LA 6. cvičení

Lineární nezávislost a báze

Lukáš Pospíšil, Martin Hasal,2011

1 Motivace

Navažme na předešlé cvičení, kdy jsme mluvili o lineárních kombinacích a lineárních obalech.

2 Lineární závislost a nezávislost

Definice 2.0.1
Konečná množina vektorů $S = \{v_1, \ldots, v_k\}$ z vektorového prostoru $\mathcal{V}$ (tj. $v_1, \ldots, v_k \in \mathcal{V}$) se nazývá *lineárně nezávislá*, jestliže rovnice

$$\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_k v_k = o$$

má jediné řešení $\alpha_1 = \ldots = \alpha_k = 0$.
V opačném případě se nazývá *lineárně závislá*.

Poznámka: Žádný z vektorů lineárně nezávislé množiny nelze vyjádřit jako lineární kombinaci zbývajících vektorů. (plyne z definice nezávislosti množiny) $\approx$

Příklad 2.0.1
Množina vektorů $\{[1,0,0],[0,1,0],[0,0,1]\}$ je lineárně nezávislá, protože

- žádný z vektorů nelze vyjádřit jako lineární kombinaci zbývajících vektorů
- rovnice
$$\alpha_1[1,0,0] + \alpha_2[0,1,0] + \alpha_3[0,0,1] = [0,0,0]$$
má jediné řešení
$$\begin{aligned} \alpha_1 &= 0 \\ \alpha_2 &= 0 \\ \alpha_3 &= 0 \end{aligned}$$

■

Příklad 2.0.2
Rozhodněte, zda množina vektorů $\{v_1, v_2, v_3\}$ je lineárně nezávislá, pokud

$$\begin{aligned} v_1 &= [1,2,0] \\ v_2 &= [-1,-2,1] \\ v_3 &= [1,1,1] \end{aligned}$$

Rovnice lineární závislosti (nezávislosti)

$$\alpha_1[1,2,0] + \alpha_2[-1,-2,1] + \alpha_3[1,1,1] = [0,0,0]$$

je de-facto soustavou 3 rovnic (porovnáním jednotlivých složek vektorů na pravé a levé straně)

$$\begin{array}{rcrcrcr} \alpha_1 & - & \alpha_2 & + & \alpha_3 & = & 0 \\ 2\alpha_1 & - & 2\alpha_2 & + & \alpha_3 & = & 0 \\ & & \alpha_2 & + & \alpha_3 & = & 0 \end{array}$$

Tedy řešíme soustavu $A\alpha = b$, kde

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \alpha = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

pomocí Gaussovy eliminační metody. Výsledkem je vektor

$$\alpha = [0,0,0]^T$$

Tedy daná množina vektorů je lineárně nezávislá. ■

Příklad 2.0.3
Rozhodněte o lineární závislosti či nezávislosti vektorů

$$\begin{array}{rcl} v_1 & = & [1,0] \\ v_2 & = & [1,1] \\ v_3 & = & [2,1] \end{array}$$

Poznámka: Je krajně podezřelé, že počet vektorů je větší než dimenze prostoru, ze kterého vektory pocházejí. $\approx$

Rovnice lineární závislosti (nezávislosti)

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 = o \tag{1}$$

generuje soustavu rovnic

$$\begin{array}{rcrcrcr} \alpha_1 & + & \alpha_2 & + & 2\alpha_3 & = & 0 \\ & & \alpha_2 & + & \alpha_3 & = & 0 \end{array}$$

Opět řešíme pomocí Gaussovy eliminační metody

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

Z druhé rovnice je vidět použití parametru $\alpha_3 = t$, pak

$$\alpha_2 = -t$$

a dosazením do třetí rovnice získáme

$$\alpha_1 = -t$$

Rovnice (1) má tedy nekonečně mnoho řešení, proto vektory jsou lineárně závislé.
Poznámka: Vraťme se k poznámce z předešlé věty - například vektor v_3 lze vyjádřit jako lineární kombinaci vektorů v_1, v_2:

$$v_3 = v_1 + v_2$$

$\approx$

■

Příklad 2.0.4
Rozhodněte o lineární závislosti (nezávislosti) vektorů

$$\begin{aligned} p_1 &= x^2 - x \\ p_2 &= x + 1 \\ p_3 &= x^2 + 2 \end{aligned}$$

