostředky, kterými se tok realizuje. Velmi často se realizuje prostřednictvím dopravních sítí. Pro popis těchto sítí a různé typy optimalizačních úloh v síti se využívá především teorie grafů. K nejběžnějším úlohám patří hledání optimální cesty. K praktickým úlohám patří hodnocení dopravní dostupnosti, lokalizační a alokační úlohy a aplikace gravitační teorie. Využití teorie grafů umožňuje také výpočet celé řady zajímavých charakteristik sítě.

Z hlediska geoinformatiky je na prvním místě studium **prostorových vazeb** mezi zdroji a cíli. Vazby mezi zdroji a cíli mohou být vyjadřovány pomocí struktur liniových či vektorových, zpravidla bez důrazu na topografickou přesnost. U nich se zkoumají topologické vlastnosti jednotlivých prvků a souřadnice ztrácejí význam (využívají se ale vzdálenostní či jiná hodnocení „linií“). Takové „nelokalizované“ linie zaznamenávají schématické spojení ze zdroje do cíle, u kterého nesledujeme trasu toku, ale pouze skutečnost existence (a velikosti, případně struktury) toku.

Vizualizace interakčních dat a tedy nejjednodušší interakční metody jsou spojeny s **liniovým vzorkem**, jeho reprezentací a popisem. Uplatňuje se především ve formě pohybové linie.

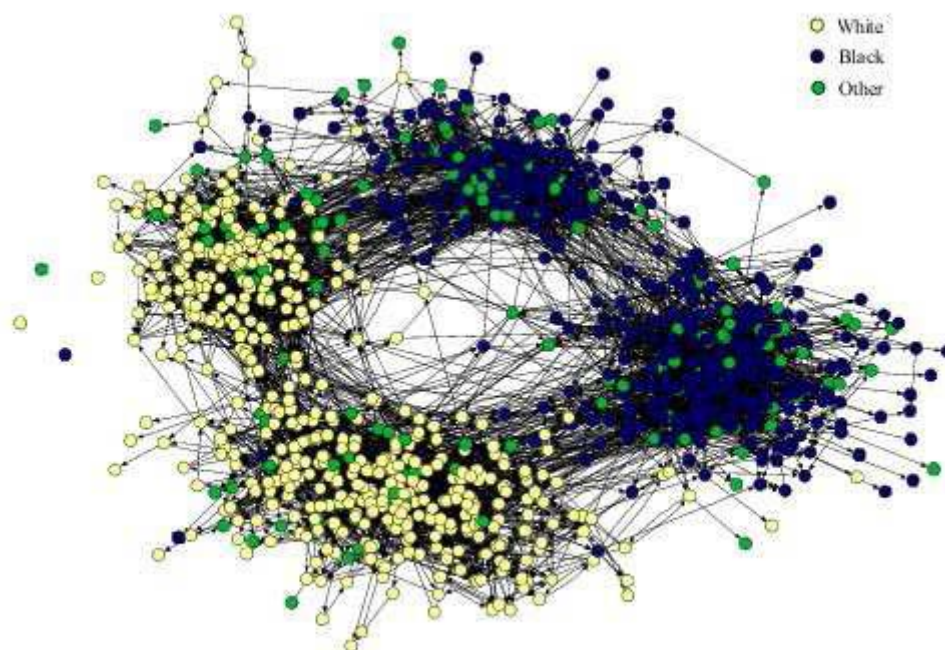
9.1 Základy teorie grafů

Teorie grafů představuje dnes již samostatně rozvinutou matematickou disciplínu, jejíž aplikace nacházíme v řadě oblastí. Široce se uplatňuje např. v operačním výzkumu, významné místo ale zaujímá v prostorové analýze, a to především u interakčních dat. Postupně se však uplatňuje i pro topologický popis a analýzu areálů.

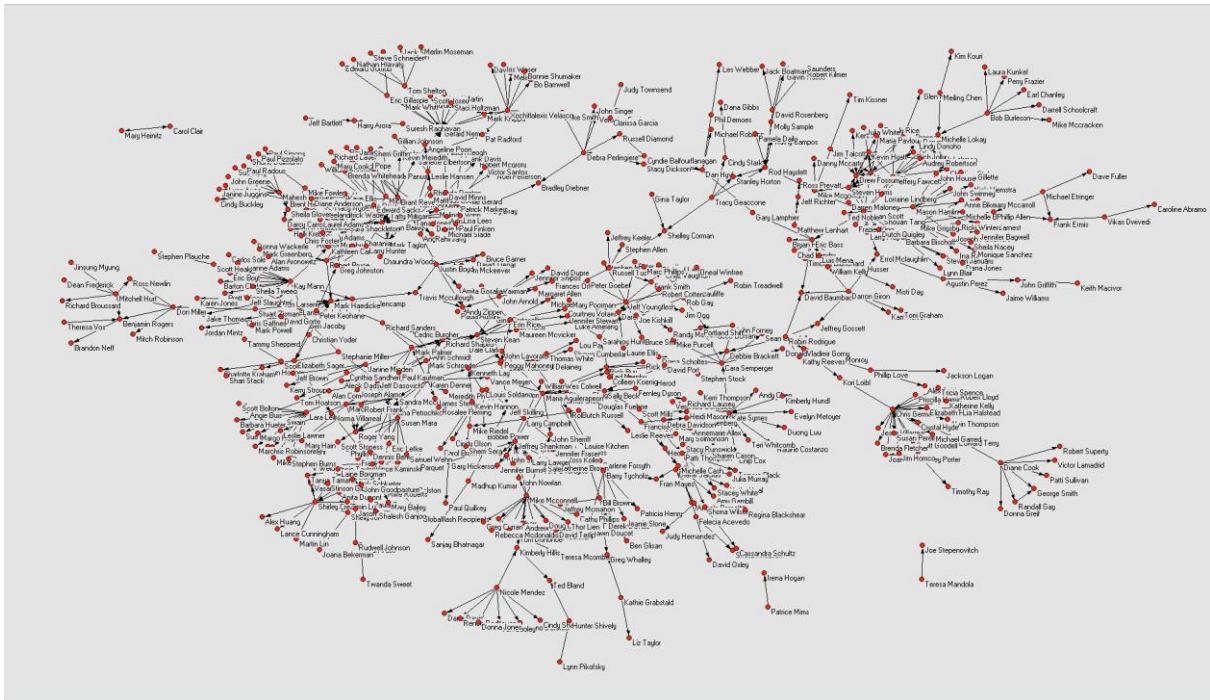
Teorie grafů se uplatňuje především při studiu sítí. Sítě lze nalézt v nejrůznějších oborech a aplikacích:

- sociální sítě (sítě známostí, spoluautorů, emailové, telefonní),
- informační sítě (citační, odkazy na internetu),
- biologické sítě (šíření epidemií, potravinové sítě, interakce protein-protein, metabolické sítě),
- technické sítě (dopravní sítě, inženýrské sítě)
- fyzickogeografické sítě (hydrologické)

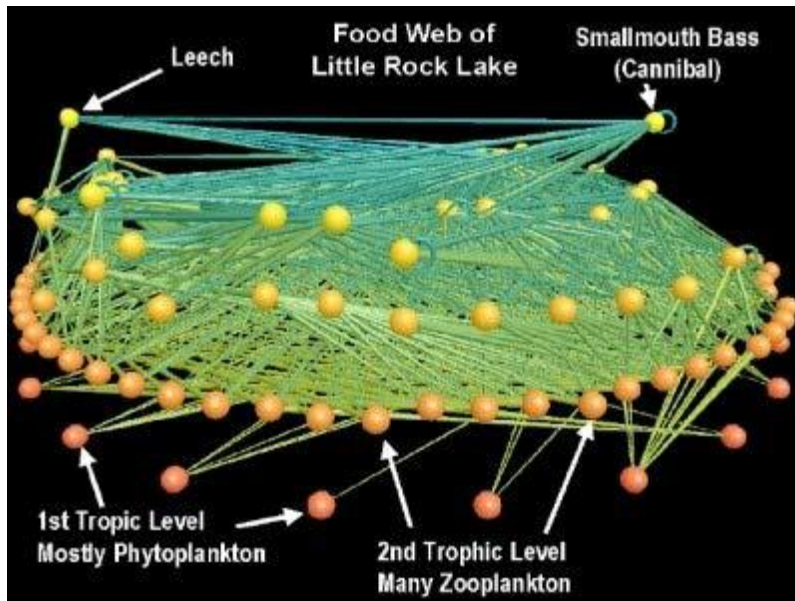
Je zřejmé, že zejména pro poslední 2 je důležitá lokalizace v území a je tedy předmětem zájmu geoinformatiky.



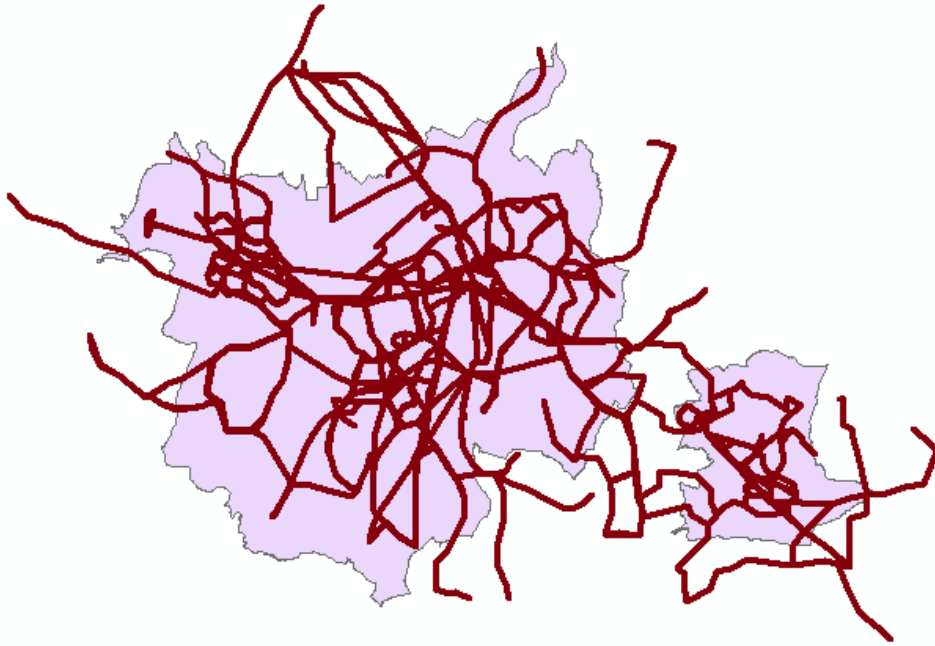
Obr. 9-1 Sítě známostí (Newman, 2003)



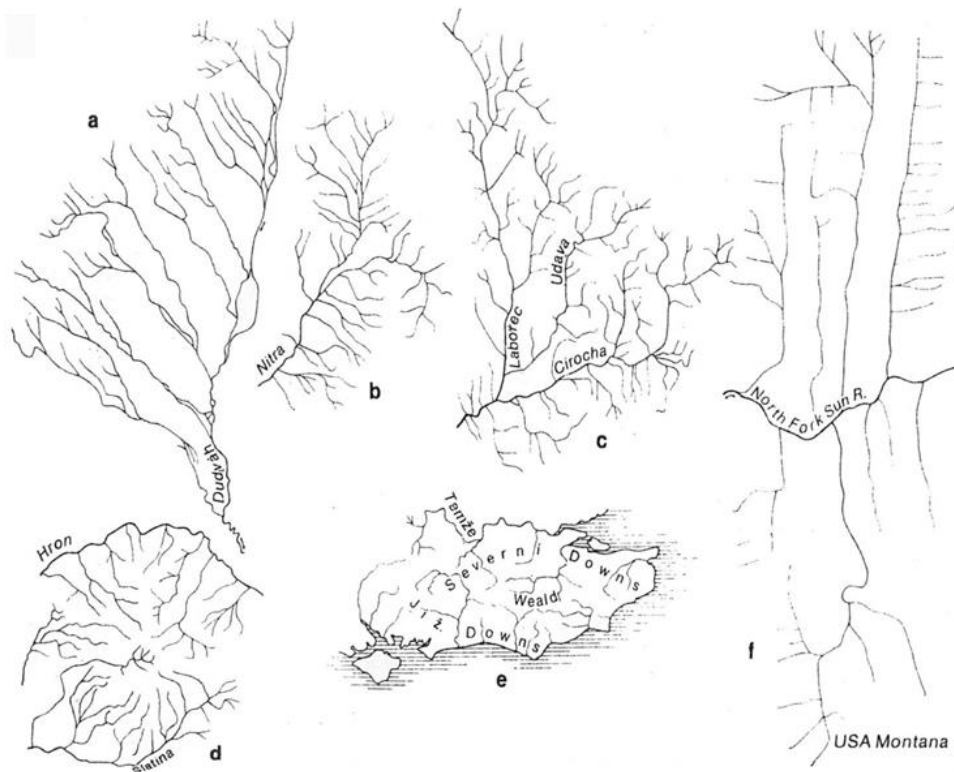
Obr. 9-2. Síť výměny emailů v 1 organizaci (Krishnagopal, 2018)



Obr. 9-3. Potravní řetězec v jezeře <http://many.corante.com/archives/2004/02/>



Obr. 9-4. Schematizované trasy linek integrované dopravy ODIS v Ostravě a Havířově ve 2015



Obr. 9-5. Typy říční sítě (Netopil, 1984) (a – asymetricky uspořádaná, b – stromovitá, c – vějířovitá, d – paprscitá, e – prstencovitá, f – pravouhlá)

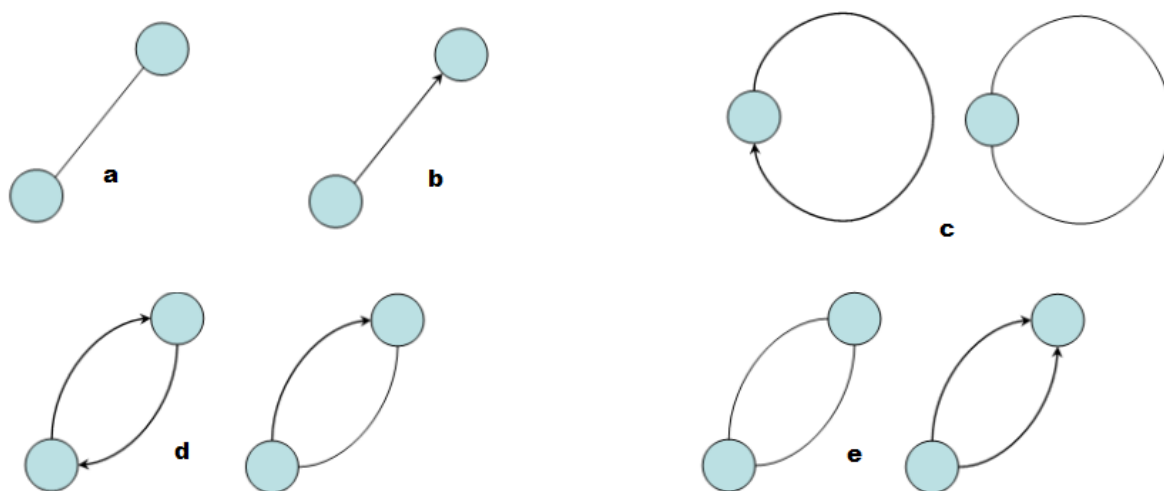
Popis teorie grafů lze nalézt v Dudorkin (1997) nebo Veverka (1989). Ze zahraniční literatury lze doporučit např. Newman (2010). Protože terminologie teorie grafů není všeobecně známá ani jednotná, je potřebné uvést a vysvětlit některé pojmy.

Na prvním místě je potřebné vymezit samotný pojem **graf**. Za obecnou můžeme považovat definici Vevery (1989), který vymezuje graf jako matematickou strukturu modelující skutečnost, že v nějaké množině prvků existují vazby. Pro prvky se používá označení uzly, pro vazby označení hrany.

Grafy jsou tedy chápány jako jistý matematický útvar, jehož základními konstruktory jsou **uzly** a **hrany**. Hrany spojují uzly a skutečnost, že hrana vstupuje nebo vystupuje z uzlu, se označuje jako **incidence**.

Tab. 9-1 Základní typologie hran a posloupnosti hran a uzlů podle Dudorkina (1997)

Pojem	Vysvětlení, příklad	
Hrany	Neorientovaná hrana	hrana bez vyznačení směru (bez orientace)
	Orientovaná hrana	hrana s vyznačením směru
	Smyčka (loop)	hrana, která inciduje jen s 1 uzlem
	Rovnoběžné hrany	hrany, které incidují se stejnými uzly
	Násobné hrany	Rovnoběžné hrany, které jsou všechny stejně orientované nebo ani jedna z nich není orientovaná
Sledy	Sled mezi uzly u_0 a u_n (walk)	uspořádaná posloupnost uzlů a hran mezi uzly u_0 a u_n
	Uzavřený sled	sled, kde $u_0 \equiv u_n$
	Tah (trail)	sled, ve kterém se každá hrana vyskytuje nejvýše 1x
	Cesta (path)	tah, ve kterém se každý uzel vyskytuje nejvýše 1x
	Kružnice	uzavřená cesta
	Orientované spojení	uspořádaná posloupnost uzlů a orientovaných hran mezi uzly u_0 a u_n , kde hrany jsou orientovány ve směru odpovídajícímu pořadí v posloupnosti
	Cyklus	uzavřená orientovaná cesta



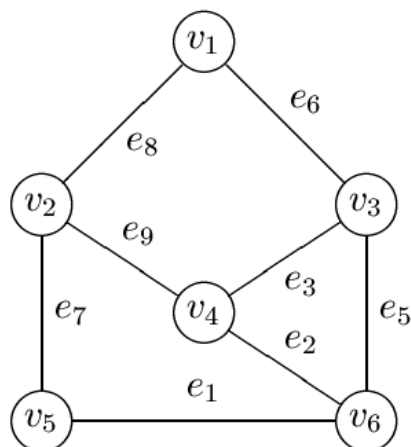
Obr. 9-6 Typy hran: a neorientovaná, b orientovaná, c smyčka, d rovnoběžné hrany e násobné hrany

Na základě typologie hran a sady hran lze vymezit základní typy grafů (tab. 9-2).

Tab. 9-2 Základní typy grafů podle Dudorkina (1997)

Označení	Vysvětlení, příklad
Orientovaný graf	obsahuje pouze orientované hrany
Neorientovaný graf	obsahuje pouze neorientované hrany
Smíšený graf	obsahuje orientované i neorientované hrany
Prostý graf	neobsahuje násobné hrany
Jednoduchý graf	prostý graf bez smyček

Konečný graf	jeho množina uzlů a hran je konečná. Většina praktických úloh řeší právě konečné grafy.
Plošný (planární) graf	je zobrazitelný v rovině bez protínání hran. Hrany nemají žádné společné body kromě uzlů. Neplošný graf nám dovoluje realizovat např. mimoúrovňová křížení v dopravní síti.
Úplný graf	Mezi každými 2 uzly existuje právě 1 hrana. Úplný neorientovaný graf o n uzlech tak obsahuje $n*(n-1)/2$ neorientovaných hran.
Izomorfní grafy	Grafy, které se liší pouze označením uzlů a hran a způsobem zakreslení (diagramem). Kardinalita vztahu mezi uzly je 1:1 a stejně tak pro hrany.
Faktor grafu	část grafu, která má tutéž množinu uzlů
Souvislý graf	mezi libovolnými 2 uzly existuje sled
Silně souvislý graf	mezi libovolnými 2 uzly existuje orientovaná cesta tam i zpět
Strom	Souvislý graf bez kružnic
Kostra grafu	Faktor grafu, který je jeho stromem
Cyklický graf	Orientovaný graf obsahující alespoň jeden cyklus. Příkladem může být dálniční síť nebo letecká dopravní síť
Acyklické grafy	Orientovaný graf bez cyklu. Příkladem může být kanalizační síť.
Ohodnocený graf	Hrany nebo uzly jsou ohodnoceny. Ohodnocením se zaznamenávají kvalitativní a kvantitativní charakteristiky hran a uzlů. Používají se zpravidla kladná, reálná čísla. Prvním krokem ohodnocení prvků grafu je jejich indexace.



Sled: $v_1, e_6, v_3, e_3, v_4, e_2, v_6, e_5, v_3, e_3, v_4, e_9, v_2$.

Uzav.sled: $v_1 \dots v_1$

Tah: $v_1, e_6, v_3, e_5, v_6, e_2, v_4, e_3, v_3$

Cesta: $v_1, e_6, v_3, e_5, v_6, e_2, v_4$

Obr. 9-7 Příklad pro rozlišení sledů a cest.

Převod smíšeného grafu na orientovaný se provede tak, že za každou neorientovanou hranu doplníme 2 opačně orientované hrany. Obdobně se řeší požadavek změny neorientované hrany na orientovanou. Opačný proces je zřejmý.

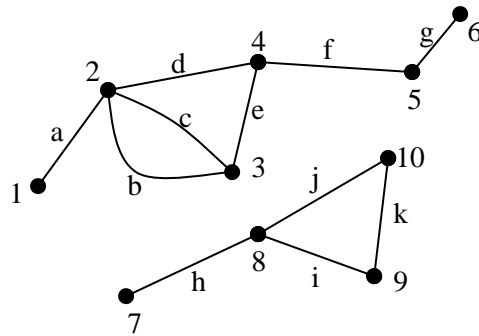
Pro vytvoření prostého grafu musíme zrušit duplicitní hrany (incidující se stejnými uzly). Pokud je naším cílem vytvoření nějaké minimální struktury (nejkratší cesta, nejlevnější kostra, TSP apod.), ponecháme vždy tu hranu, která má nejmenší nákladové hodnocení.

9.1.1 Základní operace v grafu

Pro popis grafů a optimalizaci v grafech se používají **maticové** nebo **relační struktury**. Především to jsou:

- matice incidence,
- matice sousednosti,
- matice dosažitelnosti.

Do **matice incidence** se zapisuje existence spojení mezi uzly a hranami (incidence). Hanuš (1992) používá pojem uzlohranová matice. Matice incidence je zpravidla řídce obsazena a tak její přímé použití není příliš efektivní (Ryant, 2017).



Obr. 9-8 Příklad neorientovaného grafu

Tab. 9-3 **Matice incidence** pro graf na obr. 9-6

		HRANY										
		a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k
U Z L Y	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	2	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0
	3	0	1	1	0	1	0	0	0	0	0	0
	4	0	0	0	1	1	1	0	0	0	0	0
	5	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0
	6	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
	7	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
	8	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	0
	9	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1
	10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1

Pro orientované grafy je možné u matice incidence používat i hodnotu -1. Tedy:

$a_{ij} = -1$ když j-tá hrana vstupuje do uzlu U_i

$a_{ij} = +1$ když j-tá hrana vystupuje z uzlu U_i

Matice sousednosti (někdy i matice spojitosti) zapisuje počet hran mezi 2 sousedními uzly. Prostý graf bude pochopitelně obsahovat pouze 0/1.

Tab. 9-4 **Matice sousednosti** pro graf na obr. 9-6

		UZLY									
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
U Z L Y	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
	2	1	0	2	1	0	0	0	0	0	0
	3	0	2	0	1	0	0	0	0	0	0
	4	0	1	1	0	1	0	0	0	0	0
	5	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0
	6	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
	7	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
	8	0	0	0	0	0	0	1	0	1	1
	9	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1
	10	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0

Matice dosažitelnosti obsahuje prvky b_{ij} , které nabývají hodnoty 1, pokud existuje cesta mezi uzly U_i a U_j . Pokud existuje cesta z uzlu U_i do uzlu U_j , pak je uzel U_j dostupný z U_i .

Tab. 9-5 Matice dosažitelnosti pro graf na obr.9-6

		UZLY									
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
U Z L Y	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0
	2	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0
	3	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0
	4	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0
	5	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0
	6	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0
	7	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1
	8	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1
	9	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1
	10	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1

V tab. 9-5 je zřejmé, že graf má 2 souvislé komponenty.

Matici dosažitelnosti lze odvodit z matice sousednosti pomocí Booleovského součtu a součinu.

Sítě lze reprezentovat i prostým výčtem hran nebo seznamem uzlů s jejich sousedy.

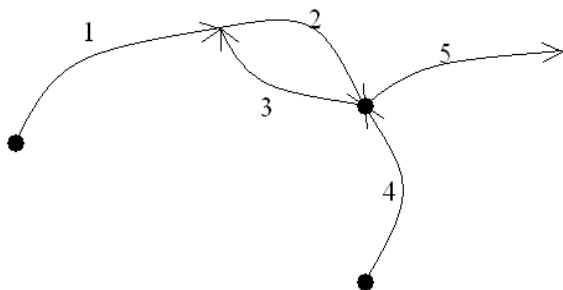
Ohodnocení hran je možno zapisovat pomocí **matice cen**.

Délka cesty je součet ohodnocení jednotlivých hran tvořících cestu. Vzdálenost z U_i do U_j je délka nejkratší cesty z uzlu U_i do uzlu U_j a označuje se jako d_{ij} . Pokud graf neobsahuje cyklus se zápornou hodnotou, platí pro všechny trojice uzlů grafu trojúhelníková nerovnost $C_{ij} < C_{ik} + C_{kj}$.

Vzdálenostní poměry (především délku nejkratší cesty mezi **i** a **j**) lze zapisovat do **distanční matice**. Distanční matice je vyjádřením nepodobnosti objektů, na rozdíl od matice sousednosti, kterou můžeme chápat jako míru podobnosti. Distanční matici je možné transformovat do matice sousednosti (v obecném pojetí) pomocí jistých klasifikačních pravidel (podrobně je popisuje Tiefelsdorf 2000).

Vzdálenost je jen 1 z možností, jak ohodnotit hrany a popsat velikost tření podle jednotlivých liniových segmentů. Může jít o čas, cenu, spotřebované palivo apod. Obecně mluvíme o **impedanci** (odporu) a hodnoty hran zapisujeme do tzv. **tabulky impedance**.

U grafů s mnoha cykly a rovnoběžnými hranami (např. uliční síť) je nedostatečné znát incidenci hran s uzly a impedanci segmentů (hran). Stejně důležité je vědět, zda se mohou volně pohybovat mezi jednotlivými hranami nebo zda existují nějaké bariery pro přechod (např. umístění semaforů, zákaz odbočení apod.). Musíme proto popisovat atributy párů hran nebo páry hrana-uzel. K tomu se využívá **odbočovací matice** (*turn matrix*) nebo odbočovací relace, kde se zapisuje možnost spojení (tedy odbočení) z jednoho segmentu do druhého.



Obr. 9-9 Příklad orientovaného grafu

Tab. 9-6 **Odbočovací matice** pro graf na obr.9-7

	Do hrany 1	Do hrany 2	Do hrany 3	Do hrany 4
Z hrany 1	Ne	Ano	Ne	-
Z hrany 2	Ne	Ne	Ano	Ne
Z hrany 3	Ne	Ano	Ne	Ne
Z hrany 4	-	Ne	Ano	Ne

Tímto způsobem můžeme popisovat neplanární grafy, konkrétně např. dopravní síť s podjezdy, tunely, kde je křížení nekorektně sémanticky zaznamenáno jako průsečík.

Tab. 9-7 **Odbočovací relace** pro graf na obr. 9-7

Z hrany	Do hrany	Typ kontroly	Průměrný čas čekání (s)
1	2	Semafor	20
2	5	Dovoleno odbočit vždy	10
4	3	Semafor	30

Jak uvádí Laurini, Thompson (1994), alternativně může být atribut zaznamenán k určité kombinaci uzel-hrana.

K nejčastějším úlohám optimalizace v grafu patří hledání optimálních cest.

Je potřebné poukázat na skutečnost, že plocha uvnitř smyčky grafu není zpravidla dle teorie grafů předmětem zájmu (vyjma výpočtu Eulerovy rovnice). Předmětem zájmu jsou uzly a hrany, nikoliv plocha mezi nimi. U grafu jsou totiž atributy připojovány k hranám, aby vznikl hodnocený graf - např. počet letadel a čas potřebný k překonání určité hrany. Uzly mohou mít připojeny např. údaj typu počet celkem přepravovaných cestujících (tedy vytížení letiště).

10 Popisná statistika sítí

Popisné statistiky sítí členíme na:

- lokální statistiky – popisují lokální vlastnosti grafu, typicky např. stupeň uzlu (kolik má uzlu sousedů).
- globální statistiky - udávají charakteristiku celého grafu, tedy např. průměrný stupeň grafu za všechny uzly.

10.1 Lokální statistiky centrality

K hlavním lokální statistikám patří ty, které měří centralitu uzlu, tedy vyjádření nakolik je dané místo ve středu grafu, resp. jaký je jeho význam. Centralita tedy určuje, které uzly jsou nejdůležitější nebo centrální v síti z hlediska struktury sítě. Jsou různé typy centrality, každá vychází z jiných předpokladů a vyhovuje pro jiné účely.

Rozlišuje se strukturální významnost (structural importance) a dynamická významnost. Dynamickou významností se rozumí situace, kdy změna u daného uzlu způsobí změny u mnoha jiných uzlů, např. při šíření choroby.

K hodnocení polohy uzlu v grafu se využívá různých měr centrality používaných v teorii grafů a síťových analýzách, rozvinutých v poslední době zejména pro měření sociálních sítí.

Měření centrality může být založeno na **stupních uzlů** (např. *Degree*, *Eigenvector*, *PageRank*) nebo na **cestách mezi uzly** (např. *Closeness*, *Betweenness*, *Eccentricity*).

Míry centrality založené na cestách jsou založeny zpravidla na nejkratších cestách. Nejsou to metriky, protože nespĺňují např. axiom symetrie nebo trojúhelníkovou nerovnost. Často při nich obdržíme jiné výsledky než z měření mírami centrality založenými na stupních uzlů.

10.1.1 Stupeň uzlu (degree centrality), nodalita uzlu (nodality)

Stupeň uzlu (nodalita) udává počet přímých vazeb k dalším uzlům. Celkový stupeň uzlu se určuje z počtu neorientovaných hran incidujících s uzlem.

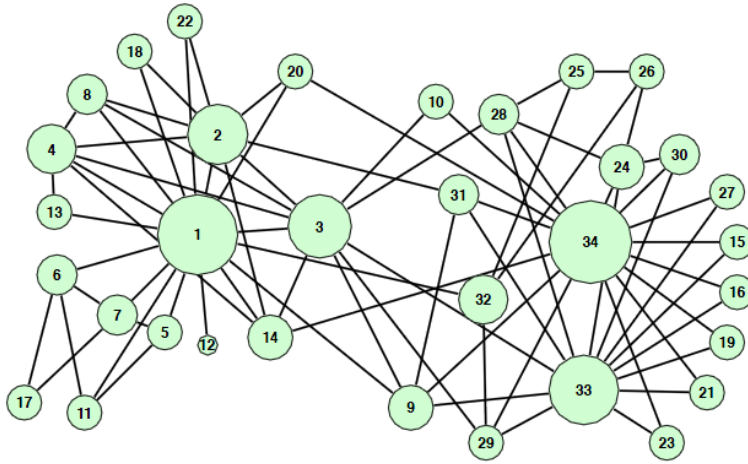
$$s_i = \sum_{j=1}^n A_{ij}$$

kde A_{ij} jsou prvky z matice sousednosti.

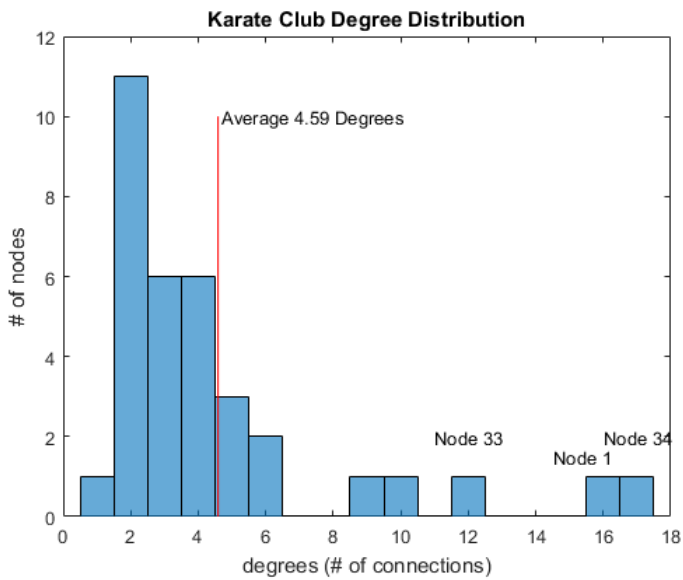
V případě orientovaných hran se rozlišuje vstupní (*In*) a výstupní (*Out*) stupeň (počet orientovaných hran vstupujících/vystupujících z uzlu). Pokud potřebujeme celkový stupeň uzlu, sečte se vstupní a výstupní stupeň pro daný uzel.

Čím větší stupeň uzel má, tím má větší počet přímých vazeb na ostatní uzly. Takové uzly představují „spojky“ nebo „středy“ v síti (Kašpar, 2008). Využití v sociálních sítích ukazuje na vlivnější osoby, které mají více kontaktů. Citační síť lze považovat za orientovaný graf. Větší vstupní stupeň znamená více citací a tedy větší vliv publikace, zatímco vysoký výstupní stupeň znamená vysokou míru citace jiných zdrojů.

Při srovnávání dvou různě velkých grafů nelze použít jednoduché kritérium jako je stupeň uzlu.



Obr. 10-1 Stupeň uzlu je zobrazen velikostí kruhu (příklad Zachary karate klub, Zachary 1977)



Obr. 10-2 Histogram četností stupňů uzlů (Zachary 1977)

10.1.2 Relativní stupeň uzlu

Relativní stupeň uzlu je poměr skutečného počtu hran ku maximálnímu počtu hran, který v grafu může vzniknout. V případě orientovaného grafu je to $n-1$.

$$s_i^{rel} = \frac{\sum_{j=1}^n A_{ij}}{n-1}$$

Např. uzel stupně 25 v grafu o 100 uzlech má relativní stupeň uzlu 0,25 (25/99); uzel stejného stupně v grafu o 30 uzlech má relativní stupeň uzlu 0,86 (25/29).

Relativní stupeň uzlu lze použít i pro srovnání různě velkých grafů.

Existuje i varianta výpočtu ukazatele k aktuálnímu počtu hran m (tab. 9-8):

$$s_i^{rel} = \frac{\sum_{j=1}^n A_{ij}}{m}$$

10.1.3 Centralita z excentricity uzlu (Eccentricity Centrality)

Excentricita (výstřednost) uzlu je nejdelší vzdálenost z daného uzlu do jiného uzlu grafu:

$$e_i = \max_j(d_{ij})$$

Centralita se z ní vypočte pomocí reciproké hodnoty:

$$c_i = \frac{1}{e_i} = \frac{1}{\max_j(d_{ij})}$$

Maximální hodnota excentricity se považuje za **průměr grafu**.

Naopak minimální hodnota excentricity (tj. nejkratší vzdálenost mezi 2 uzly v grafu) se považuje za **poloměr grafu**.

10.1.4 Centralita měřená blízkostí středu (Closeness centrality)

Closeness centralita se vypočte jako inverzní hodnota k průměrné vzdálenosti uzlů, tedy:

$$C_i = \frac{1}{l_{ij}} = \frac{n}{\sum_{j=1}^n d_{ij}}$$

kde d_{ij} představuje nejkratší cestu z uzlu i do uzlu j .

Výsledky pro Zachary karate klub jsou v tab. 10-1.

Nejlepší centralitu má uzel s nejvyšší hodnotou, tedy s nejmenší průměrnou vzdáleností do všech ostatních uzlů. V sociálních sítích mají velký vliv na situaci uzly s vysokou mírou této centrality, protože snadno přijímají a přenášejí inovace (Beránek, 2008). Problémem je, že hodnoty této centrality jsou si velmi podobné kvůli malému intervalu možných hodnot C_i . Proto nelze dobře rozlišit jednotlivé uzly podle této centrality. Navíc v případě nekontinuálních grafů lze míru použít jen pro jednotlivé komponenty grafu. To způsobuje, že uzly v malých komponentách mají vyšší centralitu C_i než stejně vybavené uzly ve větších komponentách grafu, což zkresluje vyhodnocení.

10.1.5 Centralita měřená středovou mezípolohou (Betweenness centrality)

Středová mezípoloha (*Betweenness centrality*, BC) pro daný uzel určuje, kolik nejkratších cest mezi dvojicemi ostatních uzlů prochází právě daným uzlem (Kašpar, 2008). Základním předpokladem je, že pro každou dvojici existuje nejkratší cesta.

Nejvyšší centrality (středové mezípolohy) může dosáhnout uzel, přes který prochází cesty mezi všemi dvojicemi uzlů. Takový uzel působí jako závora, propojení nebo zprostředkovatel rolí (Beránek, 2008).

$$x_i = \sum_{st} n_{st}^i$$

kde x_i je BC pro uzel i , st je číslo nejkratší cesty mezi uzly S a T, $n_{st}^i = 1$ pokud uzel i leží na nejkratší cestě st mezi uzly S a T (a rovná se 0, pokud na ni neleží) (Ochodková 2016). V případě orientovaného grafu je každá nejkratší hrana zastoupena 2x a výsledek proto můžeme podělit 2. Pochopitelně uzel S nesmí být totožný s uzlem T (smyčka).

Mezi dvojicí uzlů S a T ale může ležet více nejkratších cest. To vede k nejednoznačnosti úlohy. Možným řešením je počítat se všemi nejkratšími cestami mezi S a T, ale jednotlivým variantám přiřadit váhu $1/g$, kde g je počet nejkratších cest mezi S, T (Ochodková 2016).

Potom

$$x_i = \sum_{st} \frac{n_{st}^i}{g_{st}}$$

kde g_{st} je počet cest mezi S a T.

Obdobně to platí pro orientovaný graf.

Často se počítá jen jako topologický ukazatel (počet přesezení) a nepracuje se s hodnotami hran, tj. např. s reálnou vzdáleností.

Poměr max a min BC je přibližně $\frac{1}{2}n$, zpravidla je menší, nicméně BC obecně nabývá hodnot z velkého intervalu. Ukazatel je robustní a na čele pořadí podle BC se změny dějí málo často (v porovnání s centralitou měřenou blízkostí středu). V některých případech se výpočet BC standardizuje počtem $1/n^2$ (Ochodková 2016):

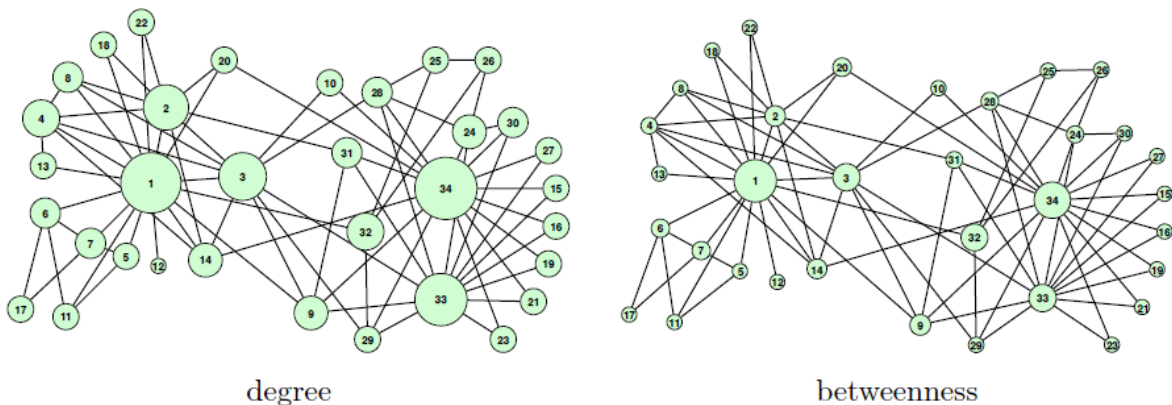
$$x_i = \frac{1}{n^2} \sum_{st} \frac{n_{st}^i}{g_{st}}$$

Srovnání několik měr centrality pro karate klub je uvedeno v tab.10-1.

Tab. 10-1. Srovnání několik měr centrality pro karate klub (podle Ochodkové, 2016)

Uzly seřazené sestupně podle velikosti	ID uzlu a jeho relativní stupeň (<i>degree</i>)	ID uzlu a jeho centralita měřená blízkostí středu (<i>closeness</i>)	ID uzlu a jeho harmonická centralita (<i>harmonic</i>)	ID uzlu a jeho centralita měřená středovou mezípolohou (<i>betweenness</i>)
První	34 (0,1090)	1 (0,5862)	34 (0,7045)	1 (0,4577)
Druhý	1 (0,1026)	3 (0,5763)	1 (0,7020)	34 (0,3357)
Třetí	33 (0,0769)	34 (0,5667)	3 (0,6338)	33 (0,1906)
Čtvrtý	3 (0,0641)	32 (0,5574)	33 (0,6338)	3 (0,1892)
Pátý	2 (0,0577)	9 (0,5312)	32 (0,5859)	32 (0,1843)

Poznámka: relativní stupeň uzlu v modifikaci počítající skutečný a ne maximální počet všech hran.



Obr. 10-3 Porovnání stupňů uzlů a centrality měřené středovou mezípolohou pro Zachary karate klub (Ochodková 2016)

K dalším variantám patří Flow Betweenness či Random Walk Betweenness.

10.1.6 Centralita z vektoru vlastních hodnot (Eigenvector centrality)

Tato centralita vyjadřuje počet sousedů daného uzlu, jenže nepočítá jen přímé sousedy jako klasický stupeň uzlu (nodalita). Předpokládá se, že důležitější (centrálnější) uzel bude mít více sousedů. Důležitost uzlu je úměrná důležitosti sousedních uzlů.

Výpočet probíhá iterativně. První odhad (start iterací) nastaví $x_i^{(0)} = 1$ pro všechna i . Následně (Ochodková 2016):

$$x_i^{(t+1)} = \sum_{j=1}^n A_{ji} x_j^{(t)} \quad \text{tj. } \mathbf{x}(t) = \mathbf{A}^t \mathbf{x}(0)$$

kde A_{ji} je prvek 1/0 z matice sousednosti.

V 1.iteraci se vypočte nodalita uzlů. V dalších iteracích se postupuje podle vzorce, ale vždy je nutno připočítat nodalitu daného uzlu, tj. $x^{(1)}$.

Pro neorientované grafy je stejné, pokud se použije A_{ji} nebo A_{ij} , protože se sobě rovnají. Ale pro orientované grafy je potřeba dodržet pořadí indexů ji .

Výsledek udává počet sousedů uzlu i v kroku (rozšíření) t , tj. sousedé t -řádu (před normalizací).

Pro neorientovanou souvislou síť iterace konverguje k pevnému bodu, který je ekvivalentní vlastnímu vektoru příslušejícímu největšímu vlastnímu číslu matice sousednosti. Proto centralita uzlu i je x_i (Ochodková 2016):

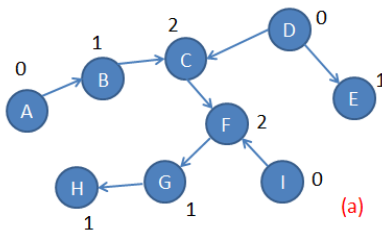
$$x_i = k_1^{-1} \sum_j A_{ji} x_j$$

kde k_1 je maximální vlastní číslo matice A .

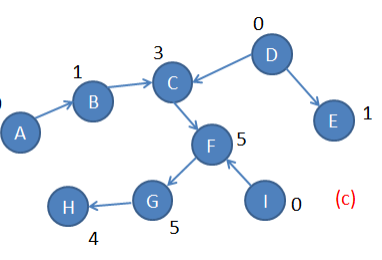
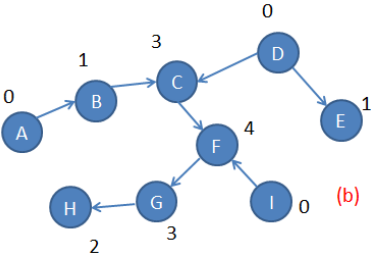
Z výpočtů je zřejmá konvergence hodnot (viz obr. 10-4 po jednotlivých iteracích).

vertex	$x^{(1)}$	$x^{(5)}$	$x^{(10)}$	$x^{(15)}$	$x^{(20)}$	degree, k
1	0.103	0.076	0.071	0.071	0.071	16
2	0.058	0.055	0.053	0.053	0.053	9
3	0.064	0.065	0.064	0.064	0.064	10
4	0.038	0.043	0.042	0.042	0.042	6
5	0.019	0.015	0.015	0.015	0.015	3
6	0.026	0.016	0.016	0.016	0.016	4
7	0.026	0.016	0.016	0.016	0.016	4
8	0.026	0.034	0.034	0.034	0.034	4
9	0.032	0.044	0.046	0.046	0.046	5
10	0.013	0.020	0.021	0.021	0.021	2
11	0.019	0.015	0.015	0.015	0.015	3
12	0.006	0.010	0.011	0.011	0.011	1
13	0.013	0.017	0.017	0.017	0.017	2
14	0.032	0.044	0.046	0.045	0.045	5
15	0.013	0.019	0.021	0.020	0.020	2
16	0.013	0.019	0.021	0.020	0.020	2
17	0.013	0.005	0.005	0.005	0.005	2
18	0.013	0.018	0.019	0.019	0.019	2
19	0.013	0.019	0.021	0.020	0.020	2
20	0.019	0.028	0.030	0.030	0.030	3
21	0.013	0.019	0.021	0.020	0.020	2
22	0.013	0.018	0.019	0.019	0.019	2
23	0.013	0.019	0.021	0.020	0.020	2
24	0.032	0.029	0.030	0.030	0.030	5
25	0.019	0.012	0.011	0.011	0.011	3
26	0.019	0.013	0.012	0.012	0.012	3
27	0.013	0.015	0.015	0.015	0.015	2
28	0.026	0.026	0.027	0.027	0.027	4
29	0.019	0.026	0.026	0.026	0.026	3
30	0.026	0.026	0.027	0.027	0.027	4
31	0.026	0.034	0.035	0.035	0.035	4
32	0.038	0.037	0.039	0.038	0.038	6
33	0.077	0.066	0.062	0.062	0.062	12
34	0.109	0.082	0.074	0.075	0.075	17

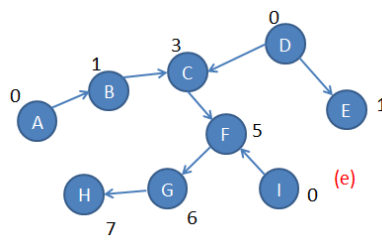
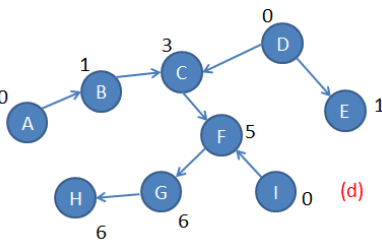
Obr. 10-4 Výpočet centrality pro karate klub z vektoru vlastních hodnot pro 1, 5, 10, 15 a 20 iterací (Ochodková 2016). Poznámka: hodnoty centrality jsou zde normalizovány, tj. poděleny sumou stupňů, neboli počtem hran / 2 pro neorientovaný graf, zde 156.



