MA 2. cvičení

Indukce, Odhady

Martin Hasal,2012

1 Matematická indukce

Věta 1.0.1
(princip matematické indukce). Nechť je dána množina $M \in \mathbb{N}$ taková, že platí:

1. $1 \in M$,
2. pro každé $n \in M$ platí $n + 1 \in M$.

Pak $M = \mathbb{N}$.

Příklad 1.0.1
Pomocí matematické indukce dokažte, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2.$$

tj. že součet n lichých čísel je roven kvadrátu počtu těchto čísel. Řešení:
Označme $M = k \in \mathbb{N} : 1 + 3 + 5 + \ldots + (2k - 1) = k^2$.. Pak:

1. $1 \in M$, protože platí $1 = 1^2$.
2. Předpokládejme, že $n \in M$, tj. platí $1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 3) + (2n - 1) = n^2$., následně po tom co máme předpoklad je naším cílem ukázat, že předpoklad platí pro $n+1 \in M$, tj.
$$1 + 3 + 5 + \ldots + (2(n + 1) - 3) + (2(n + 1) - 1) = (n + 1)^2.$$
Snažíme se ukázat platnost předchozí rovnosti. Tj. Postupně ji upravujeme a pokusíme se v ní najít náš předpoklad, který víme čemu se rovná, pokud se podaří najít ve výrazu náš předpoklad pokusíme se dokázat rovnost levé a pravé strany výše uvedené rovnice.
$$1 + 3 + 5 + \ldots + (2(n + 1) - 3) + (2(n + 1) - 1) =$$
$$= \underbrace{1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1)}_{\text{Předpoklad}} + (2n + 1) =$$
$$n^2 + 2n + 1 = (n + 1)^2.$$

Dokázali jsme rovnost levé a praví strany, tzn. že $n + 1 \in \mathbb{N} \Rightarrow M = \mathbb{N}$.Tedy předpoklad platí pro všechna přirozená čísla. ∎

Příklad 1.0.2
Pomocí matematické indukce dokažte, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$1^3 + 2^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2.$$

řešení najdete v literatuře [3, str. 28]. ■

Příklad 1.0.3
Pomocí matematické indukce dokažte, že pro každé $n \in \mathbb{N}, n \geq 4$ platí

$$2^n \geq n^2.$$

■

Příklad 1.0.4
Pomocí matematické indukce dokažte, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí,že číslo

$$10^n - 1,$$

je dělitelné 9. ■

2 Supremum, Infimum, Maximum, Minimum

Doufám, že čtenář pochopí pojmy z následujícího příkladu.

Příklad 2.0.5
Mějmě následující množiny,

$$A = (2, 7\rangle\,, B = \{1, 2, 3\}, C = \mathbb{N}, D = \oslash, E = \mathbb{R}, F = \langle 3, \infty)\,, G = \mathbb{R}^*,$$

určete Supremum, Infimum, Maximum, Minimum. Řešení si zapíšeme do následující tabulky.

	min	max	inf	sup
A	$\oslash$	7	2	7
B	1	3	1	3
C	1	$\oslash$	1	∞
D	$\oslash$	$\oslash$	∞	$-\infty$
E	$\oslash$	$\oslash$	$-\infty$	∞
F	3	$\oslash$	3	∞
G	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	∞

■

Příklad 2.0.6
určete Supremum, Infimum, Maximum, Minimum:

- $M = \{x \in \mathbb{R} : \frac{x+1}{2x+3} > 1\}$,

- $M = \{x \in \mathbb{R} : \frac{(x+1)^3 \cdot (x-2)^2 \cdot (x-3)}{(x+5) \cdot (x-4)^3 \cdot (x+2)^2} \leq 0\}$,
- $M = \{0.3, 0.33, 0.333, \ldots\}$

■

Příklad 2.0.7
Jaký je vztah mezi

- sup A a sup B,
- inf A a inf B,

je-li A $\subseteq$ B. Řešení: Určitě platí

- sup A $\leq$ sup B,
- inf A $\geq$ inf B,
- sup (A $\cup$ B)=max {sup A, sup B },
- sup (A $\cap$ B)$\neq$max {sup A, sup B },

Příklad:

$$\begin{aligned} A &= \{0\} \cup \langle 1, 2 \rangle \Rightarrow supA = 2 \\ B &= \{0\} \cup \langle 3, 4 \rangle \Rightarrow supA = 4 \\ A \cap B &= \{0\} \Rightarrow sup(A \cap B) = 0. \end{aligned}$$

■

3 Reference

[1] K. Rektorys a kol. *Přehled užité matematiky* Prometheus, 2000

[2] Mgr. Petr Vodstrčil, Ph.D.. *Tajné poznámky do cvičení*, 2012.

[3] J. Kuben, Petra Šarmanová *Diferenciální počet funkcí jedné proměnné*, VŠB-TUO, 2006,ISBN 80-248-1192-8. Dostupné z *homel.vsb.cz/∼s1a64/cd/pdf/print/dp.pdf*