MA 12. cvičení
průběh funkce

Lukáš Pospíšil,2011

1 Průběh funkce

Pod úkolem *vyšetřete průběh funkce* budeme rozumět nalezení všech kvalitativních vlastností funkce - tedy bude potřeba zjistit o průběhu funkce vše, co můžeme. A to konkrétně:

1. definiční obor
2. spojitost
3. sudost/lichost, periodicita
4. první derivace, stacionární body, intervaly monotonie
5. druhá derivace, intervaly konvexity/konkávnosti
6. lokální extrémy
7. limity v bodech nespojitosti, v krajních bodech definičního oboru
8. asymptoty
9. významné body, funkční hodnoty ve významných bodech
10. graf

Nejdříve tedy dobereme to, co nám chybí a pak se poustíme do toho.

2 Konvexní a konkávní funkce

Definice 2.0.1
Nechť f je spojitá v intervalu I a nechť v každém vnitřním bodě intervalu I existuje $f''(x)$. Pak platí

- je-li $f''(x) > 0$ v každém vnitřním bodě x intervalu I, je f *ryze konvexní* v I
- je-li $f''(x) < 0$ v každém vnitřním bodě x intervalu I, je f *ryze konkávní* v I

Definice 2.0.2
Řekneme, že funkce f má v bodě x_0 *inflexi*, existuje-li (konečná) derivace $f'(x_0)$ a

- buď f je ryze konvexní v $P^-(x_0)$ a ryze konkávní v $P^+(x_0)$

- buď f je ryze konkávní v $P^-(x_0)$ a ryze konvexní v $P^+(x_0)$

kde
$$P(x_0) = P^+(x_0) \cup P^-(x_0)$$

Poznámka: Takže v inflexních bodech se mění konvexní funkce na konkávní, nebo konkávní na konvexní. $\approx$

Příklad 2.0.1
Takový typický příklad pro inflexní bod:
Funkce $f(x) = x^3$ má v bodě $x_0 = 0$ inflexi. Skutečně druhá derivace

$$f''(x) = 6x$$

- je záporná pro $x < 0$, tedy funkce f je na intervalu $(-\infty, 0\rangle$ ryze konkávní a
- je kladná pro $x > 0$, tedy funkce f je na intervalu $(-\infty, 0\rangle$ ryze konvexní

■

Příklad 2.0.2
Nechť je dána funkce

$$f(x) \stackrel{\text{def}}{=} x^4 - 2x^3 - 12x^2 + 7x - 3$$

Najděte maximální intervaly, na nichž je funkce f ryze kovexní, resp. ryze konkávní, a inflexní body.

Takže by to chtělo druhou derivaci. Nejdříve určíme první

$$f'(x) = 4x^3 - 6x^2 - 24x + 7$$

a pak tedy druhou
$$f''(x) = 12x^2 - 12x - 24$$

Položíme rovno nule a nalezneme kořeny

$$\begin{aligned} 12x^2 - 12x - 24 &= 0 \\ 12(x^2 - x - 2) &= 0 \\ 12(x+1)(x-2) &= 0 \quad \text{(kouzlo)} \end{aligned}$$

Tedy jediné body, ve kterých se může něco dít (změnit se druhá derivace kladná/záporná = zmenit se konvexnost/konkávnost) jsou kořeny druhé derivace -1 a 2. Změna by mohla nastat i v bodech nespojitosti definičního oboru druhé derivace, ale jelikož je funkce polynom, tak i druhá derivace je spojitá a očividně $D_{f''} = \mathbb{R}$.

Tedy definiční obor druhé derivace je rozdělen na tři disjunktní intervaly: $(-\infty, -1), (-1, 2), (2, \infty)$. A jak určit, zda je druhá derivace na těchto intervalech kladná nebo záporná? Vezměme jeden bod ze zkoumaného intervalu a dosadíme do předpisu druhé derivace. Pokud je druhá derivace v tomto bodě kladná, pak je kladná v celém intervalu. (stejné pozorování jako u intervalů monotonie, viz minulé cvičení).