	A	B	C	D	E	F	G	H	I
A	0	1	0	0	0	0	0	0	0
B	0	0	1	0	0	0	0	0	0
C	0	0	0	0	0	1	0	0	0
D	0	0	1	0	1	0	0	0	0
E	0	0	0	0	0	0	0	0	0
F	0	0	0	0	0	0	1	0	0
G	0	0	0	0	0	0	0	1	0
H	0	0	0	0	0	0	0	0	0
I	0	0	0	0	0	1	0	0	0



$x^{(0)}$	$x^{(1)}$	$x^{(2)}$	$x^{(3)}$	$x^{(4)}$	$x^{(5)}$
1	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1
1	2	3	3	3	3
1	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1
1	2	4	5	5	5
1	1	3	5	6	6
1	1	2	4	6	7
1	0	0	0	0	0



po standardizaci (poděleno součtem nodality)

	$x^{(1)}$	$x^{(2)}$	$x^{(3)}$	$x^{(4)}$	$x^{(5)}$	dál už neroste!, to je výsledná EC
A	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	
B	0.125	0.071	0.053	0.045	0.043	
C	0.250	0.214	0.158	0.136	0.130	
D	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	
E	0.125	0.071	0.053	0.045	0.043	
F	0.250	0.286	0.263	0.227	0.217	
G	0.125	0.214	0.263	0.273	0.261	
H	0.125	0.143	0.211	0.273	0.304	
I	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	

Obr. 10-5 Příklad orientovaného grafu s demonstrací postupného výpočtu EC bez normalizace (a – výsledek 1. iterace, nodalita), vpravo matice sousednosti a demonstrace jednotlivých iterací, poslední tabulka ukazuje finální přepočty

Někdy se doporučuje modifikace označovaná jako Katz centralita.

10.1.7 Stránkové hodnocení (Page Rank)

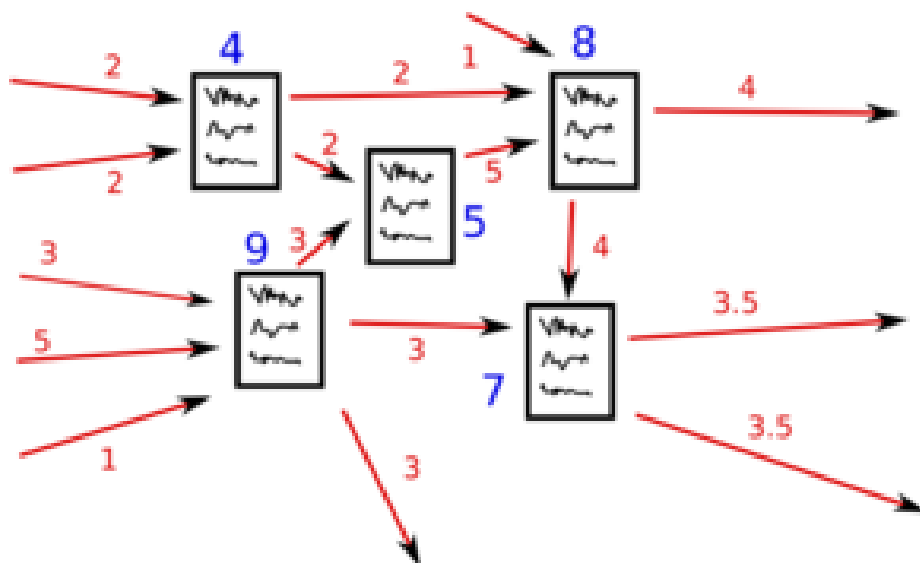
Stránkové hodnocení jako míra centrality uzlu i získaná od sousedních uzlů j je přímo úměrná jejich centralitě a nepřímo úměrná jejich výstupnímu stupni. Proto se PageRank vypočte jako (Ochodková 2016):

$$x_i = \alpha \sum_j A_{ji} \frac{x_j}{k_j^{out}} + \beta$$

Zpravidla se dává $k_j^{out}=1$ pro všechny uzly s nulovým výstupním stupněm. Dále zpravidla $\beta=1$. Pro neorientované grafy se volí $\alpha < 1$, pro orientované $\alpha < \infty$, ale řádově jednotky (Ochodková 2016).

Google search engine používá $\alpha = 0.85$, což bylo zřejmě experimentálně stanoveno.

Zjednodušené vysvětlení výpočtu - počet předávaných sousedů (linků) se podělí počtem rozdělení výstupních linků (viz obr. 10-6). V podstatě se to dá přirovnat k nějaké říční soustavě s ustáleným režimem, kdy suma přítoků se musí rovnat sumě odtoků.



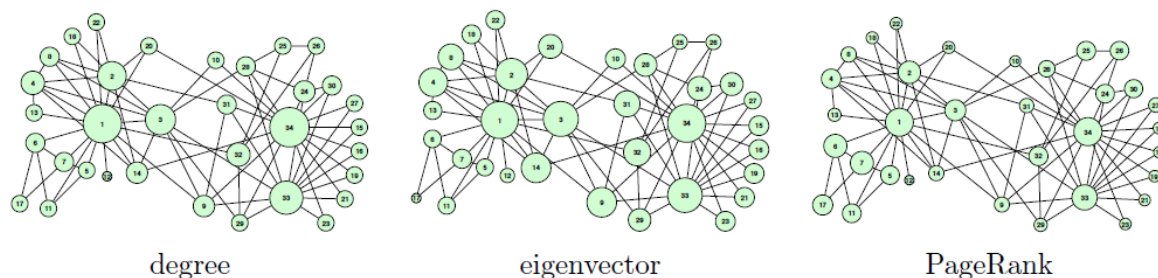
Obr. 10-6 Distribuce PageRanku mezi provázanými stránkami (<http://pokazde.jinak.cz/misc/pagerank1.svg>)

Google vysvětluje, že Page Rank je metodou výpočtu prestiže nebo centrality uzlů v kontextu webového prohlédávání. PageRank webové stránky je definován jako pravděpodobnost přístupu náhodně surfujícího webového uživatele (tedy pravděpodobnost náhodného navštívení uzlu). PageRank rekurzivně závisí na PageRank uzlů, které ústí do posuzovaného uzlu.

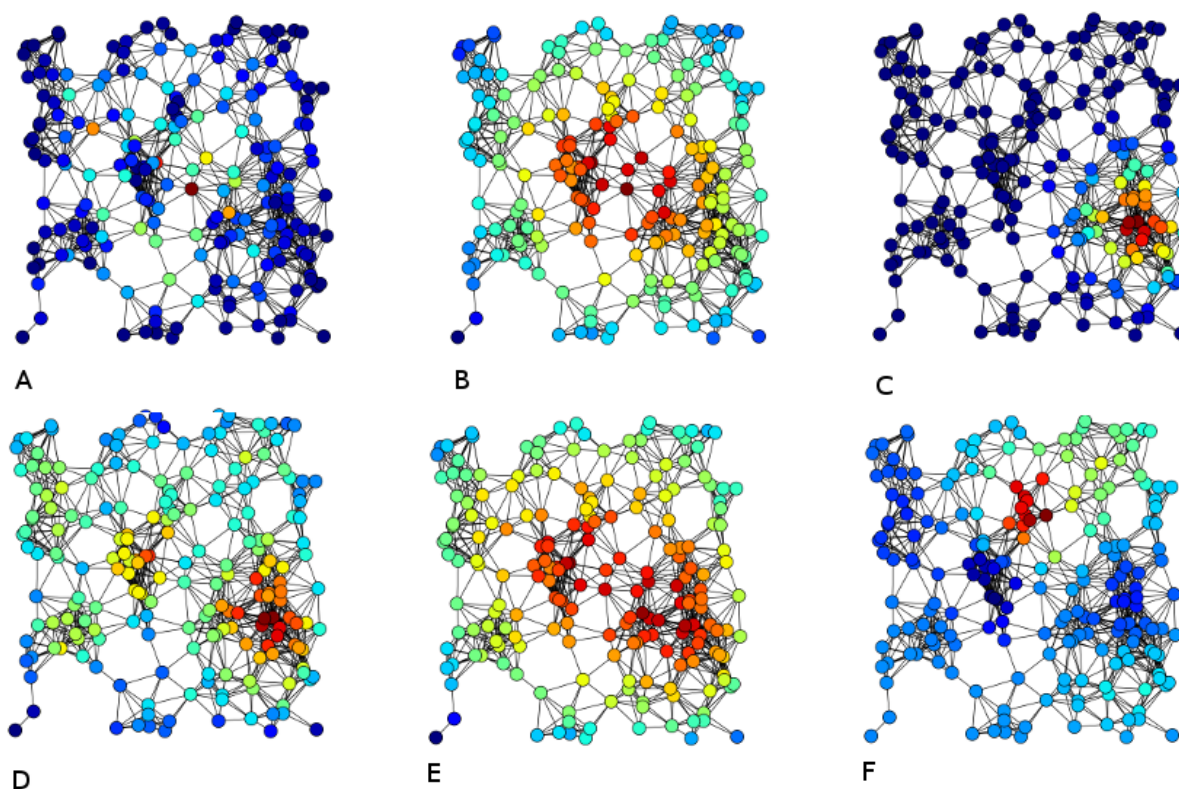
Wikipedie (<https://cs.wikipedia.org/wiki/PageRank>) upozorňuje na problém rank sink, bránící hodnocení uzlů, kde všechny hrany směřují dovnitř a žádné ven (nelze dělit nulou).

Tab. 5-9 Příklad výpočtu pro karate klub (Ochodková 2016)

Uzly seřazené sestupně podle velikosti	ID uzlu a jeho relativní stupeň (<i>degree</i>)	ID uzlu a jeho centralita z vektoru vlastních hodnot (<i>eigenvector</i>)	ID uzlu a jeho stránkové hodnocení (<i>PageRank</i>)
První	34 (0,1090)	34 (0,0750)	34 (1,7843)
Druhý	1 (0,1026)	1 (0,0714)	1 (1,7758)
Třetí	33 (0,0769)	3 (0,0637)	33 (1,6324)
Čtvrtý	3 (0,0641)	33 (0,620)	6 (1,5280)
Pátý	2 (0,0577)	2 (0,0534)	7 (1,5280)



Obr. 10-7 Porovnání stupně uzlů, centrality z vektoru vlastních hodnot a stránkového hodnocení pro karate klub (Ochodková 2016)



Obr. 10-8 Porovnání vybraných měr centrality: A Betweenness centrality, B Closeness centrality, C Eigenvector centrality, D Degree centrality, E Harmonic centrality, F Katz centrality jako varianta EC) (Tapiocozzo, <https://en.wikipedia.org/wiki/Centrality>)

10.2 Ostatní lokální statistiky

Jsou zde zařazeny ukazatele, neměřící centralitu, ale jiné vlastnosti grafů a sítí. Patří sem i excentricita uzlu (Eccentricity), dále výpočet podobnosti uzlů, shlukovacích koeficientů a reciprocitu.

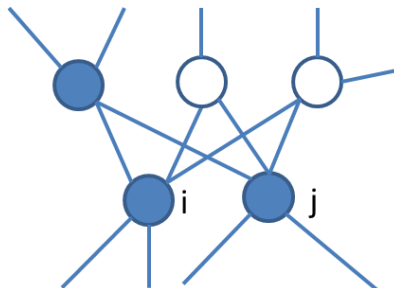
V případě podobnosti rozlišujeme (Ochodková 2016):

- Strukturální podobnost (*Structural equivalence*, SE). Dva uzly jsou strukturálně podobné, jestliže „sdílejí mnoho“ ze svých sousedů.
- Regulární podobnost (*Regular equivalence*, RE). Dva uzly jsou regulárně podobné, jestliže jejich sousedé jsou si sobě podobní (themselves similar).

Nejjednodušší SE je počet společných sousedů, ale ten nemá dobrou vypovídací schopnost (Ochodková 2016). Výpočet s využitím matice sousednosti je poměrně jednoduchý:

$$n_{ij} = \sum_k A_{ik}A_{kj}$$

Na obr. 10-9 mají uzly i a j 3 společné sousedy.



Obr. 10-9 Příklad grafu s cykly

10.2.1 Kosinová podobnost (cosine similarity)

Používá se pro neorientovaný graf.

V geometrii platí pro skalární součin dvou vektorů x, y : $x \cdot y = |x| \cdot |y| \cdot \cos \theta$. Z toho lze vyjádřit $\cos \theta = x \cdot y / (|x| \cdot |y|)$, tedy:

$$\sigma_{ij} = \cos \theta = \frac{\sum_{k=1}^n A_{ik}A_{kj}}{\sqrt{\sum_{k=1}^n A_{ik}^2} \cdot \sqrt{\sum_{k=1}^n A_{kj}^2}}$$

Čitatel reprezentuje počet společných sousedů.

Protože v matici sousednosti jsou jen 0 nebo 1, $A_{ij}^2 = A_{ij}$ pro $\forall i, j$, pak platí, že (Ochodková 2016):

$$\sum_k A_{ik}^2 = \sum_k A_{ik} = s_i$$

kde s_i je stupeň uzlu a vztah lze převést na:

$$\sigma_{ij} = \frac{\sum_k A_{ik}A_{kj}}{\sqrt{s_i s_j}} = \frac{n_{ij}}{\sqrt{s_i s_j}}$$

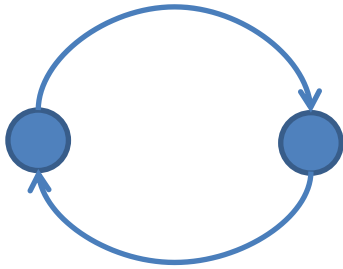
kde n_{ij} je počet společných sousedů.

Příklad pro obr. 10-9:

$$\sigma_{ij} = \frac{n_{ij}}{\sqrt{s_i s_j}} = \frac{3}{\sqrt{4 \cdot 5}} = 0.671$$

10.2.2 Lokální reciprocita (local reciprocity)

Reciprocita znamená schopnost vrátit se z navštíveného uzlu zpátky. Formálně jde o výskyt orientovaného cyklu délky 2 v grafu.



Obr. 10-10 Příklad reciprocity v grafu

Jako lokální reciprocita je pak vhodná relativizovaná hodnota (Ochodková 2016):

$$r_i = \frac{1}{s_i} \sum_{ij} A_{ij}A_{ji}$$

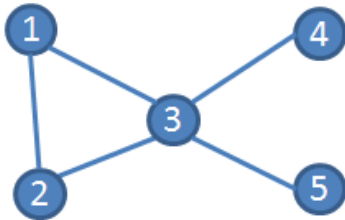
kde s_i je stupeň uzlu a A_{ij} opět prvky matice sousednosti.

10.2.3 Shlukovací koeficient (lokální)

Shlukovací koeficient SK vyjadřuje relativní počet cyklů délky 3, tedy propojenost sousedů daného uzlu. Vypočte se jako (Ochodková 2016):

$$C_i = \frac{n_{\Delta i}}{troj_i}$$

kde $n_{\Delta i}$ je počet trojúhelníků, v jehož vrcholu je uzel i ; a $troj_i$ je počet trojic, v jejichž středu je uzel i .



Obr. 10-11 Příklad shluku v grafu

Trojúhelník je zjevně 1 a trojic pro uzel č. 3 je šest: 134, 135, 234, 132, 435 a 235. Lokální shlukovací koeficienty uzlů (1, 2, 3, 4, 5) jsou tedy (1,1,1/6,0,0).

Jak bylo naznačeno, shlukovací koeficient lze počítat také z počtu propojených sousedů. Pak:

$$C_i = \frac{ms_i}{m_i}$$

kde ms_i je počet spojených párů v sousedství (dotyku) uzlu i a m_i je počet všech párů v sousedství uzlu i .

Pro neorientovaný graf pak platí $2*ms_i / (m * (m-1))$.

V příkladu z obr. 10-8 pro uzel 3 bude - 1 spojený pár (12) a 6 párů celkem (12, 14, 45, 25, 24, 15). Výsledek pro uzel 3 je tedy opět 1/6.

Trojúhelníková mřížka má pro každý uzel stejný shlukovací koeficient. Celkový počet párů v sousedství je $s(s-1)/2 = (6*5)/2 = 15$. $6/15 = 0.4 = C$. Čtvercová mřížka má $C=0$, protože nemá žádný trojúhelník.

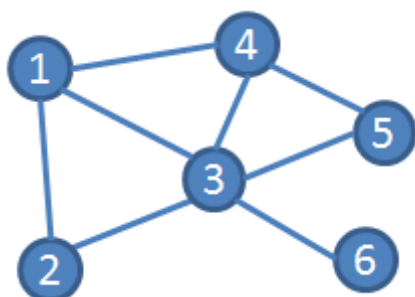
10.3 Globální statistiky

Globální statistiky jsou ukazatelé vhodné k popisu grafu a jeho srovnání s jinými grafy. Mnoho reálných sítí totiž vykazuje určité společné rysy bez ohledu na to z jaké oblasti pochází.

K základním charakteristikám patří:

- distribuce stupňů uzlů – řada reálných sítí má mnoho uzlů s malým počtem sousedů a několik málo uzlů s vysokým počtem sousedů
- vzdálenosti, resp. průměr (diameter) - mnoho rozsáhlých reálných sítí má malý průměr.
- existence shluků – reálné sítě mívají také vysoký shlukovací koeficient, tj. vytvářejí významná lokální propojení.
- souvislost – sítě jsou zpravidla nesouvislé, ale v mnoha sítích existuje jedna velká komponenta (*giant component*).

Pro hodnocení distribuce stupně uzlů se spočítá relativní zastoupení každého stupně v grafu (obr. 10-12, ve jmenovateli zlomku je počet uzlů) a analyzuje distribuce těchto hodnot.



Stupeň s	Pr(s)
1	1/6
2	2/6
3	2/6
4	0/6
5	1/6

Obr. 10-12 Výpočet distribuce stupně uzlů

Setkáváme se s normální distribucí (resp. binomickou), Poissonovým rozdělením, které je typické pro distribuci řídkých jevů, ale často výsledek odpovídá mocninné distribuci.

Z distribuce stupňů grafu lze zjistit i počet hran v grafu. U neorientovaného grafu je každá hrana započtena dvakrát, proto:

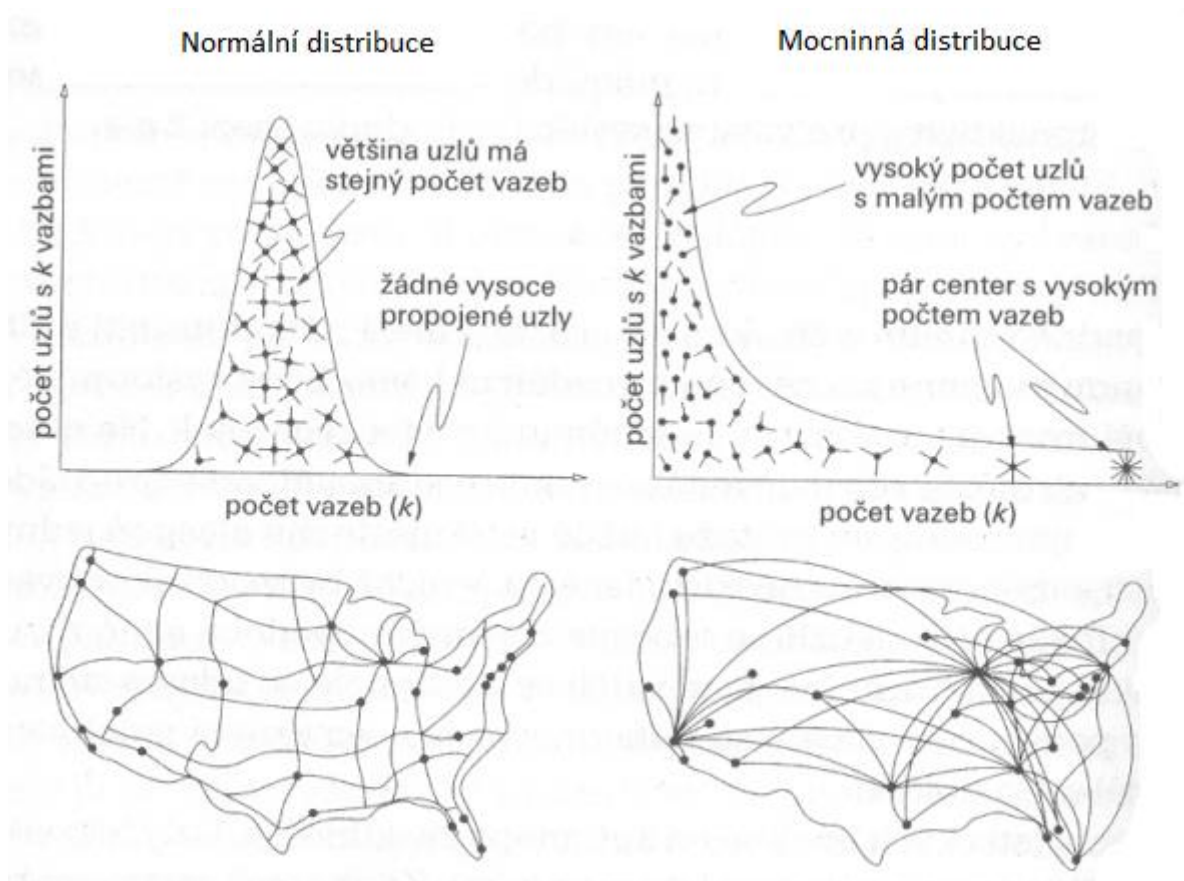
$$m = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n s_i$$

10.3.1 Průměrný stupeň grafu (průměrná nodalita)

Snadno lze spočítat průměrný stupeň grafu jako aritmetický průměr grafu (tj. nodalita jednotlivých uzlů). Vhodným ukazatelem je zejména pro symetrické distribuce stupňů, v případě Poissonovy nebo mocninné distribuce není vhodný.

$$\mu_s = \frac{\sum_i s_i}{n}$$

Pomocí průměru nodality uzlů lze charakterizovat dostupnost pro celou síť.



Obr. 10-13 Příklady distribuce stupně uzlů v amerických sítích (vlevo silniční, vpravo letecká síť) (Ochodková 2016)

10.3.2 Průměr grafu

Průměr grafu G je největší excentricita jeho uzlů neboli nejdelší vzdálenost mezi všemi dvojicemi uzlů grafu. Tento ukazatel je samozřejmě nepřímo úměrný centralitě a excentricitě grafu.

$$d(G) = \max_i(e_i) = \max_{ij}(d_{ij})$$

10.3.3 Globální centralita

Globální centralita je charakterizována minimální hodnotou sumy cest k většině ostatních uzlů, kterou nabude některý uzel v grafu (má nejkratší cesty k většině ostatních uzlů).

Takový uzel označíme jako globálně centrální:

$$\min\left(\sum_{j=1, j \neq i}^n d_{ij}\right)$$

Vztah ke closeness centralitě je zřejmý.

Výpočet není standardizován, tj. závisí na velikosti grafu. Někdy se počítá průměrná vzdálenost v grafu jako aritmetický průměr ze všech uzlů.

10.3.4 Dosah centrality

Dosah centrality je množina uzlů, které jsou vzájemně dosažitelné v nejvýše k krocích.

$$X^{(k)} = \sum_i x_i^{(k)}$$

Např. hodnota dvoukrokový dosah říká, kolik je lidí v síti, kteří mohou být dosaženi libovolným jiným člověkem buď přímo, nebo prostřednictvím jednoho prostředníka (přátelých přátel). Lze jej vypočítat ze 2. iterace výpočtu centrality z vektoru vlastních hodnot pro všechny uzly.

Výsledek opět není standardizován. Možnou variantou je výsledek podělit průměrnou EC.

10.3.5 Průměrná vzdálenost v grafu

Průměrná vzdálenost v grafu je aritmetický průměr ze všech spojnic dvojic uzlů v neorientovaném grafu.

$$\mu_L = \frac{\sum_i \sum_{j>i} d_{ij}}{\binom{n}{2}} = \frac{2}{n(n-1)} \sum_i \sum_{j>i} d_{ij}$$

10.3.6 Harmonická střední vzdálenost grafu (harmonic mean distance)

Podobně jako u lokální struktury se doporučuje místo aritmetického průměru používat harmonický průměr, protože má lepší vlastnosti (např. eliminuje problém $d_{ij}=\infty$). Jeho využití je ale v praxi poměrně málo časté.

Harmonická střední vzdálenost se vypočte jako harmonický průměr ze vzdáleností, tedy:

$$L' = \frac{n}{\sum_i C'_i} = \frac{n(n-1)}{\sum_{j<, >i} \frac{1}{d_{ij}}}$$

10.3.7 Transitivity – shlukovací koeficient

Podobně jako u lokální statistiky vychází shlukovací koeficient z poměru počtu trojúhelníků a trojic v síti. V globální variantě se ale dá výpočet zjednodušit tím, že není nutné počítat shlukovací koeficient pro každý uzel, ale přímo vypočítat (Ochodková 2016).

Běžný způsob měření:

$$C^{(1)} = \frac{3 * n_{\Delta}}{troj}$$

kde v čitateli je trojnásobek počtu trojúhelníků v grafu a ve jmenovateli pak počet spojených trojic v grafu.

Příklad z obr. 10-8 obsahuje jeden trojúhelník a osm „spojených“ trojic uzlů (134, 135, 132, 235, 132, 234, 123, 213). Tedy:

$$C^{(1)} = \frac{3 * 1}{8} = 0,375$$

Alternativně lze vypočítat shlukovací koeficient na základě aritmetického průměru z lokálních shlukovacích koeficientů za všechny uzly. Tedy (Ochodková 2016):

$$C^{(2)} = \frac{1}{n} \sum_i C_i$$

Výsledkem je ale jiná hodnota než pro $C^{(1)}$. $C^{(2)}$ roste s počtem uzlů s nízkým stupněm.

Výpočet pro příklad z obr. 10-8:

$$C^{(2)} = \frac{1}{5} \left(1 + 1 + \frac{1}{6} \right) = 0,4333$$

10.3.8 Globální reciprocita (Reciprocity)

Podobně jako u lokálního existuje i výpočet globální reciprocity. Jednou z možností je spočítat jeho relativní hodnotu za celý graf:

$$r = \frac{2}{n * (n - 1)} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1, j \neq i}^n A_{ij} A_{ji}$$

kde n je počet uzlů.

10.3.9 Gama index

Gama index hodnotí poměr zjištěného počtu hran (linií) k maximálnímu možnému počtu:

$$\gamma = \frac{l}{l_{max}}$$

kde l je pozorovaný počet linií (hran) a l_{max} je maximální možný počet linií. U plošného grafu lze dokázat, že je maximální počet l_{max} roven $3*(n-2)$, kde n je počet uzlů; u neplošného (např. letecká spojení) je maximální počet roven $n*(n-1)/2$.

10.3.10 Alfa index

Alfa index hodnotí poměr zjištěného počtu smyček k maximálnímu možnému počtu:

$$\alpha = \frac{c}{c_{max}}$$

kde c je počet kružnic a c_{max} je maximální počet kružnic v grafu, což je u plošného neorientovaného grafu $C_{max} = 2*n-5$.

10.3.11 Kompletnost grafu

Kompletnost grafu vyjadřuje míru konektivity v grafu a vypočte se jako (Ochodková 2016):

$$Q = \frac{n - n_{izol}}{n}$$

kde n je počet uzlů grafu, n_{izol} je počet izolovaných uzlů.

11 Teoretické modely sítí

Pro rozlišení jednotlivých typů sítí a popis jejich vlastností se používají 4 základní charakteristiky:

- 1) Průměr (diameter) D
- 2) Globální centralita (resp. průměrná vzdálenost v grafu) L
- 3) Shlukovací koeficient C
- 4) Distribuce stupňů

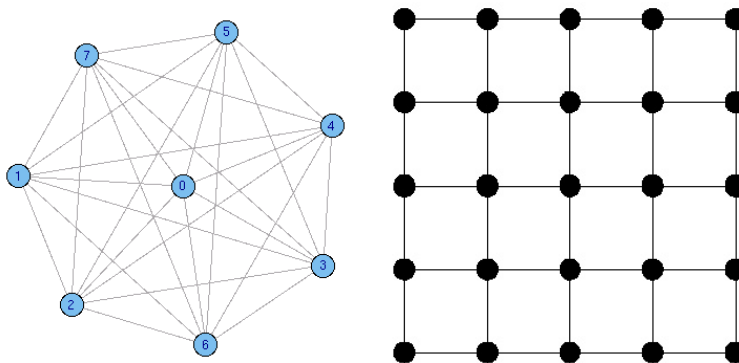
Podle nich rozlišujeme 4 základní teoretické modely sítí:

1. Pravidelný graf, pravidelná mřížka (*lattice*)
2. Náhodný graf (*random graph*)
3. Model malého světa (*small-world graph*)
4. Bezškálový graf (*scale-free graph*)

11.1 Pravidelný graf

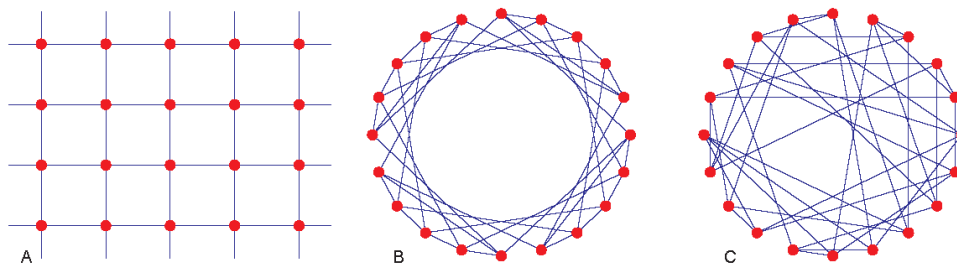
Pravidelný graf má všechny uzly stejného stupně (obr. 11-1). K příkladům takových sítí patří pravidelná mřížka (grid), síť středů buněk rasterového datového modelu, různé formy pravidelné teselace prostoru. Z negeografických úloh jde např. o model krystalové mřížky u některých čistých látek. Jejich vlastnosti (Ochodková 2016):

- Průměr D – velký
- Koeficient shlukování C – vysoký (nebo 0 u čtvercové mřížky)
- distribuce stupňů – konstantní



Obr. 11-1 Příklady pravidelných grafů (Ochodková 2016)

Úplný graf: $D=1$, $L=1$ (topologická vzdálenost do libovolného uzlu je 1, proto je D i L rovno 1), $C=1$ (počet propojených sousedů = počtu párů, neboli všichni sousedi jsou spojeni), distribuce konstantní.



Obr. 11-2 Stejná síť na všech obrázcích, u B a C jsou uzly zobrazeny v kruhu, v případě B postupně, v případě C je pořadí uzlů náhodné ale stále jde o pravidelný graf (Evans 2004). Parametry $n=20$, $m=40$, $L=2.32$, průměr $D=4$, $C=0$.

11.2 Náhodné grafy

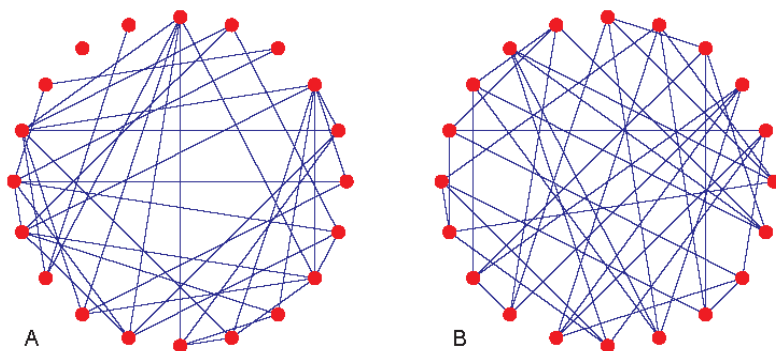
Jako jeden z prvních modelů sítí se používal náhodný model již od roku 1959 (*random graphs*). Mohou však existovat různé varianty náhodného modelu (Ochodková 2016):

- 1) Do existující množiny n uzlů náhodně přidáváme hrany.
- 2) Pro každou dvojici uzlů (i,j) se generuje hrana (i,j) nezávisle s pravděpodobností p . Takový model se označuje jako **Erdős–Rényi model** náhodného grafu.

Náhodný graf – máme množinu n uzlů a mezi nimi přidáváme náhodně hrany. Rozdílné modely náhodných grafů mají různé rozdělení pravděpodobnosti (nějakého jevu). V modelu zjišťujeme např. pravděpodobnost $P(d)$, že daný uzel má stupeň uzlu d .

V Erdős–Rényi modelu se pro každou dvojici uzlů (i,j) generuje hrana (i,j) nezávisle s pravděpodobností p , tj. každá hrana v grafu s n uzly existuje s pravděpodobností p a neexistuje s pravděpodobností $1-p$

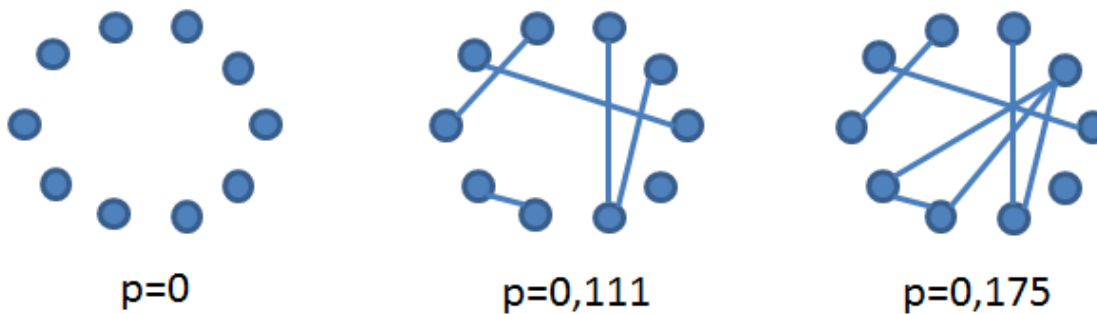
Příklad: $n=20$, $m=40$, náhodně spojíme dvojici uzlů s $p=2m/(n(n-1))=0.2105$



Obr. 11-3 Náhodný (A) a pravidelný (B) graf (Evans 2004)

Poznámka: Levá část obr. má $L=2.17$, průměr $D=5$, $C=0.134$, jde o náhodný graf; pravá část obrázku má $L=2.22$, $D=4$, $C=0.15$, jde o pravidelný graf.

V příkladu na obr. 11-4 je maximální počet hran je $10 \cdot 9 / 2 = 45$. 5 hran proto ukazuje pravděpodobnost zapojení (tj. stupeň uzlu) $p=5/45=1/9$. Analogicky vpravo $p=7/45=0.175$



Obr. 11-4 Výpočet pravděpodobnosti stupně uzlu

Vlastnosti náhodných grafů shrnuje Ochodková (2016):

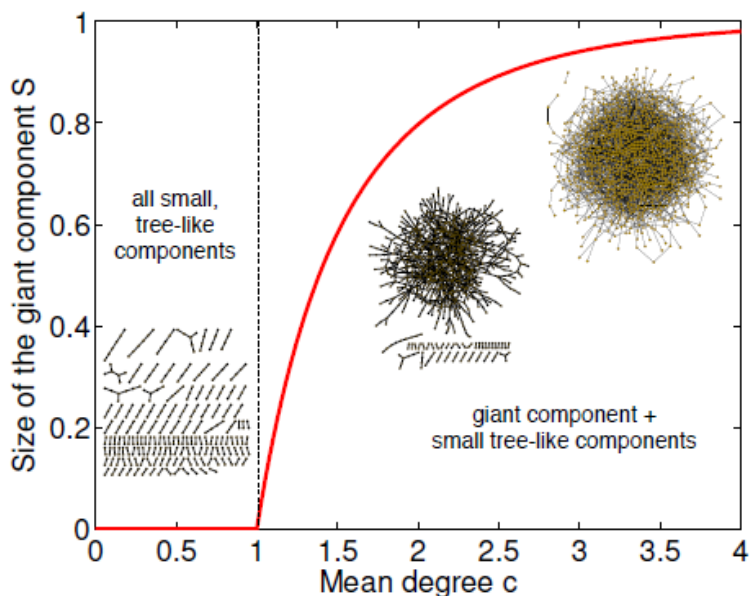
- malý průměr D a malá průměrná vzdálenost L ,
- nízký koeficient shlukování C ,
- Poissonova distribuce stupňů uzlů.

Vlastnosti náhodného grafu (zejména Erdős–Rényi modelu) se obvykle vyjadřují ve vztahu k hodnotě μ_d , kde μ_d je průměrný stupeň. Průměrný počet hran v grafu $G_{n,p}$ je $p \cdot n \cdot (n-1)/2$, každá hrana je incidentní s dvěma uzly, proto průměrný stupeň uzlu je

$$\mu_d = \frac{n(n-1)p}{n} = (n-1)p$$

Podle hodnoty průměrného stupně uzlu lze rozlišit následující případy náhodných grafů (Ochodková 2018):

- $\mu_d < 1$ – graf je složen z malých komponent a tyto komponenty jsou buď stromy nebo obsahují právě jeden cyklus
- $\mu_d > 1$ – v grafu existuje obrovská komponenta.
- $\mu_d > \log n$ – velmi pravděpodobně je graf souvislý



Obr. 11-5 Vztah mezi průměrným stupněm uzlu μ_d (zde c) a relativní velikostí největší komponenty v grafu S (S je velikost největší komponenty vyjádřená poměrem k celkové velikosti s) (Ochodková 2016)

Lze prokázat, že pravděpodobnost, že dva náhodně vybrané uzly jsou spojeny hranou, je rovna shlukovacímu koeficientu, tedy $C = p$.

Ukázalo se však, že modely náhodného grafu nevyhovují reálným sítím, protože reálné sítě mají často mocninnou distribuci stupňů uzlů a ne Poissonovu a dále mají reálné sítě vysoký shlukovací koeficient, zatímco náhodné grafy nízký (viz tab. 11-1).

Tab. 11-1 Shlukovací koeficient C pro různé sítě a jeho porovnání s ekvivalentním náhodným grafem (upraveno z Ochodková 2016)

Sít	n	μ_d	C změřené	C pro ekvivalentní náhodný graf
Internet	6374	3,8	0,24	0,00060
WWW (místa)	153127	35,2	0,11	0,00023
Elektrická síť	4941	2,7	0,08	0,00054
Sít spolupráce biologů	1520251	15,5	0,08	0,00001
Sít spolupráce matematiků	25339	3,9	0,15	0,00002
Sít spolupráce filmových tvůrců	449913	113,4	0,20	0,00025
Sít ředitelů společností	7673	14,4	0,59	0,00190
Výskyt společných slov v textu	460902	70,1	0,44	0,00015
Neuronová síť	282	14,0	0,28	0,04900
Metabolická síť	315	28,3	0,59	0,09000
Potravinářský web	134	8,7	0,22	0,06500

Poznámka: n je počet uzlů, μ_d je průměrný stupeň uzlu.

Proto se začaly vytvářet další teoretické modely, které by lépe odpovídaly reálným sítím. Jedním z nich je i model malého světa (od konce 90. let).

11.3 Model malého světa

V přirozených sociálních sítích, jako jsou lidské kontakty, se vyskytují shluky, které ale nemají velký dosah. Jde o přirozené malé společnosti, okruhy známých a příbuzných, které můžeme označit za „malý svět“ (*small world*). Pro ně potřebujeme odpovídající teoretický model, který bude mít malé průměrné vzdálenosti (podobně jako náhodný model), ale velký shlukovací koeficient.

Příkladem vytvoření sociální sítě, resp. zajímavou hříčkou je Erdősovo číslo a Baconovo číslo.

Erdősovo číslo EČ popisuje síť spolupráce spoluautorů, viz <http://www.oakland.edu/enp/> nebo <http://academic.research.microsoft.com/VisualExplorer#2019273&1112639> P. Kořenem sítě je Erdős, ten dostane číslo 0; jeho spoluautoři na libovolném článku dostanou číslo 1; ti, kdo publikovali s autory s číslem 1 a současně ne s Erdősem dostanou číslo 2, atd. Samozřejmě kořen lze změnit na jiného autora, který nás zajímá. Následně lze porovnat EČ různých autorů, abychom ocenili míru spolupráce autorů v jejich okolí. Např. Einstein má EČ dva, zatímco B.Gates má EČ čtyři.

Baconovo číslo BČ (<http://oracleofbacon.org/>) sleduje společné veřejné účinkování herců (např. ve filmu, v televizi apod.). Název je odvozen podle herce Kevina Norwood Bacona a sledujeme, kolik hran (společných vystoupení) je potřebných pro jeho dosažení. Princip si můžete vyzkoušet na http://oracleofbacon.org/center_list.php. Např. Baconovo číslo pro Zdeňka Svěráka je 3 (spojení přes Ivanu Chýlkovou a Ted Otis) (obr. XX). Opět můžeme porovnávat velikosti „baconových“ čísel pro různé herce. Můžete si ale generovat jiná „čísla“ pro počítání kroků společného účinkování k jinému „cíli“ než je K.Bacon Na stejném obrázku vpravo je Kaiserovo číslo pro Zdeňka Svěráka.



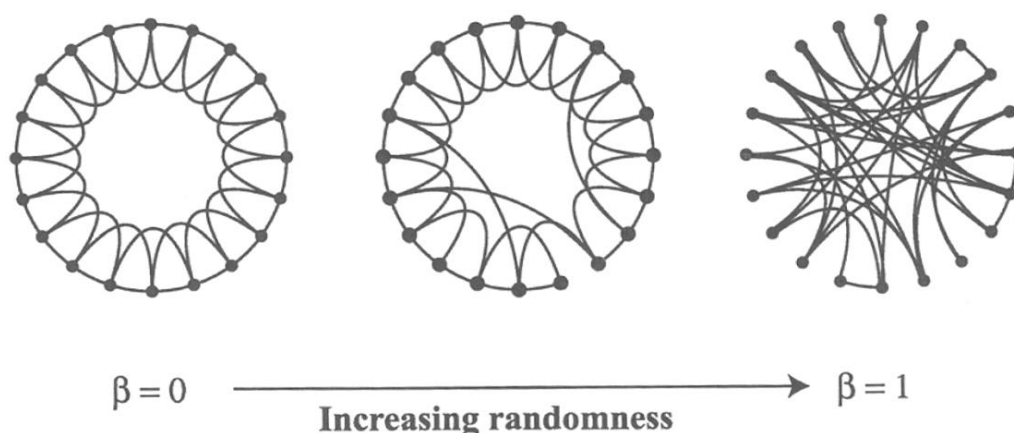
Obr. 11-6 Odvození Baconova (vlevo) a Kaiserova (vpravo) čísla pro Zdeňka Svěráka

Zajímavým příkladem studia sociálních kontaktů byl i pokus výzkumníků z Kolumbijské university v New Yorku (Dodds et al., 2003). Rozeslali emaily na 98847 adres s požadavkem, aby doručili zprávu konkrétní osobě prostřednictvím některého svého kontaktu, o kterém si myslí, že má k cíli blíže než oni. Celkem bylo 18 cílů, nacházejících se ve 13 zemích, mezi nimi např. profesor na univerzitě, inspektor v Estonsku, policista v Austrálii, veterinář v norské armádě. Sledovali cestu jednotlivých zpráv a zaregistrovali celkem 24163 cest, zapojilo se přes 60000 osob ze 166 zemí a výsledné L bylo 4.05.

Existuje několik variant konstrukce modelu malého světa, nejznámější jsou model Watts-Strogatz a model Watts-Newman.

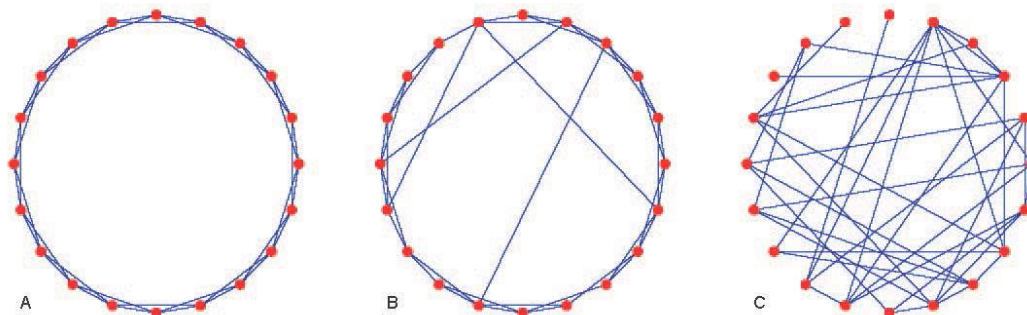
11.3.1 Model Watts-Strogatz (WS)

Model Watts-Strogatz (WS) vytváří kruhovou mřížku o n uzlech, m hranách, kde každý uzel sousedí s prvními k sousedy a hrana je „přepojena“ náhodně na vzdálenější uzel s pravděpodobností přepojení hrany p (smyčky a multihrany nejsou povoleny). Tím se demonstruje sepjetí a provázanost malé, blízké komunity, kdy se zná každý s každým a pak náhodné vazby ke vzdálenějším známým (Ochodková 2016). Výskyt WS modelu lze prokázat u sítě spoluprací (herci) nebo u biologické sítě (červ *C.elegans*).



Obr. 11-7 Watts-Strogatz model a přepojování hran s pravděpodobností β (Krishnagopal, 2018)

Příklad pro WS síť s parametry: $n = 20$, $m = 40$, $\mu_d = 4$ je na obr.11-8. Třem situacím odpovídají výsledné parametry sítě (postupně pro A, B, C): $L = 2.89, 2.35, 2.21$; $C = 0.5, 0.40, 0.23$; $D = 5, 4, 5$ (Evans, 2004).



Obr. 11-8 Ukázky sítě s 0 (A, pravidelná mřížka), 5 (B, small world) a 200 přepojeními (C, náhodný model) (Evans, 2004).

Watts numericky simuloval, že pokud p roste od 0 k 1, rychle se snižuje L , pomalu snižuje C a že existuje interval pro $\langle p_1, p_2 \rangle$, který generuje síť s malou L a velkým C .

Shlukovací koeficient u Watts-Strogatz modelu:

$$C(p) = \frac{3 * (\mu_d - 1)}{2 * (2 * \mu_d - 1)} * (1 - p)^3$$

11.3.2 Model Watts-Newman

Watts-Newman (WN, 1999) je konstrukčně podobný předchozímu. Opět se tvoří kruhová mřížka o n uzlech, m hranách, kde každý uzel sousedí s prvními k sousedy a **náhodně je přidána hrana** s pravděpodobností p , avšak na rozdíl od WS modelu není žádná původní hrana mřížky přemístěna.

Takový model se lépe analyzuje, nevznikají izolované komponenty jako u WS modelu (pro něj už se našly reálně existující sítě jako potravní síť popisující vztahy v ekosystému, elektrorozvodná síť v USA, schéma zapojení mikroprocesoru).

Ukazuje se však, že asni oba modely malého světa neodpovídají dobře distribuci u reálných sítí (což také nebylo cílem modelů). Hlavně u malých světů postrádáme centra, které u řady reálných sítí existují.

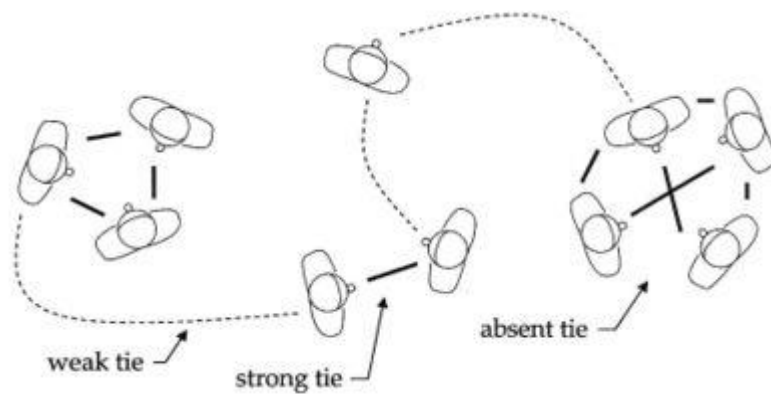
11.4 Mocninný model

Mocninný model (*scale free*) předpokládá, že distribuce charakteristik sítě, zejména stupeň uzlu, odpovídá mocninému zákonu. Objev shluků v sítích odporoval modelu náhodného grafu. Model WS přizpůsobil model náhodného grafu faktu existence shluků. Objev center definitivně vedl k opuštění náhodného pohledu na reálné sítě.

