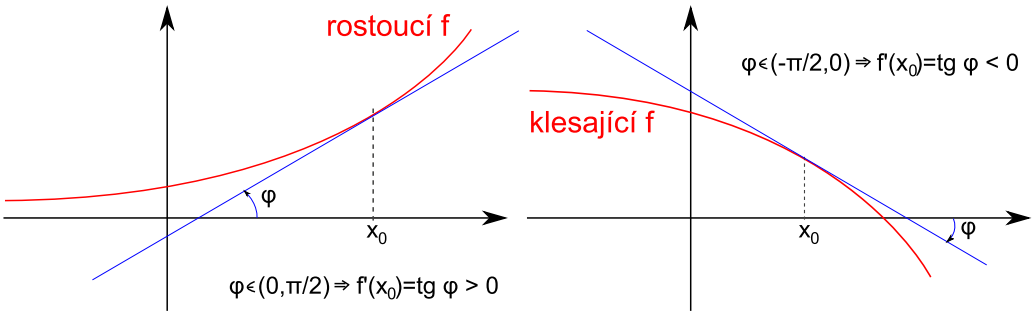
Lukáš Pospíšil,2011

1 Derivace funkce a monotonie

Jelikož derivace funkce v daném bodě je de-facto směrnice tečny (tangens úhlu, který svírá tečna s kladnou poloosou x) lze jednoduše ze znaménka derivace v daném bodě určit, jestli se jedná o rostoucí, či klesající, funkci.



Věta 1.0.1
Uvažujme interval $I \subset D_f$. Nechť funkce f má na intervalu I derivaci.

Je-li $\forall x \in I$:

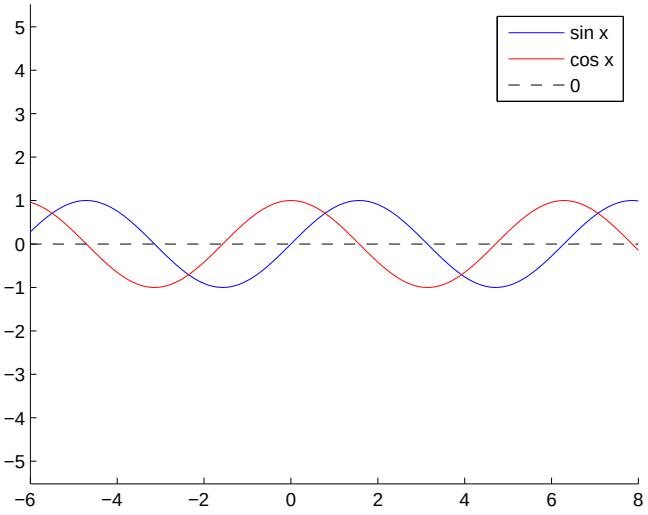
1. $f'(x) > 0$, pak f je rostoucí na I
2. $f'(x) \geq 0$, pak f je neklesající na I
3. $f'(x) < 0$, pak f je klesající na I
4. $f'(x) \leq 0$, pak f je nerostoucí na I
5. $f'(x) = 0$, pak f je konstantní na I

Příklad 1.0.1
Uvažujme funkci

$$f(x) \stackrel{\text{def}}{=} \sin x$$

S derivací jistě nebude problém

$$f'(x) = \cos x$$



Všimli jste si? Na intervalech, kde je funkce sin klesající, je funkce cos záporná. Na intervalech, kde je funkce sin rostoucí, je funkce cos kladná. ■

2 Stacionární body a body podezřelé z extrému

Definice 2.0.1
Pojmem *stacionární bod* nazveme $x_0 \in D_f$ pokud $f'(x_0) = 0$ nebo $f'(x_0)$ neexistuje.

Poznámka: Ze slovníku cizích slov: *stacionární* = neměnící se s časem, nepohyblivý, stálý ustálený.
Slyšeli jste už pojem *stacionární úloha*? To je fyzikální úloha, ve které je počítaná fyzikální vlastnost nezávislá na čase. Teda se nemění. Tož a změna - to je derivace. ≈