I	f''	f
$(-\infty, -1\rangle$	$+$	konvexní
$\langle 1, 2\rangle$	$-$	konkávní
$\langle 0, \infty)$	$+$	konvexní

Krajní body byli včleněny do intervalů díky spojitosti definičního oboru původní funkce. Tedy funkce má dva inflexní body - -1 a 2. ■

Poznámka: Pokud Vám tento postup něco připomíná (konkrétně hledání intervalů monotonie), tak ano. Je to to samé, akorát jiné - pracujeme s druhou derivací. $\approx$

Příklad 2.0.3
Tak ještě jeden - určete maximální intervaly, na nichž je funkce

$$f(x) \stackrel{\text{def}}{=} x^2 e^x$$

ryze kovexní, resp. ryze konkávní, a inflexní body.

První derivace

$$f'(x) = 2xe^x + x^2e^x = (2x + x^2)e^x$$

druhá derivace

$$f''(x) = (2 + 2x)e^x + (2x + x^2)e^x = (x^2 + 4x + 2)e^x$$

a položíme rovno nule

$$(x^2 + 4x + 2)e^x \quad = \quad 0$$

Součin je nulový pokud alespoň jeden z činitelů je nulový. Funkce e^x je nenulová, tedy jediná možnost je ten polynom - kvadratická rovnice - diskriminant, získáme

$$x_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 8}}{2} = -2 \pm \sqrt{2}$$

Jelikož definičním oborem funkce a druhé derivace je $\mathbb{R}$, získáváme tři intervaly

I	f''	f
$(-\infty, -2 - \sqrt{2}\}$	$+$	konvexní
$\langle -2 - \sqrt{2}, -2 + \sqrt{2}\rangle$	$-$	konkávní
$\langle -2 + \sqrt{2}, \infty)$	$+$	konvexní

Volil jsem tyto body:

$$\begin{aligned} f''(-4) &= e^{-4}((-4)^2 + 4.(-4) + 2) = e^{-4}2 > 0 \\ f''(-2) &= e^{-2}((-2)^2 + 4.(-2) + 2) = e^{-4}(-2) < 0 \\ f''(-4) &= e^{0}(0^2 + 4.0 + 2) = e^{-4}2 > 0 \end{aligned}$$

Tedy funkce má dva inflexní body a to $-2 - \sqrt{2}$ a $-2 + \sqrt{2}$. ■

3 Asymptoty

Asymptoty - přímky ke kterým se funkce blýží, ale nikdy je nedosáhne.
Asymptoty rozlišujeme *svislé* a *šikmé*.

3.1 Svislé asymptoty

Definice 3.1.1
Přímka $x = x_0, x_0 \in \mathbb{R}$ se nazývá *svislá asymptota grafu funkce* f, jestliže je alespoň jedna jednostranná limita funkce f v bodě x_0 nevlastní, tj.

$$\lim_{x \to x_0+} f(x) = \pm\infty \quad \text{nebo} \quad \lim_{x \to x_0-} f(x) = \pm\infty$$

Poznámka: Pozorování: Funkce nemůže mít šikmou asymptotu v bodě, ve kterém je spojitá (limita by se přímo rovnala funkční hodnotě - a ta nemůže být $\pm\infty$). Tedy až budeme pátrat po šikmých asymptotách, rozhodně sáhneme po bodech nespojisti funkce. $\approx$

Příklad 3.1.1
Například funkce

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

je nespojitá v bodě 0, kuk na ty limity

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 0+} \tfrac{1}{x} &= \infty \\ \lim_{x \to 0-} \tfrac{1}{x} &= -\infty \end{aligned}$$

tedy funkce f má v bodě 0 svislou asymptotu. ∎

3.2 Šikmé asymptoty

Ono se občas může stát, že jak se blýžíme k nekonečnu, tak se funkce blýží k nějaké přímce. Nevěříte?