Ochodková (2016) uvádí, že z 203 mil. webových stránek mělo vstupní stupeň uzlu ≤ 10 90% stránek, 3 měly vstupní stupeň uzlu stupeň cca milion.

Mark Granovetter od 60. let zkoumal jakými cestami si lidé hledají zaměstnání a zjistil, že nejvíce jim při tom pomáhají vzdálení známí, nikoli nejbližší přátelé (Granovetter, 1973).

Vize společnosti jako síť složené z mnoha „modulů“, přičemž moduly jsou spolu navzájem spojeny malým počtem vzdálených slabých vazeb.



Obr. 11-9 Představa typů vazeb ve společnosti (Ochodková 2016)

Mocninný zákon je polynomiální závislost $f(x)$ (ve které závislá proměnná x obsahuje exponent α) vyjadřující vlastnost invariance vzhledem k měřítku.

Nejobvyklejší mocninný zákon má tvar $f(x)=bx^\alpha+o(x^\alpha)$, kde b , α jsou konstanty a $o(x^\alpha)$ je vzhledem k bx^α asymptoticky menší funkce.

Exponent α se nazývá „měřítkový exponent“. Měřítkový znamená, že mocninná funkce vyhovuje $f(cx)\propto f(x)$, kde c je konstanta (vyjadřuje, že zvětšením argumentu konstantním poměrem se změní pouze měřítko funkce, ne však její tvar).

Pro znázornění funkce v grafické podobě se často používá tzv. log-log tvar zápisu $\log(f(x))=\log b + \alpha \cdot \log x$

Tento zápis představuje lineární závislost, kde α je parametr funkce určující její sklon (je vidět nezávislost tvaru na násobící konstantě argumentu b , tato konstanta nijak neovlivňuje parametr α).

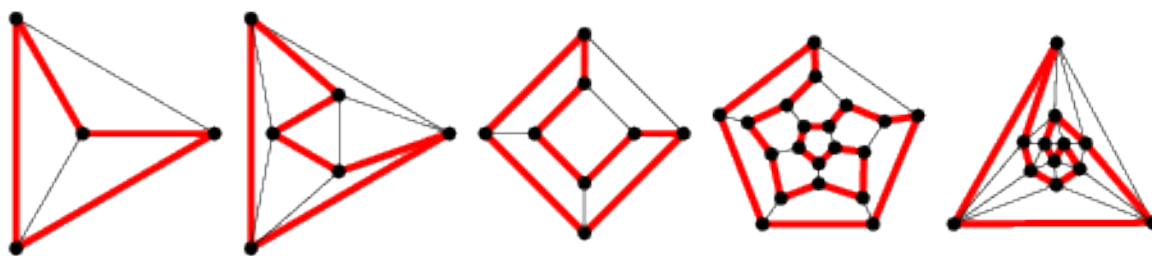
Barabási-Albert model vysvětluje bezškálovost webu pomocí následujících principů (Barabási, 2012):

1. Síť neustále roste, síť je dynamická a neustále se proměňuje, v každém kroku časového vývoje se k síti přidá jeden uzel,
2. Existuje preferenční připojování nového uzlu k starším. Nezáleží tedy na obsahu stránky, ale na počtu stránek, které na ni odkazují.

12 Optimalizační algoritmy a metody v sítích

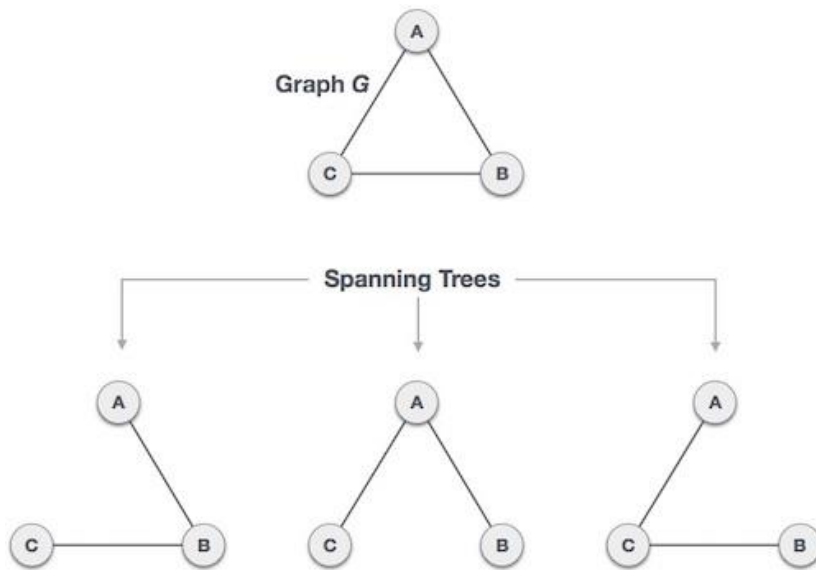
Vybrané síťové úlohy s využitím teorie grafů (podle Smith et al., 2018) zahrnují:

- **Nejkratší cesta (Shortest path SP)**
Nejkratší cesta je cesta mezi 2 uzly, která minimalizuje předem definovanou metriku (např. minimální počet hran, celková vzdálenost nebo čas).
Samozřejmě se může lišit podle zvolené metriky a ani v případě jedné metriky nemusí existovat pouze jedno řešení. Určování nejkratších cest se často popisuje jako analýza nejkratších cest (shortest path analysis, SPA). Existuje mnoho variant tohoto problému, např. hledání druhé, třetí atd. nejkratší cesty, nalezení nejkratších cest z 1 daného uzlu do všech ostatních, nalezení nejdlejší cesty.
Úloha má přinejhorším lineární časovou náročnost.
- **Hamiltonovská cesta (Hamiltonian path HP)**
Hamiltonovská cesta je cesta, která obsahuje všechny uzly grafu (a proto všechny uzly právě 1x).
- **Hamiltonovská kružnice (Hamiltonian circuit HC)**
Hamiltonovská kružnice je kružnice, která obsahuje každý uzel grafu. Hamiltonovský cyklus je cyklus, který obsahuje každý uzel grafu.
Testování existence Hamiltonovské kružnice v grafu je označováno jako problém Hamiltonovské kružnice (Hamiltonian circuit problem HCP). Podrobnější informace viz <http://math.feld.cvut.cz/demlova/teaching/dmc/pred100.pdf>.



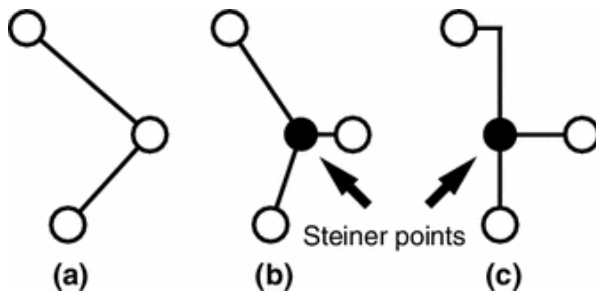
Obr. 12-1 Ukázky Hamiltonovských kružnic (Wolfram MathWorld)

- **Úloha obchodního cestujícího (Traveling salesman problem TSP)**
V dané sadě uzlů a symetrické či asymetrické matici cen najděte Hamiltonovu kružnici minimální délky (ceny). Typicky začíná v předem definovaném uzlu. Uzly nemusí nutně ležet na předem definované síti. Pokud se musí dodržet pořadí, tj. některé uzly se musí navštívit dříve než ostatní, označuje se úloha jako sekvenční problém uspořádání (sequential ordering problem SOP).
- **Eulerova cesta (Eulerian circuit EC)**
Eulerova cesta (přesněji tah) je tah v grafu, ve kterém je zařazena každá hrana grafu právě jednou. Eulerova kružnice je kružnice v grafu (zpravidla orientovaném) se stejnou podmínkou. Podmínkou v grafu, který obsahuje Eulerovskou cestu je, že v každém zapojeném uzlu musí být počet vstupujících hran stejný jako počet vystupujících hran.
- **Kostra grafu (Spanning tree ST)**
Kostra grafu je podmnožina grafu, která je jeho stromem (tudíž nemá žádný cyklus) a obsahuje všechny uzly. Zpravidla má graf více koster.



Obr. 12-2 Tři kostry pro graf G (Wolfram MathWorld)

- **Minimální kostra grafu (Minimal spanning tree MST)**
 Minimální kostra grafu je kostra grafu s nejmenší celkovou délkou. Ani zde není zaručeno, že v grafu existuje pouze 1 řešení. Výpočetní náročnost algoritmu je téměř lineární.
- **Steinerův strom (Steiner MST, Steiner tree)**
 Steinerův strom umožňuje díky vložení nových bodů v mezilehlé poloze zkrátit celkovou délku MST. Např. nové dodatečné (Steinerovy) body jsou vloženy mezi 3 existující uzly a jsou s nimi spojeny 3 novými hranami, které jsou pravidelně odsazeny po 120 stupních. Nové body se vkládají, pokud to vede ke zkrácení MST.



Obr. 12-3 Vložení Steinerova bodu do stromu (Wolfram MathWorld)

- **Úloha trasování vozidel (Vehicle routing problem VRP)**
 Tato skupina problémů se vztahuje k potřebě obsloužit zákaznické požadavky (např. dodávky paliva) z jednoho skladu (vehicle routing problem VRP). Pokud do řešení zahrnujeme známou kapacitu vozidel, jde o CVRP.
 Lokalizace zákazníků, skladů a zákaznické požadavky na množství jsou známy, ale počet vozidel a počet cest (složených z podmnožiny grafu) je proměnný. Cílem je optimalizovat celkovou délku cest s dodržením jistých omezení.
 Existuje mnoho variant této úlohy. Nejvýznamnější jsou řešení s časovými okny pro doručování, řešení zahrnující sběr i doručování, řešení pro sérii skladů, řešení pro dynamicky proměnnou poptávku, řešení pro kapacitní omezení a možné akumulace (kongesce) toků, řešení pro zobecněné umístění zákazníků a jejich proměnnou lokalizaci.

- Zásobovací úloha (Transportation problem, Trans-shipment problem)**
 Zásobovací úloha je obecným problémem komplexní obsluhy sady cílových lokalit s určitými požadavky ze série zdrojových lokalit, a zajistit jistou úroveň dodávek s cílem minimalizovat celkové náklady.
 Požadovaným vstupem je jednotková cena dodávky z každého výchozího místa do každého obsluhovaného místa. Úloha patří do obecnější skupiny úloh *Minimum Cost Flow Problem* (MCFP). Generalizací zásobovacího problému je trans-přepravní úloha (*trans-shipment problem*), kdy tok zboží nesměruje přímo k zákazníkovi, ale musí se řešit přestupní místa, např. dodávka z továrny do skladu a ze skladu k zákazníkovi.
- Úloha optimalizace procházení celou sítí (Arc routing problem ARP)**
 Najděte cestu, která kompletně projde každou hranu grafu (typicky uliční sítě), v případě neorientovaných hran v obou směrech, a má nejmenší náklady (vzdálenosti, čas) při respektování daných omezení (např. náklady na otáčení). Tato úloha se používá pro čištění ulic, pluhování sněhu, doručování pošty (úloha čínského pošťáka), sběr odpadků apod. Verze úlohy s definovanými kapacitami se označuje jako CARP.
- Lokačně-alokační úlohy pro graf (Facility location: p-median/p-center/ coverage)**
 Lokalizace zařízení zahrnuje sadu úloh, kde je cílem optimalizovat umístění 1 nebo více zařízení v síti pro uspokojení požadavků zákazníků (poptávka, úroveň služby). Alokační úloha řeší optimální zásobování existujících zařízení.
 Nejčastěji se mluví o minimalizaci celkových nebo průměrných nákladů či času k nebo od zákazníků (p-mediánový problém) (the **p-median problem**).
 Minimalizace maximální vzdálenosti nebo času je známa jako **p-center problém**.
 Příbuzné úlohy se snaží zajistit, aby všichni zákazníci byli obslouženi do určitého maximálního času či nákladů (nebo alespoň jistý podíl z nich). Tato úloha se označuje jako problém pokrytí (**coverage problems**).
 Často se předpokládá, že poptávky zákazníků je lokalizována v uzlech, ve kterých p-mediánové řešení pro p zařízení obsluhuje n zákaznických míst při $n > p$ a zařízení jsou umístěna v uzlech sítě. To vytváří síťový ekvivalent rovinného řešení nebo kontinuálního (free-space) mediánového lokalizačního problému – formy lokačně-alokační úlohy, kde jsou zařízení umístěna (lokalizována) a zákazníci jsou alokováni do těchto zařízení.

Pro řadu úloh sice existuje přesné řešení, jenže je neúměrně výpočtově a časově náročné. Běžně se pro nalezení přesného řešení používá lineární programování, někdy spojované s dělicími nadrovinami, pokud se požaduje celočíselné řešení, ohraničujícími procedurami a dynamickým programováním (viz Cormen *et al.* 2001, Daskin 1995). Proto v řadě úloh určité velikosti není řešení dosažitelné a používají se **heuristiky**. Většina těchto procedur je v zásadě statická, ale mohou být aplikována i na dynamické či téměř real-time prostředí, pokud jsou dostatečně rychlá. Mnoho heuristik zahrnuje nějakou formu lokálního prohledávání a vyměňovací (swapping) procedury. Např. žravé algoritmy provádějí optimalizaci v krocích, kdy další krok se vybírá podle lokálního optima a doufá se, že se tím najde globální optimum. Např. jednoduché řešení úlohy obchodního cestujícího TSP spočívá s tom, že se vybere náhodně 1 cíl jako počátek a další cíl se připojí podle nejkratší vzdálenosti. Výsledkem je vždy nějaké suboptimum.

Tab. 12-1 Příklady parametrů síťových analýz (Smith et al. 2018, Mitchell 1998, 2000)

Parametr	Otázky
Cílová funkce (<i>Objective function</i>)	Jak měříme „délku“ cesty, resp. vůči čemu provádíme optimalizaci? Např. Euklidovská vzdálenost, cestovní délka, cestovní čas, cestovní náklady apod.
Omezení na cestě (<i>Constraints on the path</i>)	Potřebujeme se dostat jednoduše z místa A do místa B, nebo musíme po cestě navštívit ještě něco jiného?
Vstupní geodata (<i>Input geometry</i>)	Jaký typ překážek a jiných objektů je specifikován ve vstupních geodatech?
Dimenze problému	Zpravidla 2D, ale dopravní síť nemusí být plošná. Někdy může jít o 3D či dokonce vyšší

Parametr	Otázky
(Dimension of the problem)	dimenzi.
Typ pohybujícího se objektu (Type of moving object)	Pohybujeme jednoduchým bodem po cestě nebo nějakým větším či složitějším objektu s jistými parametry a svou geometrií? Při hledání cesty terénem mimo komunikace (<i>off-road</i>) v GIS se běžně využívají analýzy šíření s akumulací povrchy nebo procedury transformace vzdálenosti (<i>Distance Transform DT procedures</i>) aplikované na rastr. Řešení průchodu terénem pro bezrozměrný bod nemusí vyhovovat pro větší objekt, zejména v případě vysokého prostorového rozlišení. Omezení na silnici se mohou vztahovat k určitým typům vozidel, určité velikosti či hmotnosti (např. výškové omezení).
Provádí se ad hoc analýza (izolovaná) nebo se očekává opakování dotazů?	V případě opakování je vhodné využít efektivní datovou strukturu, protože řada síťových úloh zahrnuje velmi podobné prohledávání sítě – např. určení druhé či třetí nejlepší cesty.
Statické nebo dynamické prostředí (Static vs. dynamic environments)	Dovolíme vkládat nebo rušit překážky na trase či dokonce pohybovat s překážkou po nějaké trajektorii? Také se může vyskytnout dynamika toku či dynamika událostí.
Přesný nebo aproximativní algoritmus	Je nutné přesné řešení nebo stačí suboptimální? Zvláště důležité pro problémy v reálném čase.
Známa nebo neznáma geografická situace? (Known vs. unknown map)	Je geografická situace známa předem nebo se postupně zjišťuje např. pomocí senzorů? Zejména v případě toků nebo výskytu nových událostí (havárie na silnici) nemusí být celá známa předem.

Taxonomie lokalizačních analýz je uvedena v tab. 12-2.

Tab. 12-2 Parametry a koncepty lokalizačních analýz (upraveno z Smith et al. 2018, Daskin 1995, Schietzelt, Densham 2003)

Komponenta či charakteristika	Popis
Plošný/síťový/diskrétní	Plošný — poptávka po službě a zařízení se vyskytují kdekoli v rovině. Síťový — poptávka po službě a zařízení se mohou lokalizovat pouze v uzlech sítě nebo na hranách a cestování je omezeno pouze na síť. Diskrétní — uzly jsou fixní, ale cena dopravy mezi uzly není určena ze sítě
Strom/graf	Některé síťové úlohy se řeší ve stromu jako specifickém typu grafu, což zjednodušuje řešení
Metrika vzdálenosti	Máme celou řadu vzdálenostních metrik, zejména pro plošné a diskrétní případy
Zařízení	Počet zařízení může být předem definován (např. p) nebo je určen až jako součást optimalizačního. K řešení lokalizace jen 1 zařízení se používají relativně přímočaré úlohy a některé procedury toho využívají k vývoji heuristik, které postupně zvyšují počet zařízení na základě místní optimalizace při přidání dalšího zařízení.
Statický/dynamický	Většina problémů a technik je statistických. Takové metody mohou být aplikované i na některé dynamické problémy, ale v mnoha případech vyžadují rozšíření nebo alternativní přístupy. Příklady: vyberte, kde je nejlepší lokalizovat další 1, 2 ... více zařízení, zahrnout dynamickou poptávku a případně i dynamické dodávky do modelu, modifikovat lokalizaci vozidel podle změny poptávky během týdne či dne (např. standby pozice záchranných či výjezdových vozidel)
Soukromé/veřejné	Základním problémem je zde definice cílové funkce (<i>objective function</i>). Má to být čistě peněžní (nebo ekvivalentní) vyjádření, nebo se berou v úvahu sociální, environmentální a další faktory? Obecně všechny procesy výběru lokalit jsou součástí širšího rozhodovacího procesu. Pro lokalizaci veřejných zařízení je často poloha diktována, zatímco soukromá zařízení nemají takový diktát a vyžadují modelování umístění např. na základě prostorového interakčního modelu.

Komponenta či charakteristika	Popis
Jednouúčelový/víceúčelový	Ve většině případů hledáme umístění 1 cíle podle 1 kritéria (např. čas, vzdálenost, minimalizace nákladů). Avšak reálné situace jsou zpravidla víceúčelové. Jednou z možností řešení je spočítat více řešení pro varianty v parametrech, které reflektují více účelů a vyzkoušet povahu a robustnost těchto řešení. Výsledek není ekvivalentem skutečného víceúčelové analýzy, ale může poskytovat benchmark pro takové úlohy jako části širšího analytického rámce.
Jednotná/rozdílné služby	Jednotná služba je taková, kde je modelován pouze jeden typ služby, např. poskytování ambulantní služby. V jiných úlohách jsou modelovány různé typy služeb. Např. rozdílné kategorie ambulantních služeb a s nimi spojených vozidel a posádek. Rozlišujeme plně vybavené záchranné vozidlo na výjezd, individuální záchranná ambulantní služba na zavolání nebo ambulance pro nezáchrané využití (např. transport pacienta, zdravotnické dodávky).
Elastická/neelastická poptávka	Většina modelů předpokládá, že poptávka a nabídka jsou nezávislé. Avšak je třeba si uvědomit, že zlepšená nabídka často zvýší poptávku, tj. požadavek (poptávka) je elastický a nabídka může a nemusí být.
Deterministické/adaptivní/stochastické	Řada modelů je deterministická z hlediska nabídky, poptávky a reálného řešení. Jiné však mohou předpokládat, že je poptávka pravděpodobnostní veličinou a často dynamickou, s řešeními, která se považují za optimální ve vztahu ke vstupům, ale která se často adaptují na změny v poptávce, nabídce a dopravní dynamice.
Kapacitně omezená (<i>Capacitated</i>)/Kapacitně neomezená (<i>uncapacitated</i>)	Základní modely neuvažují o kapacitě zařízení (např. sklady, nemocnice, vozidla) nebo hran grafu (např. dopravní síť či potrubí) jako o omezení. Jsou ale dostupné nástroje, které taková omezení dovolují zahrnout.
Nejbližší zařízení/Obecná alokace poptávky	Často se předpokládá, že je poptávka alokována do nejbližšího zařízení. V kapacitních modelech se může vyžadovat, že část poptávky je rozdělena mezi více zařízení (částečná alokace) – např. obchod potřebuje být zásobován z více než 1 skladu, nebo je pacient poslán do vzdálenější nemocnice v době vysoké poptávky nebo krizové situace.
Hierarchický/jednourovňový	Některé úlohy jsou vnitřně hierarchické, ve kterých jsou produkty nebo služby poskytovány z větších center (např. národních) do menších regionální center a nakonec na okresní nebo lokální zařízení (nebo opačně, tok směřující nahoru). To se může aplikovat na nabídku zboží i služeb. V takových úlohách je existence zařízení na 1 úrovni prerekvizitou pro lokalizaci zařízení v dalším kroku (např. velká regionální nemocnice se buduje jen při dosažení určitého počtu lokálních zdravotnických zařízení, která již existují).
Žádoucí/nežádoucí	Většina modelování lokalizace se vztahuje k žádoucím zařízením – vzdálenost nebo náklady cestování z či do zařízení mají být minimální vzhledem k určitým kritériím. Pro některá zařízení jako skládka či úložiště radioaktivního odpadu se problém lokalizace stává značně komplexním, protože se tam vyskytují konfliktní požadavky. Např. lokalizace skládky komunálního odpadu má být co nejbližší místům, kde se odpad tvoří (obydli), ale ideálně co nejdále od obyvatelstva.

12.1 Hledání nejkratší cesty

Obecnější je mluvit o hledání optimálních cest. Podle cílové funkce lze rozlišit:

- nejkratší cesty (tj. cesty s nejmenším počtem hran, s nejmenším počtem přesezení),
- nejlevnější cesty (tj. cesty s nejmenším součtem ohodnocení hran).

Důležité kritérium pro volbu algoritmu je, zda hledáme jen cestu pro 1 pár O-D nebo současně cesty pro více O-D párů. Podle toho rozlišujeme hledání cest:

- mezi dvojicí zadaných uzlů,
- ze zadaného uzlu do všech ostatních (sada nejkratší cest z 1 zdroje se označuje jako strom nejkratších cest, shortest path tree, SPT). Řešení nabízí např. Dantzigův algoritmus, Dijkstra, A*.
- ze všech ostatních do zadaného koncového uzlu,

- pro všechny (uspořádané) dvojice uzlů. Řešení nabízí např. Floydův-Warshallův algoritmus.

V náročnějších úlohách existují modifikace, které řeší různé reálné situace. Např. akceptovatelná nejkratší cesta v telekomunikační síti musí splnit jiné kvalitativní požadavky – pokud mají některé trasy vyšší kvalitu než jiné, jsou preferovány bez ohledu na nárůst času, ceny nebo vzdálenosti. Jiným příkladem je maximální rozpočet na cestu. Takové dodatečné podmínky mohou být doplněny do definice modelu pomocí 1 či více nerovností, kde každá hrana sítě má nejen hodnotu nákladů nebo vzdálenosti, ale také jednu či více kladných vah.

12.1.1 Dantzigův algoritmus

Dantzigův algoritmus umožňuje nalézt všechny nejlevnější cesty ze zadaného úhlu s do všech ostatních úhlů. Označme $d(z)$ cenu nejlevnější cesty ze zadaného výchozího uzlu s do uzlu z . Uzly, které mají stanovenou cenu nejlevnější cesty z uzlu s , považujeme za prozkoumané, ostatní za neprozkoumané (Dudorkin (1997)).

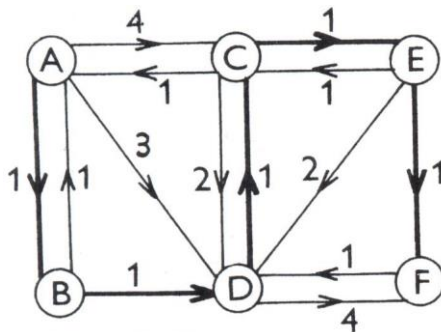
1. krok: Pro zadaný výchozí uzel položíme $d(s)=0$ a tím jej považujeme za prozkoumaný. Vyškrtneme všechny hrany končící v s .
2. krok: Pro každý prozkoumaný uzel x , který je bezprostředním předchůdcem alespoň jednoho neprozkoumaného uzlu y , vypočteme součet jeho známé minimální ceny $d(x)$ a ceny $c(x,y)$ hrany (x,y) a nalezneme minimální z těchto součtů, tj.

$$d(z) = \min_{x \in U_p} \left[d(x) + c(x,y) \right]_{y \in U_n}, \text{ kde } U_p \text{ značí množinu prozkoumaných uzlů } U_n \text{ množinu neprozkoumaných uzlů.}$$

Uzel z je novým prozkoumaným uzlem. Jestliže $d(z) = \min[d(x)+c(x,y)]=d(r) = \dots = d(q)$, budou novými prozkoumanými uzly y, r, \dots, q se stejnou minimální cenou nejlevnější cesty od uzlu s .

3. krok: Zaznamenáme vstupní hranu (x,y) a z dalších úvah vyškrtneme všechny ostatní vstupní hrany do uzlu z . Jestliže byly prozkoumány všechny uzly (nebo alespoň uzly, které nás zajímají z hlediska nejlevnější cesty), je výpočet u konce, jinak následuje krok 2.

Příklad (Dudorkin 1997)



Obr. 12-4 Nejlevnější cesty v grafu Dudorkin (1997)

V orientovaném grafu na Obr. 12-1 je třeba nalézt nejlevnější cestu z uzlu A do ostatních uzlů. Výchozí údaje a výsledky výpočtu přehledně zapíšeme do tabulky 12-3, v jejímž sloupci jsou k příslušnému uzlu u uvedeny všechny hrany z tohoto uzlu začínající v rostoucím pořadí jejich cen. Dle popsaného algoritmu položíme $s(A)=0$ a vyškrtneme hrany končící v uzlu A (BA, CA). Vypočteme $d(X)=\min(0+1, 0+3, 0+4)=1$. Zarámujeme hranu AB, kde toto minimum nastalo, a vyškrtneme nezarámované hrany končící v B (zde takové nejsou). Vypočteme pro zkoumané uzly A, B minimum $\min(0+3, 0+4, 1+1)=2=d(D)$, zarámujeme hranu BD (stav viz tab. 12.3) a vyškrtneme všechny ostatní hrany končící v uzlu D (AD, CD, ED, FD). Opakováním tohoto postupu nalézáme nejlevnější cesty z uzlu A do všech ostatních uzlů. Jejich ceny $D(z)$ a průběh jsou snadno zjistitelné z tab. 12-4. Nejlevnější cesty jsou vyznačeny v obr. 12-1 silně.

Tab. 12-3 Mezivýsledek výpočtu nejlevnějších cest z A do všech ostatních pomocí Dantzigova algoritmu – po nalezení nejlevnější cesty do B byla identifikována nejlevnější cesta do D.

Uzel z	A	B	C	D	E	F
d(z)	0	1		2		
c(z,y)	AB(1) AD(3) AC(4)	BA(4) BD(1)	CA(4) CD(2) CE(1)	DC(1) DF(4)	EC(1) EF(1) ED(2)	FD(1)

Tab. 12-4 Finální výsledek výpočtu nejlevnějších cest z A do všech ostatních pomocí Dantzigova algoritmu

Uzel z	A	B	C	D	E	F
d(z)	0	1	3	2	4	5
c(z,y)	AB(1) AD(3) AC(4)	BA(4) BD(1)	CA(4) CD(2) CE(1)	DC(1) DF(4)	EC(4) EF(1) ED(2)	FD(4)

12.1.2 Floydův algoritmus

Nalezení všech nejkratších orientovaných cest mezi všemi dvojicemi uzlů jednoduchého orientovaného grafu umožňuje Floydův algoritmus (Dudorkin 1997), někdy nazývaný Floydův-Warshallův (Ryan, 2017). Je použitelný i pro grafy se záporným ohodnocením hran, avšak bez cyklů záporné ceny. Algoritmus má vysokou časovou náročnost $O(n^3)$ a proto se vyplácí u sítí, které se mění málokdy, ale často se v nich hledají cesty.

Ve Floydově algoritmu postupně vyčísľujeme matice $D_0=C, D_1, \dots, D_n$. Prvek $d_{ij}^{(k)}$ matice D_k ($i=1, \dots, n; j=1, \dots, n$) vypočteme z prvků matice $D_{k-1}=[d_{ij}^{(k-1)}]$ dle vztahu $d_{ij}^{(k)}=\min(d_{ij}^{(k-1)}, d_{ik}^{(k-1)}+d_{kj}^{(k-1)})$ $i=1, \dots, n; j=1, \dots, n; k=1, \dots, n$.

Distanční matice $D_n=[d_{ij}^{(n)}]=[d(u_i, u_j)]=D$, udává ceny $d(u_i, u_j)$. Jestliže se v některé matici D_k ($k=1, \dots, n$) vyskytne záporný prvek na diagonále, tedy $d_{ii}^{(k)} < 0$, potom v grafu existuje cyklus záporné délky procházející uzlem u_i a výpočet je třeba přerušit. Ve Floydově algoritmu jsou postupně počítány ceny $d_{ij}^{(k)}$ nejlevnějších cest z i -tého uzlu do j -tého uzlu, které procházejí přes uzly $1, 2, \dots, k$ (kromě uzlů i a j). Prakticky jde o to, že srovnáváme přímou cestu mezi uzly s možností nepřímé cesty přes jiný uzel (a postupně se vyzkouší všechny prvky), v daném kroku přes k -uzel. Při vlastním výpočtu zřejmě předcházejí k -tý sloupec a k -tý řádek matice D_{k-1} beze změny do matice D_k . Floydův algoritmus nalezne pouze ceny nejlevnějších cest. Pro zjištění jejich průběhu rozšíříme algoritmus o výpočet matic

$P_k=[p_{ij}^{(k)}]_{n \times n}$, $k=1, \dots, n$, $P_0=[p_{ij}^{(0)}=1]_{n \times n}$. Prvek $p_{ij}^{(k)}=p_{ij}^{(k-1)}$, platí-li $d_{ij}^{(k)}=d_{ij}^{(k-1)}$ a $p_{ij}^{(k)}=p_{kj}^{(k-1)}$, platí-li $d_{ij}^{(k)}=d_{ik}^{(k-1)}+d_{kj}^{(k-1)}$. Nastanou-li oba tyto případy současně, zvolíme libovolný z nich. Prvek $p_{ij}^{(n)}$, matice P_n udává číslo uzlu bezprostředně předcházejícího uzlu j na nejlevnější cestě z i do j . Z matice P_n je tedy možno snadno sestavit průběh nejlevnější cesty mezi dvěma uzly. Existuje-li mezi dvěma uzly více nejlevnějších cest, je v matici P_n zaznamenána pouze jedna z nich.

Algoritmizace je velmi snadná:

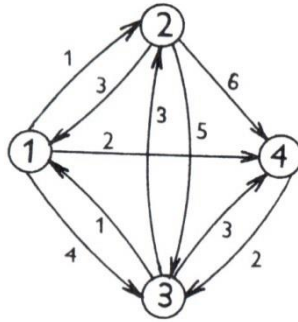
Pro $k=1, 2, \dots, n$ provedeme

Pro $i=1, 2, \dots, n$ provedeme

Pro $j=1, 2, \dots, n$ provedeme

je-li $c_{ij} > c_{ik} + c_{kj}$, pak $c_{ij} := c_{ik} + c_{kj}$

Příklad (Dudorkin 1997):



Obr. 12-5: Orientovaný graf (Dudorkin 1997)

Mějme orientovaný graf zadaný diagramem na obr. 12-2 s maticí cen $C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 & 2 \\ 3 & 0 & 5 & 6 \\ 1 & 3 & 0 & 3 \\ M & M & 2 & 0 \end{bmatrix}$

Z matice $C = D_0$ postupně vypočteme matice D_1, \dots, D_4 a P_0, \dots, P_4 dle uvedeného postupu.

$$D_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 & 2 \\ 3 & 0 & 5 & 6 \\ 1 & 3 & 0 & 3 \\ M & M & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$P_0 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \end{bmatrix} \quad k=0$$

$$D_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 & 2 \\ 3 & 0 & 5 & 5 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \\ M & M & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$P_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 3 & 3 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \end{bmatrix} \quad k=1$$

$$D_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 & 2 \\ 3 & 0 & 5 & 5 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \\ M & M & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$P_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 3 & 3 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \end{bmatrix} \quad k=2$$

$$D_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 & 2 \\ 3 & 0 & 5 & 5 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \\ 3 & 4 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$P_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 4 & 4 \end{bmatrix} \quad k=3$$

$$D=D_4 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 & 2 \\ 3 & 0 & 5 & 5 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \\ 3 & 4 & 2 & 0 \end{bmatrix} \quad P=P_4 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 4 & 4 \end{bmatrix} \quad k=4$$

V maticích jsou vyznačeny řádky a sloupce, které přecházejí do následující matice beze změny. Matice D obsahuje ceny nejlevnějších cest. Všimněte si např. výpočtu prvku $d_{24}^{(1)} = \min(d_{24}^{(0)}; d_{21}^{(0)} + d_{14}^{(0)}) = \min(6; 3+2) = 5$. Protože minimum nastalo pro součet $3+2$, bude příslušný prvek matice P_1 roven $p_{24}^{(1)} = p_{14}^{(0)} = 1$. Z matice D zjišťujeme např. cenu nejlevnější cesty z uzlu 1 do uzlu 4 $d_{14} = 3$. Z matice P zjišťujeme, že uzlu 4 na nejlevnější cestě 1-4 předchází uzel 3, neboť $p_{14} = 3$. Uzlu 3 na nejlevnější cestě 1-3 předchází uzel 1, neboť $p_{13} = 1$. Tedy nejlevnější cesta z 1 do 4 vede přes uzel 3.

12.1.3 Dijkstrův algoritmus

V případě Dijkstrova algoritmu se rovněž v každém průchodu jeho cyklem se přidá do množiny navštívených uzlů právě jeden uzel. Průchodů cyklem je nejvýše tolik, kolik má graf vrcholů.

V grafu se nesmí vyskytnout záporné hodnoty.

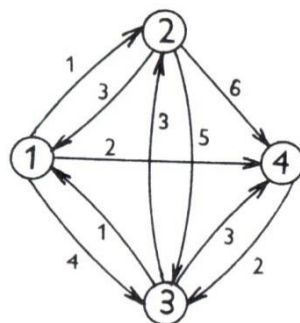
Popis najdete např. na Wikipedii (www.wikipedia.cz). Mějme graf G, v němž hledáme nejkratší cestu do všech ostatních. Řekněme, že V je množina všech vrcholů grafu G a množina E obsahuje všechny hrany grafu G. Algoritmus pracuje tak, že si pro každý vrchol v z V pamatuje délku nejkratší cesty, kterou se k němu dá dostat. Označme tuto hodnotu jako $d[v]$. Na začátku mají všechny vrcholy v hodnotu $d[v] = \infty$, kromě počátečního vrcholu s, který má $d[s] = 0$. Nekonečno symbolizuje, že neznáme cestu k vrcholu.

Dále si algoritmus udržuje množiny Z a N, kde Z obsahuje už navštívené vrcholy a N dosud nenavštívené. Algoritmus pracuje v cyklu tak dlouho, dokud N není prázdná. V každém průchodu cyklu se přidá jeden vrchol v_{\min} z N do Z, a to takový, který má nejmenší hodnotu $d[v]$ ze všech vrcholů v z N.

Pro každý vrchol u , do kterého vede hrana s hodnotou q z uzlu v_{\min} , se provede následující operace: pokud $(d[v_{\min}] + q) < d[u]$, pak do $d[u]$ přiřadit hodnotu $d[v_{\min}] + q$, jinak neprovádět nic.

Až algoritmus skončí, potom pro každý vrchol v z V je délka jeho nejkratší cesty od počátečního vrcholu s uložena v $d[v]$.

Příklad řešení – hledáme cestu z uzlu 3 v grafu dle obr. 12-6. Postup je uveden v neoznačených tabulkách za obr. 12-6.



Obr. 12-6 Příklad grafu

uzel u	hodnota cesty $d(u)$ z uzlu č.3
1	∞
2	∞
3	0

4	∞
---	----------

$v_{\min}=3$, testujeme možnost přímého cestování z uzlu číslo 3

Množina Z krok 1

uzel u	hodnota cesty $d(u)$ z uzlu č.3
3	0

Množina N krok 1

uzel u	hodnota cesty $d(u)$ z uzlu č.3
1	∞ 1
2	∞ 3
4	∞ 3

$v_{\min}=1$, testujeme možnost přesedání v uzlu číslo 1

Množina Z krok 2

uzel u	hodnota cesty $d(u)$ z uzlu č.3
3	0
1	1

Množina N krok 2

uzel u	hodnota cesty $d(u)$ z uzlu č.3 přes uzel 1
2	5 2
4	3

$v_{\min}=2$, testujeme možnost přesedání v uzlu číslo 2 (žádná změna, $1+2=3$, která tam už je)

Množina Z krok 3

uzel u	hodnota cesty $d(u)$ z uzlu č.3
3	0
1	1
2	2

Množina N krok 3

uzel u	hodnota cesty $d(u)$ z uzlu č.3 s přesedáním v uzlu 2
4	3

$v_{\min}=4$, algoritmus končí, protože již není žádný neznámý uzel

Množina Z krok 4

uzel u	hodnota cesty $d(u)$ z uzlu č.3
3	0
1	1
2	2
4	3

Pro řídké grafy je vhodné použít Dijkstrův algoritmus jehož časová složitost se blíží $O(V * E)$, Floydův algoritmus má podstatně vyšší časovou náročnost, je naopak vhodný pro husté grafy i díky jeho jednoduché implementaci.

Podstatný rozdíl mezi algoritmy spočívá ve schopnosti Floydova algoritmu provést výpočet i nad grafem se zápornými váhami hran (ale bez záporných cyklů), kdežto u Dijkstrova algoritmu v některých případech nikoliv.

Je třeba poznamenat, že základní algoritmy typu Dijkstra poskytují nekonzistentní výsledky při opakování na reálných sítích, protože takové sítě mají jen velmi omezené možnosti konektivity uzlů (jejich matice sousednosti jsou velmi řídké). SPAs potřebují buď velmi efektivní implementaci těchto základních algoritmů nebo se použijí heuristiky jako např. A* algoritmus pro získání rychlejšího řešení (e.g. pro reálné interaktivní aplikace) (Smith et al., 2018).

12.1.4 A* algoritmus

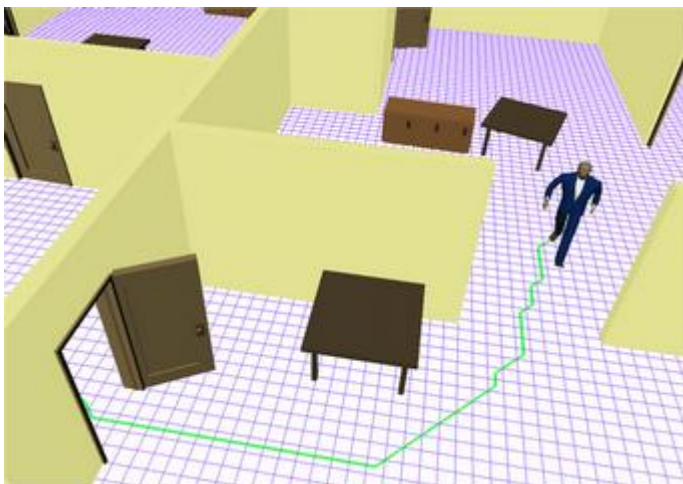
A* algoritmus představuje určité vylepšení Dijkstrova algoritmu s ohledem na rychlost. Přesně řečeno, A* je cílově-orientovaný best-first algoritmus. Navštíví všechny uzly seřazené v preferovaném pořadí, což může být rychlejší než jednoduché přepínání mezi všemi uzly jako u Dijkstrova algoritmu. Pro výběr dalšího uzlu pro návštěvu se používá Euklidovská vzdálenost každého vertexu (mezilehlého uzlu) od cíle a příspěvek ke vzdálenosti aktuálně zaznamenané přes síť do tohoto uzlu. Uzly jsou navštíveny v pořadí seřazené podle celkové vzdálenosti. Typicky A* algoritmus navštíví méně uzlů pro hledání cesty zdroj-cíl než jiné algoritmy a tak je rychlejší v průměru.

12.1.5 Rozšíření hledání nejkratší cesty

SPA algoritmus je klíčový pro řešení různých problémů prostorových analýz. Primární skupina aplikací zahrnuje řešení dopravních síťových cest, např. cestování z 1 místa na jiné prostřednictvím sítě s různými omezeními (např. zákaz otáčení, omezení rychlosti, směrová omezení). Extenze této základní funkcionality zahrnuje např. dopravní proudy, druhou a další nejkratší cestu, výpočty objížděk apod., které používají standardní bloky z řešení síťových a lokalizačních analýz.

Existují ale i další aplikační oblasti, které nejsou tak zřejmé. Jedním z příkladů je rozšíření SPA na nesíťové prostorové prostředí. Např. výpočet trasy pěšího nebo kola uvnitř prodejního centra, letiště nebo národního parku.

Jednou z možností řešení je překrýt dostupný prostor pomocí mřížky, tu pak považovat za graf a (nebo spojit středy buněk čtvercové mřížky. To poskytuje vysokou hustotu hran, které se mohou využít pro vytvoření alternativních tras a hledání nejkratší cesty (např. nejkratší cesty k únikovému východu). Viz příklad na obr. 12-7, kde byl aplikován standardní SPA algoritmus s dodatečnými omezeními jako dodržet minimální vzdálenost od překážek (e.g. stůl, židle). Tato cesta je však zkreslena (směrem i vzdáleností) lomeným průběhem na elementech mřížky.



Obr. 12-7 Nejkratší cesta kolem překážek (Smith et al. 2018)

Jinou možností je považovat všechny prvky za polyedrické objekty a hledat skutečné nejkratší (Euklidovské) cesty mezi nimi.

Další variantou je využít nejdříve mřížkovou SPA optimalizaci a pak provádět post-optimalizaci nalezeného řešení, např. nalezením částí cesty, kterou je možné narovnat (při splnění daných omezení).

12.2 Nejlevnější kostra grafu

Minimální kostra grafu je kostra grafu (obsahuje všechny uzly grafu), která je nejlevnější. Minimální kostra tedy zaručuje, že každý uzel je dosažitelný z každého uzlu.

Minimální kostra grafu může být aplikována i na sadu bodů (tj. nejsou definovány hrany mezi uzly). V sadě bodů máme obrovské množství možných spojení mezi body. Sada spojení, která minimalizuje celkovou délku vzniklého grafu (minimální součet délky hran) se označuje jako hledání nejmenšího rozvětveného stromu (minimal spanning tree, MST).

Všimněme si, že i když MST poskytuje nejkratší možné spojení mezi všemi uzly, je velmi zranitelný – pokud zrušíte či zablokujete jakoukoliv hranu (např. silniční nehoda), vede to ke ztrátě celkové konektivity.

12.2.1 Základní algoritmus pro nalezení nejlevnější kostry

Mějme úplný neorientovaný graf $G=(U,H,R)$ a matici cen $C \geq 0$. Máme nalézt takovou jeho kostru $G_1=(U,H_1,R_1)$, která je nejlevnější, tj. jejíž součet ohodnocení všech jejích hran je minimální ze všech možných koster. Metoda k nalezení této nejlevnější kostry je poměrně jednoduchá a popíšeme ji slovně (Dudorkin 1997):

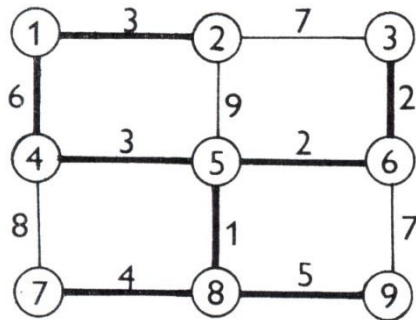
1. krok: Zvolíme libovolný uzel grafu G a spojíme jej s cenově „nejbližším“ uzlem.
2. krok: Nalezneme dosud „nepřipojený“ uzel, který je cenově „nejblíže“ k některému z již „připojených“ uzlů a spojíme jej s ním. 2.krok opakujeme tak dlouho, dokud nebudou propojeny všechny uzly.

Úprava pro orientovaný graf je zřejmá.

12.2.2 Hladový algoritmus (Kruskalův žravý)

Nejlevnější kostru je možno také nalézt tzv. hladovým algoritmem (Dudorkin 1997). Seřadíme hrany grafu vzestupně dle jejich cen. V tomto pořadí je postupně vybíráme, přičemž pro každou vybíranou hranu kontrolujeme, zda netvoří s již vybranými hranami kružnici. Tvoří-li kružnici, zamítneme ji; jinak ji zařadíme do seznamu vybraných hran. Postup opakujeme tak dlouho, dokud nezískáme kostru grafu. Lze ukázat, že je nejlevnější. V příkladu na Obr. 12-8 zařazujeme hrany v pořadí 5-8, 5-6, 3-6, 4-5, 1-2, 7-8-, 8-9-, 1-4. Přidání dalších hran by již vedlo ke vzniku kružnice.

Algoritmus je také znám pod označením Kruskalův žravý algoritmus.



Obr. 12-8 Nejlevnější kostra grafu (Dudorkin 1997)

12.2.3 Borůvkův algoritmus

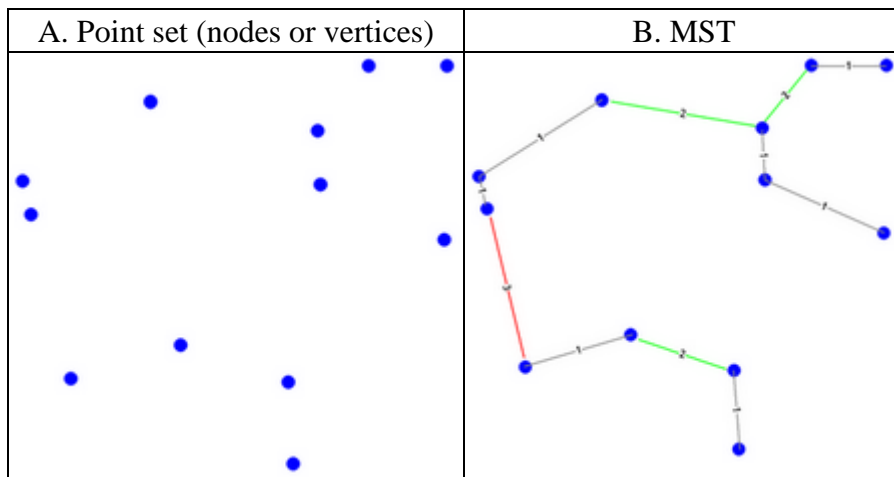
Borůvkův algoritmus byl poprvé použit Otakarem Borůvkou pro plánování trasování elektrické sítě na Moravě. Řešení je velmi efektivní i pro možnost paralelizace (<https://www.algoritmy.net/article/1396/Boruvkuv-algoritmus>).