Příklad 2.0.2
Nalezněte stacionární body funkce

$$f(x) \stackrel{\text{def}}{=} x^2 e^x$$

Takže zderivujeme

$$f'(x) = 2xe^x + x^2 e^x$$

a položíme rovno nule

$$f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow 2xe^x + x^2 e^x = 0$$

Tedy řešíme rovnici

$$\begin{aligned} 2xe^x + x^2 e^x &= 0 \\ xe^x(2+x) &= 0 \end{aligned}$$

a součin je nulový, pokud se alespoň jeden z činitelů rovná nule, tedy stacionárními body jsou

$$\begin{aligned} x_0 &= 0 \\ x_1 &= -2 \end{aligned}$$

(neexistuje $x \in D_f$ takové, že $e^x = 0$) ∎

3 Intervaly monotonie

Uvažujme funkci a průběh její první derivace. Pak *střídání* (změna) monotonie původní funkce (rostoucí-klesající, klesající rostoucí) bude nastávat v stacionárních bodech. Tedy při určování intervalů monotonie (intervaly na kterých je funkce rostoucí, případně klesající) si pomůžeme stacionárními body - jedině v nich se může monotonie měnit. Jistě nám bude nápomocná tato věta:

Věta 3.0.2
Nechť je dána funkce f spojitá na intevalu $\langle a, b\rangle \subset D_f$.

Je-li

$$f(a)f(b) < 0$$

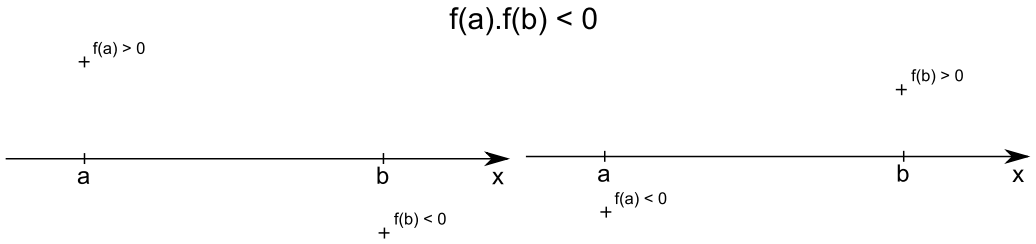
pak

$$\exists x_0 \in (a, b) : f(x_0) = 0$$

Poznámka: Prozradím, že požadovanou vlastnost lze zapsat i jinak:

$$f(a)f(b) < 0 \quad \Leftrightarrow \quad (f(a) > 0 \wedge f(b) < 0) \ \vee \ (f(a) < 0 \wedge f(b) > 0)$$

A nakreslíme si obrázky pro jednotlivé situace:



Spojte body $[a, f(a)]$ a $[b, f(b)]$ nepřerušenou čarou, která by mohla být grafem nějaké spojité funkce. Jistě při tom protnete x-ovou osu. Tedy existuje průsečík $[x_0, 0]$ - nějaký bod v intervalu (a, b) takový, že jeho funkční hodnota je nula.
Žádná velká záhada. ≈

I díky této větě dokážeme vyřešit příští příklad.

Příklad 3.0.3
Určete intervaly monotonie (tj. intervaly ve kterých je funkce klesající nebo rostoucí) funkce

$$f(x) \stackrel{\text{def}}{=} x^2 e^x$$

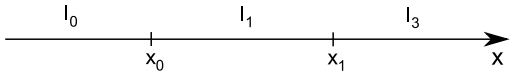
Očividně $D_f = \mathbb{R}$. Nejdříve nalezneme stacionární body, připomínám derivaci:

$$f'(x) = 2xe^x + x^2 e^x$$

a stacionární body jsou (viz předchozí příklad):

$$\begin{aligned} x_0 &= 0 \\ x_1 &= -2 \end{aligned}$$

Tedy definiční obor funkce je rozdělen na tři části:



Nyní budeme uvažovat postupně jednotlivé intervaly. Stačí, když určíme hodnotu derivace v libovolném vnitřním bodě uvažovaného intervalu (hej, to by stálo za zamyšlení - viz poznámka).

$$\begin{array}{lll} I_1 = (-\infty, -2) & \text{např. } f'(-3) = 2.(-3)e^{-3} + (-3)^2 e^{-3} > 0 & \Rightarrow f'(I_1) > 0 \\ I_2 = (-2, 0) & \text{např. } f'(-1) = 2.(-1)e^{-1} + (-1)^2 e^{-1} < 0 & \Rightarrow f'(I_2) < 0 \\ I_3 = (0, \infty) & \text{např. } f'(1) = 2.1e^{1} + 1^2 e^{1} < 0 & \Rightarrow f'(I_3) > 0 \end{array}$$

Jak to tak šikovně napsat? Co takhle tabulka

I	f'	f
$(-\infty, -2\}$	$+$	$\nearrow$
$\langle -2, 0\rangle$	$-$	$\searrow$
$\langle 0, \infty)$	$+$	$\nearrow$