Definice 3.2.1
Přímka $y = ax + b$, $a, b \in \mathbb{R}$ se nazývá *asymptota grafu funkce* f *v plus nekonečnu*, jestliže

$$\lim_{x \to \infty} (f(x) - (ax + b)) = 0$$

Pro konstanty a, b platí

$$a = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} \qquad b = \lim_{x \to \infty} f(x) - ax$$

Obdobně pro asymptotu grafu f v minus nekonečnu (nahraďte $-\infty$ v limitách).

Poznámka: Počúvaj starý, rád by som vypichol, že $a, b \in \mathbb{R}$. Tedy žádné nekonečno. Pokud je to nekonečno, žádná šikmá asymptota není. $\approx$

Příklad 3.2.1
Nalezněte šikmé asymptoty funkce

$$f(x) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{3x^2}{x - 1}$$

Takže nalezneme konstanty a, b ať to můžeme do předpisu $y = ax + b$ dosadit. Nejdříve plus nekonečno

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{3x^2}{x-1}}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{3x^2}{x^2-x} \overset{l'H}{==} \lim_{x\to\infty} \frac{6x}{2x-1} \overset{l'H}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{6}{2} = 3$$

Supr, takže je to reálné číslo, tedy $a = 3$. Pokračujeme

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3x^2}{x-1} - 3x = \lim_{x\to\infty} \frac{3x}{x-1} = 3$$

Tedy funkce má šikmou asymptotu v plus nekonečnu s předpisem $y = 3x + 3$.
Teď tedy mínus nekonečno:

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{3x^2}{x-1}}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{3x^2}{x^2-x} \overset{l'H}{==} \lim_{x\to-\infty} \frac{6x}{2x-1} \overset{l'H}{=} \lim_{x\to-\infty} \frac{6}{2} = 3$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{3x^2}{x-1} - 3x = \lim_{x\to-\infty} \frac{3x}{x-1} = 3$$

Tedy funkce f má šimkou asymptotu v minus nekonečnu s předpisem $y = 3x + 3$. ■

Příklad 3.2.2
Určete asymptoty funkce

$$f(x) \overset{\text{def}}{=} \frac{e^x}{x+1}$$

- Svislé
  Definičním oborem funkce je $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, takže jediná svislá asymptota může být akorát v bodě -1.

$$\lim_{x\to-1+} \frac{e^x}{x+1} = e^{-1} \lim_{x\to-1+} \frac{1}{x+1} = e^{-1} \lim_{y\to0+} \frac{1}{y} = \infty$$

$$\lim_{x\to-1-} \frac{e^x}{x+1} = e^{-1} \lim_{x\to-1-} \frac{1}{x+1} = e^{-1} \lim_{y\to0-} \frac{1}{y} = -\infty$$

- Šikmá asymptota v plus nekonečnu

$$a = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{e^x}{x+1}}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^2+x} \overset{l'H}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{2x+1} \overset{l'H}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{2} = \infty$$

  Tedy šikmá asymptota v plus nekonečnu není.

- Šikmá asymptota v minus nekonečnu

$$a = \lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{e^x}{x+1}}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{e^x}{x^2+x} \overset{l'H}{=} \lim_{x\to-\infty} \frac{e^x}{2x+1} = \lim_{x\to-\infty} e^x \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{2x+1} = 0$$

  Pokračujme ve výpočtu b

$$b = \lim_{x\to-\infty} \frac{e^x}{x+1} - 0.x == \lim_{x\to-\infty} \frac{e^x}{x+1} = 0$$

  Tedy přímka $y = 0x + 0 = 0$ je šikmou asymptotou v minus nekonečnu.

■

4 Průběh funkce

Tedy všechny body ohledně průběhu funkce máme v malíčku a teď hurá na to.