Postup:

1. Připoj každý uzel ke svému nejbližšímu uzlu (pomocí nejlevnější hrany), což typicky vytvoří sadu nepropojených subgrafů
2. Spoj každý subgraf s nejbližším sousedním grafem
3. Pokračuj s krokem 2, dokud nejsou všechny podgrafy propojené

Zajímavým rysem tohoto řešení je, že patří do širší rodiny sítí, do kterých patří i Delaunay triangulace (Cheriton, Tarjan 1976, Arora 1996).

Některé SW (např. LEDA) nejdříve vypočítají Delaunay triangulaci v sadě bodů, pak vygenerují Delaunay diagram (pokud je potřebný – sada trojúhelníků) a aplikují algoritmus minimální kostry na tomto grafu tím, že mažou systematicky hrany, které nepatří do MST.



Obr. 12-9 Minimum Spanning Tree (čísla a barvy označují posloupnost tvorby hran při Borůvkově algoritmu) (Smith et al. 2018)

Tzv. žravá heuristika zahrnuje proces, kde se v každém stádiu vybírá lokální optimum, které může či nemusí vést ke globálnímu optimu. Tj. Žravá heuristika je lokálním prohledáváním (LS local search). Např. mějme sadu bodů nebo vertexů $\{V\}$ v rovině a chceme vytvořit síť hran $\{E\}$ takovou, aby byl každý bod spojen s každým bodem v síti a celková délka sítě byla minimální.

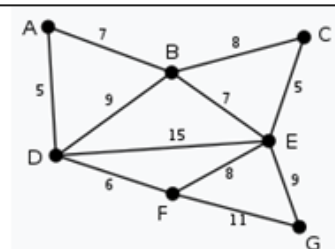
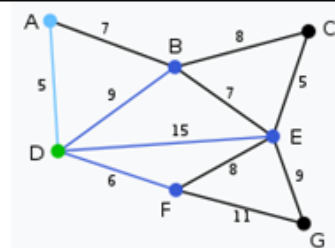
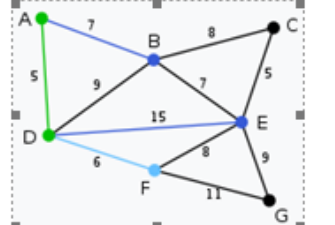

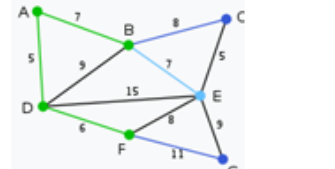
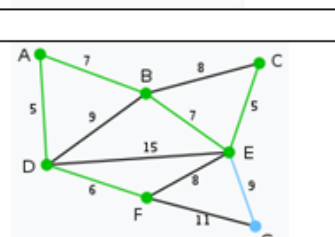
12.2.4 Jarníkuv-Primův algoritmus

Jarníkuv-Primův algoritmus (vynalezen českým matematikem Jarníkem 1930, znovuobjeven Robertem Primem 1957) patří mezi tzv. žravé heuristiky, je rychlý a je přesný v tom smyslu, že nalezené řešení je globálně optimální.

Popis algoritmu (<https://www.algoritmy.net/article/1393/Jarnik-Primuv-algoritmus>): Algoritmus vychází z libovolného uzlu a udržuje si seznam již objevených uzlů a jejich vzdáleností od propojené části grafu. V každém svém kroku připojí ten z uzlů, mezi nímž a propojenou částí grafu je hrana nejmenší délky a označí sousedy nově připojeného uzlu za objevené, případně zkrátí vzdálenosti od již známých uzlů, pokud byla nalezena výhodnější hrana. Jakmile jsou propojeny všechny uzly, algoritmus končí.

Algoritmus lze matematicky popsat následovně:

1. Vyberte libovolný bod $\{x\}$ z V jako náhodný pro start. Definujte sadu $V^*=\{x\}$ a sadu hran $E^*=\{ \}$ tj. sada V^* je inicializována s jedním náhodným bodem a sada E^* je inicializována jako prázdná množina hran.
2. Najděte bod v v množině V , který není ve V^* a přitom je nejbližší k bodu u v množině V^* a přidejte ho do množiny V^* společně s přidáním hrany spojující v a u do E^* . Pokud je takových bodů 2 a více (ekvidistantní k V^*) potom vyberte 1 z nich náhodně. Tento krok zajišťuje, že v každé iteraci se přidá hrana s nejmenším hodnocením spojující bod ve V^* s bodem mimo V^* a vždy vznikne strom (souvislý graf).
3. Opakujte předchozí krok, dokud se $V^*=V$. Sada E^* pak obsahuje MST.

Graf	Popis	Dosud neviděn	sousedé	Dosavadní řešení
	vrchol D náhodně vybrán jako startovní vrchol	C, G	A, B, E, F	D
	Druhý vybraný vrchol je nejbližší k vrcholu D: A (5)	C, G	B, E, F	A, D
	Dalším vybraným vrcholem je nejbližší vrchol buď k D nebo k A. Cena hrany z D do B je 9 a z A do B je 7, do E je 15 a do F je 6. Cena poslední jmenované hrany je nejnižší, zvolíme tedy hranu z D do F.	C	B, E, G	A, D, F
	V tomto případě je nejkratší hrana z A do B.	žádný	C, E, G	A, D, F, B
	V tomto případě je nejkratší hrana z B do E. Další dvě hrany rušíme, protože je už nebudeme moci použít. Nechceme, aby vznikla kružnice.	žádný	C, G	A, D, F, B, E
	Zbývá nám už jenom vrchol G. Hrana do F váží 11 a do E 9. Vybíráme tedy hranu do E. Minimální kostra grafu je zelená, její váha je 39.	žádný	žádný	A, D, F, B, E, C, G

Obr. 12-10 Postup dle Jarníkova-Primova algoritmu
https://cs.wikipedia.org/wiki/Jarn%C3%ADk%C5%AFv_algoritmus)

12.3 Gabrielova síť

Přeloženo a upraveno z http://www.spatialanalysisonline.com/HTML/index.html?gabriel_network.htm (Smith et al. 2018).

Gabrielova síť (Gabriel, Sokal, 1969) se tvoří ze sady bodů (uzly grafu) postupným přidáváním spojnic párů bodů (hran), které splňují podmínku, že uvnitř vepsané kružnice těmto 2 bodům (černé kružnice v obr. 12-11, je to minimální kružnice, na jejímž obvodě leží 2 body) neleží žádný jiný bod (uzel). V obr. 12-11 zelená kružnice ukazuje pár bodů, který tuto podmínku nesplňuje, protože

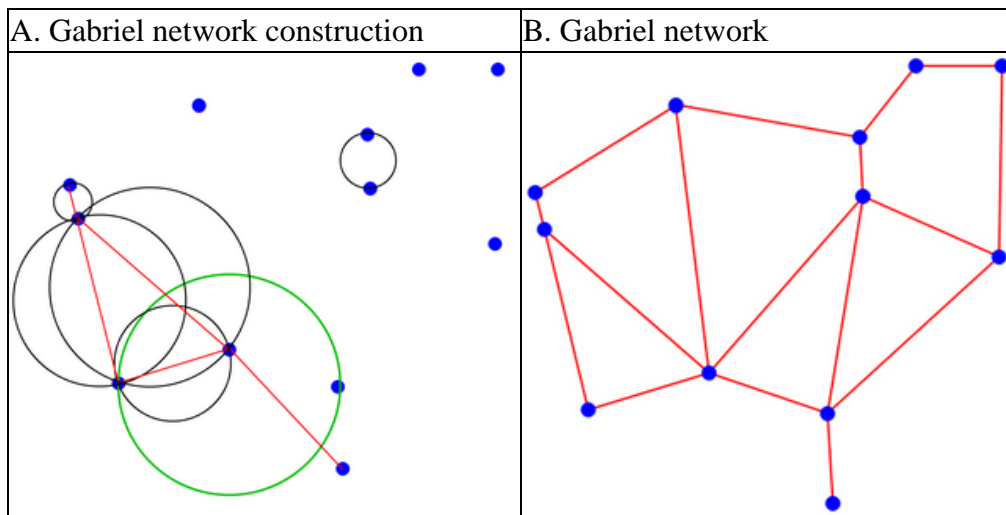
v zelené kružnici leží jiný bod a proto spojnice nebude zahrnuta do Gabrielovy sítě. Proces běží tak dlouho, dokud nejsou vyzkoušeny všechny páry bodů. Výsledek je na obr. 12-7B.

Gabrielova síť není stromem, obsahuje více hran než MST a proto poskytuje lepší konektivitu zvláště mezi blízkými body, které nejsou nejbližšími sousedy.

Gabrielova síť byla zavedena jako jednotný nástroj pro vytvoření takového spojení mezi body, aby žádný jiný bod neležel „mezi“ spojenými body. Tato síť má řadu aplikací, významné jsou např. v genetických studiích.

V každém případě je Gabrielova síť vhodnou formou vyjádření konektivity.

Variantou je rozšíření o váhy hran, pak se používá např. pro určení matice prostorových vah v autokorelačních analýzách.

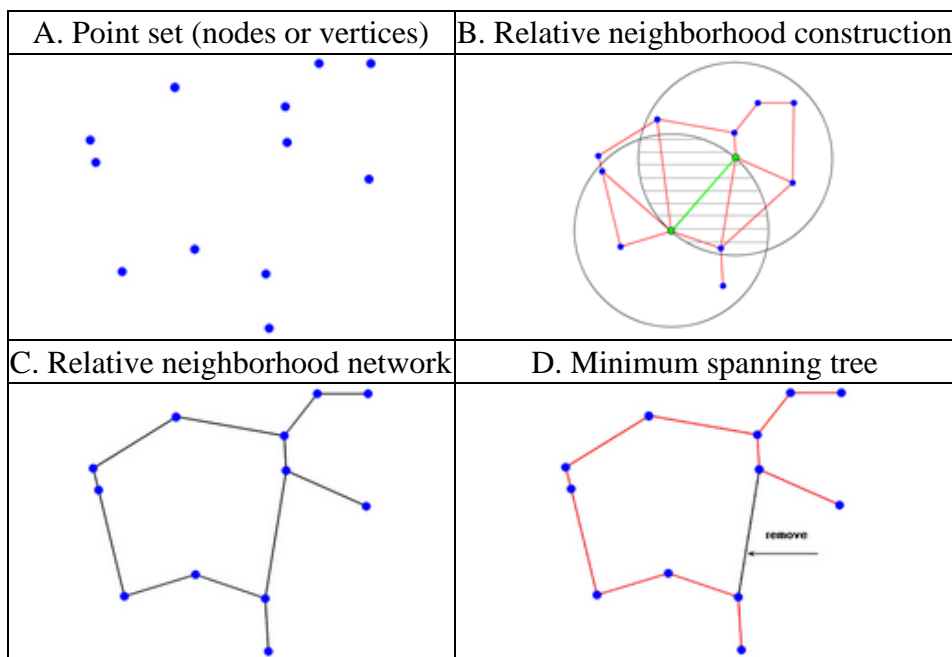


Obr. 12-11 Konstrukce Gabrielovy sítě (Smith et al. 2018)

Z Gabrielovy sítě lze odvodit MST následovně (Smith et al. 2018):

- (i) Vytvořte počáteční podmnožinu Gabrielovy sítě tak, že se vypustí hrany, u kterých se nachází nějaký jiný bod (uzel) v průniku kruhů s poloměrem rovným vzdálenosti mezi uzly umístěných v obou uzlech hrany (Obr. 12-8B). Výsledná síť se označuje jako Relativní sousedská síť Relative Neighborhood Network (obr 12-8C). Implementace je např. v Manifold GIS nebo PASSaGE.
- (ii) Odstraňte nejdelší hranu v relativní síti takovou, která neporuší celkovou konektivitu sítě
- (iii) Opakujte krok 2., dokud je možná nějaká redukce celkové délky (viz obr. 12-8D, kde je šipkou označena poslední odstraňovaná hrana).

Tímto postupem tvoří MST Manifold GIS.



Obr. 12-12 Relativní sousedská síť a příbuzné konstrukce (Smith et al. 2018)

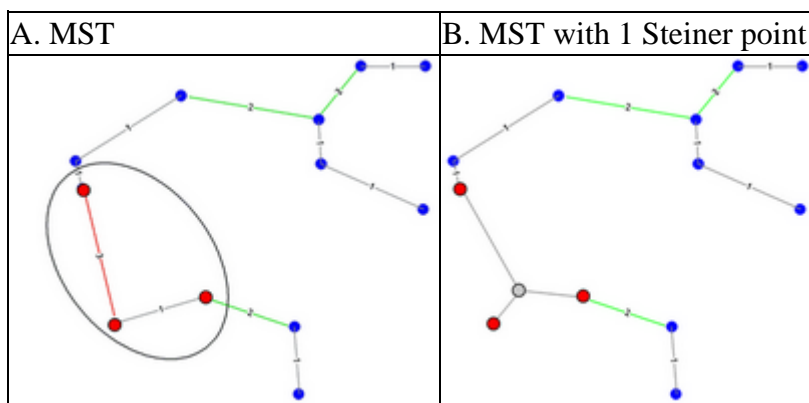
12.4 Steinerův strom

Přeloženo a upraveno z http://www.spatialanalysisonline.com/HTML/index.html?steiner_trees.htm (Smith et al. 2018).

Steinerův strom umožňuje díky vložení nových bodů v mezilehlé poloze zkrátit celkovou délku MST. Přidání nových mezilehlých bodů zredukuje délku celé sítě faktorem až do $\sqrt{3}/2$ pro 2D metriku nebo $2/3$ pro 1D metriku.

Např. jakékoliv 3 sousední body mohou být propojeny prostřednictvím středového mezilehlého (Steinerova) bodu, který redukuje jejich MST, pokud je úhel mezi 2 kroky v lokálním MST menší než 120 stupňů (obr. 12-13A) a uzly jsou nevážené. Optimální poloha takového bodu je taková, že každá hrana z nového bodu do 3 uzlů leží pod úhlem 120 st. od dalších dvou – jinými slovy jsou rovnoměrně rozmístěny (obr. 12-13B).

Ačkoliv se MST může takto systematicky vylepšovat, nemusí to nutně vést k minimální délce celého Steinerova stromu (tedy k nalezení globálního optima). Pomůže algoritmus, který zkouší více možností. Např. pokud vezmeme současně 4 body pro řešení (namísto 3), můžeme najít jako optimální řešení se 2 doplněnými vzájemně propojenými body. V nejobecnějším případě s $m \leq n-2$ Steinerovy body a n uzly je možný velký počet alternativních topologií. Např. pro $n=7$ jich je více než 60000. Existují efektivní aproximativní algoritmické řešení, i když ne v současných programech pro GIS (Robins, Zelikovsky 2000).



Obr. 12-13 Konstrukce Steinerovy sítě (Smith et al. 2018)

Všimněte si, že tyto sítě a procedury řešení předpokládají, že směr toku v síti není relevantní a že každý uzel má stejnou váhu. Pokud má každý uzel (bod) jinou váhu (např. počet lůžek v nemocnici, poptávka po určitém zboží, váha materiálu pro určité manipulační operace), musí se řešení změnit. Často je požadováno důležité zobecnění řešení pro p požadovaných lokalit (např. sklady) pro obsluhu požadavků v n uzlech (např. obchody). V tom případě jde o p -mediánový problém.

12.5 Eulerova cesta a Eulerova kružnice

Připomeňme, že Eulerova cesta je cesta v grafu, ve které je zařazena každá hrana grafu právě jednou. Jde tedy o analogii Hamiltonovy kružnice, problematika uzlů je však nahrazena hranami, v praxi označované jako „jednotažky“ či „cesta kropicího vozu“ Veverka (1989). Mohou být uzavřené (kružnice) nebo otevřené. Nejdříve se kontroluje pomocí stupňů uzlů řešitelnost úlohy; následná algoritmizace je již jednoduchá, protože jde často jen o kombinatorickou úlohu.

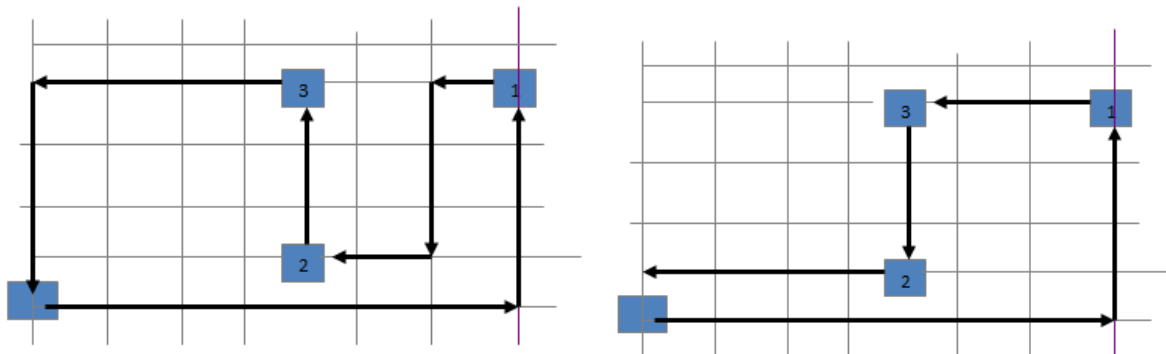
V případě **Eulerovy kružnice** pro orientovaný graf musí platit, že počet vstupujících a vystupujících hran z uzlu je stejný, v případě neorientovaného grafu pak musí být stupeň každého uzlu sudé číslo. Kružnice pak může začínat a končit v libovolném uzlu a jde prakticky jen o kombinatorickou úlohu. V případě **Eulerovy cesty** (otevřené, tj. nejde o kružnici) platí stejné podmínky, ale ne pro všechny uzly. V případě orientovaného grafu musí existovat počáteční uzel, kde je stupeň vystupujících hran o 1 větší než počet vstupujících hran, a současně existovat koncový uzel, kde je stupeň vystupujících hran o 1 menší než počet vstupujících hran. V případě neorientovaného grafu musí platit, že počáteční a koncový uzel má lichý stupeň uzlu a ostatní uzly sudý stupeň uzlu.

12.6 Úloha obchodního cestujícího

Úloha obchodního cestujícího (*travel salesman problem*, TSP) hledá nejkratší cestu, při které přitom se navštíví všechny požadované zastávky (tedy jde o jistou podmnožinu Hamiltonových kružnic), přitom start je totožný s cílem. Název koresponduje s představou obchodního cestujícího, který ráno opustí ubytování, objedná své místní zákazníky a večer se zase vrátí na ubytování.

Úloha obchodního cestujícího má řadu aplikací: obchodník navštěvující zákazníky, svoz odpadu z vybraných zařízení, rozvoz zboží do obchodů, patrolování bezpečnostní služby pro kontrolovaná místa, apod. Existuje ale i řada negeografických aplikací od návrhu čipů až po analýzy DNA sekvencí. Vysvětlení významu specifického řešení úlohy TSP:

Pokud zadáte start a cíl stejný, přidáte 3 povinné zastávky a spustíte algoritmus nejkratší cesty, nedostanete ideální výsledek (obr. 12-14 vlevo). Postup po nejkratší cestě k místu 1 -> 2 -> 3 a pak zpět domů nepředstavuje nejlepší řešení. Potřebujeme celkově nejlepší průjezd grafem a to řeší TSP.



Obr. 12-14 Řešení Hamiltonovskou kružnicí vlevo a úlohou obchodního cestujícího vpravo (celkově kratší cesta).

Většina geografických případů používá poměrně malý počet lokalit, které se mají navštívit (obchody, města apod.), ale mají řadu variant tohoto problému, protože vyžadují různé věci (např. řídit více vozidel o různých kapacitách nebo s definovanými podmnožinami obchodů), což zvyšuje zásadním způsobem komplexitu řešení. Čistě TSP problém (založený na sadě bodů bez předem definované sítě) se vlastně v GIS neimplementuje.

Formální vyjádření základního TSP je (Smith et al. 2018):

1:

$$\min \left\{ \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \right\}, i \neq j$$

Okrajové podmínky:

2:

$$\sum_{i=1, i \neq j}^n x_{ij} = 1, j = 1..n$$

3:

$$\sum_{j=1, j \neq i}^n x_{ij} = 1, i = 1..n$$

4:

$$x_{ij} \in \{0,1\}$$

kde c_{ij} je cena cesty z i do j (např. cenou je vážená vzdálenost), a $x_{ij}=1$ pokud existuje přímá hrana mezi i a j na cestě, jinak 0. n je počet lokalit na cestě, kde typicky $i=1$ je startovním bodem (např. depo) a $i=2,3,\dots,n$ jsou místa, která mají být navštívena (např. zákazníci).

Jednoduchou heuristikou je metoda nejbližšího souseda (pef.czu.cz/~houska/EMM_KS/Materialy/Prednasky/Konzultace_II.ppt):

1. Stanoví se výchozí místo pro tvorbu okruhu.
2. Přejde se k místu, které je nejbližší místu aktuálnímu (nesmí se do výchozího ani tam, kde už jsme byli).
3. Postup se opakuje tak dlouho, dokud se nevrátíme do výchozího místa.
4. Provéřit všechna místa jako výchozí.

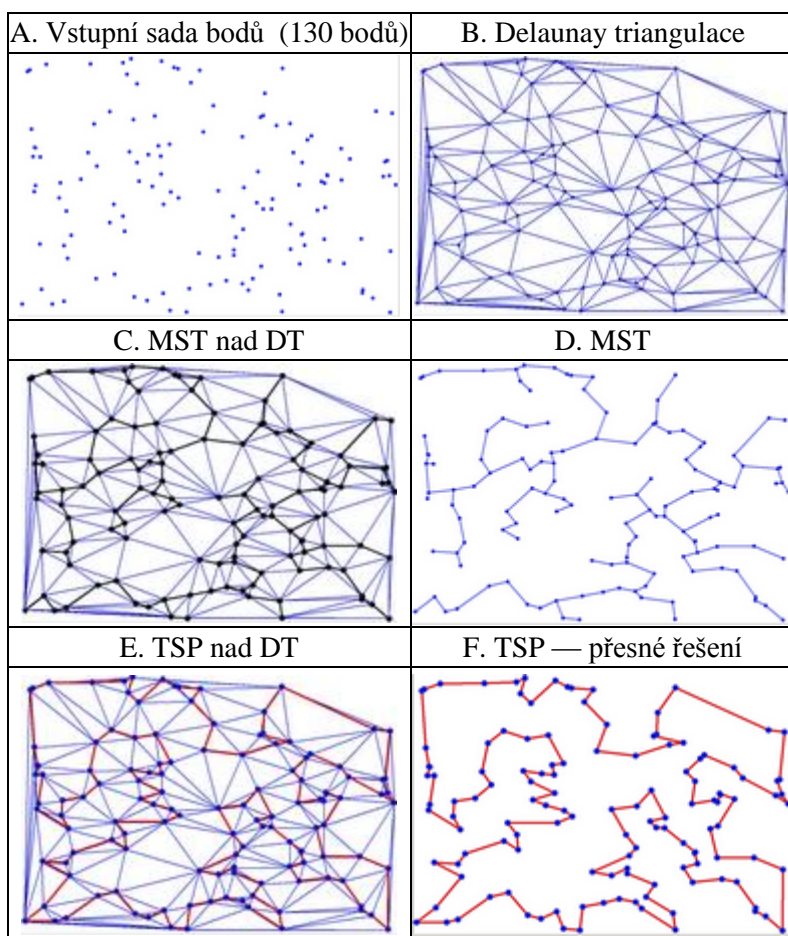
Také přesné algoritmy existují a některé z nich jsou rychlé. Např. SW Concorde, používá proceduru založenou na lineárním programování a technice řezání rovinami tak, aby dostal přesné řešení pro relativně velké problémy (mnoho tisíc vertexů). Tento kód je jeden z nejlepších dostupných. Jen pozor

na problém zaokrouhlování, který existuje při práci s desetinnými souřadnicemi – je doporučeno předem vynásobit data násobky 10.

Existuje těsná **vazba mezi Delaunay triangulací, generováním MST a řešením rovinných TSP**.

Protože každá TSP cesta navštíví každou lokalitu (uzel) právě jednou, pokud z ní smažete 1 hranu, dostanete spanning tree (kostru grafu). Tento strom musí být nejméně tak velký jako MST a typicky je větší (horní hranice pro symetrický rovinný graf je 1.5x násobek délky MST). Množství možných cest t v neorientovaném grafu z n uzlů je $t=(n-1)!/2$. Počet extrémně roste s počtem uzlů a realisticky nemůžou být všechny cesty prověřeny. Např. pro $n=10$ je $t=181440$. Výpočetní náročnost je $O(n!)$.

Prohlédněte si obr. 12-15. Část A ukazuje zdrojovou bodovou sadu, B Delaunay triangulaci. Celková délka hran v triangulaci je 30157 jednotek. Obr. 12-15C ukazuje MST vytvořenou nad Delaunay triangulací. MST se skládá ze 129 hran s celkovou délkou 5166 jednotek. Obr. 12-15D ukazuje pouze výslednou MST. Obr. 12-15E ukazuje TSP vytvořenou nad stejnou Delaunay triangulací a Obr. 12-151F přesné TSP řešení získané z lineárního programování a řezání rovinami implementované v SW Concorde. Celkový počet hran je 130 a celková délka hran je 6110 jednotek.

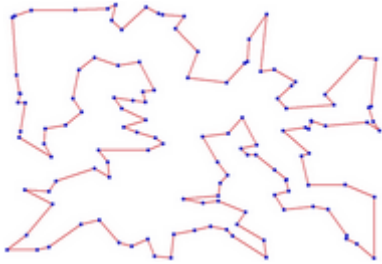


Obr. 12-15 MST, TSP, Delaunay triangulace a jejich příbuznost (přeloženo z Smith et al., 2018)

Řešení mnoha TSP úloh může využít jisté atributy řešení, které mohou být použity při vývoji algoritmu. Např. podmínka, že TSP pro bodovou sadu S musí ležet zcela uvnitř konvexní obálky množiny a jakýkoliv vertex umístěný na této obálce musí být procházen v jednotném směru, aby se dodržela posloupnost ve směru hodin nebo proti směru hodinových ručiček. Evidentně TSP nesmí sám sebe křížit. Heuristická řešení jako **Lin-Kernighan** nebo **LK-heuristic** odstraňuje každé nalezené sebekřížení pomocí symetrického přeuspořádání sekvence nebo přehození pořadí navštívených uzlů. Výsledkem je velmi rychlé aproximativní řešení, zajišťující přesné nebo skoro přesné řešení pro mnoho úloh.

Řešení využívá následující výměnnou heuristiku. Je to jednoduchý zlepšovací algoritmus, který se aplikuje na existující symetrickou cestu ze všech lokalit. Procedura jednoduše vezme náhodně 2 hrany (i,j) a (k,l) a nahradí je za (i,k) a (j,l) nebo (i,l) a (j,k) . Existuje několik zlepšení v tomto schématu, které mohou podstatně zlepšit jeho výkonnost. Zahrnují kontroly, že upravená trasa neobsahuje žádné křížení, protože by to nikdy nebylo nejkratší konfigurací a pro výměnu se vybírá jen ze seznamu kandidátů přehazování, které poskytují největší užitek. Záměna ze 3 výběrů je zásadě stejná jako ze 2, ale současně řeší 3 hrany. To vede k efektivnějšímu řešení a je zásadní pro asymetrické problémy, avšak má vysokou výpočetní náročnost (Smith et al., 2018).

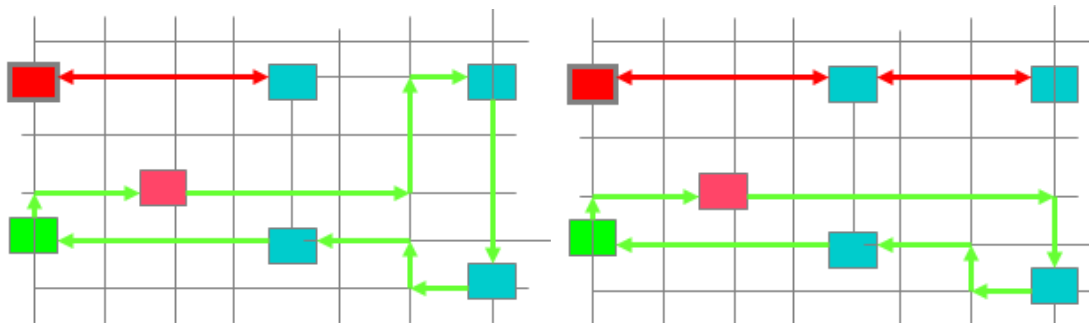
Obr. 12-16A ukazuje řešení pomocí LK heuristiky, které je generováno téměř okamžitě. Všimněte si, že v pravém horním rohu se řešení mírně liší od exaktního řešení na Obr. 12-15F. Toto řešení má také 130 hran, ale trochu větší délku 6124 jednotek.



Obr. 12-16 Lin-Kernighan heuristické řešení TSP úlohy z předchozího obrázku (Smith et al., 2018)

Výborný úvod do TSP a jeho řešení poskytuje anglická Wikipedie (en.wikipedia.org/wiki/Travelling_salesman_problem).

Rozšíření řešení vyžaduje optimalizace pro více obchodních cestujících. Na obr. 12-17 řešení nejlevnějšího průjezdu pro 2 obchodní cestující a 5 navštěvovaných míst. Zřejmě však řešení založené na nejmenších nákladech zde není dostatečné, protože 1.obchodní cestující pracuje 4x více než druhý.



Obr. 12-17 Optimalizace rozdělení TSP pro 2 obchodní cestující

Nerovnoměrná pracovní zátěž může vést k tomu, že jedna osádka pracuje krátce a vrátí se zbytečně brzo, zatímco jiná pracuje přesčas. To může vést k zbytečnému výdaji času a peněz. Proto je významné nejenom hledat optimální průjezd, ale zavést také nová omezení – zde C_w (pracovní doba). Praktická řešení se realizují pomocí optimalizačních metod pro okružní trasu, např. řešitel v Excelu.

Další rozšíření představuje možnost přidání více skladů a více obchodních cestujících do řešení. Takové funkce už běžně nenajdete v GIS SW.

Algoritmus logického rozhodovacího stromu pro řešení úlohy obchodního cestujícího lze najít ve Veverka (1989).

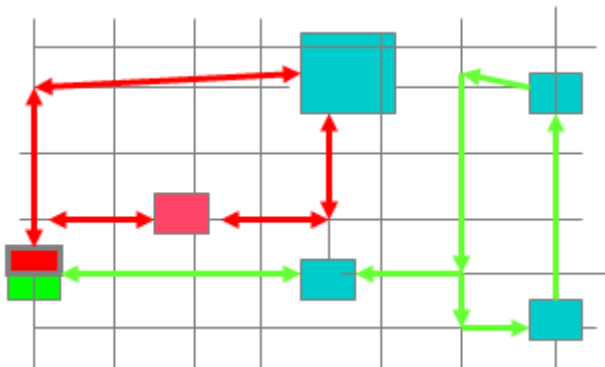
Algoritmus maximálních úspor (*saving algorithm*) pro řešení úlohy obchodního cestujícího lze najít v Píšek, Hanuš (1992).

12.6.1 Trasování vozidel s kapacitou (Capacitated vehicle routing)

Problém trasování vozidel se označuje jako Vehicle Routing Problem (VRP) nebo Capacitated VRP (CVRP), pokud je součástí formulace problému také kapacita vozidel.

V řadě případů je omezená kapacita dopravního prostředku základním požadavkem pro řešení při trasování. Ať už rozvážíte pizzu, pračky nebo květiny, máte k dispozici jen omezený prostor v autě. Podobně pokud sbíráte smetí, musíte pamatovat na vyprázdnění vozu.

Na obr. 12-18 je vyznačena poloha místa s většími požadavky, které ale musíte uspokojit **postupně podle kapacity vozidla**.



Obr. 12-18 Řešení pro různě velké požadavky zákazníků

Jednotlivé trasy mohou být získány pomocí rozdělení původní jedné optimální trasy do diskrétních částí (**route first-cluster second**) nebo rozdělením původní sady bodů do shluků a výpočtem optimální nebo skoro optimální trasy pro každou podmnožinu (**cluster first-route second**). Nelze garantovat, že výsledné trasy budou globálně optimální, proto může být potřebné opakovat rozdělení alternativně, což může vést k nalezení lepšího řešení. Taková procedura je výpočetně extrémně náročná a proto je obecně preferováno použití algoritmů jako LK-heuristika.

Dva základní okružní TSP problémy vytváří řadu praktických problémů:

- Startují jednotlivé trasy ve stejném místě? (např. sklad, depo autobusů)?
- Co když se poptávka liší v jednotlivých cílech?
- Kapacita jednotlivých vozidel může být omezená a různá – jaký mix bude optimální?
- Co když má být doručení provedeno v určitém časovém okně?

Např. časová okna, kdy zákazník vyžaduje přesnou informaci o tom, kdy mu bude zboží doručeno a chce znát relativně úzký časový rámeček. Pak potřebujeme nalézt nejlepší cestu (průjezd), avšak za podmínky být na určitém místě v určitý čas (případně nebýt). Dobrým příkladem druhé situace jsou třeba fekální vozy, které by neměly zajíždět k restauracím v době oběda a večere.

Tyto otázky vedou k řadě variant problému, které se řeší pomocí určitých metaheuristik. Např. je efektivní tabu prohledávání, zejména pro časová okna (Gendreau et al., 2002). Jsou implementovány v různých SW balících. Většina z nich poskytuje optimální řešení pro spíše menší velikost problému, která mohou být spočítána rozumnou rychlostí a získáváme suboptimální řešení, které je ale mnohem lepší než libovolný nebo uživatelem definovaný plán. Jednotlivé programy se liší ve svých přístupech a často poskytují více než jedno řešení, zvláště pokud se aplikují reálná omezení a komerční kritéria. To naopak vyžaduje pečlivou formulaci vhodného modelu s návrhem pomocí standardních modelovacích struktur a nástrojů a jejich implementaci pomocí vysokoúrovňového skriptovacího jazyka nebo generátoru kódů.

Příklad:

Pro ilustraci tohoto přístupu je možné použít příklad z optimalizačního SW Xpress-MP a jeho skriptovacího jazyka Mosel. Problémem je zde doručování tekutých chemikálií prostřednictvím tankeru z rafinérie do 6 zákaznických míst. Požadavky (DEM) pro jednotlivá místa jsou známy (mohou být fixní nebo se měnit podle časového plánu). Suma požadavků je 59000 litrů. Nejdříve je vytvořena symetrická matice nejkratších vzdáleností mezi všemi lokalitami (provádí se externě, protože v tomto SW není vhodná mapová podpora). Vzdálenosti kolísají mezi 12 km až 180 km. Kapacita (CAP) tankeru je fixní a je to 36000 litrů a cílem je minimalizovat celkovou vzdálenost při doručování zákazníkům. Všimněte si, že kapacita tankeru nestačí pro obsluhu všech zákazníků jednou cestou, takže se musí aplikovat v modelu kapacitní omezení (rovnice 1 až 4 výše). Cílová funkce (objective function) je dána rovnicí 1, rozsah i a j je dán rovnicí 2 a 3, kde se specifikuje $2 \dots n$, protože číslo 1 je pro depo. Musíme ale definovat dodatečný výraz pro zákazníky požadované množství a kapacitu tankeru. Označme požadavek zákazníka i na kapaliny DEM_i a celkové množství doručené kapaliny během cesty při zastávkách až po zákazníka i jako q_i . Pokud je při dané cestě zákazník i hned na jejím začátku, pak se $DEM_i = q_i$. To zapíšeme jako podmínku:

5:

$$q_i \leq CAP + (DEM_i - CAP)x_{1i}, \forall i \in customers$$

Za předpokladu, že j je na cestě až za i , musí být q_i větší než množství doručené po cestě až do i plus množství doručované do j . Toto omezení se zapíše jako:

6:

$$q_j \leq q_i + DEM_j - CAP + CAP * x_{ij} + (CAP - DEM_j - DEM_i)x_{ji}, \forall i, j \in customers, i \neq j$$

I když to vypadá komplikovaně, zahrnuje to různé situace, kdy i se nerovná 1 a j může a nemusí následovat nebo předcházet i . Jediné co zbývá je doplnit základní kvantitativní a kapacitní omezení:

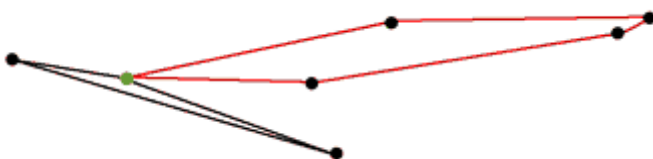
7:

$$q_i \leq CAP, \forall i \in customers$$

8:

$$q_i \leq DEM_i, \forall i \in customers$$

Skriptovací jazyk pro Xpress-MP akceptuje vstupy v podobě skoro totožné rovnicím 1 až 8, společně s daty a vzdálenostní maticí, následované jednoduchým příkazem pro minimalizaci rovnice 1. Výsledek v tomto příkladu je řešení, které navrhuje 2 trasy: 1 doručuje 22000 litrů pro 2 zákazníky, a druhá doručuje 37000 litrů pro zbývající 4 zákazníky. Celková délka tras je těsně pod 500 km (obr. 12-19).



Obr. 12-19 Dvě cesty tankeru k řešení TSP s omezenou kapacitou (zeleně rafinérie, černě zákazníci) (Smith et al., 2018)

Doplnění dalších požadavků

Např. je požadován příjezd z jedné strany ulice. Důvodem může být třeba autobus nebo stěhovací auto. Zpravidla je toto možné řešit v SW (např. místo oboustranné silnice zavést 2 jednosměrky).

12.7 Problém optimalizace procházení celou sítí (ARP)

Problém optimalizace procházení celou sítí (*Arc routing problem* ARP) řeší cestu, která kompletně projde každou hranu grafu (typicky uliční sítě), obecně v obou směrech, a má nejmenší náklady (vzdálenosti, čas) při respektování daných omezení. (např. náklady na otáčení). Tato úloha se používá pro čištění ulic, pluhování sněhu, doručování pošty (úloha čínského pošťáka), sběr odpadků apod. Verze úlohy s definovanými kapacitami se označuje jako CARP (Smith et al, 2018). Hledáme řešení pro neorientovanou síť s požadavkem umístěným v každé ulici, který musí být uspokojen 1 nebo více vozy, každý o kapacitě W a nalezené řešení uspokojí všechny požadavky při minimální celkové ceně. Úloha se někdy označuje jako Street Routing Problem nebo úloha čínského pošťáka. Ta je typicky popisována jako požadavek navštívit všechny domy v bloku nebo na ulici (pošta, elektrina, plyn apod.). Možná řešení návštěvy jednotlivých domů na ulici ukazuje obr. 12-20. Praktická řešení využívají různé heuristiky a používá se specializovaný SW.



Obr. 12-20 Způsob obsluhy odběratelů SRP (Matis, 2008)

13 Metody hodnocení dopravní dostupnosti

Jedním z nástrojů zkoumání prostorové interakce mezi zdroji a cíli a popisování prostorových vazeb je i průzkum a popis dopravní dostupnosti.

Pojem dostupnosti geografických objektů byl rozpracován již v 50. a 60. letech. K popisu dostupnosti se používají různé míry dostupnosti, významně se uplatňuje teorie grafů.

Dostupnost je chápána jako určitý ukazatel, který na základě přístupnosti nebo dosažitelnosti daného objektu k ostatním objektům určuje jeho postavení v rámci dané prostorové struktury (Kusendová 1996). Někteří autoři používají pojem akcesibilita (Maryáš et al. 1995).

Podle jedné z nejkompexnějších definic dopravní dostupnost vyjadřuje úroveň, ve které území a dopravní systém umožňuje lidem (jednotlivci či skupině) či zboží dosáhnout určité aktivity nebo místa s využitím dopravních prostředků či jejich kombinací (Geurs, Ritsema van Eck, 2001).

Míry dostupnosti dovolují popisovat dostupnost geografických objektů a uplatňují se především v socioekonomické geografii.

Podle Curl et al. (2011) a dalších autorů je možné míry dostupnosti zařadit do následujících skupin ukazatelů (Horák et al., 2019):

1. ukazatele hodnotící infrastrukturu – tyto ukazatele nacházejí uplatnění především v dopravním plánování, analyzují výkon nebo úroveň služeb dopravní infrastruktury, např. cestovní čas do cílového místa, míra kongescí, průměrná rychlost, cena a kapacita přepravy nebo dostupnost zastávek veřejné dopravy;
2. kumulativní ukazatele (nebo také ukazatele využívající metodu izolinií, prahových hodnot), které popisují dostupnost lokality a cílového místa (nebo několika cílových míst). Vždy je definovaná jedna či několik prahových hodnot (např. podle času, vzdálenosti). Jednoduchost těchto ukazatelů je řadí k nejčastěji využívaným (především u geografů), ale právě jednoduchost je rovněž jejich nevýhodou, jelikož se nehodnotí prostorová distribuce cílů uvnitř těchto prahových hodnot. Typicky představují vymezení dostupného okolí z analyzované lokality, např. do 30 minut. V tomto okolí se hledají požadované typy cílů, např. zaměstnavatelů do 30 minut, resp. 20 km od místa bydliště nezaměstnaného (např. kumulativní dostupnost). Pokročilejší ukazatele využívají definovanou kapacitu aktivit, např. volná pracovní místa. Často bývá dojíždka hodnocena komplexněji jako door-to-door (včetně docházky ode a ke dveřím na zastávku či k zaparkovanému autu);
3. ukazatele založené na gravitačních modelech (nebo také Hansenovy ukazatele, ukazatele příležitostí, ukazatele potenciálu), které se rovněž zaměřují na popis lokality, a navíc se snaží eliminovat nedostatek prahových vzdáleností, kde mají všechny potenciální cíle stejnou váhu. Využívají k tomu spojitého postupného poklesu váhy cílů s rostoucí cestovní vzdáleností (příp. časem, cenou apod.), tedy tzv. distance-decay funkce Pro jednotlivé lokality je možné rovněž vypočítat dopravní dostupnost pro více hraničních cestovních časů a vytvořit tak tzv. profil lokality (de Jong a Ritsema van Eck, 1996).
4. ukazatele hodnotící užitek, a to zejména ekonomický přínos pro jednotlivce nebo skupiny ze změn v dopravní dostupnosti způsobené například výstavbou nové komunikace nebo zavedením nové linky. Tyto ukazatele vychází z předpokladu, že cestující se chová racionálně a vybírá z nabízených alternativ tu s největším užitekem. Užitek však závisí na vlastnostech konkrétní osoby, vlastnostech dopravních spojení, jako jsou cestovní čas, finanční náklady, komfort nebo na vlastnostech cíle. Šance, že se člověk rozhodne určitým způsobem, je tak vázána na komplexní atraktivnosti dané volby při porovnání s ostatními možnostmi. Typickým příkladem těchto ukazatelů je např. změna finančních nákladů pro jednotlivce či skupinu při změně dostupnosti. Nevýhoda těchto ukazatelů spočívá v komplikované interpretaci výsledků.
5. ukazatele zaměřené na aktivity konkrétní osoby, které jsou založené na časovém omezení a geografii času (Hägerstrand, 1970), někdy bývají nazývány rovněž ukazatele potenciální dostupnosti, které využívají data např. z cestovních deníků a definují dostupnost ve smyslu

dosažitelných příležitostí v definovaných časových oknech při vyhodnocení času potřebného k dosažení příležitosti a minimálního času potřebného k využití dané příležitosti v cíli. Ve výsledku mohou být zobrazeny dosažitelné lokality dle zadaných časových omezení. Příklady prvních prací využívající tyto ukazatele v kombinaci s GIS jsou Miller (1991), který s jejich využitím hodnotí výkon dopravního systému, nebo Kwan (1998, 2003), kde byly využity záznamy z 52 cestovních deníků a tři ukazatele hodnotící dopravní dostupnost. Hlavní výhodou těchto metrik je detailní měřítko, kdy se pracuje s individuálními údaji jednotlivců. Jak uvádějí Halden et al. (2005), detailnější informace o dopravním chování několika osob může být pro pochopení lepší než nekvalitní data za celou populaci. V tom však spočívá také největší nevýhoda. Získání těchto dat je velice náročné a často tak bývá studována jen limitovaná oblast. Mezi novější práce pak je možné zařadit práci Neutens et al. (2008) nebo Lee, Kwan (2011).

Významným parametrem je volba použité metriky, tj. čím se měří vzdálenosti (obecně chápané jako míra separace) mezi objekty. K základní metrikám patří:

- 1) Metrické - používají vzdálenosti měřené jako přímé (vzdušné, euklidovské), Manhattanové a nebo cestní (po komunikaci)
- 2) Časové – využívá čas pro měření separace, např. dobu cestování mezi místy
- 3) Topologické – počet hran, počet přesezení apod.
- 4) Cenové (nákladové) - cena dopravy, náklady dopravy apod.

Dostupnost lze dělit i podle jiných hledisek, např. podle dopravního prostředku, pro který je zjišťován. Pak bychom dělili dostupnost na určenou podle provozně organizačního hlediska pro hromadnou a individuální dopravu, podle provozně technického hlediska na veřejnou a neveřejnou dopravu. Ze všech kombinací má smysl sledovat především neveřejnou individuální dopravu a veřejnou hromadnou dopravu.

Hodnocení veřejné hromadné dopravy je poměrně komplikované. Zde často nestačí v praktických socioekonomických úlohách sledovat např. nejkratší dobu t_{ij}^{\min} cestování mezi 2 geografickými objekty (např. mezi 2 obcemi), ale spíše:

- dobu t_{ij}^T v čase T požadované přepravy (cestování do zaměstnání, do školy, na úřady, tedy všude, kde je stanoven požadovaný čas nástupu),
- počet spojení v určitý časový interval (frekvenční akcesibilita),
- počet přesezení (a s tím spojené zvýšení nepohodlí, riziko přerušení či zdržení spojení),
- komfort cestování (obsazení vozidel veřejné hromadné dopravy, jejich vybavenost) a použitelnost veřejné hromadné dopravy (bezbariérový přístup pro imobilní občany apod.).

K termínu „dostupnost“ má relativně blízko pojem dopravní **obslužnost**, která je vztahována k veřejné hromadné dopravě.

13.1 Skupina infrastrukturních ukazatelů

Nejjednoduššími infrastrukturní ukazateli jsou:

13.1.1 Dostupnost zastávek VHD

Typický ukazatel, který hodnotí geografickou charakteristiku dopravní sítě. Je to oblíbený ukazatel (např. Yigitcanlar et al., 2008; Ivan, 2010; Currie, 2010; Kraft a Blažek, 2012, El-Geneidy et al., 2014), nicméně Fransen (2015) upozorňuje, že nehodnotí, zda je možné se z těchto zastávek dostat do požadovaných cílových lokalit v rozumném cestovním čase a v požadovaný čas příjezdu. Navíc nižší dostupnost zastávek veřejné dopravy může být kompenzována vyšší dostupností požadovaných cílů v místě bydliště a tedy v docházkové vzdálenosti.

13.1.2 Počet spojů VHD

Počet spojů se týká výkonových parametrů dopravní sítě, přesněji spojuje dohromady parametry fyzické a výkonové. Tento ukazatel je velmi oblíbený pro jednoduchost získání dat (např. Křižan (2007), Michniak (2008), Seidenglanz (2010), Marada a Květoň (2010), Marada et al. (2010), Horňák a Pšenka (2013), Horňák et al. (2015), Tesla et al. (2015)). Bývá často hodnocen jako součást komplexnějších ukazatelů.

