LA 1. cvičení

Výroky a kvantifikátory

Martin Hasal,2012

1 Výroky

Definice 1.0.1
(intuitivní) Výrok je **tvrzení** o němž má smysl říci, zda je pravdivé nebo nepravdivé. Buď A výrok. Je-li A pravdivý, zapisujeme tuto skutečnost symbolicky $p(A) = 1$, je-li A nepravdivý, píšeme $p(A) = 0$. Symboly 0, 1 se nazývají pravdivostní hodnoty.

Příklad 1.0.1
Rozhodněte o pravdivosti:

- $A : \frac{1}{i} = -i$.
- B : 51 je prvočíslo.

Řešení:

- $p(A) = 1$, neboť $\frac{1}{i} = \frac{i}{i^2} = \frac{i}{-1} = -i$
- $p(B) = 0$, neboť $51 = 3 \times 17$.

■

Definice 1.0.2
Negace. Buď A výrok. Výrok A', jehož pravdivostní hodnoty jsou definovány tabulkou

p(A)	p(A')
1	0
0	1

se nazývá **negace výroku** A. Negace mění pravdivostní hodnotu výroku v opačnou.

1.1 Logické spojky

Využívají se v matematice ke sjednocení a zkrácení zápisu.

Definice 1.1.1
Daný seznam společně s negací je úplný.

- $\wedge$ - konjunkce,
- $\vee$ - disjunkce,

- $\Rightarrow$ - implikace,
- $\Leftrightarrow$ - ekvivalence.

Definice 1.1.2
Kvantifikátory

- $\forall$ - obecný kvantifikátor, čte se „pro všechna“,
- $\exists$ - existenční kvantifikátor, čte se „existuje alespoň jeden“,
- $\exists!$ - kvantifikátor jednoznačné existence, čte se „existuje právě jeden“.

Platí následující tabulka

$p(A)$	$p(B)$	$p(A \wedge B)$	$p(A \vee B)$	$p(A \Rightarrow B)$	$p(A \Leftrightarrow B)$
1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	0
0	1	0	1	1	0
0	0	0	0	1	1

V následující tabulce je uveden název spojky, její označení, slovní vyjádření a odpovídající logický význam.

/	$p(A \wedge B)$	$p(A \vee B)$	$p(A \Rightarrow B)$	$p(A \Leftrightarrow B)$
slovní vyjádření	A a současně B	A nebo B	jestliže A, pak B	A právě tehdy, když B
logický význam	současně platí A i B	platí aspoň jeden z A, B	z A plyne B	A a B jsou ekvivalentní

2 Pár příkladů pro hlavičku

Příklad 2.0.1
Přečtěte řádně a určete zda daný výrok platí:
POZOR NA POŘADÍ KVANTIFIKÁTORŮ!!!

- $\forall x \in \mathbb{R}\ \exists y \in \mathbb{R} : x < y$ -(platí),
- $\exists x \in \mathbb{R}\ \exists y \in \mathbb{R} : x < y$ -(platí),
- $\exists x \in \mathbb{R}\ \forall y \in \mathbb{R} : x < y$ -(neplatí),
- $\forall x \in \mathbb{R}\ \forall y \in \mathbb{R} : x < y$ -(neplatí).

Cvičení negujte předchozí výroky. ■

Příklad 2.0.2
Dokažte:

$$\forall a > 0\ \exists n \in \mathbb{N} : a > \frac{1}{n}.$$

■

Příklad 2.0.3
Určete zda daný výrok platí/neplatí:
POZOR NA POŘADÍ KVANTIFIKÁTORŮ!!!

- pro $\forall x \in \mathbb{N} : n^2$ sudé $\Rightarrow n$ sudé,
- n je prvočíslo větší než 3 $\Leftrightarrow n$ dává zbytek 1 nebo 5 po dělení číslem 6,
- $(\exists! x \in \mathbb{R} : 4^x + 2^x = 20) \wedge (\forall x > 0 : x + \frac{1}{x} \geq 2)$,
- $(\exists! x \in (0, \pi) : \cos^2 x - \sin x = \frac{1}{4}$.

KDO NEVYPOČÍTÁ POSLEDNÍ PŘÍKLAD OTEVŘE SI, Jindra Petáková: Sbírka úloh z matematiky pro přípravu k maturitě a na VŠ. ■

3 Reference

[1] K. Rektorys a kol. *Přehled užité matematiky* Prometheus, 2000

[2] Mgr. Petr Vodstrčil, Ph.D.. *Tajné poznámky do cvičení*, 2012.

[3] *MATEMATIKA online* Základní kurzy - MATEMATIKA I, 2012. Dostupné z *http://mathonline.fme.vutbr.cz/?server=1*.