Čili opět budeme hledat řešení rovnice

$$\alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2 + \alpha_3 p_3 = 0$$

Poznámka: Všimněme si, že na pravé straně je nulový prvek prostoru, ze kterého dané vektory pocházejí - v tomto případě je to

$$o = 0.x^2 + 0.x + 0 = 0$$

$\approx$

Dosaďme

$$\begin{aligned} \alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2 + \alpha_3 p_3 &= 0 \\ \alpha_1(x^2 - x) + \alpha_2(x + 1) + \alpha_3(x^2 + 2) &= 0 \\ (\alpha_1 + \alpha_3)x^2 + (-\alpha_1 + \alpha_2)x + (\alpha_2 + 2\alpha_3) &= 0 \end{aligned}$$

Porovnáním koeficientů u jednotlivých mocnin x na levé a právé straně získáme soustavu

$$\begin{array}{rcrcrcl} \alpha_1 & & & + & \alpha_3 & = & 0 \\ -\alpha_1 & + & \alpha_2 & & & = & 0 \\ & & \alpha_2 & + & 2\alpha_3 & = & 0 \end{array}$$

kterou lze opět řešit pomocí Gaussovy eliminační metody. Řešením je

$$[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3] = [0, 0, 0]$$

tedy prvky jsou lineárně nezávislé. ■

3 Báze

Definice 3.0.2
Množina vektorů $S = \{v_1, \ldots, v_k\}, v_1, \ldots, v_k \in \mathcal{V}$ se nazývá *báze vektorového prostoru* $\mathcal{V}$, jestliže

1. S je lineárně nezávislá
2. libovolný vektor prostoru $\mathcal{V}$ lze vyjádřit jako lineární kombinaci vektorů množiny S

Poznámka: Báze se obvykle značí E a její prvky $e_1, \ldots, e_k$ $\approx$

Příklad 3.0.5
Vraťme se k množině vektorů

$$\begin{aligned} e_1 &= [1,0,0] \\ e_2 &= [0,1,0] \\ e_3 &= [0,0,1] \end{aligned}$$

a ukažme, že se skutečně jedná o bázi prostoru $\mathbb{R}^3$.

Vektory jsou lineárně nezávislé (dokázáno výše). Zbývá druhá vlastnost báze: Libovolný vektor prostoru $\mathbb{R}^3$ musí být možno vyjádřit jako lineární kombinaci vektorů e_1, e_2, e_3, tj.

$$\forall v \in \mathbb{R}^3 \exists \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R} :$$

$$\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3 = v \tag{2}$$

Označme složky vektoru $v \in \mathbb{R}^3$ jako

$$v = [v_1, v_2, v_3]$$

Pak do rovnice (2) lze dosadit, čímž získáme

$$\alpha_1[1,0,0] + \alpha_2[0,1,0] + \alpha_3[0,0,1] = [v_1, v_2, v_3]$$

a po úpravě

$$[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3] = [v_1, v_2, v_3]$$

získáme

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= v_1 \\ \alpha_2 &= v_2 \\ \alpha_3 &= v_3 \end{aligned}$$

Tedy libovolný vektor $v \in \mathbb{R}^3$ lze vyjádřit jako lineární kombinaci vektorů e_1, e_2, e_3:

$$v_1 e_1 + v_2 e_2 + v_3 e_3 = v$$

Proto $\{e_1, e_2, e_3\}$ je báze prostoru $\mathbb{R}^3$. ■

Příklad 3.0.6
Je množina vektorů $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ bází vektorového prostoru $\mathbb{R}^3$, pokud

$$\begin{aligned} v_1 &= [1,1,0] \\ v_2 &= [0,1,1] \\ v_3 &= [1,0,1] \end{aligned}$$

?

Budeme postupovat dle definice báze:

1. Lineární nezávislost množiny B:
   Uvažujme rovnici lineární závislosti (nezávislosti)
   $$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 = o$$
   a po dosazení rovnici
   $$\alpha_1[1,1,0] + \alpha_2[0,1,1] + \alpha_3[1,0,1] = [0,0,0]$$
   Což generuje soustavu řešitelnou pomocí Gaussovy eliminační metody. Jejím řešením je
   $$[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3] = [0,0,0]$$
   Vektory množiny B jsou proto lineárně nezávislé.