Problémy jsou spojeny s tím, že je to velmi dynamický faktor a liší se výrazně v průběhu dne, rovněž jak uvádí např. (Welch a Mishra, 2013) neposkytuje žádné informace o kvalitě služeb.

13.2 Skupina kumulativních ukazatelů

Následují příklady nejjedodušších kumulativních ukazatelů.

13.2.1 Míra přímé dostupnosti euklidovské

U této míry dostupnosti není potřebná konstrukce grafu, využívají se pouze euklidovské (vzdušné) vzdálenosti, takže ji lze snadno vypočítat ze souřadnic zkoumaných míst. Nejlepší dostupnost má místo s nejmenší hodnotou přímé euklidovské vzdálenosti, což odpovídá těžišti cílových objektů.

$$D_i^P = \sum_j d_{ij}^v$$

D_i^P	míra přímé dostupnosti v místě i
d_{ij}^v	euklidovská vzdálenost mezi místy i a j
j	index cíle

13.2.2 Míra cestní dostupnosti

Míra cestní dostupnosti používá výpočet vzdálenosti po trase přesunu, tedy vlastně délky cest v grafu.

Cestní vzdálenost se stanovuje zpravidla na základě určitého modelu dopravní sítě, jehož přesnost je závislá na měřítku a úrovni generalizace. Často se odvozuje v prostředí GIS pomocí síťových funkcí typu nejkratší cesta. Proto je výpočet nejkratší vzdálenosti mezi jednotlivými místy nutně zatížen jistou chybou. Proto je vhodnější používání označení „cestní vzdálenost“ na místo „skutečná vzdálenost“.

Nejlepší cestní dostupnost má místo s nejmenší hodnotou ukazatele:

$$D_i^C = \sum_j d_{ij}^c$$

D_i^C	míra cestní dostupnosti v místě i
d_{ij}^c	délka nejkratší cesty z místa i do j
j	index cíle

Při řešení nejkratší cesty se používají především techniky lineárního programování (viz hledání optimální cesty).

Jiné

Vedle základních údajů typu přímá vzdálenost a cestní vzdálenost se používají i další ukazatele typu rozvoj čáry (poměr mezi cestní a přímou vzdáleností) či koeficient okliky (o kolik % je cestní vzdálenost větší než přímá vzdálenost).

Teoreticky by bylo možné vyčlenit metody přímé sférické založené na použití sférické geometrie, avšak hodnocení dostupnosti velkých regionů, kde se již uplatní zakřivení Země, se prakticky neprovádí.

13.2.3 Časové míry dostupnosti

Do skupiny **časových měř** řadíme především **časovou dostupnost**. Vyjadřuje celkovou dobu cestování ze zkoumaného zdroje do všech cílů hvězdicovým způsobem. Nejlepší časovou dostupnost má potom uzel (místo) s nejmenší hodnotou časové dostupnosti.

$$D_i^t = \sum_j t_{ij}$$

D_i^t	míra časové dostupnosti v místě i
t_{ij}	doba nejkratšího přesunu z místa i do j
j	index cíle

Zde se analogicky k cestní dostupnosti sčítají cestovní časy mezi uzly i a j . Cestovní časy můžeme chápat jako časovou vzdálenost (uvažují se potom pouze doby samostatného nejrychlejšího přesunu) nebo jako časovou ztrátu. Ta má smysl v případě využívání veřejné hromadné dopravy, kdy do doby cestování zahrnujeme i dobu čekání na odjezd dopravního prostředku.

13.2.4 Přímá topologická dostupnost

Vyjadřuje celkový počet sousedních uzlů v grafu. Místo (uzel) s nejvyšším počtem sousedů má nejlepší přímou topologickou dostupnost.

$$D_i^U = \sum_j I_{ij}$$

D_i^U	míra přímé topologické dostupnosti v místě i
I_{ij}	indikátor sousedství uzlu j vzhledem k uzlu i (nabývá hodnoty 1 v případě existence sousedství, jinak 0, lze získat z matice sousednosti)
j	index cíle

13.2.5 Nepřímá topologická dostupnost

Vzdálenosti mezi uzly jsou vyjadřovány počtem hran na nejkratší cestě mezi nimi. Nejlepší nepřímou topologickou dostupnost bude mít uzel s nejmenší hodnotou ukazatele, podle teorie grafů se jedná o střed grafu, tedy o uzel s minimální excentricitou.

$$D_i^H = \sum_j d_{ij}^h$$

D_i^H	míra nepřímé topologické dostupnosti v místě i
d_{ij}^h	počet hran na nejkratší cestě mezi místy i a j
j	index cíle

Pokud každý z uzlů představuje konečnou stanici dopravního prostředku, můžeme porovnávat dostupnost uzlů z hlediska minimálního počtu přesedání potřebného k cestování do ostatních uzlů sítě.

13.2.6 Cenové míry dostupnosti

Cenové míry dostupnosti jsou založeny na ceně dopravy, v případě individuální dopravy na nákladech dopravy.

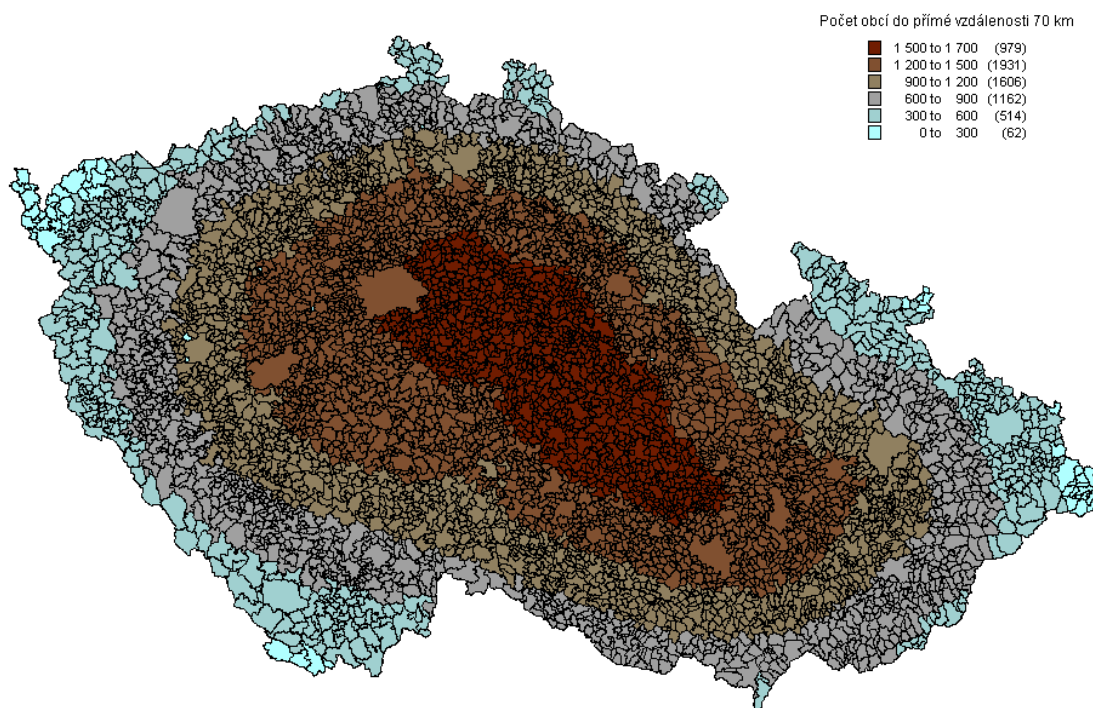
U veřejné hromadné dopravy se sleduje cena placená za přepravu mezi jednotlivými místy (zpravidla základní jízdné bez různých slev). V některých případech se vybírá dopravní prostředek, v jiných měřeních se povoluje přestupovat mezi prostředky. Více variant nabízí sledování individuální dopravy, kde vedle výběru dopravního prostředku se může sledovat jen spotřeba pohonné látky (přepočtená na cenu) nebo se může zahrnout i amortizace vozidla.

$$D_i^F = \sum_j c_{ij}$$

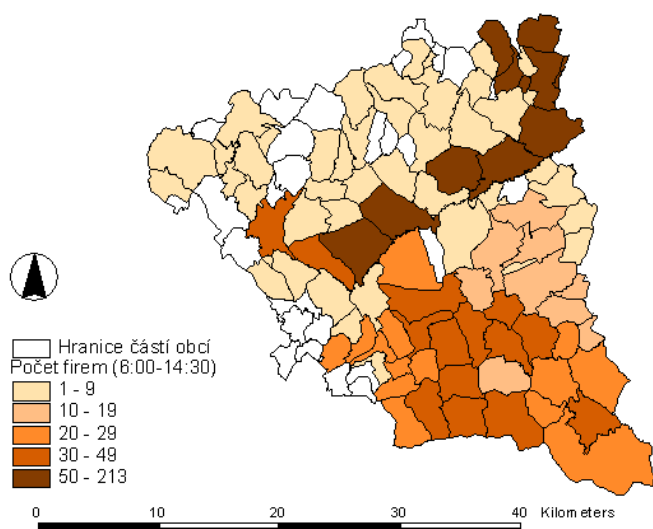
D_i^F	míra cenové dostupnosti v místě i
c_{ij}	cena nejlevnější přepravy z místa i do j
j	index cíle

13.2.7 Počet cílů

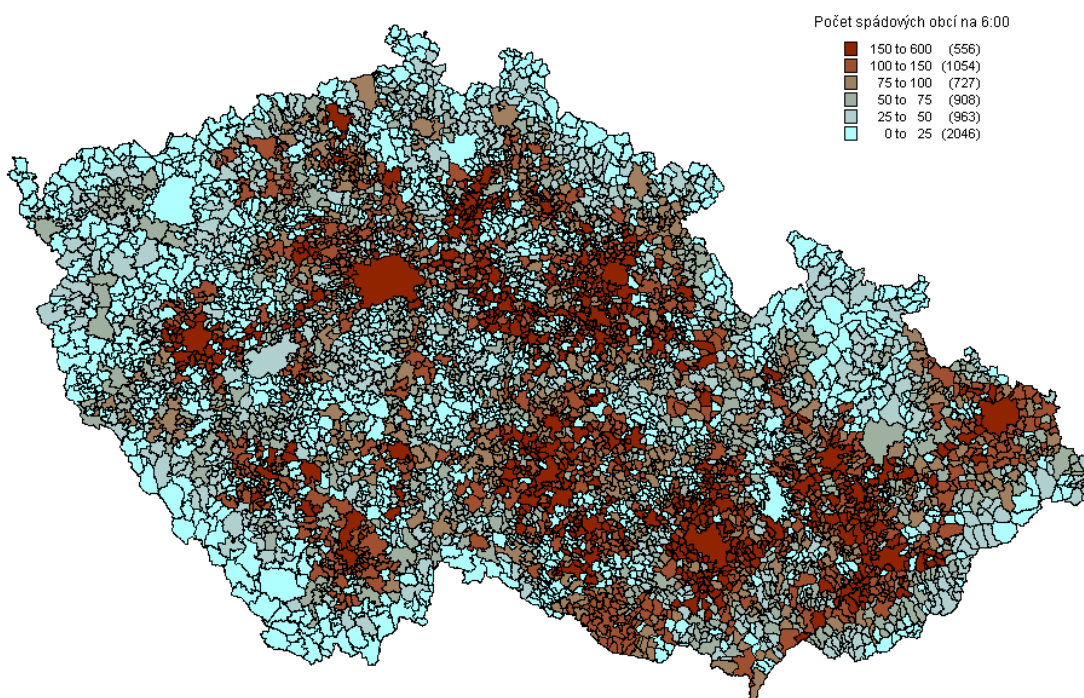
Inverzní úlohou k výše uvedeným je zjištění počtu cílů dostupných z daného místa za specifikovaných podmínek (limit času, vzdálenosti, počtu přesedání atd.). V posledních letech se jí zabývají v oblasti VHD např. Benenson et al. (2011), Farber et al. (2014), Fransen et al. (2015) a v Česku a na Slovensku například Horák (2006), Križan (2007), Ivan et al. (2013), Hornák et al. (2015), Vrabková et al. (2016). Příklady jsou uvedeny na následujících obrázcích.



Obr. 13-1 Počet obcí do přímé vzdálenosti 70 km



Obr. 13-2 Počet velkých firem dostupných z částí obcí v okrese Nový Jičín v roce 2000 (práce 6:00-14:30)



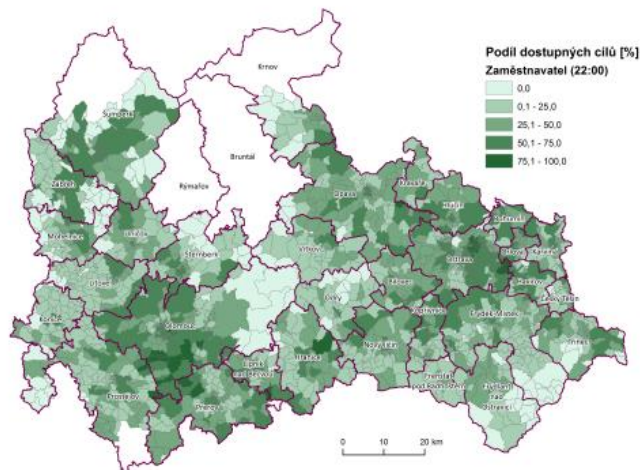
Obr. 13-3 Počet spádových obcí při dojezdu veřejnou dopravou na 6:00

Velmi vhodné je také provádět relativizace vypočteného výsledku.

Např. Ivan et al. (2013) a Horák (2006) využívali ukazatel založený na počtu teoreticky dostupných cílů reálně existujícím dopravním spojením VHD. Hodnotit absolutní počty dostupných cílů není možné z důvodů hraničního efektu, různé velikosti a vybavenosti území. Konkrétně je využíván ukazatel podíl dostupných cílů RA , který je definován jako podíl počtu dostupných cílů a počtu všech cílů v regionu

$$RA_{h,i} = \frac{NDA_{h,i}}{NDT_{h,i}} * 100$$

kde NDA definuje počet dostupných cílů, NDT je počet cílů regionu, h je hodina dojezdu a i je index analyzovaného počátku. Podíl dostupných cílů nabývá hodnot od 0 do 100 %, kdy hodnota 100 definuje místa, ze kterých existuje vhodné dopravní spojení do všech okolních cílů v regionu. Jedná se o dokonalý počátek z hlediska vyjížďkových možností do okolí. Pokud se bude hodina h měnit a postupně pokrývat celý den či většinu dne, je možné vytvářet také dopravní profil lokality.



Obr. 13-4 Podíl dostupných zaměstnavatelů na Olomoucku a Ostravsku na 22:00 (Horák et al., 2019)

Všechny podobné ukazatele mohou být definovány ve dvou různých přístupech (Horák et al. 2019). Prvním je z pohledu rezidenta, kdy se hodnotí počet cílů, kam může rezident dojet. Druhým přístupem je hodnocení z pohledu cíle, kdy je vymezováno spádové území, odkud je dané zařízení dostupné. Toto odpovídá dělení přístupů k měření dostupnosti dle Geurs, van Wee (2004) a používá ho také Benenson et al. (2011).

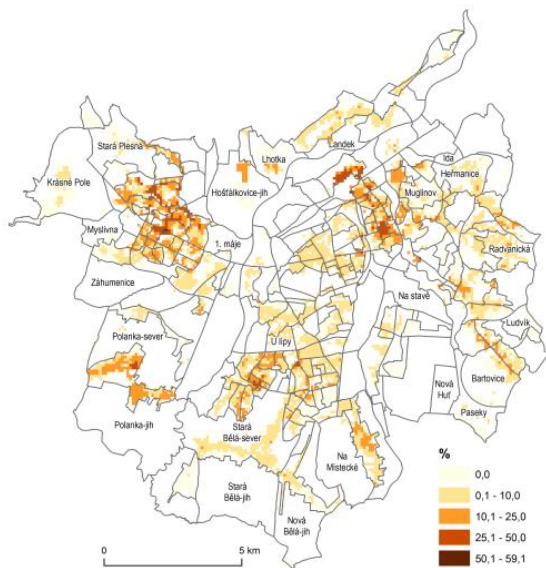
Podobným příkladem vhodné relativizace je posoudit dostupnost pomocí 1 prostředku (či při 1 nastavení limitů) vůči benchmarku, např. výsledky VHD vůči výsledkům IAD. Benenson et al. (2011) používá porovnání dostupných oblastí při cestě VHD a IAD. K tomu definuje dostupnou a spádovou oblast:

- dostupná oblast – je definovaná pro počátek cesty O , dopravní mód M a cestovní čas t a je tvořena plochou, která obsahuje všechny cíle D , které mohou být dosaženy z O dopravním módem M během cestovního času $\leq t$. Tento ukazatel je vhodný pro posouzení relativní dostupnosti z místa bydliště,
- spádová oblast – je definovaná pro cíl D , dopravní mód M a cestovní čas t a je tvořena plochou obsahující všechny počátky, ze kterých je dostupný cíl D během cestovního času $\leq t$. Tento ukazatel je vhodný pro posouzení relativní dostupnosti cílů (pracoviště, obchodní centrum apod.).

Ukazatele vypočtené zvlášť pro VHD (BAA_o) a IAD (CAA_o) je možné následně porovnat a kvantifikovat rozdíl v dostupných oblastech AA_o za cestovní čas t . Podobně je možné určit rozdíl spádových oblastí SA_D při využití VHD (BSA_D) a IAD (CSA_D) za cestovní čas t . Pro posouzení kvality cílů či počátků je možné nahradit počet jejich kapacitou (počet pracovních míst, počet lůžek v nemocnici apod.).

$$AA_o(t) = \frac{BAA_o(t)}{CAA_o(t)} \quad SA_D(t) = \frac{BSA_D(t)}{CSA_D(t)}$$

Výsledek obou výpočtů je v rozsahu 0–1, kdy např. $AA_s(30) = 0,5$ znamená, že dostupná oblast s obchody při cestě VHD dosahuje 50 % dostupné oblasti při využití IAD.



Obr. 13-5 Index změny dopravní dostupnosti obchodů při využití MHD oproti IAD v Ostravě (Horák et al., 2019)

13.3 Skupina ukazatelů s využitím gravitačního modelování

Jednoduché míry dostupnosti považují všechny geografické objekty, které představují zdroje (resp. cíle) toků za rovnocenné a přidělují jim stejnou váhu. Proto prvním rozšířením uvedených základních modelů je zahrnutí atraktivity center, tedy cíle cestování. Další možností je zohlednění poklesu vlivu cíle s rostoucí vzdáleností.

Jednoduché míry dostupnosti považují všechny geografické objekty, které představují zdroje (resp. cíle) toků za rovnocenné a přidělují jim stejnou váhu. Proto prvním rozšířením uvedených základních modelů je zahrnutí atraktivity center, tedy cíle cestování.

Příkladem může být **vážená časová dostupnost** vyjádřená

$$D_i^{tv} = \frac{\sum_j t_{ij} * F_j}{\sum_j F_j}$$

D_i^{tv} míra časové dostupnosti v místě i
 F_j atraktivita cíle j

Např. Jánošíková, Kubáni (2000) demonstrují použití takového ukazatele dostupnosti při analýze dopravní dostupnosti obcí Žilinského kraje. Atraktivita cíle je u dojížděky do zaměstnání vyjadřována počtem dojíždějícího ekonomicky aktivního obyvatelstva a pro případ dojížděky do školy počtem dojíždějících studentů.

Podobně i další míry dostupnosti (např. cestní dostupnost) by bylo možné vážit.

Zahrnutí atraktivity představuje první krok na přechodu k využívání zobecněných gravitačních modelů (resp. modelů maximalizujících entropii).

14 Lokalizační a alokační úlohy

Se studiem interakčních dat a jejich modelováním jsou spojovány často používané lokalizační a alokační úlohy.

Lokalizační úlohy řeší problém optimálního umístění zařízení či objektu. Umístění je optimalizováno z hlediska optimalizačního kritéria, které závisí na charakteru úlohy a funkci zařízení. Kritérium může zahrnovat náklady na umístění zařízení (cena pozemku, výstavby a vybavení), tak především maximalizaci poskytovaných funkcí.

Alokační úlohy se zaměřují na problém optimálního zásobování. Existující zařízení je třeba optimálně „vybavit“, aby dobře plnila své funkce.

Je zřejmé, že oba typy úloh spolu úzce souvisí. Optimálně lze ovšem přiřazovat i úkoly jednotlivým pracovištím apod. - takové úlohy někteří autoři (především z oblasti operačního výzkumu) označují jako přiřazovací úlohy.

Lokalizační úlohy jsou často využívány socioekonomickými geografi, dříve se však zabývaly především rozmístěním výrobních kapacit ve vazbě na trh a dopravní náklady. Klasickým modelem v tomto směru je Thünenův model rozmístění jednotlivých druhů zemědělské produkce od centrálně situovaného trhu. V současnosti se lokalizační a alokační úlohy využívají při optimalizaci rozmístování nových administrativních, komerčních či obslužných objektů a optimalizaci jejich vybavení.

Příklady lokalizačních úloh - umístění optimálního centra pro síť zákazníků, úložiště jaderných odpadů z několika elektráren, středisko údržby pro několik závodů, umístění strojů ve výrobní hale. Příkladem alokačního problému je požadavek rozmístit zboží v adekvátním množství do příslušných obchodů vzhledem k známému rozmístění obchodů a zákazníků, často s využitím dopravní sítě.

Lokalizační úloha se zabývá volbou umístění zařízení, zpravidla ve vztahu k rozmístění zákazníků.

Pojmem **zařízení** (*facility*) budeme označovat objekty libovolného druhu, která poskytují jisté služby a jejichž umístění či vybavení závisí na lidské aktivitě. V typických aplikacích se jedná o obchody, zdravotnická zařízení, hasičské stanice, školy, úřady, firmy, informační centra, skládky, ale i např. krmná zařízení či útočiště pro zvířata, přírodní rezervace, zóny klidu apod.

Jako **zákazníky** označíme spotřebitele nebo uživatele služeb poskytovaných zařízeními, jejichž umístění či vybavení je optimalizováno. Mohou to být nakupující dojíždějící do obchodů, děti dojíždějící do škol, občané k úřadům, zaměstnanci do zaměstnání, pacienti k lékařům, zvířata cestující za potravou apod. Mohou to být také organizace odebírající zboží z velkoskladu, dopravní prostředky využívající čerpací stanice, výrobní stroje odebírající elektřinu z transformátoru, odpady atd.

V operačním výzkumu se často řeší úlohy, kde optimalizujeme umístění dalšího zařízení pouze v závislosti na existujících zařízeních.

Pro řešení lokalizačních úloh je nutno zvážit **podmínky** prováděné analýzy. Především je důležité, zda:

- můžeme umístit 1 nebo více nových zařízení,
- se může nebo nemůže měnit počet a velikost zařízení (dynamické versus statické řešení),
- zařízení jsou reprezentována bodem nebo areálem,
- umístění nových zařízení závisí nebo nezávisí na existujících,
- množina přípustných umístění je spojitá (nové zařízení lze umístit kamkoliv) nebo diskrétní (např. výběr z nabídky pozemků). Druhá varianta se lépe řeší s využitím teorie grafů a heuristických postupů.

Při řešení lokalizačních a alokačních úloh se uplatňuje matematické programování (lineární i nelineární), optimalizace na grafech a heuristické postupy. Některé metody neobsahují podmínku

optimalizace vzdálenosti, protože postačuje pouze splnění vzdálenostního limitu (např. pro optimalizaci rozmístění zařízení naléhavé potřeby na území města při splnění limitu časové dostupnosti).

Základní krokem je volba optimalizačního kritéria. Obecně jím může být například:

- maximalizace zisku (tj. rozdílu mezi příjmy plynoucími z poskytování služeb zákazníkům a náklady na výstavbu zařízení a jejich provoz),
- maximalizace objemu toků (co nejvyšší objem poskytovaných služeb),
- minimalizace délky toků (časové, metrické či nákladové) při dosažení limitního (resp. nadlimitního) objemu toků či splnění jiného limitu (např. doba cestování nesmí překročit jistý limit),
- maximalizace efektu pro zákazníka,
- minimalizace nákladů pro zákazníka.

Klasické metody jsou deterministické a předpokládají, že toky směřují k nejbližšímu cíli. Tímto způsobem vznikají jasně vymezené a nepřekrývající se spádové oblasti kolem jednotlivých zařízení. To je vhodné pro lokalizaci administrativních zařízení nebo v optimalizaci umístění zařízení naléhavé potřeby.

Ve skutečnosti je chování toků (iniciované zákazníky) málokdy deterministické, ale spíše neurčité a je vhodné ho modelovat pomocí pravděpodobnostních a behaviorálních modelů. U nich pak vzdálenost vystupuje sice jako důležitý faktor, ale ne jako striktní omezení. Připouštějí takové rozložení toků, kde největší tok směřuje k nejbližšímu cíli, ale i vzdálenější zařízení jsou cílem jistého menšího toku z daného místa.

V některých případech může být výhodné použití etapového postupu při určování cílů, který odpovídá praktické zkušenosti, kdy v případě malých rozdílů mezi vzdálenostmi/náklady již tyto nehrají při výběru žádnou roli. Thill a Horowitz (1997) popisují dvouetapový model s tím, že v první etapě se vybírá jistá množina kandidátů podle cestovní vzdálenosti a ceny dopravy, a teprve ve druhé etapě se určují vhodné alternativy z této skupiny kandidátů.

Optimalizačních kritérií, a tedy i prostorových interakčních modelů, může být celá řada. Uvedeme 3 základní kritéria:

Minimalizace délky toků

Jednodušší model používá jako kritérium minimalizaci procestovaných vzdáleností v systému za předpokladu cestování zákazníků k jednomu zařízení (v nejjednodušší podobě k nejbližšímu). Zpravidla se předpokládá, že poptávka zákazníků je lokalizována v n uzlech zákaznických míst, pro které p -mediánové řešení nalezne p míst pro obsluhující zařízení, platí že $n > p$ a zařízení jsou umístěna v uzlech sítě (i když řešení nemusí být jedinečné). Úloha se označuje jako **p-mediánový problém** (the p -median problem). Někdy se pracuje ne s minimálními, ale průměrnými náklady či časem.

Kritéria:

$$\min \left\{ \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_i * I_{ij} * d_{ij} \right\} \quad \sum_{j=1}^n I_{ij} = 1 \quad \sum_{i=1}^n I_{ij} \geq 1$$

- d_{ij} cena cestování z i do j (např. vzdálenost)
 a_i velikost požadavku na službu od zákazníka i (zjednodušeně objem požadovaných služeb v místě i) - např. počet obyvatel, velikost určité části populace, cena majetku
 I_{ij} indikátor; nabývá hodnoty 1 pokud je v místě j poskytována služba pro zákazníka i , nebo hodnoty 0, pokud tomu tak není.

Druhá podmínka (suma $I_{ij}=1$) musí být splněna pro všechna $i = 1 \dots n$, protože každý požadavek je vyřizován právě jedním zařízením.

Není omezení kapacity cíle.

Jednoduchý model předpokládá lineární závislost celkových nákladů na vzdálenosti nového zařízení od zákazníků (délky toků). Lineární závislost je samozřejmě nejsnáze řešitelná (např. metodou nejmenších čtverců). Obecněji lze uvažovat o náhradě d_{ij} za funkci $g(d_{ij})$, která může zahrnovat jak lineární tak nelineární modely (musí však být k dispozici vhodné řešení matematické úlohy).

Pro $p=1$ se úloha označuje jako Weberův problém, pro obecný počet zařízení p jako p -mediánové umístění. Praktická řešení pro umístění jednoho i p zařízení uvádí např. Dudorkin (1997), který popisuje algoritmy pro euklidovskou vzdálenost, manhatonskou vzdálenost (rektilineární) i pro kvadrát euklidovské vzdálenosti, doporučovaný např. pro optimalizaci umístění hasičských stanic. Pro jednoduché přiřazovací úlohy se doporučuje tzv. maďarská metoda.

Řešení těchto úloh je k dispozici jak pro kontinuální tak pro diskrétní možnost lokalizace, pro diskrétní je ovšem algoritmy obtížná vzhledem k rozsahu reálných úloh a tak se často používají různé heuristické postupy.

Např. **žravý algoritmus** pro problém lokalizace zařízení může být – vyber náhodnou sadu N míst a potom přiřaď všechny zákazníky k nejbližšímu zařízení (zákazníky k obchodům, děti do škol, pacienti do zdravotnických zařízení). To generuje velmi slabé řešení, pokud se snažíme minimalizovat průměr nebo maximální cestovní čas zákazníků do zařízení.

Vylepšením může být **žravá přidávací varianta** (*greedy add variant*), kdy se začíná s jedním počátečním zařízením náhodně vybraným, všichni zákazníci se k němu přidávají, a pak jsou nová zařízení přidávána po jednom v náhodných místech, ale podle nějakého dodatečného pravidla a zákazníci jsou přerozděleni podle pravidla „nejbližšího zařízení“. To může vést k lepšímu řešení. Opakované spouštění žravé procedury může vyústit v sadu řešení, ze kterých se pak dá vybrat nejlepší řešení. Charakteristiky identifikované z nejlepšího dosaženého řešení pak mohou pomáhat v postupném zlepšovací proces. Tzv. GRASP heuristiky (žravé randomizované adaptivní prohledávací procedury - *greedy randomized adaptive search procedures*) začínají s rozumným řešením získaným z konvenčního žravého algoritmu a pak se aplikuje hledání lokálního prohledávacího algoritmu pro zkoušení a zlepšování řešení. Opakované spouštění GRASP vede k získání celkově nejlepšího řešení.

Jeden z nejlepších je **algoritmus náhrady vertexu** (Teitz, Bart, 1968), který je příkladem výměnné heuristiky. Proces systematicky ohodnocuje drobné změny pro danou sadu lokalit:

Do algoritmu je vložena počáteční konfigurace zařízení (např. náhodný výběr p lokalit ze sady kandidátů $n > p$). To označíme jako první "*current solution*".

S prvním kandidátem, který není obsažen v aktuálním řešení, se provede substituce postupně pro každé místo zařízení v aktuálním řešení a zákazníci se přemístí podle nové konfigurace zařízení. Pro výsledné přehození je vybrána ta záměna, která dává největší pokles cílové funkce. Pokud všichni kandidáti mimo aktuální řešení vyzkoušeli nahradit všechna místa v aktuálním řešení, je iterace kompletní a proces může být opakován. Algoritmus končí, když ani jedna iterace nevede k výměně.

Při ukončení výměnná heuristika generuje takové uspořádání zařízení, které splňuje všechny 3 nezbytné, ale ne dostatečné podmínky pro optimální řešení problému:

1. všechny zařízení jsou v lokálních mediánech, tj. v centrech s nejmenšími cestovními náklady či vzdálenostmi pro body potřeb k nim alokované.
2. Všechny body potřeb (zákazníci) jsou alokovány k nejbližšímu zařízení
3. Odstranění zařízení z řešení a jeho nahrazení s kandidátním místem, které není součástí řešení, vždy způsobí nárůst sítě nebo žádnou změnu cílové funkce.

Všimněte si, že toto řešení není obecně globálním optimem ani není nezbytně jediným možným řešením, ani neexistuje okamžitá cesta ocenění, jak je toto řešení dobré (tj. jak blízko je globálního optima).

Rozšíření základního modelu dovoluje zohlednit náklady umístění zařízení v daném místě, kapacitní omezení v daném místě (např. kapacita nemocnice či počet pracovních míst), omezení na maximální délku toku (maximální vzdálenost, kterou je zákazník ochoten překonat, či např. cena za dopravu, kterou je zaměstnanec ochoten při dojíždění do zaměstnání zaplatit). S rozšiřováním základního modelu dochází často k automatickému uvolnění původního požadavku na cestování do nejbližšího místa.

Minimaxové řešení

Pro praktická řešení se ukazuje minimalizace celkové délky cest jako málo efektivní, protože se zpravidla optimálního výsledku dosahuje malým zlepšením nejkratších, ale nejhojnějších cest. Zákazník těžko ocení zkrácení cesty např. z 300 m na 292 m. Daleko větší význam má pro něj zkrácení dlouhé cesty.

Minimalizace maximální vzdálenosti nebo času je známa jako **p-center problém**. Praktické řešení úlohy pro 1 zařízení poskytuje např. Elzingův algoritmus (Dudorkin 1997).

Maximalizace pokrytí

Úloha se snaží zajistit, aby všichni zákazníci byli obslouženi do určitého maximálního času či nákladů (nebo alespoň jistý podíl z nich). Tato úloha se označuje jako **problém pokrytí** (*coverage problems*).

Kritériem je tedy maximalizace počtu zákazníků při splnění limitu, kladeného na tok (čas, vzdálenost nebo náklady jsou nižší než stanovený limit)

$$\min \left\{ \sum_{i=1}^n a_i * I_i(h) \right\} \quad \sum_{j=1}^n J_{ij} \geq 1$$

d_{ij} cena cestování z i do j

a_i velikost požadavku na službu od zákazníka i

$I_i(h)$ indikátor; nabývá hodnoty 1 pokud místo i je za limitní vzdáleností h od každého zařízení (tedy pokud není zákazník „pokryt“), nebo hodnoty 0 pokud tomu tak není

J_{ij} indikátor; nabývá hodnoty 1 pokud není zařízením j poskytována služba pro zákazníka i , nebo hodnoty 0, pokud zařízení j poskytuje službu pro zákazníka i ; platí pro všechna $d_{ij} \leq h$

První podmínka minimalizuje množství nepokrytých zákazníků.

Tento model má zajímavé vlastnosti. Model je obecnější - např. pro velké h přechází v minimaxové řešení. Výhodou je rovněž možnost sledování chování v případě změny p a zjišťování např. kolika zařízení (p) je potřeba pro dosažení určité úrovně pokrytí.

Vzhledem k výpočetní náročnosti se opět často uplatňují heuristické postupy.

14.1.1 Rozšíření základních modelů

Tyto základní modely je možné upravit - např. vyloučení obslužených zákazníků a využití vzdálenostního hendikepu pro eliminaci vlivu zanedbatelných rozdílů ve vzdálenosti.

Další rozšíření modelu zahrnují např. **hierarchické lokalizačně-alokační modely**, které dovolují umístit více zařízení, které však neposkytují služby stejné úrovně. Příkladem mohou být zdravotnická zařízení, z nichž některé jsou jen se základním vybavením a jiná mají i specializovaná pracoviště.

Některé modely zohledňují i různou **atraktivitu** zařízení, vycházející např. z jejich velikosti (analogie gravitačních modelů).

Konečně se uplatňují i **multikriteriální modely**, kde je současně pro optimalizaci použito více kritérií, problémy jsou pak především v realizaci řešení.

V případě **dynamického řešení** se optimalizace rozšiřuje a používá se sumace vah za zkoumané časové období.

Z konstrukce modelů vyplývají minimální požadavky na vstupní data a specifikace vztahů.

Diskrétní úlohy jsou zpravidla simulovány pomocí matematických grafů. V prostředí GIS se však setkáváme i s jinými typy úloh. Některé lokalizační problémy nejsou orientované na grafy.

Např. lidské nebo přírodní toky se mohou vyskytovat mezi určitými body nebo mezi bodovými a liniovými prvky (např. plošný tok znečištění přes plochu k řece, kde končí). Takový problém může vyžadovat speciální hledání cesty přes povrch s různými podmínkami, která jsou reprezentována polygony nebo buňkami mřížky nebo který může zahrnovat tvorbu virtuálních spojení mezi body. Předpověď objemu přepravovaných vzduchem (znečištění vzduchu) uvnitř města byla dříve často modelována gravitačním modelem, vyžadujícím výpočet velikosti uzlů a jejich vzdálenost v mřížce.

Na závěr je potřebné upozornit na některé specifické problémy při praktických aplikacích.

Především je nezbytné zohlednit tzv. hraniční problém. Modely mohou být prakticky omezené hranicemi sledovaného území, které se nemusí krýt s funkčním vymezením pomocí optimalizačního kritéria (tedy se spádovou oblastí). Fyzické omezení modelu může narušovat proces optimalizace i vlastní využívání modelu.

Řada modelů využívá pro informaci o zákaznících informace o obyvatelstvu s trvalým bydlištěm v dané zóně (a zjišťují model závislosti určitého podílu zákazníků z celkového množství obyvatelstva) v závislosti na vzdálenosti od služby). Reálná situace je ovšem komplikována mobilitou zákazníků (dojíždění za prací apod.) a rovněž i změnami v demografické situaci (časový vývoj v populaci).

Na druhou stranu je třeba upozornit, že nemá smysl vytvářet zbytečně komplexní modely. Do praktického rozhodování stejně vstupují další hlediska a požadavky, které nelze nebo není efektivní zahrnout do prostorové optimalizace. Málokdy jsou modelová řešení použita ke skutečné optimalizaci, zpravidla jsou použita pro podporu rozhodování při srovnávání variant či průzkumu situace. Pro jejich správnou interpretaci je pak nezbytná jasná koncepce a konzistence modelu.

15 Využití gravitační teorie

Požadavkem některých analýz interakčních dat je vytvoření vhodného modelu popisujícího velikost interakcí.

Obecný model pro sledování interakčních dat předpokládá, že každá zjištěná hodnota toku Y_{ij} mezi zdrojem i a cílem j se skládá z pravidelné a náhodné složky. Pravidelnou složku označíme jako μ_{ij} , náhodnou složku (chyby) jako ε_{ij} .

Modelování se zabývá především správným popisem pravidelné složky.

Základním modelem pro popis pravidelné složky interakčních dat je gravitační model. Patří do obecné rodiny modelů maximalizujících entropii systému a dnes již existuje v celé řadě variant. Jeho podstatou je závislost velikosti interakce (tedy objemu toku) na velikosti zdroje, velikosti cíle a nepřímo úměrně na jisté míře vzdálenosti zdroje a cíle (původně nepřímo úměrně na čtverci euklidovské vzdálenosti).

15.1 Základní model

Gravitační model popisuje např. Pavlík, Kühnl (1981) pomocí vztahu:

$$P_{ij} = \frac{M_i * M_j}{d_{ij}^b}$$

P_{ij}	síla vzájemného působení hmot
M_i, M_j	„hmoty“ v místě i a j , tj. velikost zdroje resp. cíle
d_{ij}	vzdálenost
b	koeficient vlivu vzdálenosti

V geografických aplikacích vystupuje v roli „hmoty“ (tj. velikosti) např. počet obyvatel, počet ekonomickou aktivních obyvatel i složitější faktory typu „počet obyvatel * průměrný příjem“. Vzdálenost může být vyjádřena jako metrická, často se používá časová, cestní nebo cenová. Vliv vzdálenosti b se mění podle typu dopravního prostředku.

Jako 2 hlavní aplikace se uvádí výpočet hraničního bodu a výpočet přitažlivosti obchodního střediska.

Základní model gravitačního zákona však nezabezpečí soulad se zjištěnými hodnotami toků. Proto se prakticky uplatňují oboustranně omezený gravitační model nebo jiné gravitační modely.

Všechny tyto modely se ale zaměřují pouze na modelování efektu 1. řádu (tedy středních hodnot) a naopak často při řešení vyžadují nezávislost chyb a tedy nulový efekt 2. řádu (řešení např. metodou maximální věrohodnosti).

Problém s modelováním efektu 2. řádu je specifický pro interakční data. Projevuje se zde totiž šíření chyby, tedy zjevná tranzitivní závislost velikosti efektu 2. řádu v jednotlivých místech.

Gravitační modely se využívají např. pro modelování dojíždění. Někdy zahrnují dojížděku i migraci obyvatel. Gravitační modely (nebo techniky maximalizace entropie) dovolují řešit chybějící interakční matice (popis toků pracujících). K tomu je potřebné znát počet dojíždějících, vybrat vhodnou míru vzdálenosti (čas nebo cena) a vhodnou míru „hmotnosti“ (např. počet pracovních míst v regionu).

V demograficky orientovaných studiích se používají často Markovovy modely, které stanovují pravděpodobnost transitu pro jisté % regionální pracovní síly, která pak dojíždí do jiných regionů (Schubert et al. 1987).

15.2 Oboustranně omezený gravitační model

Základní podoba gravitačního zákona má jednu zásadní vadu a sice že připouští nekonzistenci s pozorovanými toky.

Chceme-li dodržet konzistenci modelu s pozorovanou situací, musíme zabezpečit 3 podmínky:

1. Suma toků ze zdroje **i** musí odpovídat zjištěné hodnotě

$$\sum_j \mu_{ij} = a_i$$

2. Suma toků do cíle **j** musí odpovídat zjištěné hodnotě

$$\sum_i \mu_{ij} = b_j$$

3. Celková cena cestování v systému je konstantní.

$$\sum_i \sum_j d_{ij} * \mu_{ij} = c$$

Na základě maximalizace funkce entropie lze získat obecný gravitační či prostorový interakční model:

$$\mu_{ij} = \alpha_i * \beta_j * e^{\gamma * d_{ij}}$$

α_i	sada parametrů popisujících vlastnost zdroje i generovat toky
β_j	sada parametrů popisujících vlastnost cíle j přitahovat toky
γ	popisuje vzdálenostní efekt
d_{ij}	vzdálenost mezi zdrojem i a cílem j

Nakonec tedy můžeme vyjádřit modelový vztah pro pozorované toky jako:

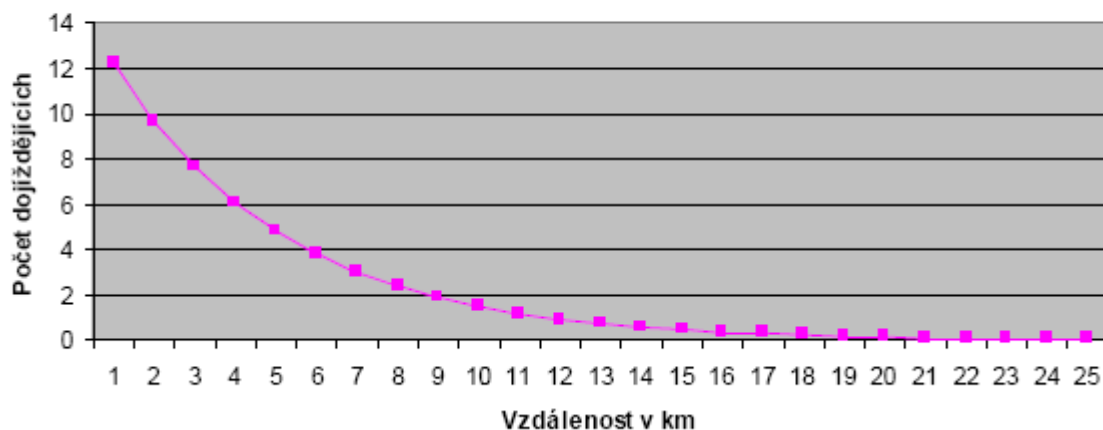
$$Y_{ij} = \alpha_i * \beta_j * e^{\gamma * d_{ij}} + \varepsilon_{ij}$$

Y_{ij}	zjištěná hodnota toku mezi zdrojem i a cílem j
ε_{ij}	náhodná složka pozorování (chyby)

Uvedený vztah je možno linearizovat logaritmováním a následně použít pro řešení např. metodu nejmenších čtverců.

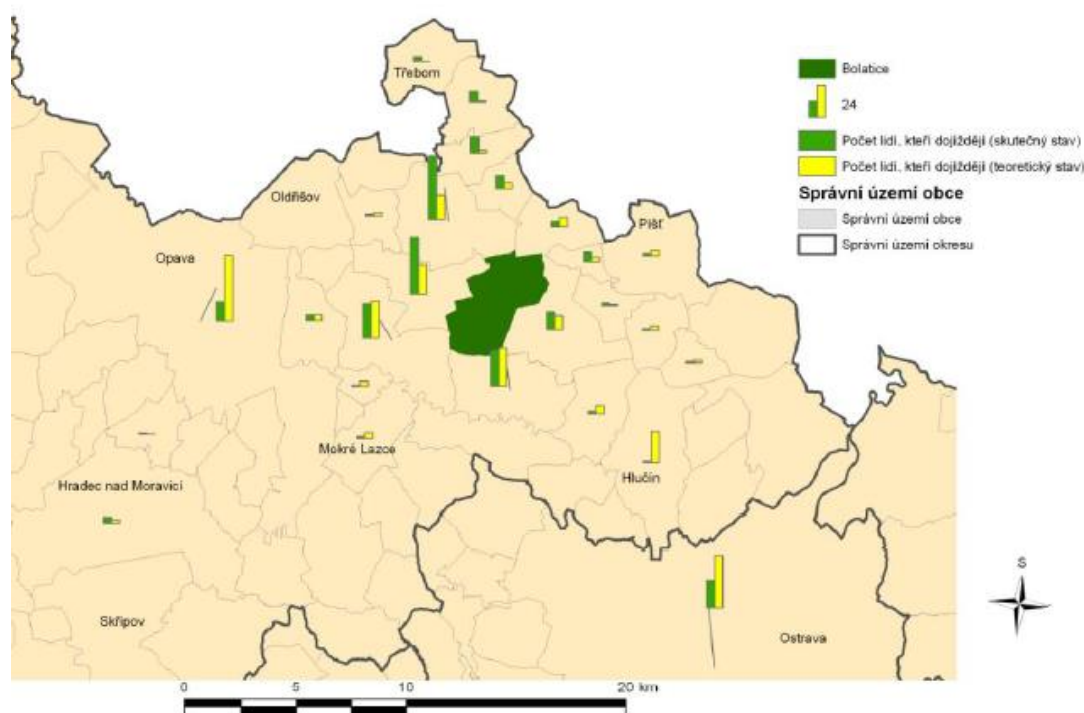
Pokud uplatníme výše uvedené okrajové podmínky, hovoříme o dvojnásobně omezeném modelu (velikost zdrojů zůstává konstantní a rovněž atraktivnost cílů zůstává konstantní).

Teoretický počet dojíždějících pro Lanex Bolatice pro zdroje s kapacitou 500 ekonomicky aktivních



Obr. 15-1 Výpočet teoretických toků z gravitačního modelu pro dojíždějící do Lanexu Bolatice (Vojta 2009)

POROVNÁNÍ SKUTEČNÉ A TEORETICKÉ DOJÍŽDKY - LANEX BOLATICE



Obr. 15-2 Porovnání skuteční a teoretické dojížd'ky z gravitačního modelu pro Lanex Bolatice (Vojta 2009)

15.3 Jiné gravitační modely a aplikace

V některých případech využíváme jednostranně omezené modely.

První variantou je **model omezený ve zdrojích**. Předpokládá se, že velikost zdrojů je fixní a nemění se. Oproti tomu uvolnění této podmínky pro cíle dovoluje náhradu parametrů atraktivnosti β_j za funkce. Výsledkem je model, který dovoluje sledovat chování toků na změny atraktivnosti cílů.

Z hlediska modelování trhu práce by bylo možné takový model aplikovat pro sledování velikosti dojížděky do jednotlivých center v závislosti na atraktivnosti zaměstnání, profesní skladbě, výši mezd i atraktivnosti centra jako takového (kumulování důvodů dojíždění).

Druhou variantou je **model omezený v cílech**. Atraktivnost cílů se nemění a velikost zdrojů je nahrazena funkcí. Výsledný model dovoluje sledovat např. předpovídat rozmístění zaměstnanců v jednotlivých sídlech podle jejich vzdálenosti, vybavenosti apod. za předpokladu konstantní situace v poptávce po práci.