A co ty krajní body? Viz další poznámka. ■

Poznámka: Všiměte si, že jsem záměrně ztotožnil pojmy *intervaly monotonie* a *maximální intervaly monotonie*. Například v předchozím příkladě je funkce f klesající na intervalu $(-2, -1)$. No a co? Rozhodně zajímavější informací jsou co největší intervaly monotonie. Tedy to co jsme nalezli, jsou vlastně maximální intervaly monotonie. ≈

Poznámka: Proč stačí jeden bod? Jediným způsobem, jak by se mohla monotonie zmenit, je průchod derivace nulou (viz věta na začátku kapitoly). A my všechny tyto průchody nulou známe (to jsou stacionární body). Takže derivace se nezmění až do příštího stacionárního bodu. A to je dobře. ≈

Poznámka: Co ty krajní body? Monotonii máme původně definovanou pro libovolné intervaly (otevřené, polootevřené i uzavřené). První věta v dnešním cvičení se ale týká otevřených intervalů. A nám jde o maximální intervaly monotonie.
Takže by bylo fajn, kdyby jsme tam mohli i ten krajní bod přidat. Ale musí být v definičnim oboru, což třeba takové $\pm\infty$ určitě není (nejsou to reálná čísla, tedy nemohou být ani v definičním oboru funkcí reálné proměnné). Důležitá je spojitost v krajních bodech, což je zase otázka jednostranných limit. Uvažte tvrzení:
Je-li f spojitá na $\langle a, b\rangle$ a rostoucí na (a, b), je f rostoucí i na $\langle a, b\rangle$.
Analogicky i pro jiné kombinace typů monotonie a polouzavřených intervalů. ≈

4 Lokální extrémy

Lokální minimum, lokální maximum. To je to, o co nám půjde. Jo, a ještě to může být ostré.

Definice 4.0.2
Řekneme, že f má v bodě $x_0 \in D_f$

- *lokální minimum*, jestliže

$$\exists \mathcal{O}(x_0) : \forall x \in \mathcal{O}(x_0) : f(x) \geq f(x_0)$$

- *ostré lokální minimum*, jestliže

$$\exists \mathcal{P}(x_0) : \forall x \in \mathcal{P}(x_0) : f(x) > f(x_0)$$

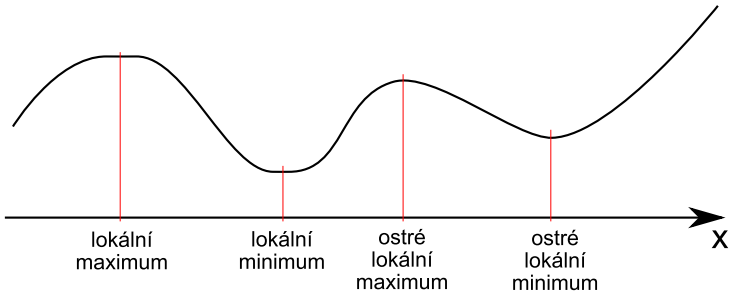
- *lokální maximum*, jestliže

$$\exists \mathcal{O}(x_0) : \forall x \in \mathcal{O}(x_0) : f(x) \leq f(x_0)$$

- *ostré lokální maximum*, jestliže

$$\exists \mathcal{P}(x_0) : \forall x \in \mathcal{P}(x_0) : f(x) < f(x_0)$$

Poznámka: Obrázeček a je jasno



Vidíte ten rozdíl mezi lokálním extrémem a ostrým lokálním extrémem? ≈

Příklad 4.0.4
Nalezněte lokální extrémy funkce

$$f(x) \stackrel{\text{def}}{=} x^2 e^x$$

Tak to není žádný problém, jelikož už známe intervaly monotonie

I	f'	f
$(-\infty, -2\rangle$	$+$	↗
$\langle -2, 0\rangle$	$-$	↘
$\langle 0, \infty)$	$+$	↗

tak lokální maximum je v bodě -2 a lokální minimum je v bodě 0.
A jsou to ostré extrémy. ■

5 Je to implikace, ne ekvivalence

Věta 5.0.3
(nutná podmínka existence lokálního extrému)

Má-li funkce f v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$ lokální extrém, je buď $f'(x_0) = 0$, nebo $f'(x_0)$ neexistuje.

