LA 8. cvičení

Souřadnice vektoru v bázi, dimenze, hledání báze

Lukáš Pospíšil, Martin Hasal,2011

1 Motivace - souřadnice v bázi

Příklad 1.0.1

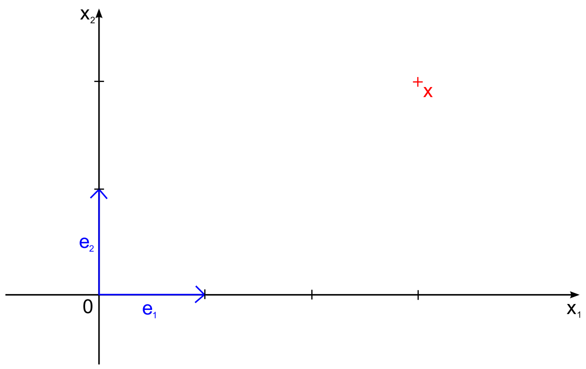
Uvažujme vektorový prostor $\mathcal{V} \subset \mathbb{R}^2$ definován množinou

$$V \stackrel{\text{def}}{=} \{[v_1, v_2] \in \mathbb{R}^2\}$$

Tento prostor má standartní bázi $e_1 = [1,0], e_2 = [0,1]$, to znamená, že každý vektor prostoru $\mathcal{V}$ se dá vyjádřit jako lineární kombinace těhto vektorů.
Za prostor $\mathbb{R}^2$ lze považovat všechny body v rovině určené jednoznačně podle souřadnicového systému - podle souřadnic bodů, nebo také podle polohových vektorů jednotlivých bodů (vektor mezi počatkem souřadnicového systému a daným bodem) = proto lze souřadnice vektoru stotožnit s polohovým vektorem (body v rovině považujeme za vektory).

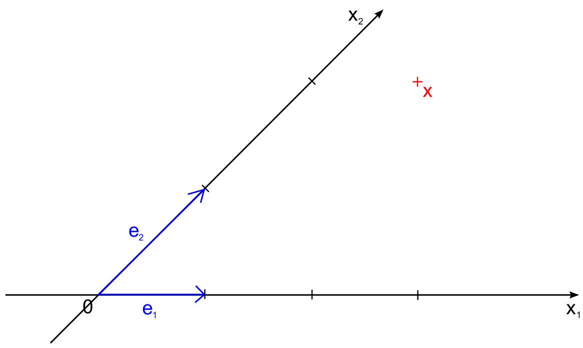
Tedy například bod $x \in \mathcal{V}$ se dá vyjádřit jako

$$x = 3e_1 + 2e_2$$



Uvažujme jinou bázi $e_1 = [1,0], e_2 = [1,1]$. Pak bod $x \in \mathcal{V}$ se dá vyjádřit jako

$$x = 2e_1 + 1e_2$$



Tedy z tohto pozorování lze usoudit, že bázové vektory jsou de-facto směrové vektory (v kartézkém systému souřadnic) souřadnicového systému.

■

2 Souřadnice vektoru v bázi

Definice 2.0.1
Nechť je dána báze $E = \{e_1, \ldots, e_n\}$ vektorového prostoru $\mathcal{V}$.
Pak koeficienty $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ nazýváme souřadnice vektoru $v \in \mathcal{V}$ vzhledem k bázi E jestliže

$$\alpha_1 e_1 + \ldots + \alpha_n e_n = v$$

Aritmetický vektor $[v]_E = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ nazýváme souřadnicový vektor vektoru v.

Jelikož hledání souřadnic vektoru v dané bázi je věc podobná vyjadřování vektoru jako lineární kombinaci (viz cvičení 6) a během řešení je generována matice podobná parametrické matici vyjadřování obecných vektorů z cvičení 7, vypočteme si pouze jeden jednoduchý příklad.