Další možnosti nabízí jsou:

- model bez okrajových omezení, který dovoluje modelovat např. migraci obyvatel,
- modely používající různé vzdálenostní parametry pro různé cíle - např. nemocnice nemá konstantní spádovou oblast, ale ta se liší podle specialistů v nemocnici - některé služby mají velký dosah (neurologie, radioizotopie), jiné velmi krátký (geriatrie).
- modely s různým vlivem vzdálenosti v různých místech (prostorové rozšíření modelů) - rozdílný vliv vzdálenosti v různých částech sledovaného území
- modely zohledňující soutěžení cílů a jiné formy konkurenčních výhod - řešení pomocí relativní přístupnosti destinace

Zajímavou možnost nabízí využívání generalizované ceny dopravy (zohledňuje čas, vzdálenost i další poplatky spojené s dopravou).

16 Popisná statistika pro polygony

Objekty, u kterých nemůžeme s ohledem na odpovídající reprezentaci (z důvodu vizualizace a hlavně analýzy) zanedbat jeho minimálně 2 rozměry, používáme ve 2D zobrazení k reprezentaci polygony. V některých případech objekty tvoří souvislou plochu a pak pro reprezentaci objektu použijeme skupinu polygonů se stejnou hodnotou (se stejným identifikátorem), kterou označujeme jako areál (multipolygon). Existence multipolygonů komplikuje řadu analýz (např. kvůli vymezení sousedství, viz dále). Dalším problémem je neurčitost polygonového vymezení. Často nejsou polygony stálé, mění tvar i velikost, není jasné, při jakém měřítku agregovat data do polygonů (jak velké polygony použít) či jak nastavit počátek gridu/mřížky. Problém se označuje MAUP (*Modifiable Area Unit Problem*).

Popisná charakteristika v případě polygonů nebývá problémem. Zjišťování náhodnosti distribuce velikosti ploch či jiných charakteristik se nevyužívá, spíše jsou zajímavé techniky sledující náhodnost a autokorelaci hodnot přidělených polygonům. Z celé řady metod, které jsou aplikovány na tento typ reprezentace prostorových dat, vybereme jen některé i při vědomí neúplnosti. Zájemce o problém plošné interpolace či vyhlazování areálových dat odkazují na starší verzi těchto skript.

Charakterizovat soustavu polygonů lze snadno s využitím jednoduchých statistických ukazatelů typu: průměrná plocha polygonu, průměrná plocha areálu (multipolygonu), průměrný obvod polygonu, variabilita plochy polygonu (rozptyl, směrodatná odchylka), statistika zastoupení polygonů v areálu (průměrný počet polygonů v 1 areálu, max. a min. počet, variabilita atd.).

Lze využít i tvarové ukazatele typu koeficient zakulacenosti apod. K důležitým charakteristikám, které hodnotí zastoupení polygonů, tříd, hranic ve sledovaném území, patří ukazatele krajinné metriky. Tyto charakteristiky jsou popsány ve skriptech pro Zpracování dat v GIS.

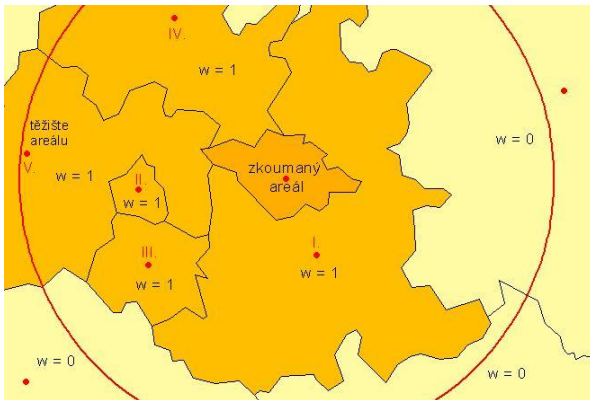
Specifickým problémem, ovlivňujícím řadu analýz, je určení vzdálenosti polygonů jako míry přilehlosti či separace mezi polygony, resp. jejich sousedství. Zatímco u bodů nebo linií využíváme jejich polohu určenou souřadnicemi pro výpočet charakteristik, lokalizace jevu pomocí polygonu je chápána jako přibližně lokalizovaná a zpravidla nelze použít např. měření vzdáleností mezi těžišti polygonů.

16.1 Sousedství polygonů

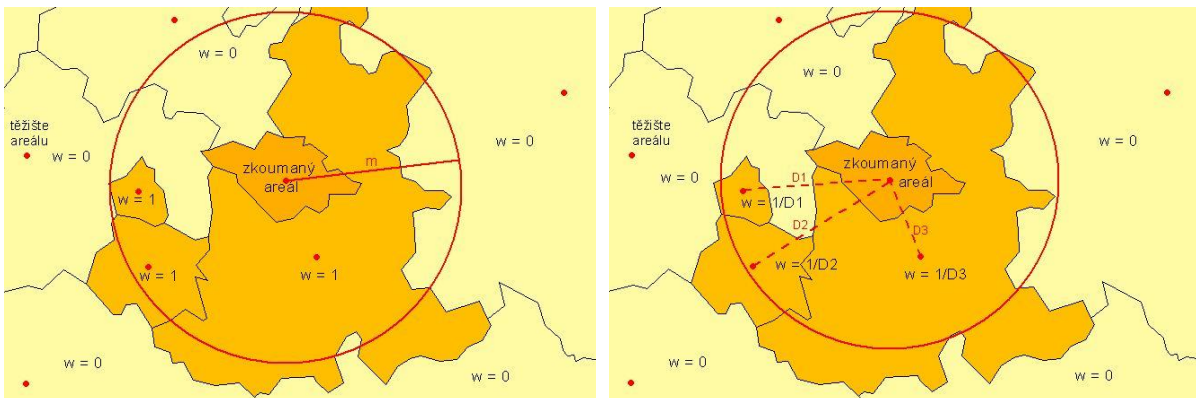
Sousedství a vzdálenostní vliv jednoho polygonu na druhý se doporučuje popisovat pomocí matice vah \mathbf{W} o rozměru $n \times n$, kde n je počet areálů. Váha w_{ij} mezi dvěma areály může být vyjádřena jako:

- 1) $w_{ij} = 1$ Pokud těžiště areálu j je jedním z k nejbližších těžišť vůči areálu i
 $w_{ij} = 0$ v ostatních případech
- 2) $w_{ij} = 1$ Pokud těžiště areálu j je do jisté vzdálenosti δ od areálu i
 $w_{ij} = 0$ v ostatních případech
- 3) $w_{ij} = d_{ij}^\gamma$ Pokud je vzdálenost d_{ij} mezi těžištěm areálu i a j menší než jistá vzdálenost δ od areálu i ($\gamma < 0$ vyjadřuje strmost vlivu vzdálenosti)
 $w_{ij} = 0$ v ostatních případech
- 4) $w_{ij} = 1$ Pokud areál j sdílí společnou hranici s areálem i
 $w_{ij} = 0$ v ostatních případech
- 5) $w_{ij} = l_{ij}/l_i$ kde l_{ij} je délka společné hranice mezi areálem i a j ; resp. l_i je obvod areálu i

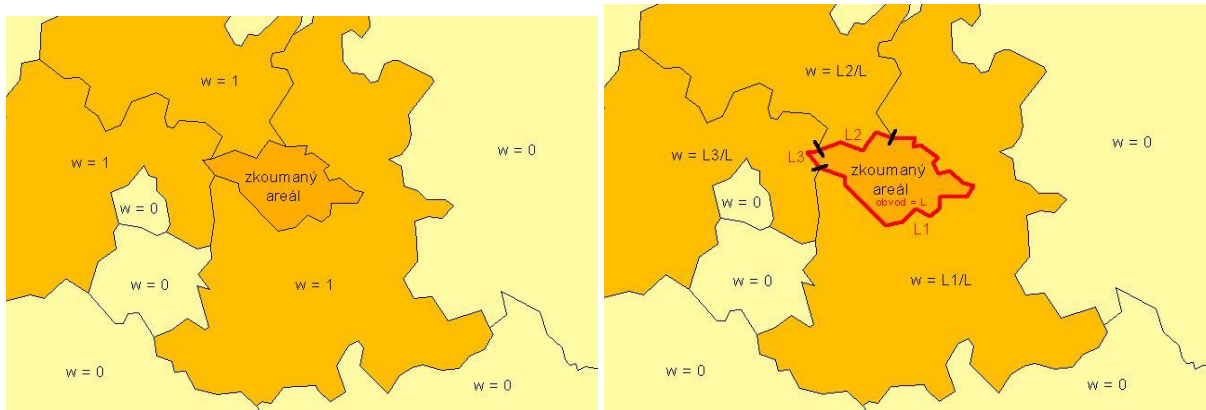
Některé způsoby výpočtu w_{ij} obsahují parametry (k , δ , γ), které je možné optimalizovat.



Obr. 16-1 K-nejbližších areálů podle blízkosti těžišť pro $k=5$ (vlevo) (Vojta, 2009)



Obr. 16-2 Areály do vzdálenosti m s binární vahou (vlevo) a vahou vypočtenou ze vzdálenosti (vpravo) (Vojta, 2009)



Obr. 16-3 Topologické sousedství s binární vahou (vlevo) a vahou vypočítanou z podílu společného obvodu (vpravo) (Vojta, 2009)

U rastru se používá sousedství typu věž (rook's case), královna (queen's case) (někdy také král – king) a střelec (bishop's case). U polygonů některé programy (GeoDa) uvažují o sousedství typu věž (společná liniová hranice) a královna (společné hranice liniové i bodové – navíc zahrnuje i polygony, které se dotýkají pouze v 1 uzlu).

Uvedených 5 variant neposkytuje vyčerpávající přehled možností vyjádření vah (vazeb) mezi areály, lze využít i různých kombinací výpočtu např. délka společné hranice a vzdálenost mezi těžišti. Vhodnou formou zobecnění vzdálenosti je využití cestovního času mezi areály. Pro některé metody se používají matice vah pro popis vazeb vyšších řádů, nejenom pro nejbližší sousedství. Tímto způsobem lze definovat tzv. prostorové kroky (*spatial lags*), tedy popisovat váhy pro 2.nejbližší sousedství, 3.nejbližší sousedství atd. Tento postup můžeme použít i pro popis kontinuity zkoumaného fenoménu v oblasti. Zde se však již nabízí alternativa ve formě transformace areálových měření na bodová, ať už v nepravidelné síti (využití těžišť areálů nebo center osídlení) nebo v pravidelné síti, a následném uplatnění geostatistických metod. Jinou možností je po provedené transformaci využití jádrového vyhlazení.

Další komplikací je výskyt nespojitých areálů (např. některé obce mají nespojitě území). V tom případě výčet sousedních areálů značně narůstá a tyto areály příliš silně ovlivňují své okolí.

16.2 Hodnocení vývoje hodnot pro polygony

Obecně se posuzuje podobnost charakteristik sledovaných objektů v závislosti na jejich vzdálenosti.

Ke sledování prostorové variability poskytuje nejvhodnější nástroje geostatistika. Koncept regionalizované proměnné znamená, že předmětem zpracování je spojitá (kontinuální) proměnná. Při aplikaci geostatistických metod na areálová data se používají jednodušší strukturální funkce, kde lze snáze aplikovat zobecněnou vzdálenost.

Pro polygony se používá obecněji definované sousedství, viz předchozí kapitola. Míry $w_{ij}^{(k)}$ definují obecnou vzdálenost mezi areály a zapisují se do samostatných matic pro každý řád k .

16.2.1 Smans-Estève ukazatele

Smans-Estève ukazatele (Smans, Estève 1996) jsou neparametrické charakteristiky pro sledování prostorového vývoje nominálních nebo ordinálních hodnot. Jsou výpočetně jednoduché. Nevyužívají však 2.mocniny odchylek a nelze je tedy považovat za klasické míry autokorelace či kovariance. Výpočet:

$$\sum_{i \neq j} w_{ij} * c_{ij}$$

za podmínky

$C_{ij}=1$ pokud **i** a **j** patří do stejné kategorie (autor to popisuje jako použití stejné „barvy“)
 $C_{ij}=0$ v jiných případech

nebo

$$\sum_{i \neq j} w_{ij} * o_{ij}$$

kde o_{ij} rozdíl pořadí z_i a z_j zjištěných hodnot jevu v místě **i** a **j**

16.2.2 Globální míry autokorelace

Zpravidla se u polygonů používají jako strukturální funkce **Moranovo I kritérium** a **Gearyho C kritérium**, které lze v zobecněné podobě prezentovat jako (Bailey, Gatrell, 1995):

$$I_k = \frac{n * \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_{ij}^{(k)} * (z_i - \bar{z}) * (z_j - \bar{z})}{\left(\sum_{i=1}^n (z_i - \bar{z})^2 \right) * \left(\sum_{i \neq j} \sum w_{ij}^{(k)} \right)} \quad C_k = \frac{(n-1) * \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_{ij}^{(k)} * (z_i - z_j)^2}{2 * \left(\sum_{i=1}^n (z_i - \bar{z})^2 \right) * \left(\sum_{i \neq j} \sum w_{ij}^{(k)} \right)}$$

kde

$w_{ij}^{(k)}$ indikace vzdálenosti mezi areály **i** a **j** pro krok **k** (viz popis sousedství)
 z_i zkoumaná veličina v místě **i** (\bar{z} s pruhem představuje aritmetický průměr)

Je zřejmé, že Moranovo I kritérium představuje analogii kovariační funkce, zatímco Gearyho C kritérium odpovídá semivariogramu.

Hodnota Moranova I kritéria se pohybuje přibližně v intervalu od -1 do +1. Statisticky významné kladné hodnoty Moranova I kritéria svědčí o kladné prostorové autokorelaci. Analogicky záporné hodnoty dokládají existenci záporné prostorové autokorelace. Hodnoty blízké 0 (resp. očekávané hodnotě) ukazují na chybějící prostorovou strukturu a tedy prostorovou nezávislost. Pokud se hodnoty I kritéria pohybují nad hodnotou 0,3 resp. pod -0,3, tak se jedná o relativně silnou prostorovou autokorelaci (Ivan, 2014).

Shluková textura má hodnotu Gearyho C mezi 0 a 1, hodnota I je větší než očekávaná pro náhodnou distribuci. Rozptýlená textura (dispersed) má hodnotu C mezi 1 a 2, hodnota I je menší než očekávaná pro náhodnou distribuci. Očekávaná hodnota Moranova I kritéria pro náhodnou distribuci je $(-1)/(n-1)$; očekávaná hodnota pro Gearyho C je 1 (nezáleží ne velikosti souboru) (Lee, Wong, 2001).

Je třeba upozornit, že ani jedno z kritérií neposkytuje hodnoty přesně v uvedeném rozmezí. Způsobují to především reálné problémy s vyjádřením matice vzdáleností a reálných vazeb. Bailey, Gatrell (1995) navrhuji korekční člen I' , kterým se I hodnota dělí a tím se získá předpokládaných rozsah hodnot (podobně pro C).

Následně se vykreslují I nebo C kritéria proti hodnotě kroku, pro který se provádí interpretace.

Někteří autoři varují před používáním statistických charakteristik uvedených indikátorů prostorové autokorelace pro adjustovaná data, založená na věkové standardizaci z populace. Populace obyvatel je totiž zpravidla prostorově autokorelována a to vede k promítnutí této závislosti do adjustovaných dat o sledovaném jevu. Často by tedy jev vykazoval prostorovou autokorelaci, i když

ve skutečnosti by byl konstantní v celé oblasti. Jako vhodné řešení se doporučuje testování pravděpodobnosti založené na simulaci.

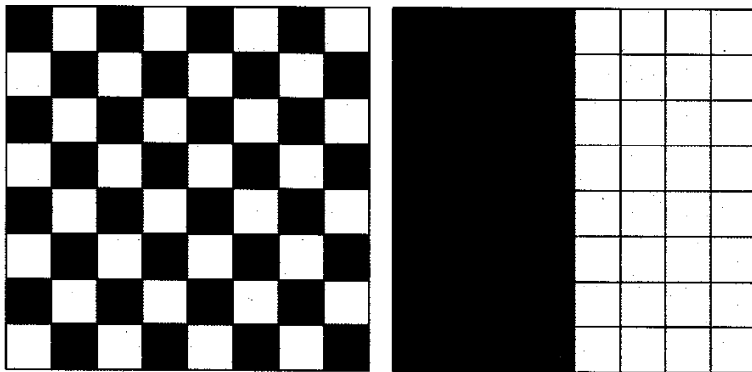
Namísto korekčního činitele se v poslední době uplatňují spíše techniky randomizace při vzorkování, kdy jsou hodnoty atributů (ty známé hodnoty) přidělovány náhodně různým nositelům (objektům v území). Tedy namísto náhodné volby hodnoty atributu se pro známé hodnoty volí náhodně různá možná místa jejich výskytu. Na jejich základě se pak počítají upravené odhady rozptylu, které lze společně s odhadnutou střední hodnotou použít k testování významnosti zjištěných odchylek od náhodného (očekávaného) stavu (Lee, Wong 2001).

Dykes (1994) uvádí jako alternativu pro sledování prostorové autokorelace u areálových dat zjišťování prostorové závislosti distribuce pravděpodobnosti sledovaných hodnot, která se zapisuje do matice podle směrů a kroků (využity techniky digitálního zpracování obrazu, zřejmě analogie povrchu semivariogramu podle Meer 1992). Namísto stupně šedi v obraze se definují třídy a zaznamenají se výskytu pro každou třídu, které jsou dále standardizovány a pak porovnány s očekávanou hodnotou. Výsledek může být zobrazen jako soustava 2,5D povrchů ve 3D zobrazení, kde každý povrch odpovídá určitému kroku vzdálenosti v autokorelační analýze.

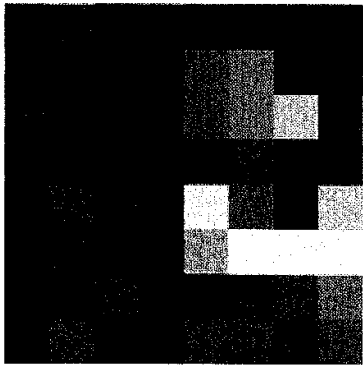
Globální Moranovo I a Gearyho C nerozlišují, zda se projevuje pozitivní autokorelace mezi vysokými nebo naopak nízkými hodnotami. Proto se používá charakteristika **Getis-Ord G(d)**, jako analogie Ripleyovy K funkce.

$$G_d = \frac{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_{ij}(d) * z_i * z_j}{\left(\sum_{i \neq j} z_i * z_j \right)}$$

Váha W_{ij} nabývá hodnoty 1, pokud jsou areály i a j od sebe vzdáleny méně než d (Lee, Wong 2001).



Obr. 16-4 Negativní prostorová autokorelace ($I=-1$) a pozitivní prostorová autokorelace ($I=0,865$) (Kaňuk, 2015)



42	38	44	42	43	44	44	45
39	42	42	41	35	34	42	43
39	41	42	38	35	34	32	38
39	41	42	39	38	37	41	39
41	37	38	39	31	35	41	32
42	43	44	41	33	28	29	29
41	39	37	41	39	37	36	34
42	36	41	39	36	36	37	35

Obr. 16-5 Matice hodnot v rastru s hodnotou $I=0,505$ (konfigurace věž) nebo $I=0,4$ (konfigurace královna) (Kaňuk, 2015)

G hodnota bude větší, pokud jsou blízké hodnoty vysoké a naopak nižší v případě nízkých okolních hodnot.

Moranovo I a Gearyho C měří prostorovou autokorelaci pro celé území, jde tedy o globální stanovení míry autokorelace či variability. V některých případech ale potřebujeme rozlišit lokální situaci v autokorelaci, zjistit, zda území se chová jako homogenní (stále stejná hodnota autokorelace v území) nebo naopak heterogenní (hodnoty autokorelace v jednotlivých místech se významně liší). K tomu slouží např. LISA.

16.2.3 Lokální míra prostorové asociace

Lokální míra prostorové asociace (*Local Indicators of Spatial Association* LISA) odpovídá lokální verzi Moranova nebo Gearyho kritéria, případně G ukazatele. Tyto míry vyjadřují úroveň vazeb s okolím, blízkost (resp. různost pro Gearyho k.) hodnot u prostorově blízkých jednotek.

Lokální Moranovo I pro jednotku i je definováno jako (Lee, Wong 2001):

$$I_i = r_i * \sum_j (w_{ij} * r_j)$$

kde r_i a r_j jsou standardizované hodnoty veličiny z .

Podobně jako u globálního Moran I, vysoká hodnota lokálního Moranova I ukazuje na shlukování podobných hodnot (ať již jsou vysoká nebo nízká). Pouhý výpočet tohoto ukazatele nám ale sám o sobě nic neřekne, vysoká hodnota mohla vzniknout náhodou. Proto podobně jako v předchozích případech je potřebné stanovit odhadovanou střední hodnotu a rozptýl a spočítat pravděpodobnost takového výsledku (resp. testovat, zda odchylka proti náhodnému stavu mohla vzniknout náhodně).

Očekávaná střední hodnota (Anselin 1995) je $E[I_i] = (-w_i)/(n-1)$. Složitěji se počítá rozptýl. Pro každou územní jednotku vypočteme tyto očekávané hodnoty a můžeme tedy i v daném místě prověřit dosaženou pravděpodobnost (nenáhodnost) výsledku.

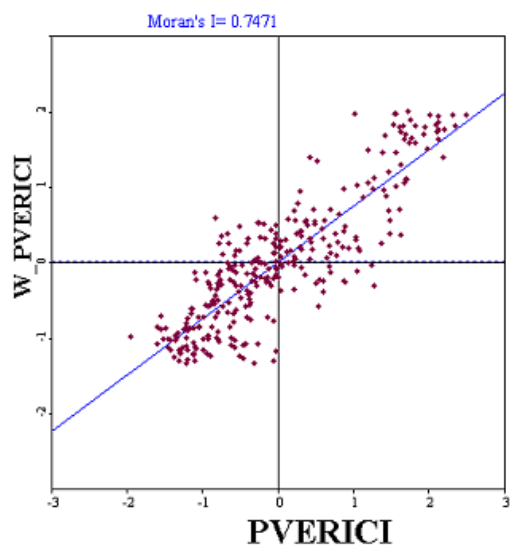
Existuje také lokální verze Gearyho kritéria C, která je však obtížně interpretovatelná (Lee, Wong 2001) díky jejím distribučním vlastnostem.

$$C_i = c_i * \sum_j w_{ij} * (r_i - r_j)^2$$

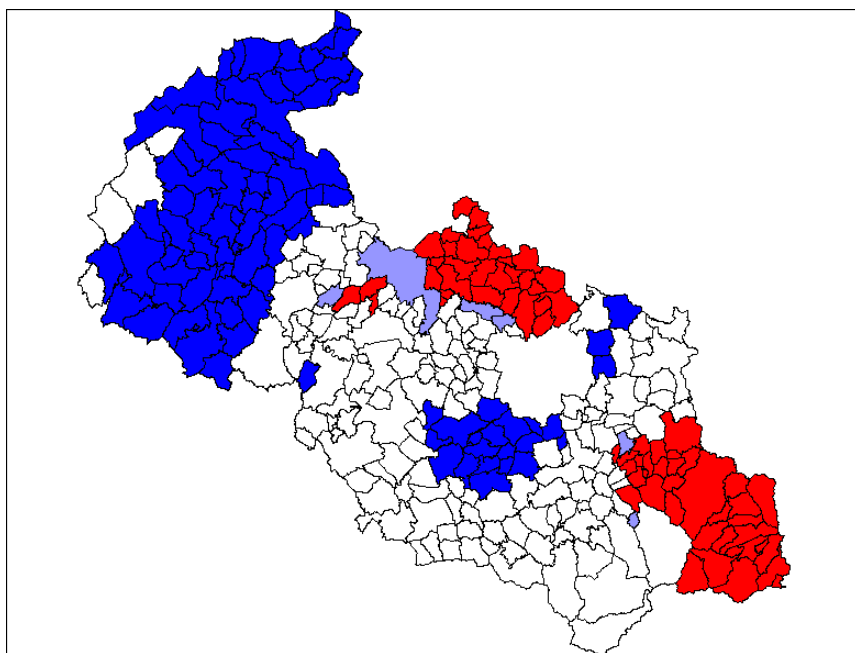
Podobně lze používat lokální verzi Getis-Ord G_i indikátoru. Pokud se započítá i centrální místo i , označuje se jako G_i^* . Výpočet lze popsat jako průměrná hodnota v okolí ku průměrné hodnotě celé datové sady, tedy

$$G_i = \frac{\sum_j w_{ij} z_j}{\sum_j z_j}, i \neq j$$

Pro explorační účely je možné sledovat, které oblasti mají neobvyklou hodnotu prostorové autokorelace. K jejímu studiu je možné použít **Moranův diagram** (Obr. 16-6), ve kterém se zobrazuje hodnota Wz (průměrná hodnota v sousedství z) v závislosti na z (z představují standardizované hodnoty sledované proměnné). V Moranově diagramu se zobrazuje regresní přímka, jejíž sklon odpovídá hodnotě Moranova I kritéria (Spurná 2008). Na základě výpočtu LISA můžeme provést kategorizaci sledovaných areálů podle charakteru prostorové závislosti do čtyř skupin, které odpovídají čtyřem kvadrantům v Moranově diagramu (Obr. 16-7). Prostorové shluky vykazující nadprůměrné či podprůměrné hodnoty proměnné v určité jednotce souhlasně s jejím okolím se v grafu nalézají v pravém horním (hot spots, hodnota vysoká-vysoká) a levém dolním (cold spots, hodnota nízká-nízká) kvadrantu. To svědčí o vysoké autokorelaci. Naopak areály identifikované v levém horním (LH) nebo pravém dolním (HL) kvadrantech jsou charakteristická existencí nízké hodnoty obklopené vysokými a naopak.



Obr. 16-6 Moranův diagram pro podíl věřících v populaci obcí Moravskoslezského kraje (data SLDB 2001, program GeoDa)



Obr. 16-7 Vyznačení shluků hodnot na hladině významnosti 0.05 pro podíl věřících (červená HH, sytě modrá LL, světle modrá LH nebo HL)

17 Multivariační analýzy v prostorových aplikacích

Multivariační metody (metody vícerozměrné statistické analýzy) jsou spojeny se statistickou analýzou vícerozměrných dat. Pomocí vícerozměrné statistické analýzy se snažíme o popis vztahů mezi proměnnými a toto zkoumání probíhá pro všechny vztahy současně. S rostoucím počtem proměnných roste i složitost úlohy.

Uplatnění multivariačních metod pro prostorové analýzy se nachází především v:

- 1) redukci množství dat a průzkumu multidimenzionálního atributového prostoru s cílem identifikovat malý počet zajímavých subdimenzí (resp. kombinací atributů), které pak mohou být zkoumány z prostorového hlediska (uplatnění klasických multivariačních metod a následně vizualizace výsledků a jejich interpretace).
- 2) Průzkumu prostorových textur (vzorů) a vztahů
- 3) Prostorové klasifikaci a diskriminaci.

Klasické multivariační metody pracují s kvantitativními (přesněji poměrovými) daty, existují však i metody či jejich modifikace pro kategorizovaná, nominální či pořadová data. Problémem je však především potřeba standardizace dat pro většinu metod (veličiny v modelu mají typicky různé rozsahy hodnot, různé typy distribuce) a správný způsob provedení standardizace, aby byly splněny metodické požadavky příslušné metody a přitom byla zachována i jistá variabilita veličin, která je předmětem našeho zájmu a podle které dělíme a organizujeme multidimenzionální atributový prostor.

Multivariačních metod je celá řada, k těm základním patří shluková analýza, analýza hlavních komponent, faktorová analýza, diskriminační analýza, kanonická korelační analýza.

17.1 Shluková analýza

Shluková analýza je společný název pro celou řadu metod, jejichž cílem je využití informací z analýzy vícerozměrných dat k rozřídění množiny objektů do několika relativně homogenních podsouborů, označených jako shluky (*clustery*). Objekty uvnitř shluků mají být co nejvíce podobné a objekty patřících do různých shluků co nejvíce rozdílné. Podobnost mezi objekty je uplatněna jako kritérium pro tvorbu shluků objektů. Nejdříve se určí znaky definující podobnost a ty se dále sdružují do podobnostních měr. Meziobjektová příbuznost se měří různými prostředky, které se dají zpravidla zahrnout do jedné ze tří elementárních kategorií a to míry korelace, míry vzdálenosti a míry asociace. Korelační a vzdálenostní míry jsou míry metrických dat, zatímco asociální míry jsou určeny spíše pro nemetrická data.

17.1.1 Míry blízkosti či separace

Korelační míry

K základní korelačním mírám patří běžně používané korelační koeficienty. Pearsonův párový korelační koeficient r se používá pro poměrová data a je vyžadována normalita distribucí obou porovnávaných veličin (zde charakteristiky 2 objektů, které se mají shlukovat). Objekty jsou si tím podobnější, čím je jejich párový korelační koeficient větší a blíží jedničce.

Dalším používanou mírou je Spearmanův korelační koeficient, který nevyžaduje splnění žádných předpokladů a pro výpočet korelace používá rozdíl v pořadí členů párů ve variačních řadách. Výpočet lze najít např. v Kaňok 1996 či Meloun, Militký (2002). S výhodou ho lze uplatnit i pro pořadová (ordinální) data.

Míry vzdálenosti

Míry vzdálenosti představují nejvíce používané míry (Meloun, Militký, 2002). Vzdálenosti jsou měřeny v prostoru, jehož souřadnice jsou ale představovány hodnotami měřených znaků objektů, nikoliv klasickými souřadnicemi. Nezbytnou podmínkou je standardizace těchto znaků (sjednocení

měříték), jinak dochází ke značně odchyleným výsledkům. Největší problémy se pak vyskytují u čtverce Euklidovské vzdálenosti. K běžným mírám vzdálenosti patří:

- Euklidovská vzdálenost (geometrická metrika) – vypočte se pomocí Pythagorovy věty z rozdílu souřadnic

$$d_E(x_k, x_l) = \sqrt{\sum_{j=1}^m (x_{k,j} - x_{l,j})^2}$$

- čtverec Euklidovské vzdálenosti – využívá se pro Wardovu metody shlukování
- Manhattanská vzdálenost (Hammingova metrika) – pravoúhlá vzdálenost. Meloun, Militký (2002) upozorňují, že před použitím této vzdálenosti se musíme přesvědčit, že znaky spolu nekorelují. Jestliže tento předpoklad není splněn, shluky jsou nesprávné.

$$d_H(x_k, x_l) = \sum_{j=1}^m |x_{kj} - x_{lj}|$$

- zobecněná Minkovského metrika – vyšší hodnota z zdůrazňuje odchylky mezi vzdálenými objekty

$$d_M(x_k, x_l) = \sqrt[z]{\sum_{j=1}^m |x_{kj} - x_{lj}|^z}$$

- tětiová vzdálenost (chord distance). V případě, že se použijí tři znaky, je tětiová vzdálenost příomou vzdáleností dvou bodů na povrchu koule s jednotkovým poloměrem a počátkem v těžišti.

$$d_{CH}(x_k, x_l) = \sqrt{2 \left[1 - \frac{\sum_{j=1}^m x_{kj} x_{lj}}{\sum_{j=1}^m x_{kj}^2 \sum_{j=1}^m x_{lj}^2} \right]}$$

- Mahalanobisova metrika – na rozdíl od předchozích využívá popis závislosti mezi znaky (ve výpočtu je zahrnuta kovarianční matice C). Výsledek si můžeme představit jako výpočet vzdálenosti bodů v prostoru, jehož osy nemusí být ortogonální. Vysoce korelovaná selekce znaků může skrytě převážit celý soubor znaků shlukování.

$$d_{Ma}(x_k, x_l) = \sqrt{(x_k - x_l)^T C^{-1} (x_k - x_l)}$$

Míry asociace

Míry asociace se využívají pro výčtová (nominální) data. K základním koeficientům podobnosti patří (Meloun, Militký, 2002) Sokalův-Michenerův koeficient asociace, Russelův-Raouův koeficient asociace, Jaccardův koeficient, Hamannův koeficient asociace, korelační koeficient, Rogersův a Tanimotův koeficient asociace, Sørensenův koeficient asociace, míra genetické vzdálenosti a Gowerův koeficient podobnosti.

17.1.2 Proces shlukování

Roztříděním do několika podsouborů rozumíme klasifikaci, která vede k vytvoření systému tříd. Na závěr shlukovací analýzy se proto provádí charakterizace (popis) jednotlivých tříd (tj. shluků) a interpretace. Tímto způsobem lze i významně snížit dimenzionalitu úlohy tak, že původní sadu proměnných nahradíme příslušností k nové třídě. Shlukovací metody jsou úspěšné především v situacích, kdy objekty mají tendenci se seskupovat do přirozených tříd, než v případě náhodného rozmístění objektů v atributovém prostoru.

Doporučuje se před zahájením shlukovací analýzy prozkoumat znaky, které se hodlají použít, a vypustit nevýznamné znaky. Rovněž se doporučuje identifikovat a vyloučit odlehle hodnoty, které mají na shlukovací proces neblahý vliv a zhoršují strukturu dat (Meloun, Militký, 2002).

Shlukovací analýzu provádíme zpravidla na množině objektů, kde každý objekt je popsán řadou znaků (veličin). Takový postup označíme jako Q-techniku shlukování. Oproti tomu R-technika shlukování vychází z analýz množiny znaků, charakterizovaných prostřednictvím objektů. Podobný duální přístup se uplatňuje i v dalších multivariačních metodách např. faktorové analýze.

Shlukovací analýzy je možné dělit podle různých kritérií, např. zda je na začátku určen počet shluků nebo se má v průběhu řešení nalézt optimální počet shluků, nebo podle výsledné struktury skupin objektů, která je uvedena v tabulce 17-1.

Tab. 17-1 Základní rozdělení metod shlukové analýzy

Skupina	Metoda	Poznámka
Hierarchické	aglomerační (sdružovací)	Postupným seskupováním vytváří stromovou strukturu od jednotlivých objektů až po 1 shluk
	divizní (rozdělovací)	rozdělují počáteční celkový shluk do hierarchického systému dílčích skupin či objektů
Nehierarchické	optimalizační	
	analýzy modů	

17.1.3 Hierarchické shlukovací postupy

Hierarchická struktura se zobrazuje pomocí dendrogramu. U aglomeračního shlukování se dva objekty s nejmenší vzdáleností spojí, vytvoří shluk a provede se přepočítání vzdáleností všech objektů k novému shluku. Následně se opět hledá nejbližší dvojice. Postup se opakuje tak dlouho, dokud nevznikne ze všech dat jeden shluk (případně dokud není dosaženo požadovaného počtu shluků). V případě divizního shlukování se vychází z celkového shluku (všechna data) a postupně se shluk dělí.

Při shlukování se volí vhodná metoda vyjádření vzdáleností a shlukovací procedura.

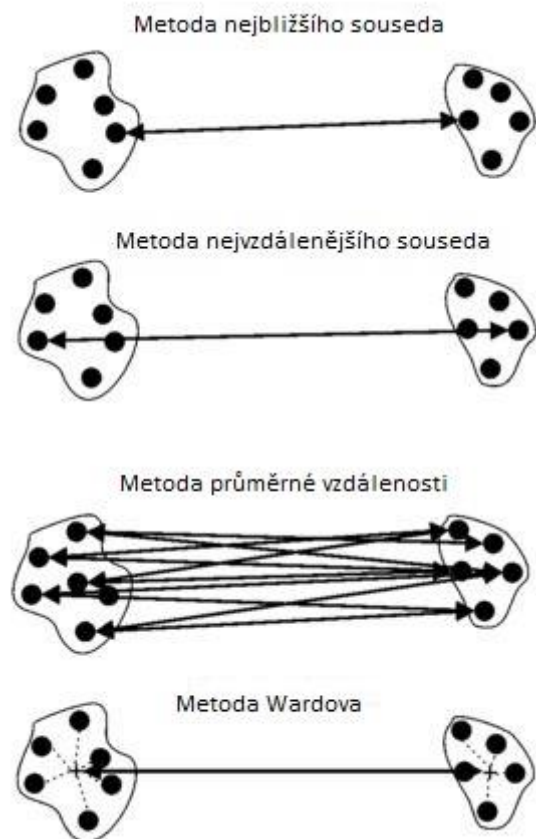
K běžným shlukovacím procedurám patří:

- metoda nejbližšího souseda – pár pro shlukování se vybere podle nejmenší vzdálenosti
- metoda nejvzdálenějšího souseda - pár pro shlukování se vybere podle největší vzdálenosti
- metoda průměrné vzdálenosti – vychází se z průměrné vzdálenosti všech objektů v 1.shluku ke všem objektům ve 2.shluku.
- Wardova metoda – kritériem je minimalizace heterogenity shluků. V každém kroku se počítá přírůstek součtu čtverců odchylek, vzniklý sloučením shluků. Spojí se ty shluky, které mají minimální hodnotu přírůstku (Meloun, Militký, 2002).

$$VSS = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^k (x_{ij} - \bar{x}_j)^2$$

- metoda těžiště
- metoda mediánová

Jejich základní přehled uvádí Turčan (2002), podrobnější popis vybraných metod a jejich algoritmizaci lze nalézt v (Lukasová, Šarmanová 1985) či Meloun, Militký (2002).



Obr. 17-1 Nejčastěji užívané metriky shlukování (Meloun, Militký, 2002)

Příkladem prostorové aplikace shlukové analýzy, která však nevyužívá prostorového složky popisu dat, je analýza vztahu mezi cenou práce a nezaměstnaností (Flek 2000). Ke zpracování byla použita data o míře nezaměstnanosti a průměrných mzdách v okresech ČR ze I. až IV. čtvrtletí každého roku (postupně zpracovány roky 1992-99). Cílově byly vymezeny 3 shluky (metoda K-means) - 1.skupina zahrnuje okresy s nejnižší mírou nezaměstnanosti a nejvyššími průměrnými mzdami, 3.skupina s vysokou mírou nezaměstnanosti a nízkými mzdami, 2.skupina ostatní okresy. Provedená územní interpretace ukazuje na časový vývoj v diferenciaci situace - v roce 1992 byly primární rozdíly mezi českými a moravskými okresy, které však postupně ustoupily do pozadí a byly nahrazeny známou diferenciací Střední Čechy x SZ Čechy a S Morava (především okres Bruntál). Nevyhraněná 2.skupina zahrnuje především okresy východočeské, kde lze do budoucna očekávat nárůst ekonomických a sociálních problémů.

Řada prostorových aplikací může vyžadovat, aby vytvořené shluky byly prostorově spojitě, tedy aby se vytvářely shluky z geograficky blízkých objektů. Tradiční multivariační metody tento požadavek nezohledňují. Nejjednodušší cestou je zařazení souřadnic objektů do sady pozorování jako dvě další, nové proměnné, je ale zjevné, že optimalizace vzdálenosti podél obou souřadnicových os bude probíhat do jisté míry nezávisle (to lze řešit zavedením prostorové indexace) a celkově samozřejmě jsou souřadnice postaveny na roveň ostatních atributů a není tedy zajištěno, že vzniknou geograficky homogenní shluky.

Výhodnější možnost představuje úprava algoritmu tvorby shluků s přihlédnutím k prostorovým vztahům. V řadě případů - např. administrativního dělení území - můžeme vyžadovat, aby areály

spojené do jednoho shluku spolu sousedily. Nabízí se využití matice sousednosti, která obsahuje informaci o sousedství mezi jednotlivými páry areálů. Můžeme tedy např. při aglomerační metodě tvorby shluků připojovat do shluku jen takové areály, které sousedí s některým z již do shluku zahrnutých areálů.

17.1.3.1 Prostorové hierarchické shlukování

Metoda hierarchického prostorového shlukování je popsána např. v Carvalho et al. (2009).

Algoritmus zahrnuje následující kroky:

1) Určení sousedství jednotlivých areálů – zpravidla se používají topologická sousedství typu královna.

2) Spočítá se vektor vzdáleností (ne geografických, ale mezi vektory proměnných/indikátorů) mezi všemi páry tvořenými sousedními areály a vybuduje se matice blízkosti (symetrická).

3) nalezne se pár sousedů, který má nejmenší vzdálenost mezi nimi. Tento pár se seskupí do jednoho shluku.

4) V nejjednodušším případě je pro definici nového shluku nutné kombinovat seznamy sousedů. Proto bude nový seznam sousedů vytvořen spojením seznamu sousedů města A a seznamu sousedů města B (provedeme sjednocení obou relací).

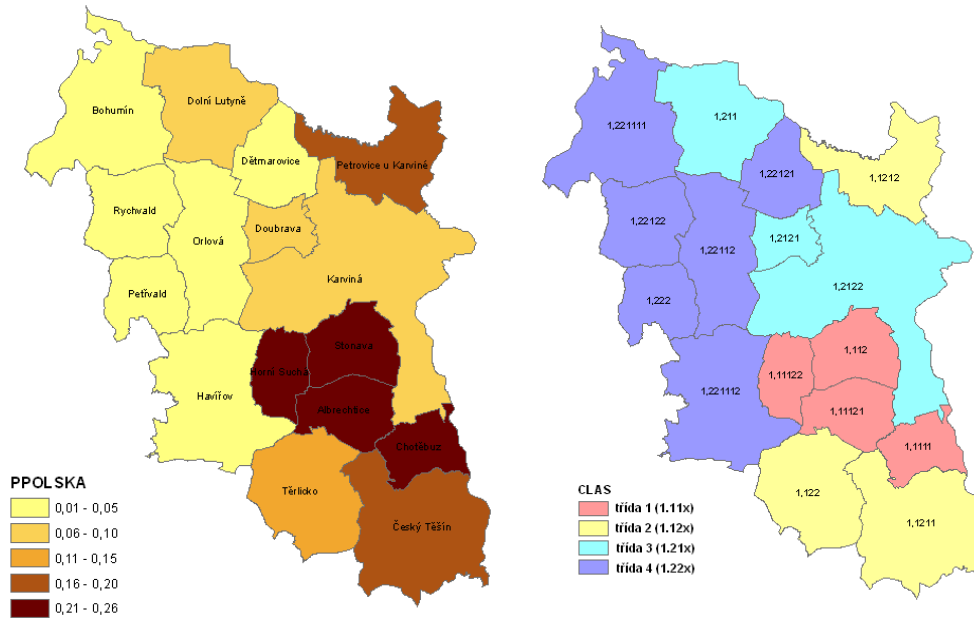
5) Pro nových N-1 shluků musí být aktualizována matice blízkosti. Aktualizace matice blízkosti (nebo vzdálenosti) závisí na metodě shlukování. Například pro metodu nejbližšího souseda je vzdálenost mezi dvěma shluky I a J minimální vektor vzdáleností mezi všemi dvojicemi vektorů proměnné ve dvou shlucích. Na druhou stranu pro metodu nejvzdálenějšího souseda je vzdálenost mezi dvěma shluky maximální vektor vzdáleností mezi všemi páry vektorů.

6) Opakujeme kroky 3 až 5, dokud zbude jen jeden shluk, který bude obsahovat všech areály.

Výsledkem procesu je strom popisující postupně shlukování.

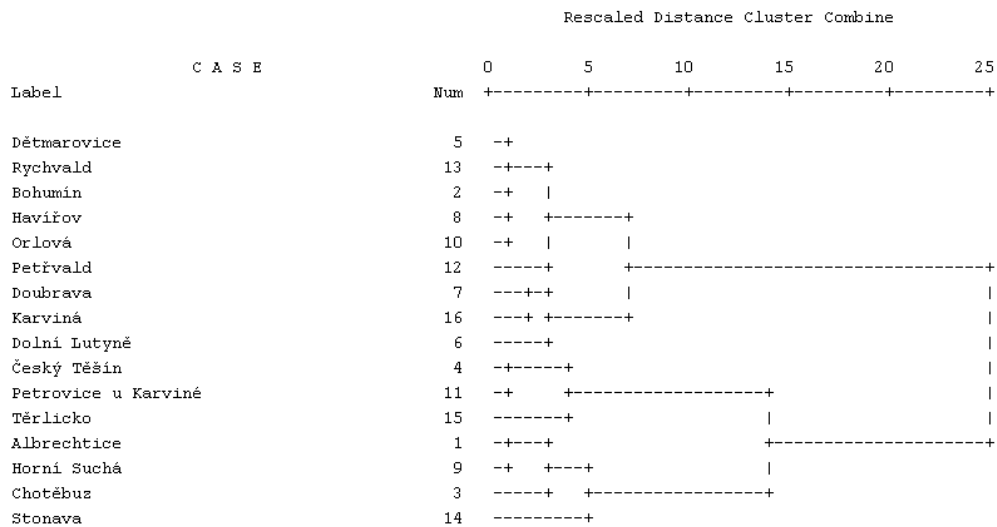
Algoritmus, který Carvalho a kolektiv v dokumentu používá, vykazuje značné rozdíly proti tradičním hierarchickým shlukovacím algoritmům. Díky tomu se nutně nemusejí shodovat s tradičním shlukováním (neprostorovým).

Příklad – klasifikace obcí okresu Karviná podle zastoupení polské národnosti (data SLDB 2001, výchozí hodnoty v obr. 17-2 vlevo), výsledky obr. 17-2 vpravo, 17-3 a 17-4.

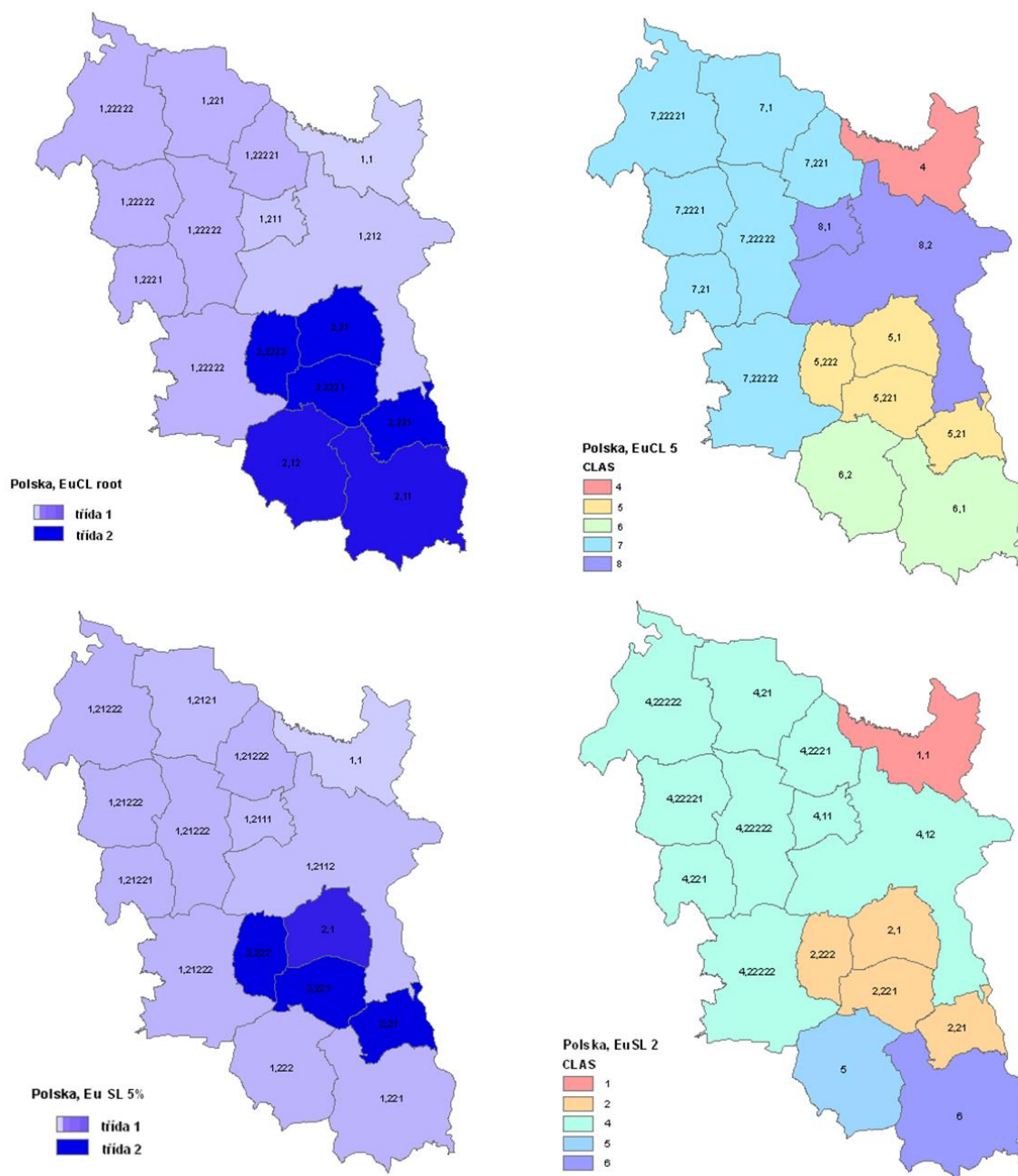


Obr. 17-2 Podíl polské národnosti v obcích okresu Karviná (SLDB 2001) (vlevo) a vpravo výsledek klasifikace neprostorovou metodou hierarchického shlukování (nejvzdálenější soused s Euklidovskou vzdáleností po standardizaci)

Dendrogram using Complete Linkage



Obr. 17-3 Dendrogram pro neprostorové shlukování se stejným nastavením jako v předchozí obrázku vpravo



Obr. 17-4 Výsledek klasifikace prostorového shlukování. Nahoře metoda nejvzdálenějšího a dole nejbližšího souseda, všude jako metrika použita Euklidovská vzdálenost, vlevo řez na 2 třídy, vpravo řez na 5 tříd.