Poznámka: Tedy pokud je v bodě extrém, pak je to stacionární bod. $\approx$

Poznámka: Všimněte si, že je to *pouze* implikace. Tedy pokud je bod stacionární, pak to neznamená, že je v něm extrém. $\approx$

Jako protipříklad (že ne každý stacionární bod je extrém) nemusíme vymýšlet nějaké šílené funkce:

Příklad 5.0.5
Nalezněte lokální extrémy

$$f(x) \stackrel{\text{def}}{=} x^3$$

Tedy derivujeme

$$f'(x) = 3x^2$$

a položíme rovno nule

$$f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 3x^2 = 0$$

a existuje pouze jeden stacionární bod

$$x_0 = 0$$

Jak jistě víte z průběhu funkce x^3 - tato funkce nemá extrémy. Navíc $\forall x \in D_f : f'(x) \geq 0$, proto funkce f je neklesající - jak tedy můžeme hovořit o nějakém extrému? ∎

Jak to tedy poznat - nalezneme stacionární body a co dál?

6 Druhá derivace... a i další

Teď jedna důležitá věta, která nám umožní nalézt lokální extrémy bez toho, abychom museli identifikovat intervaly monotonie.

Věta 6.0.4
Nechť $f'(x_0) = 0$ a nechť

- $f''(x_0) > 0$, pak f má v x_0 lokální minimum
- $f''(x_0) < 0$, pak f má v x_0 lokální maximum

A i když to nevyjde u druhé derivace, můžeme pokračovat

Věta 6.0.5
Nechť

$$f'(x_0) = f''(x_0) = \ldots = f^{(n-1)}(x_0) = 0 \neq f^{(n)}(x_0)$$

Potom platí

- je-li $n \in \mathbb{N}$ liché, funkce f nemá v x_0 lokální extrém
- je-li $n \in \mathbb{N}$ sudé a
  - $f^{(n)}(x_0) > 0$, má f v bodě x_0 ostré lokální minimum
  - $f^{(n)}(x_0) < 0$, má f v bodě x_0 ostré lokální maximum

Poznámka: Tedy derivace jsou nulové až do $(n-1)$-ní iterace. A v n-té iteraci je nenulová. Pak záleží na tom, jestli je to sudá nebo lichá derivace. ≈

Příklad 6.0.6
Nalezněte lokální extrémy a intervaly monotonie funkce

$$f(x) = 12x^5 - 15x^4 - 40x^3 + 60$$

Očividně $D_f = \mathbb{R}$.
První derivace

$$f'(x) = 60x^4 - 60x^3 - 120x^2$$

a položíme rovno nule - hledáme stacionární body

$$\begin{aligned} 60x^4 - 60x^3 - 120x^2 &= 0 \\ x^2(x^2 - x - 2) &= 0 \end{aligned}$$

a získáme stacionární body $x_0 = 0, x_1 = 2, x_3 = -1$. Tedy máme čtyři intervaly a je co vyšetřovat:

$$\begin{array}{ll} (-\infty, -1): & f'(-2) > 0 \\ (-1, 0): & f'(-\frac{1}{2}) < 0 \\ (0, 2): & f'(1) < 0 \\ (2, \infty): & f'(3) > 0 \end{array}$$

Poznámka: Jistě se vám nechce dosazovat do předpisu první derivace a klepat to do kalkulačky. Ani mi se nechce. Proto na to půjdeme mazaněji. Jelikož

$$f'(x) = 60x^4 - 60x^3 - 120x^2 = 60x^2(x^2 - x - 2)$$

a očividně $\forall x : 60x^2 > 0$ pro x jiné než stacionární body (a to my tam dosazujeme jiné než stacionární body), pak znaménko první derivace závisí pouze na činiteli $(x^2 - x - 2)$. U identifikace intervalu monotonie nás vlastně nezajímá konkrétní hodnota, ale pouze znaménko. Proto stačí dosadit vyšetřovaný bod do členu $(x^2 - x - 2)$ a podle znaménka se určí i znaménko první derivace v daném bodě (kladné číslo krát kladné je kladné, kladné číslo krát záporné je záporné). ≈

a výsledná tabulečka (i skrajními body, ve kterých je funkce spojitá - polynom je spojitý v celém D_f):

I	f'	f
$(-\infty, -1\rangle$	$+$	$\nearrow$
$\langle -1, 0\rangle$	$-$	$\searrow$
$\langle 0, 2\rangle$	$-$	$\searrow$
$\langle 2, \infty)$	$+$	$\nearrow$