Příklad 2.0.2
Vypočtěte souřadnice vektoru $v = (0, 2, 4)$ v bázi

$$\begin{aligned} e_1 &= (1,1,0) \\ e_2 &= (0,1,1) \\ e_3 &= (1,0,1) \end{aligned}$$

Rovnice lineární kombinace

$$\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3 = v \tag{1}$$

vede na soustavu lineárních rovnic řešitelnou pomocí Gaussovy eliminační metody:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \end{array}\right] \begin{array}{l} r_1 \\ r_1 - r_2 \\ r_3 \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \end{array}\right] \begin{array}{l} r_1 \\ r_2 \\ r_3 + r_2 \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{array}\right]$$

A dopřednou redukcí získáme řešení

$$[v]_E = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (-1, 3, -1)$$

■

3 Dimenze

Nechť $\mathcal{V}$ je vektorový prostor a $E = \{e_1, \ldots, e_n\}$ je jeho báze. Pak

- Nejvyšší počet lineárně nezávislých vektorů z vektorového prostoru $\mathcal{V}$ je n.
- Počet vektorů různých bází je vždy stejný.
- Tento počet nazýváme *dimenze* vektorového prostoru a značíme

$$\dim \mathcal{V} = n$$

Příklad 3.0.3
Dokažte, že vektory

$$\begin{aligned} v_1 &= (1,0) \\ v_2 &= (0,1) \\ v_3 &= (1,1) \end{aligned}$$

jsou lineárně nezávislé.

Rovnice lineární nezávislosti (závislosti) má tvar

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 = o$$

a generuje soustavu lineárních rovnic

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

matice je v určitém schodovém tvaru, tedy Gaussova eliminační metoda vyprodukuje parametrické řešení. Vektory jsou lineárně závislé.

Pozorováním lze usoudit, že obdélníkové matice, ve kterých je větší počet sloupců než řádků nemají jednoznačné řešení. Tedy úlohy lineární nezávislosti vektorů vedoucí na soustavu v tomto tvaru nemají nulové řešení. Tedy vektory, jejiž počet je větší než dimenze vektorového prostoru, jsou vždy závislé. ■

Věta 3.0.1
Pozor - dimenze nadprostoru může být jiná, než dimenze prostoru.

Příklad 3.0.4
Nechť je dán vektorový prostor $\mathcal{V}$ definován množinou

$$V = \{[v_1, v_2, 0, 0], v_1, v_2 \in \mathbb{R}^2\}$$

Očividně

$$\mathcal{V} \subset \mathbb{R}^4$$

(důkaz dle věty v cvičení 6).

Uhodnout bázi tohto vektorového prostoru není těžké:

$$\begin{aligned} e_1 &= (1,0,0,0) \\ e_2 &= (0,1,0,0) \end{aligned}$$

(že se jedná opravdu o bázi se dá ověřit - viz cvičení 7).
Tedy dim $\mathcal{V} = 2$. ■

Příklad 3.0.5
Určete bázi a dimenzi vektorového prostoru $\mathcal{V} \subset \mathbb{R}^3$ definován množinou

$$V \overset{\text{def}}{=} \{[v_1, v_2, v_3] \in \mathbb{R}^3 : v_1 + v_2 - v_3 = 0 \wedge v_2 - v_3 = 0\}$$

Prvky prostoru vyhovují rovnicím

$$\begin{aligned} v_1 + v_2 - v_3 &= 0 \\ v_2 - v_3 &= 0 \end{aligned}$$

Tyto rovnice lze považovat za soustavu lineárních rovnic. Její parametrické řešení lze nalézt tímto způsobem

- volme parametr
$$v_3 = t, t \in \mathbb{R}$$
- z druhé rovnice
$$v_2 = t$$
- z třetí rovnice po dosazení
$$v_1 = 0$$

Pak pro každý vektor $v = [v_1, v_2, v_3] \in \mathcal{V}$ existuje $t \in \mathbb{R}$ takové, že

$$v = [0, t, t] = t.[0, 1, 1]$$

Nebo-li každý prvek vektorového prostoru $\mathcal{V}$ lze získat jako lineární kombinaci vektoru $[0, 1, 1]$. Což znamená, že jsme našli bázi daného prostoru.

$$\mathcal{E} = (f_1 := (0, 1, 1)).$$

Protože máme pouze jednu bázovou funkci dostáváme dimenzi rovnou jedné. Neboli

$$dim\mathcal{V} = 1.$$

■

Příklad 3.0.6
Najděte bázi prostoru

$$U \overset{\text{def}}{=} \{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \in P_2 : a_0 - a_1 + a_2 = 0 \wedge a_0 + a_1 - 2a_2 = 0\}$$

Přepsáno do matice dostáváme

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right]$$

Po provedeni Gaussovy eliminace

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & 0 \end{array}\right]$$

Parametrické řešení rovnice lze nalézt tímto způsobem

- volme parametr
$$a_2 = t, t \in \mathbb{R}$$
- z druhé rovnice
$$a_1 = \frac{3}{2}t$$
- z třetí rovnice po dosazení
$$a_0 = a_1 - a_2 = \frac{3}{2}t - t = \frac{1}{2}t$$