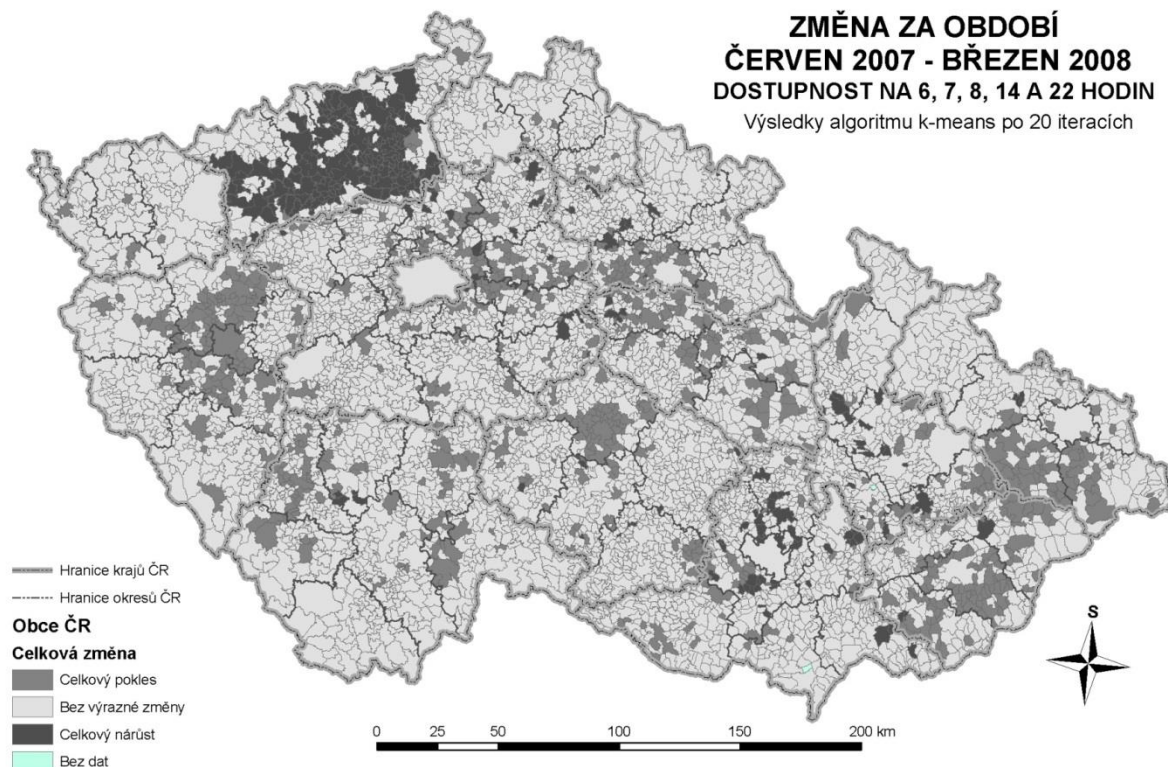
17.1.4 Nehierarchické shlukovací metody

17.1.4.1 Metoda nejbližších těžišť K-means

Meloun, Militký (2002) uvádějí, že metoda nejbližších těžišť poskytuje pouze jediné řešení pro zadaný počet požadovaných shluků. Počet shluků musí být předem zadán uživatelem. Postup je založen na nejbližším těžišti, kdy je objekt zařazen do shluku s nejmenší vzdáleností mezi objektem a těžištěm shluku. Konkrétní technika zařazení objektu závisí na dostupné informaci. Jsou-li těžiště shluků známá, mohou být specifikována v datech a zařazení objektu je založeno na nich. Jinak jsou těžiště shluků určována iteračním výpočtem z dat.

Princip metody nejbližších těžišť (K-means) spočívá v rozdělení n objektů o m znacích do k shluků tak, že mezishluková suma čtverců je minimalizována. Jelikož počet možných uspořádání je enormně veliký, nelze očekávat vždy jediné a nejlepší řešení. Algoritmus nalezne vždy spíše optimum lokální než globální. Jde o takové uspořádání shluků, kdy přemístění objektu z jednoho shluku do druhého nezpůsobí snížení sumy čtverců. Algoritmus pracuje iterativně, startuje vždy z jiného počátečního uspořádání. Nakonec vybere vhodné řešení ze všech možných dosažených uspořádání shluků.

CELKOVÁ ZMĚNA DOSTUPNÝCH OBCÍ V OBCÍCH ČR POMOCÍ VLD



Obr. 17-5 Celková změna počtu dostupných obcí VLD mezi 6/2007 a 3/2008 při cestování na 6, 7, 8, 14 a 22 hodin (Šeděnková et al., 2008)

17.2 Analýza hlavních komponent

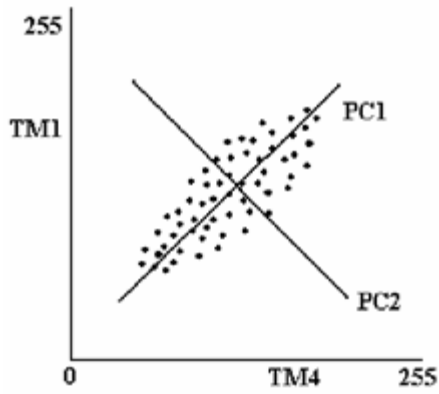
Často využívanou multivariační metodou je analýza hlavních komponent. Jejím cílem je redukce původního počtu popisovaných proměnných novými veličinami (umělými), označenými jako komponenty, které shrnují informaci o původních proměnných za cenu minimální ztráty informace. Tyto komponenty jsou vzájemně nezávislé a jsou seřazeny podle svého příspěvku k vysvětlení celkového rozptylu pozorovaných proměnných.

Metoda je citlivá na změnu měřítka, proto se provádí normalizace původních proměnných.

Vlastnosti hlavních komponent jsou takové, že 1.komponenta vysvětluje největší množství rozptylu, 2.menší a podíly vysvětleného rozptylu se u dalších komponent zpravidla rychle snižují.

Hlavním komponentám se snažíme při interpretaci přiřadit nějaký reálný význam. Mají charakter faktorů, které stojí v pozadí a reprezentují zobecněné vlivy, vyvolávají variabilitu a ovlivňují strukturu závislosti proměnných. Při interpretaci využíváme především korelace s původními proměnnými.

Analýza hlavních komponent může být chápána jako transformace z původního do nového souřadnicového systému, jehož osy jsou tvořeny hlavními komponentami. Osy procházejí směry maximálního rozptylu, protože podmínka nezávislosti komponent vede ke kolmosti os.



Obr. 17-6 Princíp PCA aplikovaný pro data LandSat TM1 a TM4 (Dobrovolný, 1998)

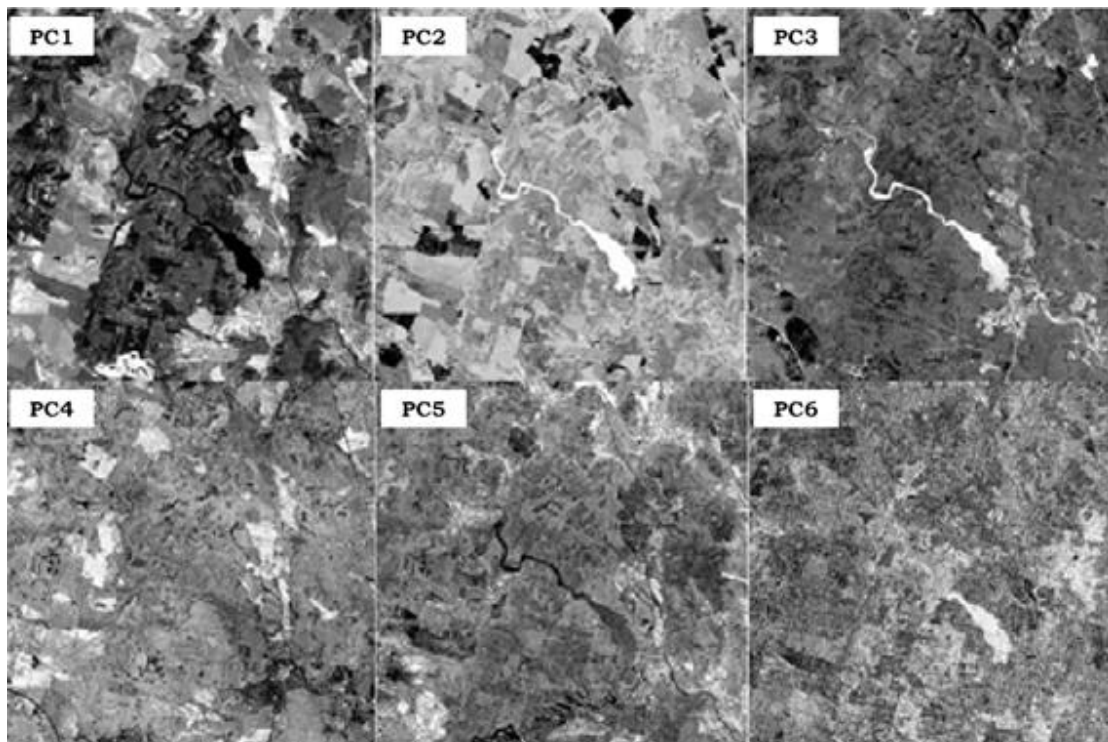
$$PC_1 = a_1TM_1 + a_2TM_2 + a_3TM_3 + a_4TM_4 + a_5TM_5 + a_6TM_7$$

$$PC_2 = b_1TM_1 + b_2TM_2 + b_3TM_3 + b_4TM_4 + b_5TM_5 + b_6TM_7$$

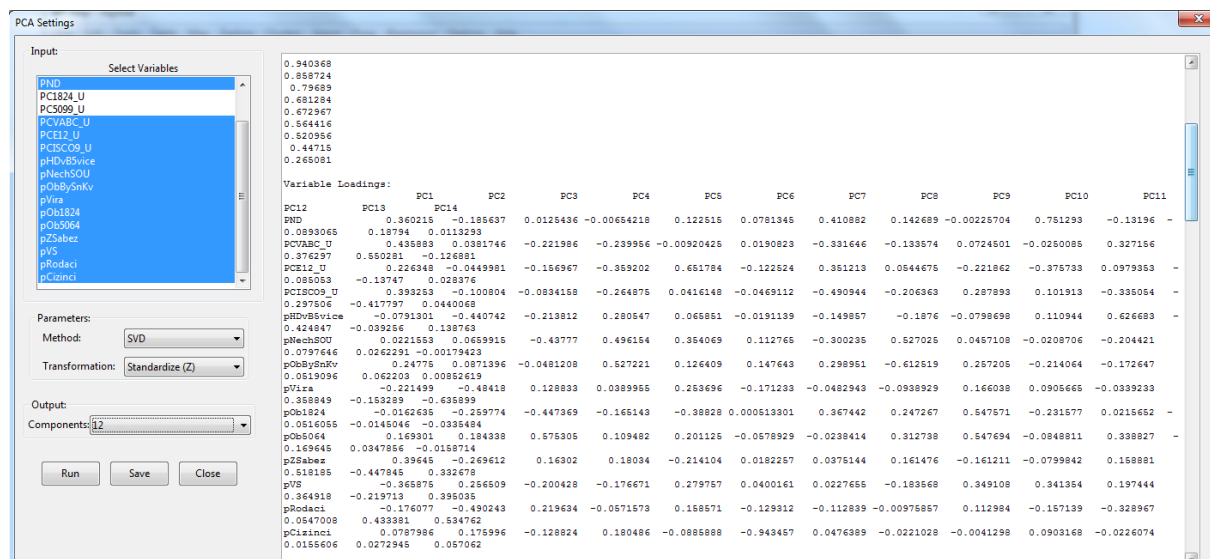
...

Číslo PC	Vlastní čísla	Procenta rozptylu	Kumulov. procenta	Zátěže					
				TM 1	TM 2	TM 3	TM 4	TM 5	TM 7
1	2262,96	75,62	75,62	0,243	0,181	0,346	0,230	0,728	0,454
2	682,34	22,80	98,42	0,115	0,050	0,229	-0,936	-0,012	0,237
3	33,80	1,13	99,55	0,553	0,323	0,513	0,201	-0,531	-0,064
4	7,79	0,26	99,81	-0,264	-0,141	-0,037	0,168	-0,432	0,833
5	4,54	0,15	99,96	0,712	-0,102	-0,668	-0,034	0,000	0,186
6	1,21	0,04	100,00	-0,212	0,911	-0,343	-0,044	-0,022	0,069

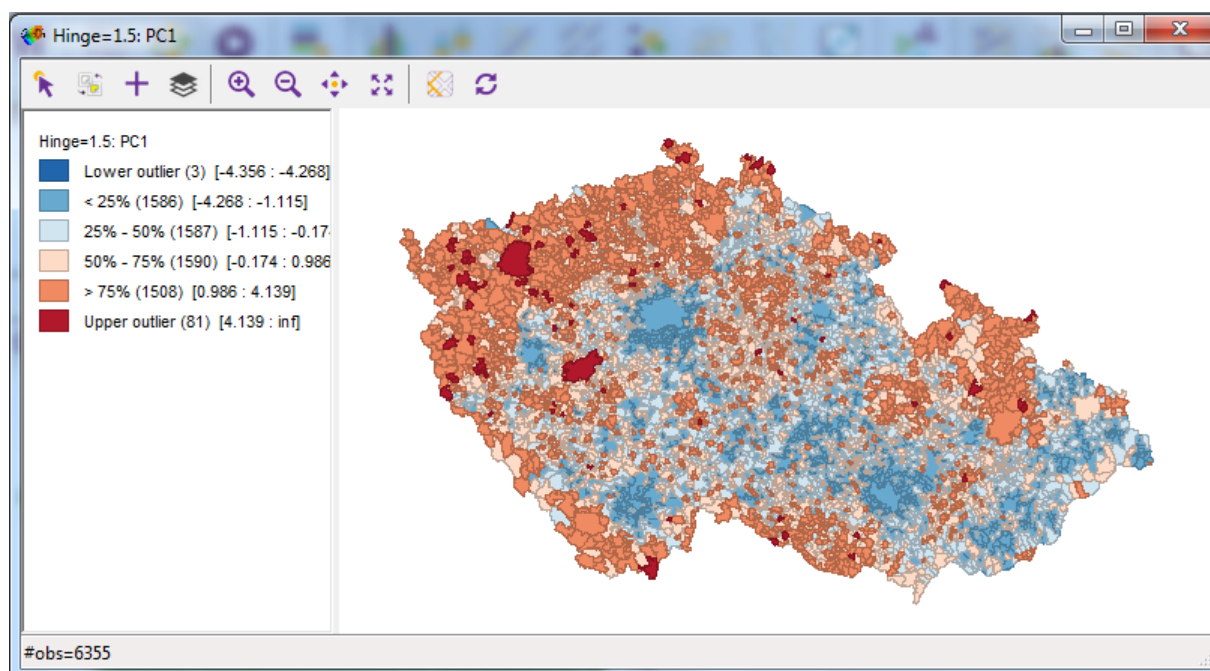
Obr. 17-7 Výsledek PCA pro data LandSat TM (Dobrovolný, 1998)



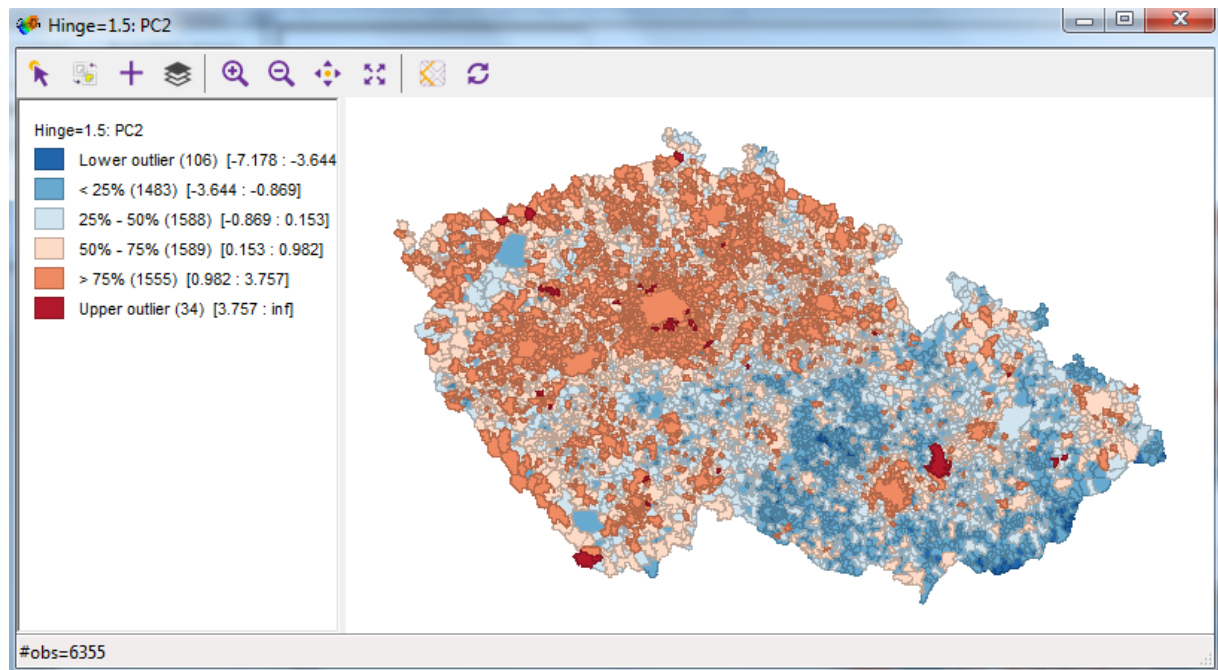
Obr. 17-8 Vizualizace jednotlivých komponent PCA z dat LandSat TM (Dobrovolný, 1998)



Obr. 17-9 Nastavení a výsledky PCA pro faktory ovlivňující nezaměstnanost v obcích ČR



Obr. 17-10 Komponenta PCA1 - vázána na podíl osob s nízkým vzděláním v populaci (pZSabez) i v evidenci nezaměstnaných (PCVABC_U) a na podíl obydlených bytů v bytových domech se sníženou kvalitou (pObBySnKv)



Obr. 17-11 Komponenta PCA2 - silně negativně korelována s podílem věřicích ($pVira$), podílem rodáků ($pRodaci$) a podílem hospodářických domácností v bytech s 5 a více členy domácnosti ($pHDvB5vice$).

17.3 Faktorová analýza

Cílem faktorové analýzy je popsat chování množiny cílových proměnných pomocí menšího počtu nových proměnných, označovaných jako faktory.

Hlavní cíle faktorové analýzy podle Hendla (2006):

1. Analyzovat korelace většího počtu proměnných a vytvořit shluky proměnných, které spolu silně korelují. Proměnné z různých shluků naopak nesmí korelovat. Shluk proměnných je typický pro danou faktorovou proměnnou.
2. Interpretovat faktory podle toho, jaké proměnné obsahuje příslušný shluk.
3. Shrnout variabilitu proměnných pomocí několika málo faktorů.

Hlavní otázky podle Hendla (2006):

- Kolik různých faktorů je zapotřebí k vysvětlení vztahů mezi proměnnými?
- V jakém vztahu jsou faktory k jednotlivým proměnným?
- Jak dobře hypotetické faktory vysvětlují naše data?
- Kolik čistě náhodné variace lze pozorovat u originálních proměnných?

Faktorové zátěže udávají, jakou část variability cílových proměnných vysvětlují (skryté) faktory. Prakticky jde o odmocninu z koeficientů u každého faktoru v rovnici výpočtu celkového standardizovaného rozptylu cílových proměnných.

Nejčastější použití faktorové analýzy je ve formě explorační analýzy.

Faktorová analýza má 3 fáze (Hendl 2006, Řehák, Brom 2015):

- 1) Určíme provizorní faktorové zátěže. Např. pomocí analýzy hlavních komponent PCA a vynecháním těch komponent, které mají jen slabý přínos (malé rozptyly). Dalšími možnostmi jsou např. metoda nevážených nebo obecných nejmenších čtverců, maximální věrohodnosti či faktorování hlavních os. Někdy (ne při použití PCA) však nejsou faktory nekorelované a je nutné je transformovat pomocí lineární transformace.
- 2) Rotace faktorů – nalezení vhodných koeficientů pro lineární transformaci původních faktorů. Vhodné koeficienty jsou např. takové, které jsou blízké 1 nebo 0. To vede ke zlepšení

interpretovatelnosti, protože cílové proměnné pak silně korelují jen s některými faktory (koeficienty blízké 1) a s dalšími slabě. Ortogonální transformace zajistí, že výsledné faktory nejsou korelované. Nejznámější její metody jsou **varimax**, která minimalizuje počet proměnných, které mají vysoké zátěže s každým společným faktorem, **quartimax**, který minimalizuje počet faktorů, potřebných k popisu proměnných, a **equamax**, který tvoří kompromis mezi oběma krajními variantami. Šikmé rotace vytvářejí jednodušší struktury faktorů, které jsou ale korelované. K nim patří metody **oblimin** a **oblimax**.

- 3) Výpočet faktorových skóre – hodnoty jednotlivých faktorů pro každého jedince nebo změřený objekt. Vlastní hodnota (eigenvalue) je číslo, udávající ve faktorové analýze či analýze hlavních komponent, kolik vysvětluje variability ze systému cílových proměnných. Rovněž se počítá komunalita, což je množství variability vysvětlené faktory.

Počet faktorů v modelu se upravuje podle 3 hlavních kritérií (Hendl, 2006), kdy se vyberou faktory, které:

- vysvětlují dohromady více než 90% rozptylu
- mají vlastní číslo větší než 1 nebo než je aritmetický průměr (Kaiserovo pravidlo)
- jsou nad prudkým zlomem ve scree grafu (zobrazení vlastních čísel v sestupném pořadí).

Na rozdíl od explorační analýzy je konfirmační faktorová analýza zaměřena na ověření, zda počet faktorů a jejich zátěže odpovídají předpokladům.

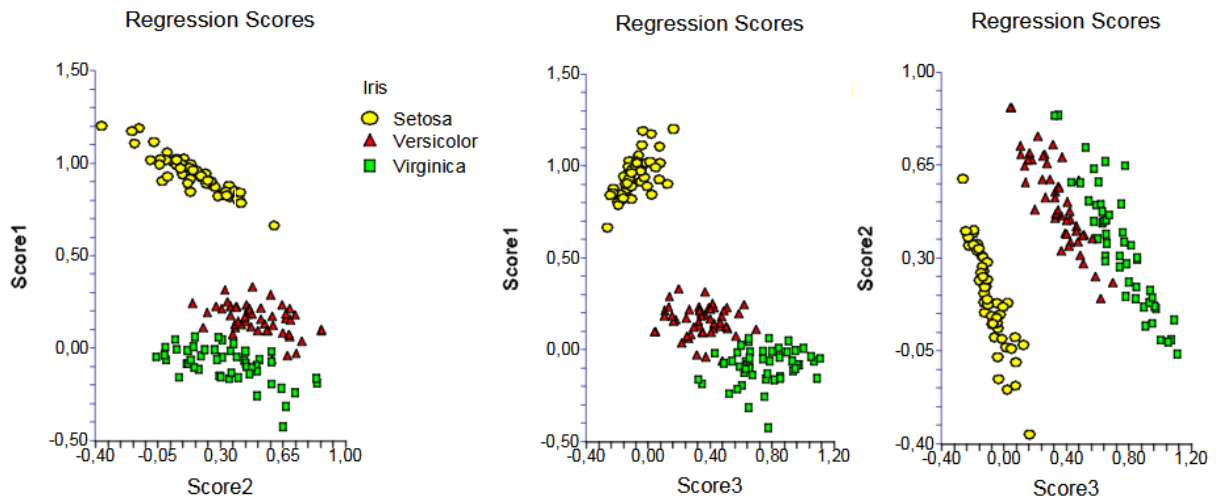
Faktorová analýza má také své kritiky, zejména pro přeceňování výsledků modelování a jejich interpretaci.

17.4 Diskriminační analýza

Diskriminační analýza slouží k nalezení pravidel resp. funkcí, podle kterých lze roztřídit objekty do jednotlivých známých tříd s využitím hodnot vybraných proměnných (diskriminátory).

Postup klasifikace (podle Meloun, Militký, 2002):

- Spočítat základní popisné ukazatele pro každý diskriminátor (aritmetický průměr, směrodatnou odchylku, korelační a kovarianční matice – celkové, mezitřídní a vnitřní)
- Vyšetřit vliv jednotlivých diskriminátorů na výsledky diskriminační analýzy (pomocí testů, hodnotí dopady odstranění této proměnné).
- Odhady neznámých parametrů lineární diskriminační funkce pro každou třídu
- Odhady regresních parametrů lineárního regresního modelu pro každou třídu
- Klasifikace objektů pomocí diskriminační funkce
- Kanonická korelační analýza
- Výpočet diskriminačního skóre všech objektů
- Výpočet regresního skóre všech objektů
- Výpočet kanonického skóre
- Volba významných proměnných (max. 8 nejúčinnějších)
- Výklad grafů (interpretace)



Obr. 17-9 Porovnání diskriminovatelnosti kosatců tří druhů podle regresního skóre 1, 2 a 3 (upraveno z Meloun, Militký, 2002).

18 Regresní modely

Častým cílem modelování je hledání vztahu mezi hodnotami atributů \mathbf{z}_i , prostorovým uspořádáním areálů A_i a také hodnotami dalších atributů $\mathbf{x}_i^T(x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{ip})$ zaznamenanými v areálu A_i .

Z hlediska uplatnění prostorové složky popisu dat a konstrukce se rozdělují regresní modely na:

- Neprostorové
- Prostorové
- Generalizované

18.1 Neprostorový regresní model

Neprostorový regresní model využívá jednoduchý standardní regresní model, kde se nevyužívají prostorové vztahy mezi areály. Z hlediska zpracování představují sady atributů naměřených v jednotlivých místech sady proměnných (vektory) X , které vystupují v regresní rovnici a na základě které se vypočítává nová hodnota Y . Regresní model obecně vychází ze vztahu:

$$Y = X * \beta + \varepsilon$$

kde

- Y_i vektor $n \times 1$ náhodných závisle proměnných v místě i (výsledná hodnota)
- X_i matice $n \times p$ nezávisle proměnných zjištěných v místě (areálu i)
- n počet sad pozorování (počet míst, resp. vzorků)
- p počet proměnných zjištěných u 1 místa (a uplatněných zde ve výpočtu)
- β vektor $p \times 1$ parametrů
- ε vektor $n \times 1$ náhodných proměnných, které reprezentují odchylky od trendu. Odchylky od trendu se označují jako fluktuace, disturbance, někdy jsou interpretovány jako chyby. Střední hodnota ε musí být nulová, střední hodnota ($\varepsilon * \varepsilon^T$) je rovna rozptylu.

Tento základní model se uplatňuje ve všech lineárních regresních modelech. Obsahuje 2 základní komponenty. První představuje odhad průměrné hodnoty Y na základě známých veličin X a samozřejmě odhad parametrů β , které vztahy mezi Y a X popisují. Druhá komponenta sleduje, jak jsou získané hodnoty Y rozloženy kolem střední hodnoty, sleduje odchylky a tedy popisuje distribuci fluktuací.

Standardní model předpokládá konstantní rozptyl fluktuací ε_i v celém území, nezávislost hodnoty rozptylu v jednotlivých místech a žádnou prostorovou autokorelaci. K výpočtu hodnot β a ε (k optimalizaci modelu) se díky lineárnímu modelu používá metoda nejmenších čtverců. Odhad metodou nejmenších čtverců je však dobrý jen v případě, že rozdělení reziduí je normální.

Standardní vícenásobný regresní model je popisován v řadě statistických učebnic, včetně výpočtu jeho spolehlivosti (koef. determinace apod.) viz např. (Víšek 1998).

Jak již bylo uvedeno, tento základní model předpokládá jen existenci variací 1.řádu a nepřítomnost variací 2.řádu. V řadě případů to však neplatí a rezidua jsou např. prostorově korelována a rozptyl v území se mění. Úprava nekonstantních rozptylů v jednotlivých areálech tak, aby se dosáhlo jeho vyrovnání, může být prováděna v zásadě váženou regresí nebo pomocí transformace měřených hodnot. Transformace jsou doporučovány zvláště pro případy, kdy zájmová proměnná tvoří počet nebo podíl (absolutní a relativní hodnoty).

V případě počtu (absolutní data) se předpokládá Poissonova distribuce pro tato data a jako transformace se využívá odmocnná transformace $\sqrt{y_i}$, která stabilizuje rozptyl (je pak konstantní), nebo logaritmická transformace $\ln(y_i)$, která má výhodu v linearizaci násobných vztahů. Sřetáváme se zde s problémem úpravy dat, aby vyhověly současně 2 podmínkám, tj. požadavku konstantního

rozptylu v celé oblasti a požadavku lineárního vztahu mezi \mathbf{X} a \mathbf{Y} (mezi středními hodnotami \mathbf{Y} a nezávislých proměnných $(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots, \mathbf{X}_p)$).

V případě podílu z celku (relativní data) je situace složitější, protože se musí dodržovat rozsah podílu $\langle 0,1 \rangle$. Jako vhodné uvádí Bailey, Gattrell (1995) úhlovou transformaci a logitovou transformaci, ale upozorňují, že výsledky nejsou zcela uspokojivé, navrhuje další úpravu transformace a použití vážené regrese a především generalizovaných lineárních modelů, kde se již počítá s efekty 2.řádu a prostorovou korelací reziduí. Řešení odvozování parametrů pomocí metody maximální věrohodnosti někteří autoři nedoporučují z praktických důvodů (výpočetní náročnost, tvorba samostatného modelu pro každý výpočet).

Úhlová transformace:

$$\frac{1}{\sin \sqrt{y_i}}$$

Logitová transformace:

$$\log\left(\frac{y_i}{1-y_i}\right)$$

Logistická distribuční funkce se používá z důvodu dobré aproximace normální distribuce (max. odchylka 0.11). Funkce má zrychlující se růst až do inflexního bodu, pak se růst zpomaluje až se v nekonečnu zastaví.

Příklad aplikace jednoduchého regresního modelu s logistickou funkcí pro oblast trhu práce uvádí Nijkamp, Rietveld (1987). Základní model epidemického šíření infekční choroby v populaci byl použit pro modelování šíření informací o inovaci nového produktu či procesu. Rychlost difúze závisí na řadě věcí např. na komunikační síti, četnosti kontaktů a ochotě příjemce informace aplikovat inovaci. Pokud budeme předpokládat stejnou pravděpodobnost kontaktů mezi lidmi, dále že každý se může stát potenciálním příjemcem a že frekvence kontaktů ani chování příjemců se nemění během působení, můžeme použít následující model:

$$p(t) = \frac{1}{1 + e^{(a-b*t)}}$$

kde

t	čas
p(t)	podíl příjemců v čase t
a	parametr určující počáteční bod
b	parametr určující poměr růstu populace (příjemců). Musí platit $b > 0$.

Je třeba dodat, že základní tvar logistické křivky má v čitateli místo jedničky \mathbf{k} (\mathbf{k} je hodnota, ke které se funkce blíží, ale nepřekročí ji). Parametr \mathbf{b} znamená rychlost, s jakou se křivka blíží limitě.

Základní předpoklady jsou značně jednoduché a nijak se např. nezohledňuje prostorový aspekt. Model je možno rozšířit zahrnutím role vzdálenosti. Předpokládáme, že kontakty mezi blízko žijící osobami jsou častější a podobně i podíl příjemců nezávisí jen na čase, ale i na vzdálenosti, kde byla inovace přijata. Vzdálenost lze implementovat náhradou $a = a_1 + a_2d$ ($a_2 > 0$), podobně parametr $b = b_1 + b_2d$.

Vážená metoda nejmenších čtverců je vhodná pro případy heteroskedacity. Každá primární hodnota v regresním vztahu je vážena inverzní hodnotou příslušného rozptylu, takže proměnné s větším rozptylem získávají v regresní rovnici menší váhu.

18.2 Regresní modely s explicitním geografickým faktorem

Regresní modely s explicitním geografickým faktorem zahrnují standardní regresní modely (např. OLS), kde je zahrnut geografický faktor ve formě běžného atributu.

Můžeme rozlišit 2 základní situace podle typu tohoto atributu. První možností je použití klasického číselného (poměrová data, ratio) atributu, který lze využít v řadě regresních modelů. Příkladem je třeba zkoumání vlivu vzdálenosti od centra města, či vzdálenosti od pobřeží, či dokonce prosté použití souřadnic X, Y, zem.šířka či délka.

Druhou možností jsou geografické atributy ve formě binární či nominální proměnné. I když i takové proměnné lze využít v některých typech regresních modelů, zpravidla se jednoduše regresní analýza provede samostatně pro každou hodnotu sledovaného geografického faktoru a posoudí se statistická významnost odchylek těchto dílčích regresních modelů (např. pomocí Chowova testu).

Příkladem může být testování závislosti ceny AirBnB ubytování v San Diego na geografickém faktu, zda se ubytování nachází nebo nenachází na pobřeží. Lineární regresní model se optimalizoval zvlášť pro obě situace (obr. 18-1) a následný Chowův test (obr. 18-2) potvrdil odlišnost obou modelů (a tedy i vliv pobřeží na cenu).

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Probability
0_CONSTANT	4.4072424	0.0215156	204.8392695	0.0000000
0_accommodates	0.0901860	0.0064737	13.9311338	0.0000000
0_bathrooms	0.1433760	0.0142680	10.0487871	0.0000000
0_bedrooms	0.1129626	0.0138273	8.1695568	0.0000000
0_beds	-0.0262719	0.0088380	-2.9726102	0.0029644
0_rt_Private_room	-0.5293343	0.0189179	-27.9805699	0.0000000
0_rt_Shared_room	-1.2244586	0.0425969	-28.7452834	0.0000000
0_pg_Condominium	0.1053065	0.0281309	3.7434523	0.0001832
0_pg_House	-0.0454471	0.0179571	-2.5308637	0.0114032
0_pg_Other	0.0607526	0.0276365	2.1982715	0.0279673
0_pg_Townhouse	-0.0103973	0.0456730	-0.2276456	0.8199294
1_CONSTANT	4.4799043	0.0250938	178.5260014	0.0000000
1_accommodates	0.0484639	0.0078806	6.1497397	0.0000000
1_bathrooms	0.2474779	0.0165661	14.9388057	0.0000000
1_bedrooms	0.1897404	0.0179229	10.5864676	0.0000000
1_beds	-0.0506077	0.0107429	-4.7107925	0.0000025
1_rt_Private_room	-0.5586281	0.0283122	-19.7309699	0.0000000
1_rt_Shared_room	-1.0528541	0.0841745	-12.5079997	0.0000000
1_pg_Condominium	0.2044470	0.0339434	6.0231780	0.0000000
1_pg_House	0.0753534	0.0233783	3.2232188	0.0012743
1_pg_Other	0.2954848	0.0386455	7.6460385	0.0000000
1_pg_Townhouse	-0.0735077	0.0493672	-1.4889984	0.1365396

Obr. 18-1 Dva lineární regresní modely (modře není na pobřeží, zeleně je na pobřeží) pro ceny ubytování v San Diego

REGIMES DIAGNOSTICS - CHOW TEST				
VARIABLE	DF	VALUE	PROB	
CONSTANT	1	4.832	0.0279	
accommodates	1	16.736	0.0000	
bathrooms	1	22.671	0.0000	
bedrooms	1	11.504	0.0007	
beds	1	3.060	0.0802	
pg_Condominium	1	5.057	0.0245	
pg_House	1	16.793	0.0000	
pg_Other	1	24.410	0.0000	
pg_Townhouse	1	0.881	0.3480	
rt_Private_room	1	0.740	0.3896	
rt_Shared_room	1	3.309	0.0689	
Global test	11	328.869	0.0000	

Obr. 18-2 Srovnání statistické významnosti odchylek parametrů dvou lineárních regresních modelů pro ceny ubytování v San Diego

Další možností je zahrnout vliv okolí tím, že se do modelu vloží další proměnné typu průměrná hodnota sledovaných nezávisle proměnných v okolí.

18.3 Prostorový regresní model

Prostorový regresní model umožňuje zahrnout do jednoduchého regresního modelu předpoklad prostorové korelace reziduí. V tomto případě se místo vektoru odchylek ϵ do rovnice dosazuje vektor odchylek U , který má popsánu kovarianční matici C (a střední hodnota U je nulová).

Kovarianční matici C lze odvodit pomocí strukturální analýzy pro uvedenou oblast, za předpokladu stacionárního procesu 2.řádu s nulovou střední hodnotou.

Předpoklad stacionarity 2.řádu je obtížné dodržet pro areálová data. Dokonce i když je zdrojový proces stacionární, agregace do nepravidelných oblastí způsobuje, že rozptyl i kovariance není stálá pro celou oblast. Navíc nemáme jednoduché měření vzdálenosti/blízkosti mezi areály (viz typy sousedství). Proto se vedle klasické strukturální analýzy uplatňují i jiné postupy, např. interakční schéma. Do základního regresního modelu jsou zahrnuty vztahy mezi proměnnými a jejich hodnotami v sousedství a nepřímo se tak odvozuje matice C . Výhodou tohoto postupu je, že není vyžadována stacionarita 2.řádu ani využití Euklidovských vzdáleností. Matice U se pak vyjadřuje ve tvaru:

$$Y = X\beta + U \quad U = \rho WU + \epsilon$$

kde

- W standardizovaná matice blízkosti (vazeb mezi areály)
- ϵ vektor nezávislých náhodných odchylek
- ρ vektor autokorelačních parametrů

Matici blízkosti lze standardizovat (tedy stabilizovat rozptyl) pomocí C schématu (globální standardizace), W schématu (řádková standardizace, suma na řádku se rovná 1) nebo S schématu (leží mezi C a W). Běžně se doporučuje řádková standardizace (tedy W schéma).

Ukázku standardizace popisuje LeSage (1998):

$$W = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

Při plné závislosti na okolí by se cílová hodnota Y spočítala z okolních hodnot y

$$\begin{pmatrix} y_1^* \\ y_2^* \\ y_3^* \\ y_4^* \\ y_5^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0.5 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} y_1^* \\ y_2^* \\ y_3^* \\ y_4^* \\ y_5^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_2 \\ y_1 \\ 1/2y_4 + 1/2y_5 \\ 1/2y_3 + 1/2y_5 \\ 1/2y_3 + 1/2y_4 \end{pmatrix}$$

18.3.1 Prostorový autoregresní model

Typický čistě prostorový autoregresní model (*spatial autoregressive model SAR*) používá k výpočtu cílové proměnné **pouze** její hodnoty v sousedství. Jde o **model prostorového kroku (spatial lag model)**, který lze snadno vyjádřit jako:

$$\mathbf{y} = \rho \mathbf{W}\mathbf{y} + \boldsymbol{\varepsilon}$$

Autoregresní parametr ρ se odhaduje z dat. Matice prostorových vah W se téměř vždy standardizuje na řádek (W schéma, viz výše), protože to efektivně zahrne vážený průměr okolních hodnot do regresní rovnice (Smith et al, 2018). Pro 1 pozorování je tak možno vyjádřit:

$$y_i = \rho \sum_j w_{ij} y_j + \varepsilon_i$$

Zpravidla se v autoregresní funkci použijí pouze sousedé 1.řádu. Pak se někdy model označuje jako FAR (*first-order spatial autoregression model*).

Pokud se do modelu přidají tradiční vysvětlovací proměnné X , pak finální odhad Y závisí jak na prostoru tak i na nezávislých proměnných X_i a dostaneme **smíšený regresně-prostorový autoregresní model** (*mixed regressive spatial autoregressive model mrsa*). Někdy se v SW označuje jako *lagged response model*.

$$\mathbf{Y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \rho \mathbf{W}\mathbf{Y} + \boldsymbol{\varepsilon}$$

Po úpravě:

$$\mathbf{y} = (\mathbf{I} - \rho \mathbf{W})^{-1} \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + (\mathbf{I} - \rho \mathbf{W})^{-1} \boldsymbol{\varepsilon}$$

Je zřejmé, že model má 2 složky – nezávisle proměnné a chyby, obě vylepšené prostorovou autokorelací. Cílem je vylepšení standardního OLS modelu o prostorovou regresní složku.

Tento typ modelu může být vytvořen řadou dosti odlišných procesů od prostorové difúze, přes různé formy prostorové interakce až po nepřímé procesy jako je distribuce zdrojů (Smith et al. 2018).

Bohužel tento nedostatek jasné vazby mezi procesem a vytvořeným prostorovým vzorem je pro prostorové analýzy typický.

Druhý přístup k SAR modelování se označuje jako **autokorelační chybový model (spatial error model)**. Model se aplikuje tehdy, kdy se sice projevuje silná prostorová autokorelace, ale model spatial lag neposkytuje dobré řešení.

Program GeoDa implementuje tento model. Model hodnotí prostorovou závislost chyb modelu a optimalizuje model vůči chybám. Zavádí nový parametr λ jako koeficient prostorové korelace chyb modelu:

$$\mathbf{Y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon} \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \lambda\mathbf{W}\boldsymbol{\varepsilon} + \mathbf{u}$$

kde $\boldsymbol{\varepsilon}$ je vektor prostorově autokorelovaných chyb
 \mathbf{u} je vektor chyb

Podobně jako dříve i zde lze upravit vzorec pro výpočet chyb:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = (\mathbf{I} - \lambda\mathbf{W})^{-1}\mathbf{u}$$

Pokud vyjádříme, že $\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{Y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta}$ a dosadíme, dostaneme:

$$\mathbf{Y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \lambda\mathbf{W}\mathbf{Y} - \lambda\mathbf{W}\mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \mathbf{u}$$

kde

- člen $\mathbf{X}\boldsymbol{\beta}$ vyjadřuje celkový trend
- člen $\lambda\mathbf{W}\mathbf{Y}$ vyjadřuje vliv okolí
- člen $\lambda\mathbf{W}\mathbf{X}\boldsymbol{\beta}$ vyjadřuje místní (lokální) trend

Tedy je tedy model vyjádřen jako kombinace globálního lineárního trendu, autokorelační komponenty pro \mathbf{Y} , lokálního trendu \mathbf{X} hodnot a vektoru náhodných chyb \mathbf{u} .

Tedy autokorelační chybový model (spatial error model) lze chápat jako spatial lag model doplněný o další prostorovou komponentu a to o místní trend.

Vystupuje zde jediný interakční parametr λ ve významu autokorelačního koeficientu. Právě odhad tohoto parametru vyžaduje zvláštní iterační postupy, protože odhad metodou nejmenších čtverců pro tento parametr je vychýlený a nekonzistentní. Tiefelsdorf (2000) upozorňuje na problémy s odvozením členu $\lambda\mathbf{W}\mathbf{Y}$ v rovnici, protože je závislý jak na nezávislé proměnné \mathbf{X} , tak i na hodnotách odchylek \mathbf{U} .

Dalším typem prostorových regresních modelů je **podmíněný autoregresní model (CAR)**:

$$\mathbf{Y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \mathbf{U}$$

$$\mathbf{U} = \rho\mathbf{W}^{(1)}\mathbf{U} + \rho\mathbf{W}^{(2)}\mathbf{U} + \dots + \boldsymbol{\varepsilon}$$

kde

$\mathbf{W}^{(k)}$ je matice blízkosti pro řádek \mathbf{k} (pro různé prostorové kroky, tedy sousedství 1.řádu, 2.řádu atd.)

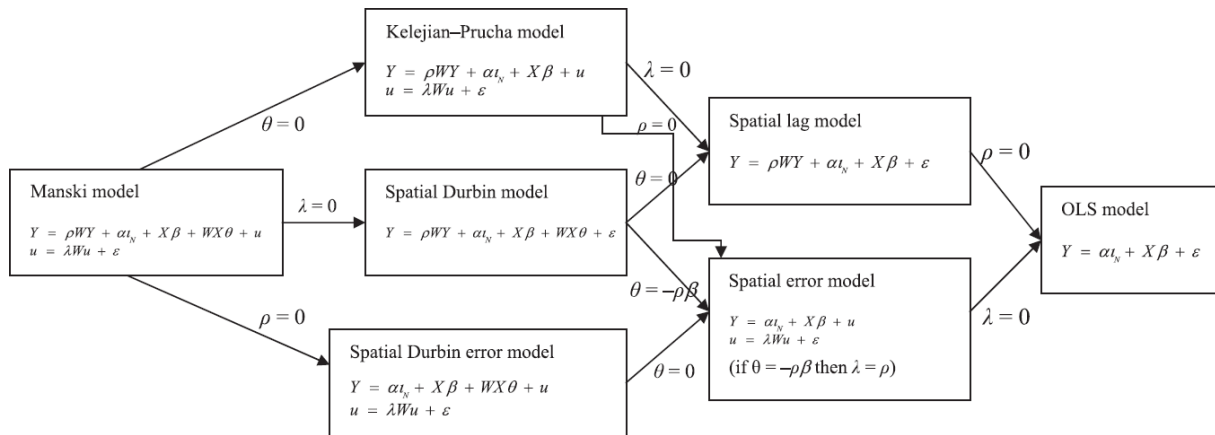
Modely lze dále rozšiřovat doplňováním dalších faktorů.