Příklad 4.0.3
Vyšetřete průběh funkce

$$f(x) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{x^3}{x^2-1}$$

1. definiční obor
   $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ (nulou se nedělí)

2. spojitost
   funkce je spojitá v každém bodě D_f

3. sudost/lichost, periodicita
   Funkce není periodická (nemá být proč :)
   Co takhle sudá/lichá?

   $$f(-x) = \frac{(-x)^3}{(-x)^2-1} = -\frac{x^3}{x^2-1} = -f(x)$$

   Funkce je lichá. Tak stačí vyšetřit průběh funkce na intervalu $\langle 0, \infty)$ a pak využijeme symetrie.
   Pro jednoduchost označme definiční obor na této polovině

   $$D_f^* = \langle 0, 1) \cup (1, \infty)$$

4. první derivace, stacionární body, intervaly monotonie

   $$f'(x) = \frac{3x^2(x^2-1) - x^3 2x}{(x^2-1)^2} = \frac{x^4-3x^2}{(x^2-1)^2}, \quad D_{f'}^* = D_f^*$$

   Položíme rovno nule a nalezneme stacionární body

   $$\frac{x^4-3x^2}{(x^2-1)^2} = 0 \;\Rightarrow\; x^4 - 3x^2 = 0 \;\Rightarrow\; x^2(x^2-3) = 0$$

   Dostaneme tři stacionární body

   $$x_0 = -\sqrt{3}, \;\; x_1 = 0, \;\; x_2 = \sqrt{3}$$

   Jelikož uvažujeme pouze $x \geq 0$ a definiční obor D_f^*, budeme uvažovat tři intervaly:

I	f'	f
$(0,1)$	$-$	konkávní
$(1, \sqrt{3}\rangle$	$-$	konkávní
$\langle \sqrt{3}, \infty)$	$+$	konvexní

   kde jsem volil tyto body

   $$f'(\frac{1}{2}) = -\frac{11}{9}, \quad f'(\frac{3}{2}) = -\frac{27}{25}, \quad f'(2) = \frac{4}{9}$$

5. druhá derivace, intervaly konvexity/konkávnosti

$$f''(x) = \frac{(4x^3-6x)(x^2-1)^2-(x^4-3x^2)2(x^2-1)2x}{(x^2-1)^4} = \ldots = \frac{2x^3+6x}{(x^2-1)^3}, \quad D^*_{f''} = D^*_f$$

položíme rovno nule

$$\frac{2x^3+6x}{(x^2-1)^3} = 0, \quad 2x(x^2+3) = 0$$

Existuje jediné řešení a to 0.
Tedy definiční obor druhé derivace je rozdělen na dva intervaly:

I	f''	f
$\langle 0,1)$	$-$	konkávní
$(1,\infty)$	$+$	konvexní

kde jsem volil

$$f''(\frac{1}{2}) = -\frac{208}{27}, \quad f''(2) = \frac{28}{27}$$

6. lokální extrémy
Jediné lokální extrémy mohou být v stacionárních bodech. Co se týče $\sqrt{3}$ - zde je lokální minimum, druhá derivace v tomto bodě je kladná. V nule lokální extrém není - jak se ukáže později, je zde inflexní bod (dle symetrie se zde mění funkce z konvexní na konkávní)

7. limity v bodech nespojitosti, v krajních bodech definičního oboru
Funkce není spojitá v bodě 1, tak se podíváme na ty jednostranné limity

$$\lim_{x\to 1+} \frac{x^3}{x^2-1} = \lim_{x\to 1+} \frac{x^3}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x\to 1+} \frac{x^3}{(x+1)} \lim_{x\to 1+} \frac{x^3}{(x-1)} = \frac{1}{2}\infty = \infty$$

$$\lim_{x\to 1-} \frac{x^3}{x^2-1} = \lim_{x\to 1-} \frac{x^3}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x\to 1-} \frac{x^3}{(x+1)} \lim_{x\to 1-} \frac{x^3}{(x-1)} = \frac{1}{2}(-\infty) = -\infty$$