Množinu U si můžeme přepsat do následujícího tvaru:

$$U \stackrel{\text{def}}{=} \{\frac{1}{2}t + (\frac{3}{2}t)x + tx^2 \in P_2 : t \in \mathbb{R}\} = \{t(\frac{1}{2} + (\frac{3}{2})x + x^2) \in P_2 : t \in \mathbb{R}\}$$

Nebo-li každý prvek prostoru funkcí U lze získat jako lineární kombinaci funkce $\frac{1}{2} + (\frac{3}{2})x + x^2$. Což znamená, že jsme našli bázi daného prostoru.

$$\mathcal{E} = (f_1 := \frac{1}{2} + (\frac{3}{2})x + x^2).$$

Protože máme pouze jednu bázovou funkci dostáváme dimenzi rovnou jedné. Neboli

$$dim\mathcal{V} = 1.$$

■

Příklad 3.0.7
Určete bázi a dimenzi vektorového prostoru $\mathcal{U} + \mathcal{V}$ pokud

$$\begin{array}{rcl} U & = & \{[u_1, u_2, u_3] \in \mathbb{R}^3 : u_1 + u_2 = 0 \wedge u_2 + u_3 = 1\} \\ V & = & \{[v_1, v_2, v_3] \in \mathbb{R}^3 : v_1 + v_2 = 0\} \end{array}$$

Každý vektor vektorového prostoru $\mathcal{V}$ řeší soustavu lineárních rovnic

$$\begin{array}{ccccccc} u_1 & + & u_2 & & & = & 0 \\ & & u_2 & + & u_3 & = & 1 \end{array}$$

Při volbě $u_3 = t, t \in \mathbb{R}$ získáme řešení

$$u = [u_1, u_2, u_3] = [t, -t, t] = t.[1, -1, 1]$$

Tedy vektorový prostor $\mathcal{U}$ lze stotožnit s lineárním obalem

$$\mathcal{U} = \langle [1, -1, 1] \rangle$$

Podobně pro vektorový prostor $\mathcal{V}$ lze prvky tohto prostoru považovat za řešení rovnice

$$v_1 + v_2 = 0$$

které má parametrický tvar

$$v = [v_1, v_2, v_3] = [t_1, -t_1, t_2] = t_1.[1, -1, 0] + t_2.[0, 0, 1]$$

a vektorový prostor $\mathcal{V}$ je lineárním obalem

$$\mathcal{V} = \langle [1, -1, 0], [0, 0, 1] \rangle$$

Pro libovolný prvek w z vektorového prostoru $\mathcal{W} \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{U} + \mathcal{V}$ platí

$$w = u + v = t.[1, -1, 1] + t_1.[1, -1, 0] + t_2.[0, 0, 1]$$

pak tedy

$$\mathcal{W} = \langle [1, -1, 1], [1, -1, 0], [0, 0, 1] \rangle$$

Tyto vektory sice splňují druhou podmínku báze - libovolný prvek prostoru $\mathcal{W}$ lze vyjádřit jako jejich lineární kombinaci (= jedná se o lineární obal), ale jsou lineárně nezávislé?

Vektory zapíšeme do řádků matice a upravíme na schodový tvar pomocí elementárních řádkových úprav:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{array}{l} r_1 \\ r_1 - r_2 \\ r_3 \end{array} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{array}{l} r_1 \\ r_2 \\ r_2 - r_3 \end{array} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Počet nenulových řádků v upravené matici je 2, tedy i dimenze prostoru $\mathcal{W}$ je 2.
Poznámka: Jinak řečeno vektory $[1, -1, 1], [1, -1, 0], [0, 0, 1]$ jsou lineárně závislé - tj. libovolný z nich lze vyjádřit jako lineární kombinaci zbývajících vektorů.
Proto v další fázi můžeme klidně jeden vektor vynechat. Lineárním obalem zbylých vektorů bude stejná množina.
Navíc odstraněním přebytečného vektoru získáme lineárně nezávislé vektory - tedy bázi. $\approx$

Pak

$$\mathcal{W} = \langle [1, -1, 1], [1, -1, 0] \rangle$$

Báze obsahuje pouze dva vektory, tedy dimenze daného vektorového prostoru je 2.

■

4 Reference

[1] Z. Dostál, *Lineární algebra*, skriptum, Ostrava

[2] V. Vondrák, *LA1 - 8. přednáška*, prezentace

[3] V. Vondrák, *LA1 - 8. cvičení*