Že by v bodě -1 bylo lokální maximum, v bodě 2 lokální minimum a v bodě 0 nebyl lokální extrém?
Podíváme se na druhou derivaci:

$$f''(x) = 240x^3 - 180x^2 - 240x = 60x(4x^2 - 3x - 4)$$

a dosadíme stacionární body:

$$\begin{aligned} f''(-1) &= 60.(-1).(4.(-1)^2 - 3.(-1) - 4) < 0 \\ f''(0) &= 60.0.(4.0^2 - 3.0 - 4) = 0 \\ f''(2) &= 60.2.(4.2^2 - 3.2 - 4) > 0 \end{aligned}$$

Tedy v bodě -1 je lokální maximum, v bodě 2 lokální mininimum. A co ta 0? Budeme derivovat, až dokud nebude jasno:

$$f^{(3)}(x) = 720x^2 - 360x - 240 \quad f^{(3)}(0) = -240$$

Tedy třetí (lichá) derivace v bodě 0 je nenulová. Proto v bodě 0 nemá funkce lokální extrém.
■

Příklad 6.0.7
Nalezněte lokální extrémy a intervaly monotonie funkce

$$f(x) \stackrel{\text{def.}}{=} \frac{x^2}{\ln x}$$

Očividně $D_f = (0,1) \cup (1,\infty)$.
První derivace

$$f'(x) = \frac{2x\ln x - x^2\frac{1}{x}}{\ln^2 x} = \frac{2x\ln x - x}{\ln^2 x} = \frac{x(2\ln x - 1)}{\ln^2 x}$$

a položíme rovno nule - hledáme stacionární body. Jelikož $\forall x \in D_f : \ln^2 x \neq 0$, stačí uvažovat

$$x(2\ln x - 1) \quad = \quad 0$$

a získáme stacionární bod $x_0 = sqrte$ (upozorňuji, že $0 \notin D_f$). Tedy máme tři intervaly ($1 < \sqrt{e}$):

$$\begin{aligned} &(0,1): && f'(\tfrac{1}{2}) < 0 \\ &(1,\sqrt{e}): && f'(\sqrt[4]{e}) < 0 \\ &(\sqrt{e},\infty): && f'(e) > 0 \end{aligned}$$

a výsledná tabulečka (i skrajními body, ve kterých je funkce spojitá):

I	f'	f
$(0,1)$	$-$	$\searrow$
$(1,\sqrt{e}\rangle$	$-$	$\searrow$
$\langle\sqrt{e},\infty)$	$+$	$\nearrow$

Že by v bodě $\sqrt{e}$ bylo lokální minimum?
Nechtějte abych to derivoval znovu :) (ukáže se totiž, že to nestačí, je to po dosazení nula, tedy by nás čekala další derivace) ■

Příklad 6.0.8
Nalezněte lokální extrémy funkce

$$f(x) = x^3 e^{x^2}$$

Očividně $D_f = \mathbb{R}$.
První derivace

$$f'(x) = 3x^2 e^{x^2} + x^3 e^{x^2} 2x = e^{x^2} x^2 (3 + 2x^2)$$

Stacionárním bodem je $x_0 = 0$. Druhá derivace

$$f''(x) = 6xe^{x^2} + 3x^2 e^{x^2} 2x + 8x^3 e^{x^2} + 2x^4 e^{x^2} 2x = xe^{x^2}(4x^4 + 14x^2 + 6)$$

a dosadíme - zjistíme, že $f''(0) = 0$. Takže pokračujeme

$$f^{(3)}(x) = (e^{x^2} + xe^{x^2} 2x)(4x^4 + 14x^2 + 6) + xe^{x^2}(16x^3 + 28x) = e^{x^2}(8x^6 + 48x^4 + 54x^2 + 6)$$

Juch, ta šestka nás zachránila - $f^{(3)} = 6 \neq 0$, proto funkce f nemá v bodě 0 lokální extrém.
Nemáme další stacionární body podezřelé z extrému, tedy funkce f nemá lokální extrémy.

■

Příklad 6.0.9
Nalezněte lokální extrémy funkce

$$f(x) \stackrel{\text{def.}}{=} x - 2\sin x, \quad x \in (0, 2\pi)$$

První derivace

$$f'(x) = 1 - 2\cos x$$

a položíme rovno nule

$$\cos x = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{\pi}{3} \vee x = \frac{5}{3}\pi$$

Druhá derivace

$$f''(x) = 2\sin x$$

dosadím a vidím - lokální minimum je v bodě $\frac{\pi}{3}$, lokální maximum v bodě $\frac{5}{3}\pi$. ■

7 Reference

[1] *Matematická analýza ve Vesmíru - soubor přednáškových slidů* Bouchala J., 2000 a něco

[2] *Diferenciální počet jedné proměnné* Kuben J., Šarmanová P., ESF, 2007