8. asymptoty
Svislé asyptoty už máme za sebou - funkce f má na $x > 0$ jedinou šikmou asyptotu $x = 1$.
Zkusíme ty šikmé (a jelikož uvažujeme pouze $x > 0$ budeme počítat jen v plus nekonečnu):

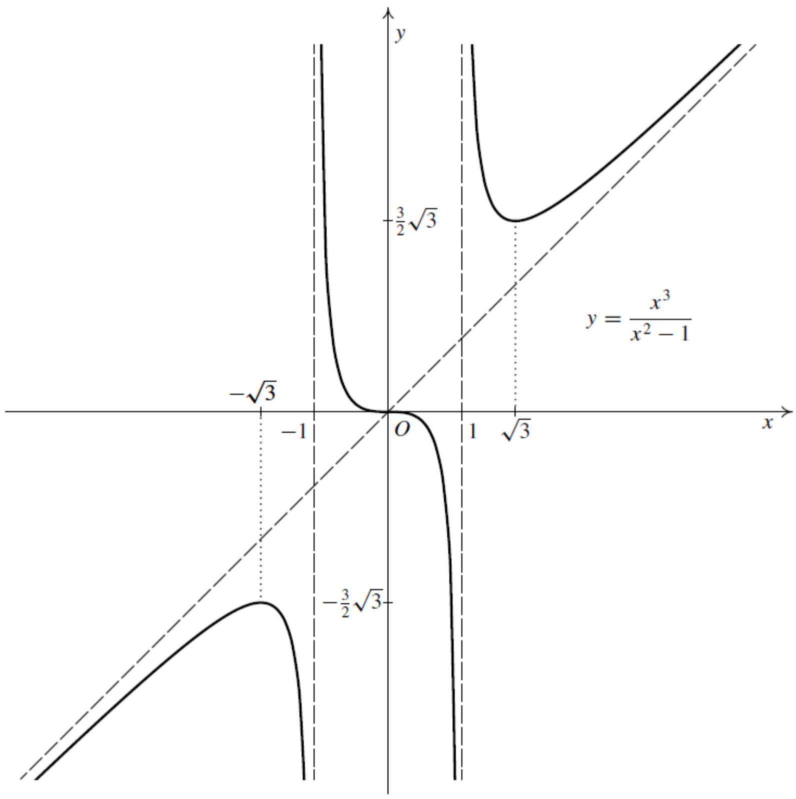
$$a = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x^3}{x^2-1}}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{x^2-1} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{x^2(1-\frac{1}{x^2})} = 1$$

$$b = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3}{x^2-1} - x = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3-x^3+x}{x^2-1} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2\frac{1}{x}}{x^2(1-\frac{1}{x^2})} = 0$$

Funkce má tedy šikmou asymptotu v plus nekonečnu $y = x$.

9. významné body, funkční hodnoty ve významných bodech
Významnými body jsou jistě průsečíky s osami, ale funkce f má jediný průsečík a tím je $[x, f(x)] = [0, 0]$.
Dále je důležitý bod $\sqrt{3}$ - zde se mění funkce z klesající na rostoucí, proto určíme funkční hodnotu $f(\sqrt{3}) = \frac{3}{2}\sqrt{3}$

10. graf
    Nyní přichází velké finále našeho snažení. Graf není nutno kreslit přesně a trápit se s pravítkem - jde hlavně o kvalitativní vlastnosti funkce



    Nezapomeňte do grafu zaznačit všechny důležité hodnoty

■

5 Reference

[1] *Matematická analýza ve Vesmíru - soubor přednáškových slidů* Bouchala J., 2000 a něco

[2] *Diferenciální počet jedné proměnné* Kuben J., Šarmanová P., ESF, 2007