Prostorová ekonometrie předpokládá uniformní (jednotnou) prostorovou závislost v celé studované oblasti a vychází tak z **globálního odhadu prostorové závislosti**. Tato metoda bývá nazývána semilokální statistikou. Prostorové regresní modely mohou teoreticky vycházet z těchto situací:

- hodnota y závisí na okolních hodnotách y ,
- hodnota y závisí na x v daném místě a také na x v okolí,

- hodnota y závisí na x v daném místě a také na x a y v okolí nebo
- velikost rezidua je závislá na velikosti chyb v okolí.

Na základě těchto teoretických situací bylo vymezeno osm základních lineárních prostorových regresních modelů, kdy dochází k postupnému zjednodušování. Na obrázku níže je uvedena hierarchie těchto modelů, kdy WY charakterizuje prostorový vliv závislé proměnné a Wu pak vliv prostorově autokorelované chyby. Obrázek rovněž obsahuje rovnice těchto modelů (Ivan, 2014).



Obr. 18-3 Typologie prostorových regresních modelů (Elhorst, 2010)

Manskiho model je nejobecnější model, do kterého vstupuje jak prostorový vliv závislé, tak i prostorový vliv nezávislé proměnné tak i prostorově autokorelované chyby (členy postupně korelace závislé proměnné Y , pak 2 členy pro neprostorovou regresi, pak člen korelace závislé veličiny a nakonec autokorelovaná chyba). **Kelejian-Prucha model** již nepracuje s prostorovým vlivem nezávislé proměnné, ale jen s prostorovým vlivem závislé proměnné a prostorově autokorelovanou chybou. **Prostorový Durbanův model** pracuje s prostorovým vlivem závislé a nezávislé proměnné a nepočítá s prostorovou autokorelací chyby. Poslední z této skupiny modelů je **Prostorový Durbanův chybový model**, do kterého vstupuje prostorový vliv nezávislé proměnné a prostorově autokorelované chyby. Spatial lag model obsahuje jen prostorový vliv závislé proměnné a spatial error model pracuje jen s prostorově autokorelovanou chybou. Další možností je již pouhý lineární neprostorový model využívající zpravidla metodu nejmenších čtverců (OLS). Poslední dva prostorové modely jsou implementovány v programu GeoDa, komplikovanější modely je možné najít v knihovněch pro R projekt (Ivan, 2014).

Příklad: Odhad kriminality z příjmů a hodnoty domů (LeSage 1998) – srovnajte výsledek běžné regresní analýzy a prostorové regresní analýzy SAR. Rozdíl 10% (z 0,55 na 0,65) ve vysvětlení variability je vysvětleno prostorovou závislostí (Obr. 18-2).

```

Ordinary Least-squares Estimates
Dependent Variable =      Crime
R-squared      =      0.5521
Rbar-squared   =      0.5327
sigma^2        =     130.8386
Durbin-Watson  =      1.1934
Nobs, Nvars    =      49,    3
*****
Variable      Coefficient    t-statistic    t-probability
constant      68.609759      14.484270      0.000000
income        -1.596072      -4.776038      0.000019
house value   -0.274079      -2.655006      0.010858

```

```

Spatial autoregressive Model Estimates
Dependent Variable =      Crime
R-squared      =      0.6518
Rbar-squared   =      0.6366
sigma^2        =      95.5032
log-likelihood =      -165.41269
Nobs, Nvars    =      49,      3
*****
Variable      Coefficient      t-statistic      t-probability
constant      45.056251      6.231261      0.000000
income        -1.030641      -3.373768      0.001534
house value   -0.265970      -3.004945      0.004331
rho           0.431381      3.625340      0.000732

```

Obr. 18-2 Výsledky běžné regresní analýzy a prostorové regresní analýzy kriminality (LeSage 1998)

18.3.2 Geograficky vážená regrese

Zcela odlišný přístup je použit u geograficky vážené regrese (GWR). Doporučuje se provádět současně modelování oběma způsoby (SAR, příp. CAR, a GWR), protože každý z nich sleduje jiné vlivy a má jinou interpretaci.

Při použití GWR můžeme získat jiný funkční vztah mezi dvěma proměnnými v závislosti na charakteru určitého regionu atd. Například vztah mezi cenou bytu a hustotou zalidnění v jeho okolí může být prostorově velmi odlišný, neboť na cenu bytu má vliv množství dalších charakteristik, které uvedený vztah modifikují (Spurná 2008).

Prostorové regresní metody nám dovolují odhalit např. přítomnost tzv. Simpsonova paradoxu, který označuje obrácení závislosti na lokální úrovni, kdy partiální vztahy jsou silnější než vztah původní. I když je Simpsonův paradox obvykle demonstrován na neprostorových datech, kde dochází k agregaci subpopulací, příklady z geografické literatury (Spurná 2006) dokazují, že platí rovněž pro agregovaná prostorová data, a poukazují tak na nebezpečí spojené s analýzou dat za větší území. Může se totiž stát, že nalezený závěr bude pravým opakem reálných vztahů, které platí na lokální úrovni.

Metoda GWR tedy předpokládá možnost existence prostorových odlišností ve vztazích dvou a více proměnných a poskytuje způsob, jak tyto odchylky měřit.

Základem je vztah:

$$y = X\beta(t) + \varepsilon$$

Koeficienty $\beta(t)$ jsou určovány ze sady bodů v definovaném okolí každého měřeného místa. Okolí je většinou kruhové s poloměrem r (anizotropní modely nejsou v současnosti podporovány). Namísto konstantní hodnoty r se používá vzdálenostní funkce vedoucí ke kernelovým odhadům. Nejčastěji se používá (Smith et al., 2018):

$$f(d) = e^{-d^2/2h^2}, \text{ or } f(d) = e^{-d/h}, \text{ or}$$

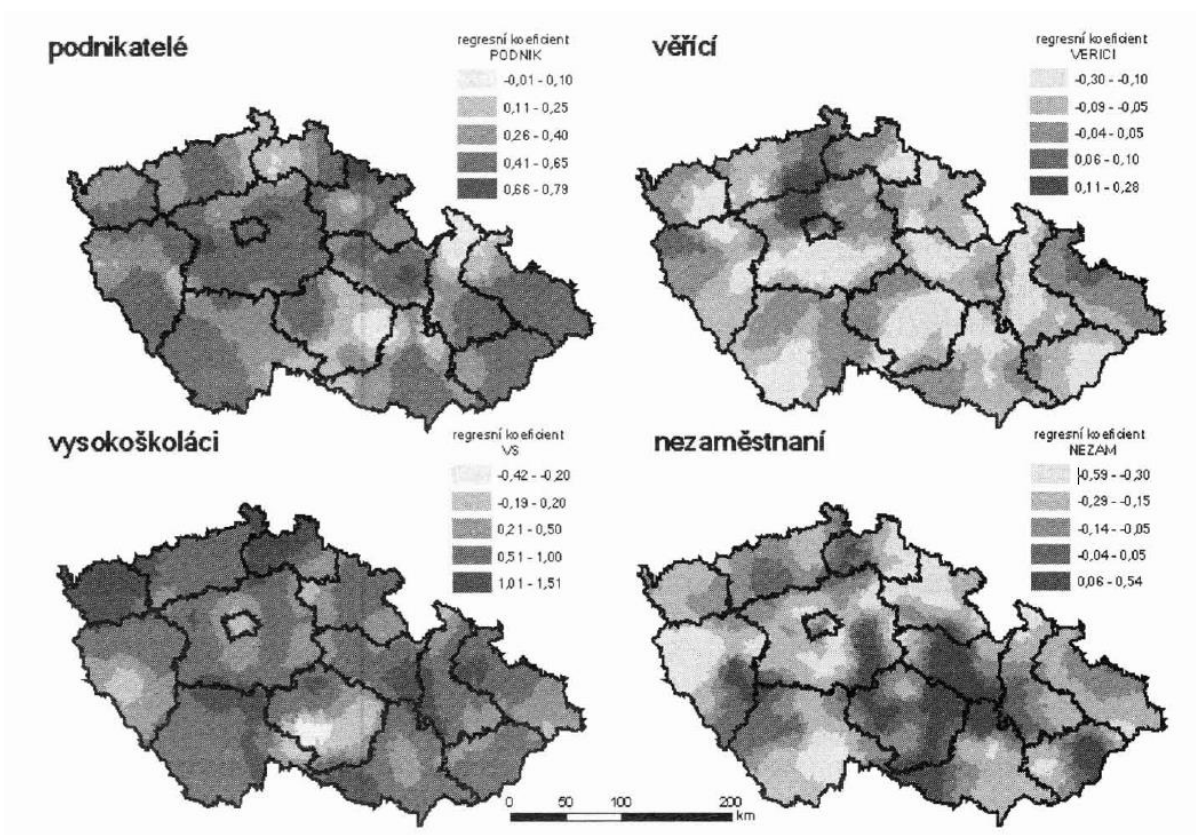
$$f(d) = \left(1 - \frac{d^2}{h^2}\right)^2, d < r, f(d) = 0 \text{ otherwise}$$

kde h je šířka pásma. Pro jeho optimalizaci se používá křížová validace nebo Akaike informační kritérium AIC.

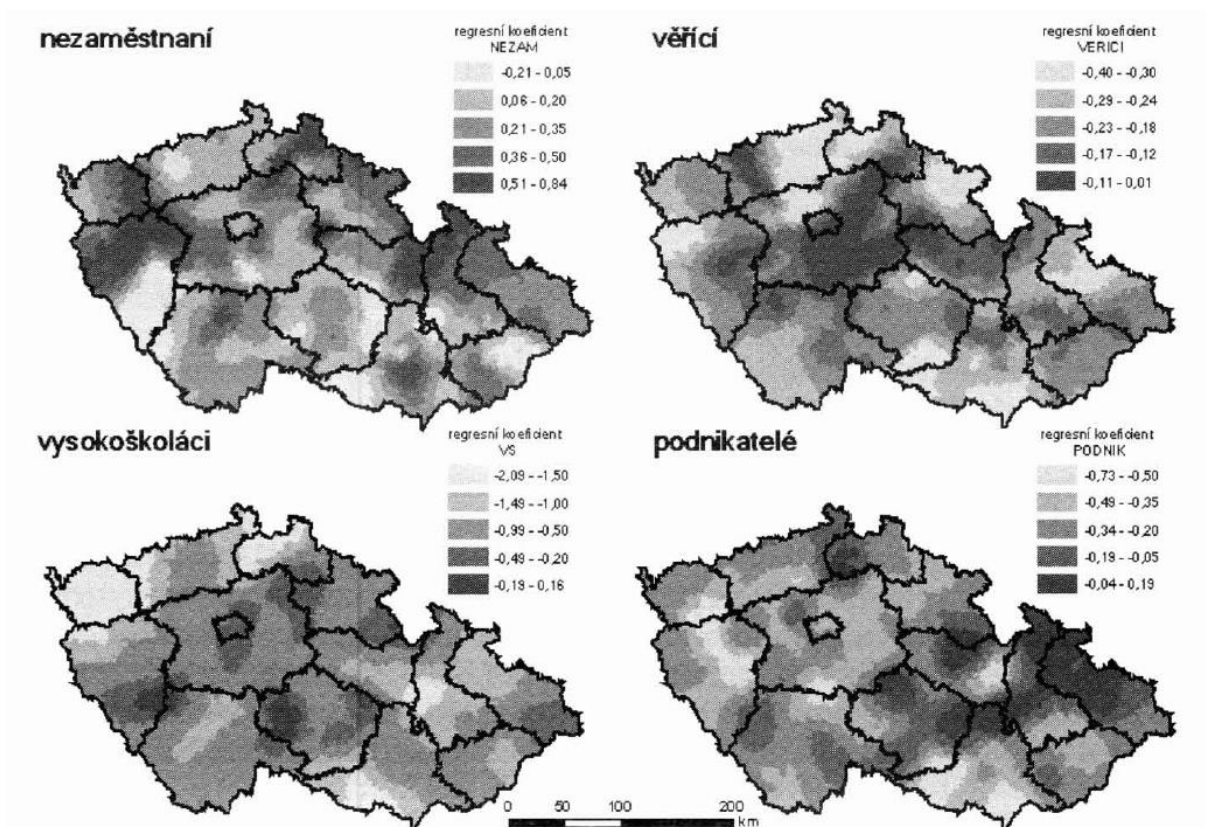
Vynesení výsledných odhadů lokálních regresních parametrů do mapy je následně přehledně znázorněn charakter zkoumaného vztahu.

Tab. 18-1 Srovnání výsledků neprostorové mnohonásobné lineární regrese a geograficky vážené regrese (Spurná 2008).

Vysvětlující proměnné	Mnohonásobná lineární regrese			Geograficky vážená regrese				
	r^2	Beta	sig. 1	r^2	b_{\min}	$b_{\text{medián}}$	b_{\max}	sig. 2
ODS	0,369			0,492				
PODNIK		0,306	0,000		-0,014	0,409	0,792	0,060
VERICI		-0,336	0,000		-0,299	-0,067	0,275	0,000
VS		0,211	0,000		-0,416	0,628	1,505	0,000
NEZAM		-0,150	0,000		-0,585	-0,130	0,542	0,000
KSČM	0,318			0,494				
NEZAM		0,284	0,000		-0,217	0,228	0,841	0,000
VERICI		-0,296	0,000		-0,396	-0,206	0,006	0,000
VS		-0,228	0,000		-2,093	-0,767	0,159	0,000
PODNIK		-0,200	0,000		-0,725	-0,295	0,185	0,000



Obr. 18-3 Výsledky GWR pro volební preference ODS v roce 2002 (Spurná 2008)



Obr. 18-4 Výsledky GWR pro volební preference KSČM v roce 2002 (Spurná 2008)

Výsledky regresního modelu mohou být srovnány s výsledky Chowova testu, který měří stabilitu regresních koeficientů v jednotlivých subregionech dat proti celé populaci (Guajarati 2003 in Kouba 2007). Standardní regresní model předpokládá homogenitu regresních koeficientů pro celou populaci. Chowův test (na bázi F testů) ověřuje srovnáním teoreticky zdůvodněných oblastí dat s celkovou populací, zda a nakolik je tento předpoklad oprávněný. Jeho interpretace využívá F pravděpodobnostní distribuci se zvolenou mírou pravděpodobnosti (zde často $p < 0.01$). Pokud je vypočtené F nižší než kritické F, musíme přijmout nulovou hypotézu, že regresní parametry jsou stabilní pro celou populaci. V opačném případě, kdy F je vyšší než kritické F, jsou regresní koeficienty v území nestabilní a můžeme hovořit o nehomogenním území (o přítomnosti různých „prostorových režimů“) (Kouba 2007).

Praktické výsledky ukazuje např. Kouba (2007) ve svém příspěvku k regionalizaci českého stranického systému. V případě Moravy nebyla prostorová nehomogenita v regresních vztazích potvrzena (tedy neprojevil se prostorové rozdíly), v případě Čech se prokázalo, že u sudetských okresů zde získává KSČM zhruba o 2% hlasů více ve srovnání se zbytkem země, naopak ODS je relativně úspěšnější v nesudetských okresech.

18.3.3 Generalizované lineární modely

Generalizovaný lineární model zahrnuje jak standardní regresní model (předpoklad normální distribuce odchylek), tak i možnost modelovat distribuci odchylek pomocí binomické či Poissonovy distribuce a také využití log-lineárních modelů. K odvozování parametrů se používá metoda maximální věrohodnosti, implementovaná pomocí techniky označované jako procedura nejmenších čtverců s iteračním vícenásobným vážením.

Generalizovaný lineární model se skládá opět ze dvou základních komponent - pro komponentu odchylek se používá distribuce normální, binomická či Poissonova, pro komponentu trendu se používá monotónní spojovací hladká funkce $g()$.

$$g(\mu_i) = \mathbf{X}_i^T \boldsymbol{\beta}$$

kde

μ_i	střední hodnota \mathbf{Y} v místě \mathbf{i}
\mathbf{X}_i^T	transponovaný vektor nezávislých proměnných \mathbf{X} v místě \mathbf{i}
$\boldsymbol{\beta}$	vektor parametrů

Spojovací funkce $\mathbf{g}()$ umožňuje nelineární vztah mezi střední hodnotou závislé veličiny X a nezávislých proměnných X (resp. $\mathbf{X}\boldsymbol{\beta}$). Distribuce chyb se modeluje zvlášť, což samozřejmě nepředstavuje zcela komplexní a obecné řešení.

Např. pro data typu počet (absolutní data) se používá Poissonova distribuce chyb a logaritmická spojovací funkce:

$$\log(\mu_i) = X_i^T \boldsymbol{\beta}$$

Pro podíly (relativní data) se používá binomická distribuce chyb a logitová spojovací funkce:

$$\log\left(\frac{\mu_i}{1-\mu_i}\right) = X_i^T \boldsymbol{\beta}$$

Např. tedy

$$\log\left(\frac{\mu_i}{1-\mu_i}\right) = \beta_1 + \beta_2 X_i$$

Pomocí vážené regrese se vypočte první odhad parametrů $\boldsymbol{\beta}$ a ten se postupně zpřesňuje iteračním postupem opět s využitím vážené regrese. Způsob ocenění kvality modelu je popsán např. v Bailey, Gatrell 1995. Cressie (1993) využívá jako spojovací funkci druhou odmocninu a doporučuje použít Freeman-Tukey transformaci pro tento účel, protože vykazuje větší stabilitu.

Nezanedbatelnou výhodou generalizovaného lineárního modelu je možnost využití i nominálních nezávislých proměnných (resp. binárních ve tvaru indikátorů), tak i možnost využít kategorizovaná data.

Regresní modely jsou socioekonomické oblasti poměrně populární, relativně málo však nacházíme příklady prostorových regresních modelů. Přitom právě uplatnění těchto principů představuje významné vylepšení modelů. V oblasti socioekonomických aplikací se vzhledem k vazbě na distribuci obyvatelstva předpokládá výrazný autokorelační efekt, který lze jen stěží do běžných regresních modelů zahrnout. V případě prostorových regresních modelů je přímo implementován a dokonce se nemusí ani popisovat struktura pole.

19 Seznam literatury

Anselin (1995)

Anselin, L. (1995) Local Indicators of Spatial Association LISA. *Geographical Analysis*, 27, 93-115. <https://doi.org/10.1111/j.1538-4632.1995.tb00338.x>

Arbia et al. (2008)

Arbia, G., Espa, G., Quah, D.: A class of spatial econometric methods in the empirical analysis of clusters of firms in the space. *Empir Econ*, 2008, 34: 81–103.

Arora (1996)

Arora, S.: Polynomial time approximation scheme for Euclidean TSP and other geometric problems. *Proc. 37th Ann. IEEE Symp. on Foundations of Computer Science*, IEEE Computer Society, 1996, 2-11

Bailey, Gatrell (1995)

Bailey, T., Gatrell, A.: *Interactive spatial data analysis. Essex, Longman Scientific & Technical, 1995, 413 s.*

Barabási (2012)

Barabási, A.: *Network Science. The Barabási-Albert Model. 2012. Dostupné na <http://barabasi.com/f/622.pdf>*

Batschelet (1981)

Batschelet, E.: *Circular Statistics in Biology. Academic Press, 1981, London.*

Batschelet (1971)

Batschelet, E.: *Recent Statistical Methods for Orientation Data. Animal Orientation, Symposium 7970 on Wallops Island. American Institute Biological Sciences. 1971, Washington.*

Benenson et al. (2011)

Benenson, I., Martens, K., Rofé, Y., Kwartler, A.: Public transport versus private car GIS-based estimation of accessibility applied to the Tel Aviv metropolitan area. *Annals of Regional Science*, 2011, 47, 3, 499–515.

Beránek (2008)

Beránek, L.: *Síťová analýza v marketingu. In Znalosti 2008. s. 323. Dostupné na <<http://znalosti2008.fiit.stuba.sk/download/articles/znalosti2008-Beranek.pdf>>.*

Bithell (2000)

Bithell, J.F. A classification of disease mapping methods. *Statistics in Medicine*, 2000, 19: 2203–2215.

Brown (1994).

Brown, B.M.: Grouping corrections for circular goodness-of-fit tests. *Journal of the Royal Statistical Society B*, 1994, 56, 275–83. [83]

Brunsdon (1995)

Brunsdon, Ch.: Estimating probability surfaces for geographical point data: an adaptive kernel algorithm. *Computers&Geosciences, Elsevier Science Ltd., 21, 7, 1995, s. 877-894, ISSN 0098-3004.*

Carvalho et al. (2009)

Carvalho, A. X.Y., Albuquerque, P.H.M., Almeida J., Gilberto R.D., Guimarães, R.D.: Clusterização espacial hierárquica. *Rev. Bras. Biom [online]. São Paulo : v.27, n.3, p.412-443, 2009. Dostupné z WWW: <http://www.fcav.unesp.br/RME/fasciculos/v27/v27_n3/A6_Alexandre.pdf>.*

Combes et al. (2008)

Combes, P., Mayer, T., Thisse, J., F.: *Economic Geography, The Integration of Regions and Nations. Princeton University Press, 2008, Princeton.*

Cressie (1993)

Cressie, N.: *Statistics for spatial data. USA, John Wiley & Sons Inc., 1993, 900 s., ISBN 0-471-00255-0.*

Curl et al. (2011)

- Curl, A., Nelson, J.D., Anable, J.: Does accessibility planning address what matters? A review of current practice and practitioner perspectives. *Research in Transportation Business and Management*, 2011, 2, 3–11.
- Currie (2010)
Currie, G.: Quantifying spatial gaps in public transport supply based on social needs. *Journal of Transport Geography*, 2010, 18, 1, 31–41.
- Daskin (1995)
Daskin, M.S.: *Network and discrete location — models, algorithms and applications*. 1995, Wiley, NJ, USA
- De Jong et al. (1996):
De Jong, T., Ritsema Van Eck, J. R.: Location profile-based measures as an improvement on accessibility modelling in GIS. *Computers, Environment and Urban Systems*, 1996, 20, 3, 181–190.
- DeMers (1997)
DeMers, M.: *Fundamentals of Geographic Information System. USA, John Wiley & Sons Inc., 1997, 486 stran, ISBN 0-471-14284-0*.
- Dobrovolný (1998)
Dobrovolný P.: *Dálkový průzkum Země. Digitální zpracování obrazu. Skripta PřF MU Brno, 1998*.
- Dodds et al. (2003)
Dodds P.S., Muhamad R., Watts D.J: An Experimental Study of Search in Global Social Networks, *Science* 301(8), 2003, 827-829. Dostupné na <http://www.cis.upenn.edu/~mkearns/teaching/NetworkedLife/columbia.pdf>.
- Dudorkin (1997)
Dudorkin, J.: *Operační výzkum. Skriptum, Praha, ČVUT, fakulta elektrotechnická, 1997, 296 s., ISBN 80-01-01571-8*.
- Duranton, Overman (2005)
Duranton, G., Overman, H., G. (2005). Testing for Localisation Using Micro-Geographic Data. *Review of Economic Studies*, vol. 72, pp 1077–1106.
- Dykes (1994)
Dykes, J.: Area-value data: New visual emphases and representations. In *Hearnshaw, H., Unwin, D. (ed.): Visualization in Geographical Information Systems. UK, John Wiley & Sons Ltd., 1994, s. 103-114, ISBN 0-471-94435-1*.
- El-Geneidy et al. (2014)
El-Geneidy, A., Grimsrud, M., Wasfi, R., Tétrault, P., Surprenant-Legault, J.: New evidence on walking distances to transit stops: Identifying redundancies and gaps using variable service areas. *Transportation*, 2014, 41, 1, 193–210.
- Elhorst (2010):
Elhorst, J. P., *Applied Spatial Econometrics. Raising the Bar. Spatial Economic Analysis*. 5: 1, 9-28, 2010.
- Evans (2004)
Evans, T.S.: *Complex Networks. Contemporary Physics*. 45 (2004) 455 – 474.
- Farber et al. (2014):
Farber, S., Morang, M.Z., Widener, M.J.: Temporal variability in transit-based accessibility to supermarkets. *Applied Geography*, 2014, 53, 149–159.
- Flek et al. (2000)
Flek, M. a kolektiv: *Cena práce a zaměstnanost v procesu transformace a restrukturalizace české ekonomiky. Zpráva o výsledcích řešení úvodní etapy výzkumného úkolu, 1993, Výzkumný ústav práce a sociálních věcí, Praha*.
- Fransen et al. (2015)
Fransen, K., Neutens, T., Farber, S., De Maeyer, P., Deruyter, G., Witlox, F.: Identifying public transport gaps using time-dependent accessibility levels. *Journal of Transport Geography*, 2015, 48, 176–187.

- Freedman (1979)
 Freedman, L. S.: The use of a Kolmogorov–Smirnov type statistic in testing hypotheses about seasonal variation. *Journal of Epidemiology and Community Health*, 1979, 33, 223–8.
- Freedman, L. S. (1981).
 Freedman, L. S. Watson's U_2 statistic for a discrete distribution. *Biometrika*, 1981, 68, 708–11.
- Gabriel, Sokal (1969)
 Gabriel K.R., Sokal R.R.: A new statistical approach to geographic variation analysis. *Systematic Zoology*, 1969, 18, 259-78
- Gaile, Burt (1980)
 Gaile G. L., Burt, J. E.: *Directional Statistics, Concepts and techniques in modern geography*. 1980, 25.
- Gendreau et al. (2002)
 Gendreau M, Laporte G, Potvin J-Y.: Metaheuristics for the capacitated VRP. pp 129-154 in Toth P, Vigo D eds. (2002) *SIAM Monographs on Discrete Mathematics and Applications*.
- Geurs, Van Eck (2001)
 Geurs, K. T., Ritsema Van Eck, J. R.: Accessibility measures: review and applications. Evaluation of accessibility impacts of land-use transportation scenarios, and related social and economic impact. RIVM Report 408505006, 2001.
- GEURS, van WEE (2004)
 GEURS, K., van WEE, B. (2004): Accessibility evaluation of land-use and transport strategies: review and research directions. *Journal of Transport Geography*, Vol. 12, No. 2, 127–140.
- Granovetter (1973)
 Granovetter M.S.: The Strength of Weak Ties. *American Journal of Sociology*, 1973, Vol. 78, No. 6, 1360-1380. Dostupné na: <https://www.cs.cmu.edu/~jure/pub/papers/granovetter73ties.pdf>
- Goodchild (1998)
 Goodchild, M.: Modelling error in raster-based spatial data. In *Sbor. ref. konference 3rd International Symposium on Spatial Data Handling, 1998, s. 97-106*.
- Goodchild, Janelle (2004)
 Goodchild M., Janelle D.: *Spatially integrated social science. Oxford University Press, 2004, 456 stran, ISBN 0-19-515270-0*.
- Gumbel (1954)
 Gumbel, E.J.: Applications of the circular normal distribution, *Journal of the American Statistical Association*. 49 (1954), 267–297.
- Hägerstrand, T. (1970):
 Hägerstrand, T.: What about people in regional science? *Papers of the Regional Science Association*, 1970, 24, 7–21.
- Halden et al. (2005)
 Halden, D., Jones, P., Wixey, S.: Measuring Accessibility as Experienced by Different Socially Disadvantaged Groups. *Accessibility Analysis Literature Review*. Group, June 2005.
- Hanuš (1992)
 Hanuš, F.: Systémová a operační analýza. Vybrané modely a metody řešení na osobních počítačích. *Skriptum, Praha, ČVUT, fakulta strojní, 1992, 196 s., ISBN 80-01-00760-X*.
- Hearnshaw, Unwin (1994)
 Hearnshaw, H., Unwin D.: *Visualization in Geographical Information Systems. UK, John Wiley & Sons Ltd., 1994, 243 s., ISBN 0-471-94435-1*.
- Hendl (2006)
 Hendl J.: Přehled statistických metod zpracování dat : analýza a metaanalýza dat. Portál, 2006. 583 s. 80-7367-123-9
- Horák, J. (2006):
 Horák, J. (2006): Transport Accessibility Evaluation. *Geografie*, 111, 1, 115-132.
- Horák et al. (2019)

- Horák J., Burian J., Ivan I., Zajíčková L., Tesla J., Voženílek V., Fojtík D., Inspektor T., Rypka M.: *Prostorové simulační modelování dopravní dostupnosti s empirickou studií Olomoucka a Ostravska*. 2019. 350 stran. ČGS, edice Geographica
- Horák, Orliková (2019)
Horák, J., Orliková, L.: Circular Statistics for Directional and Temporal data. Case studies of lineaments and noise violations offence. In *Proceedings of ICMT* (International Conference on Military Technologies) 2019, Brno, 30-31.5.2019. 6 stran
- Hornák, Pšenka (2013)
Hornák, M., Pšenka, T. (2013): Public transportation as an indicator of inter-urban relationships between towns and cities of Slovakia. *Geografický časopis*, 65, 2, 119–140.
- Hornák et al. (2015)
Hornák, M., Struhár, P., Pšenka, T. (2015): Evaluation of high-standard public transport centres in the Slovak Republic. In: Szymańska, D., Biegańska, J. (eds.): *Bulletin of Geography. Socio-economic Series*, 30, 59–70.
- Cheriton, Tarjan (1976)
Cheriton D., Tarjan R.E.: Finding minimum spanning trees. *SIAM J. Comput.*, 1976, 5, 724-42
- Choulakian et al. (1994)
Choulakian, V., Lockhart, R. A., and Stephens, M. A. (1994). Cramér–von Mises statistics for discrete distributions. *Canadian Journal of Statistics*, 22, 125–37.
- Ivan (2014)
Ivan I.: *Kvantitativní metody v geografii*. VŠB-TU Ostrava, 2014. 110 stran.
- Ivan, Horák (2015)
Ivan I., Horák J.: *Metodika identifikace anomálních lokalit kriminality pomocí jádrových odhadů*. Certifikovaná metodika. MV ČR 2015.
- Ivan (2010)
Ivan, I. (2010): *Prostorové hodnocení zajištění dopravní obslužnosti zaměstnavatelů*. Disertační práce. TUO VŠB, Ostrava.
- Ivan et al. (2013):
Ivan, I., Horák, J., Fojtík, D., Inspektor, T.: Evaluation of public transport accessibility at municipality level in the Czech republic. In *13th SGEM GeoConference on Informatics, Geoinformatics And Remote Sensing*, 2013, 527–534.
- Ivan, Tesla (2015)
Ivan, I., Tesla, J.: Road and intersection accidents: localization of black spots in Ostrava. *Geographical Journal/Geografický časopis*, 2015, Vol. 67, No. 4, 323–340..
- Ivanička (1983)
Ivanička, K.: *Základy teórie a metodológie socioeconomickej geografie*. Bratislava, SPN, 1983, 448 s.
- Jánošíková, Kubáni (2000)
Jánošíková, L., Kubáni, A.: Dopravná dostupnosť obcí. *Komunikácie*, 2000, 4, Vydavateľstvi Žilinskej univerzity, 7 s., ISSN 1335-4205.
- Johnston et al.(1994)
Johnston, R., Gregory, D., Smith D.: *The dictionary of human geography*. Cambridge, Blackwell, 1994.
- Kaňok (1996)
Kaňok M.: *Statistické metody v řízení*. Skriptum, Praha, ČVUT, 1996, 210 s.
- Kaňuk (2015)
Kaňuk, J.: *Priestorové analýzy a modelovanie*. UPJŠ v Košiciach, Košice 2015. ISBN 978-80-8152-290-1.
- Kašpar (2008)
Kašpar, P.: *Analýza sociální sítě*. 2008. Dostupné na <http://blog.petrkaspar.cz/wp-content/skola/dis-kas265-text.pdf>
- Kouba K. (2007)

- Prostorová analýza českého stranického systému. Institucionalizace a prostorové režimy. *Sociologický časopis*, 2007, Vol. 43, No. 5, pp. 1017-1037.
- Kraak, Ormelling (1996)
Kraak, M., Ormelling, F.: *Cartography. Visualisation of spatial data. Londýn, Longman Scientific & Technical. 1996, 222 s., ISBN 0-582-25953-3.*
- Kraft, Blažek (2012)
Kraft, S., Blažek, M.: Intraurbánní dostupnost zastávek městské hromadné dopravy a její hodnocení pomocí nástrojů GIS. In: Bartolomiejczyk, M., Połom, M. (eds.): *Vybrané aspekty provozování veřejné dopravy ve střední a východní Evropě. Příklady z České republiky, Polska a Slovenska.* Polskie Towarzystwo Geograficzne, Oddział Katowicki, Sosnowiec, 2012, 47–60.
- Krishnagopal (2018)
Krishnagopal S.: *From Brains and Friendships to the Stock Market and the Internet. Girls Talk Math Summer Camp, 2018.* Dostupné na http://gtm.math.umd.edu/gtm_networks.pdf
- Križan (2007)
Križan, F.: *Regionálna typológia územia Bratislavy na základe dostupnosti supermarketov a hypermarketov.* *Geografický časopis*, 2007, 59, 4, 373–385.
- Kukuliač, 2010
Kukuliač, P. *Prostorová distribuce ekonomických aktivit na Ostravsku.* Diplomová práce VŠB-TU Ostrava, Ostrava 2011. Dostupné z: <https://theses.cz/id/kmb8yf/>.
- Kukuliac, Horak (2017)
Kukuliac P., Horak J.: *W function – a New Distance-based Measure of Spatial Distribution of Economic Activities.* *Geographical Analysis*, 49 (2), 2017, 199–214. DOI: 10.1111/gean.12120.
- Kusendová (1996)
Kusendová, D.: *Analýza dostupnosti obcí Slovenska.* In *Sbor. ref. konference Aktivity v kartografii '96, Kartografická spoločnosť SR a Geografický ústav SAV, Bratislava, s. 29-49.*
- Kwan (1998)
Kwan, M. (1998): *Space-time and integral measures of individual accessibility: A Comparative Analysis Using a Point-based Framework.* *GeoGraphical Analysis*, 30, 3, 191–216.
- Kwan et al. (2003)
Kwan, M. P., Murray, A. T., O'Kelly, M.O., Tiefelsdorf, M.: *Recent advances in accessibility research: Representation, methodology and applications.* *Journal of Geographical Systems*, 2003, 5, 1, 129–138.
- Lang et al. (2015)
Lang, G., Marcon, E., Puech, F. *Distance-based measures of spatial concentration: introducing a relative density function.* Working Papers, 2015, HAL, Dostupné na <http://EconPapers.repec.org/RePEc:hal:wpaper:hal-01082178>
- Laurini, Thompson (1994)
Laurini, R., Thompson, D.: *Fundamentals of Spatial Information Systems. Londýn, The APIC series, number 37, Academic Press, 1994, 680 s., ISBN 0-12-438380-7.*
- Lee, Kwan (2011)
Lee, J.Y., Kwan, M.P.: *Visualisation of Socio-Spatial Isolation Based on Human Activity Patterns and Social Networks in Space-Time.* *Tijdschrift voor economische en sociale geografie*, 2011, 102, 4, 468–485.
- Lee, Wong (2001)
Lee, J., Wong, D.: *Statistical analysis with ArcView GIS. USA, John Wiley & Sons Inc., 2001, 192 s., ISBN 0-471-34874-0.*
- Levine (2010)
Levine, N.: *CrimeStat: A Spatial Statistics Program for the Analysis of Crime Incident Locations (v 3.3).* Ned Levine & Associates, Houston, TX, and the National Institute of Justice, Washington, DC. July 2010.
- Levine, Associates (2004)

- Levine N., Associates: CrimeStat III., Version 3. The National Institute of Justice, Washington 2004.
- LeSage (1998)
LeSage J. P.: Spatial Econometrics. 1998. 273 stran
- Lukasová, Šarmanová (1985)
Lukasová, A., Šarmanová, J.: Metody shlukové analýzy. *Praha, SNTL, 1985, 210 s.*
- Marada, Květoň (2010)
Marada, M., Květoň, V. Diferenciace nabídky dopravních příležitostí v českých obcích a sociogeografických mikroregionech. *Geografie, 2010, 110, 1, 21–43.*
- Marada et al. (2010)
Marada, M., Květoň, V., Vondráčková, P.: Doprava a geografická organizace společnosti v Česku. *Edice Geographica, 2, Česká geografická společnost, 2010, Praha.*
- Marcon, Puech (2003)
Marcon, E., Puech, F.: Evaluating the Geographic Concentration of Industries Using Distance-Based Methods. *Journal of Economic Geography, 2003, 409-428*
- Mardia, Jupp (1999)
Mardia, K.V., Jupp, P.E. *Directional Statistics.* John Wiley, 1999, Chichester.
- Martinez, Martinez (2002)
Martinez W.L., Martinez A.R.: *Computational Statistics Handbook with MATLAB.* Chapman & Hall/CRC, 2002, 585 s.
- Maryáš et al. (1995)
Maryáš, J., Řehák, S., Vystoupil, J., Mládek, J.: *Ekonomická geografie I. Skriptum, Brno, Masarykova univerzita, Ekonomicko-správní fakulta, 1995, 138 s., ISBN 80-210-1269-2.*
- Matis (2008)
Matis, P.: Spojenie gis prostriedkov a metaheuristik pre riešenie okružných jász v intraviláne miest. In sborník GIS Ostrava 2008. 10 s. Dostupné na: http://gisak.vsb.cz/GIS_Ostrava/GIS_Ova_2008/sbornik/Lists/Papers/011.pdf
- Meer (1992).
Meer, F.: *Introduction to Geostatistics.* Enschede, ITC Enschede 1992, 52 s.
- Meloun, Militký (2002)
Meloun, M., Militký, J.: *Kompendum statistického zpracování dat.* Praha, Academia, 2002, 764 s., ISBN 80-200-1008-4.
- Michniak (2008)
Michniak, D.: International linkages of individual districts in Slovakia based on direct transport connections. *Geografický časopis, 2008, 60, 1, 45–61.*
- Miller (1991)
Miller, H. J.: Modelling accessibility using space-time prism concepts within geographical information systems. *International Journal of Geographical Information Systems, 1991, 5, 3, 287–301.*
- Mitchell (1998)
Mitchell, J.S.B.: Geometric shortest paths and network optimization. In *Handbook of Computational Geometry, 1998, Elsevier Science, Sack J-R, Urrutia J, eds. (2000) Chapter 15, 633-701.* Dostupné na www.ams.stonybrook.edu/~jsbm/publications.html
- Mueller (1968)
Mueller, J.E.: An introduction to the hydraulic and topographic sinuosity indexes, *Annals of the Association of American Geographers, 1968, 58, 371-385.*
- Netopil et al. (1984)
Netopil, R. a kol. *Fyzická geografie, 1. vydání.* Praha: SPN, 1984. 272 s.
- Neutens, Schwanen, Witlox, De Maeyer, (2008)
Neutens, T., Schwanen, T., Witlox, F., De Maeyer, P.: My space or your space? Towards a measure of joint accessibility. *Computers, Environment and Urban Systems, 2008, 32, 5, 331–342.*
- Newman (2003)

- Newman: The structure and function of complex networks, 2003
- Newman (2010)
Newman, M.: Networks: an introduction. Oxford University Press. 2010
- Nijkamp, Rietveld (1987)
Nijkamp, P., Rietveld, P.: Technological development and regional labour markets. In *Fischer, M., Nijkamp, P. (ed.): Regional Labour Markets. Elsevier Science Publishers, 1987, s. 117-138. ISBN 0-444-70323-3.*
- Okabe, Sugihara (2012)
Okabe, A., Sugihara, K.: Spatial analysis along networks: statistical and computational methods. *Hoboken, N.J., 2012, ISBN 978-047-0770-818.*
- Ochodková (2016)
Ochodková E. (2016): série přednášek k předmětu Metody analýzy dat I. VŠB-TU Ostrava.
- Pewsey, Neuhauser, Ruxton (2013)
Pewsey A., Neuhauser M., Ruxton G.D.: Circular Statistics in R. Oxford University Press, 2013, ISBN 978-0-19-967113-7, 198 stran.
- Pavlík, Kühnl (1981)
Pavlík, Z., Kühnl, K.: Úvod do kvantitativních metod pro geografii. *Praha, SPN, 1981, 267 s.*
- Píšek, Hanuš (1996)
Píšek, M., Hanuš, F.: Rozhodovací analýza. Vybrané modely a metody řešení na PC. *Skriptum, Praha, ČVUT, fakulta strojní, 1996, 78 s., ISBN 80-01-01534-3.*
- Rayleigh (1919)
Rayleigh, L.: On the problem of random vibrations, and of random flights in one, two, or three dimensions. *Philosophical magazine, 1919, 37, 321 - 47.*
- Ripley (1981)
Ripley, B. D.: Spatial statistics. Wiley Series in probability and mathematical statistics. Wiley 1981, New York.
- Robins, Zelikovsky (2000)
Robins, G., Zelikovsky, A.: Improved Steiner tree approximation in graphs. Proc. 10th Ann. ACM-SIAM Symp. on Discrete Algorithms, ACM-SIAM, 2000, 770-9.
- Ryant (2017)
Ryant, I.: Algoritmy a datové struktury objektově. A.D.S.O., Praha 2017. ISBN 978-80-270-1660-0. 286 stran.
- Řehák, Brom (2015)
Řehák J., Brom O.: SPSS – Praktická analýza dat. Computer Press, 2015, ISBN 978-80-251-4609-5. 336 stran.
- Seidenglanz (2010)
Seidenglanz, D. (2010): Transport relations among settlement centres In the eastern part of the Czech Republic as a potential for polycentricity. *AUC-Geographica, 45, 1, 75-89.*
- Schietzelt, Densham (2003)
Schietzelt T., Densham P.: Location-allocation in GIS. In Longley & Batty (2003), 345-65
- Schubert et al.(1987)
Schubert U., Gerking S., Isserman A., Taylor C.: Regional labour market moelling: A state of the art review. In *Fischer, M., Nijkamp, P. (ed.): Regional Labour Markets. Elsevier Science Publishers, 1987, s.53-94, ISBN 0-444-70323-3.*
- Silverman (1986)
Silverman, B.W.: Density estimation for statistics and data analysis. Chapman and Hall, 1986, London.
- Smans, Esteve (1996)
Smans, M., Esteve, J.: Practical approaches to disease mapping. In *Elliott P., Cuzick J., English D., Stern R.(ed.): Geographical & Environmental Epidemiology. New York, Oxford University Press, 1996, s. 141-150, ISBN 0-19-262235-8.*
- Smith et al. (2011)

- Smith M.J., Goodchild M.F., Longley P.A.: Geospatial Analysis. <http://www.spatialanalysisonline.com> 2011.
- Smith T. (2016)
Smith T. E. : NOTEBOOK FOR SPATIAL DATA ANALYSIS. Philadelphia: University of Pennsylvania. 615 s. 2016
- Smith et al. (2018)
Smith M.J., Goodchild M.F., Longley P.A.: Geospatial Analysis. <http://www.spatialanalysisonline.com> 2018.
- Spurná P. (2006)
Spurná P.: Současné trendy v kvantitativní analýze geografických dat se zaměřením na využití metody geograficky vážené regrese DP Katedra sociální geografie a regionálního rozvoje PřF UK, Praha, 150 s.
- Spurná P. (2008)
Spurná P.: Geograficky vážená regrese: metoda analýzy prostorové nestacionarity geografických jevů. *Geografie- Sborník ČGS, 2008, 113, 2, 125-139.*
- Steele, Chaseling (2006).
Steele, M., Chaseling, J.: Powers of discrete goodness-of-fit test statistics for a uniform null against a selection of alternative distributions. *Communications in Statistics—Simulation and Computation*, 2006, 35, 1067–75.
- Šeděnková et al. (2008)
Šeděnková M., Ivan I., Horák J.: Představení a možnosti využití databáze spojení veřejnou linkovou dopravou. In sborník konference Geoinformatika ve veřejné správě 2008. Brno 28.–30.5.2008. ISBN 978-80-7392-031-9. 7 stran.
- Teitz, Bart (1968)
Teitz, M.B., Bart P.: Heuristic methods for estimating the generalized vertex median of a weighted graph. *Operations Research*, 1968, 16, 955-61
- Tesla, J. (2014)
Tesla, J.: Prostorová analýza dopravních nehod v České republice Ostrava, 2014. Diplomová práce. VŠB-TU Ostrava, HGF, institut geoinformatiky.
- Tesla, J., Horák, J., Ivan, I. (2015)
Tesla, J., Horák, J., Ivan, I.: Frequency analysis of public transport between czech municipalities. In: 15th International Multidisciplinary Scientific GeoConference SGEM 2015, Book 2, 593–600.
- Thakur, Scheidegger (1968)
Thakur, B., Scheidegger, A.E.: A test for the statistical theory of meander formation. *Water Resources Research*, 1968, 4, 317-29.
- Tiefelsdorf (2000)
Tiefelsdorf, M.: „Modelling spatial processes: the identification and analysis of spatial relationships in regression residuals by means of Moran’s. *Berlin, Springer-Verlag, řada Lecture notes in earth sciences; 87, 2000, 167 s., ISBN 3-540-66208-1.*
- Thill, Horowitz (1997)
Thill, J., Horowitz, J: Modelling non-work destination choices with choice sets defined by travel-time constraints. In *Fischer M., Getis A. (ed.): Recent Developments in Spatial Analysis. Spatial Statistics, Behavioural Modelling and Computational Intelligence. Berlin, Springer-Verlag, 1997, s. 186-208, ISBN 3-540-63180-1.*
- Turčan (2002)
Turčan, M.: Statistické metody. *Skriptum pro PGS, Ostrava, 2002, 166 s.*
- Unwin (1981)
Unwin, D.: Introductory Spatial Analysis. *Londýn, Methuen, 1981.*
- Upton, Fingleton (1989).
Upton, G. J. G., Fingleton, B.: Spatial Data Analysis by Example, Volume 2: Categorical and Directional Data. Wiley, 1989, New York.

- Veverka (1997)
Veverka, B.: Topografická a tematická kartografie. *Skriptum, Praha, ČVUT, fakulta stavební, 1997, 203 s., ISBN 80-01-0124-X.*
- Veverka (1989)
Veverka, B.: Teorie systémů a kybernetika. *Skriptum, Praha, ČVUT, fakulta stavební, 1989. 154 s.*
- Víšek (1998)
Víšek, J.: Statistická analýza dat. *Skriptum, Praha, ČVUT, fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská, 1998, 187 s.*
- Vítková K. (2013)
Vítková K.: Cirkulární rozdělení pravděpodobnosti. Bakalářská práce, 2013, MU Brno.
- Vojta (2009):
Vojta M. Analýza dojíždění pro podniky Lanex a MSA. DP, Institut geoinformatiky, HGF VŠB-TU Ostrava, 2009.
- Walford (1995)
Walford, N.: Geographical Data Analysis. *UK, John Wiley & Sons Ltd., 1995, 446 s., ISBN 0-471-94162-X.*
- Watson, Williams (1956)
Watson, G. S., Williams, E. J. On the construction of significance tests on the circle and on the sphere. *Biometrika*, 1956, 43, 344–52.
- Welch, Mishra (2013)
Welch, T. F., Mishra, S.: A measure of equity for public transit connectivity. *Journal of Transport Geography*, 2013, 33, 29–41.
- Vrabková, Vaňková, Ivan (2016)
Vrabková, I., Vaňková, I., Ivan, I.: The Efficiency and Public Transport Accessibility of Indirect State Administration in the Czech Republic. *Review of Economic Perspectives*, 2016, 16, 2, 135–156.
- Yigitcanlar, Sipe, Evans, Pitot (2007)
Yigitcanlar, T., Sipe, N. G., Evans, R., Pitot, M.: A GIS-based land use and public transport accessibility indexing model. *Australian Planner*, 2007, 44, 3, 30–37.
- Zachary (1977)
Zachary, W.W.: An Information Flow Model for Conflict and Fission in Small Groups. *Journal of Anthropological Research*, 1977, 33 (4): 452–473