2. Každý prvek $w = [w_1, w_2, w3] \in \mathbb{R}^3$ lze vyjádřit jako lineární kombinaci vektorů množiny B:
   Pokud ano, pak rovnice
   $$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 = [w_1, w_2, w_3] \tag{3}$$
   má alespoň jedno řešení.

   Poznámka: Celkem vtipné je, že pokud jsou prvky množiny B lineárně nezávislé, pak má rovnice (3) právě jedno řešení nebo žádné. Chce to ale delší úvahu. $\approx$

   Rovnice (3) vede na soustavu lineárních rovnic řešitelnou pomocí Gaussovy eliminační metody:
   $$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & w_1 \\ 1 & 1 & 0 & w_2 \\ 0 & 1 & 1 & w_3 \end{array}\right] \begin{array}{l} r_1 \\ r_1 - r_2 \\ r_3 \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & w_1 \\ 0 & -1 & 1 & w_1 - w_2 \\ 0 & 1 & 1 & w_3 \end{array}\right] \begin{array}{l} r_1 \\ r_2 \\ r_3 + r_2 \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & w_1 \\ 0 & -1 & 1 & w_1 - w_2 \\ 0 & 0 & 2 & w_3 + w_1 - w_2 \end{array}\right]$$
   a po provedení zpětné substituce získáme řešení
   $$\begin{aligned} \alpha_3 &= \tfrac{1}{2}(w_3 + w_1 - w_2) \\ \alpha_2 &= \tfrac{1}{2}(w_2 - w_1 + w_3) \\ \alpha_1 &= \tfrac{1}{2}(w_1 + w_2 - w_3) \end{aligned}$$
   Tedy tato soustava při libovolné volbě $w = [w_1, w_2, w_3]$ má právě jedno řešení.

   Proto je B bází vektorového prostoru $\mathbb{R}^3$.

$\blacksquare$

Příklad 3.0.7
Rozhodněte, zda množina $E = \{p_1, p_2\}$ tvoří bázi $P_2 = \{p(x) = ax^2 + bx + c,\ a, b, c \in \mathbb{R}\}$, pokud
$$\begin{aligned} p_1 &= x^2 + 1 \\ p_2 &= x^2 + x \end{aligned}$$
Opět budeme postupovat dle definice báze:

1. E je lineárně nezávislá, pokud rovnice

$$\alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2 = 0$$

má právě jedno řešení - nulové.
Dosazením

$$\begin{aligned} \alpha_1(x^2+1) + \alpha_2(x^2+x) &= 0 \\ (\alpha_1+\alpha_2)x^2 + \alpha 2x + \alpha_1 &= 0 \end{aligned}$$

Porovnáním koeficientů u jednotlivých mocnin na levé a pravé straně získáme soustavu

$$\begin{array}{ccccc} \alpha_1 & + & \alpha_2 & = & 0 \\ & & \alpha_2 & = & 0 \\ \alpha_1 & & & = & 0 \end{array}$$

a ta má právě jedno řešení

$$\alpha_1 = \alpha_2 = 0$$

Tedy vektory množiny E jsou lineárně nezávislé.

2. Každý polynom $p = ax^2 + bx + c \in P_3,\ a, b, c \in \mathbb{R}$ lze vyjádřit jako lineární kombinace vektorů množiny E.
Pokud ano, pak rovnice

$$\alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2 = p$$

má alespoň jedno řešení.
Dosaďme a upravme

$$\alpha_1(x^2+1) + \alpha_2(x^2+x) = ax^2 + bx + c$$
$$(\alpha_1+\alpha_2)x^2 + \alpha_2 x + \alpha_3 = ax^2 + bx + c$$

Porovnáním koeficientů jednotlivých mocnin na pravé a levé stravě získáme soustavu

$$\begin{array}{ccccc} \alpha_1 & + & \alpha_2 & = & a \\ & & \alpha_2 & = & b \\ \alpha_1 & & & = & c \end{array}$$

Dosazením posledních dvou rovnic ($\alpha_1 = c, \alpha_2 = b$) do první rovnice získáme

$$b + c = a$$

Tedy lineární kombinací vektorů množiny E lze získat pouze speciální polynomy, protože u obecných polynomů podmínka plynoucí z této rovnice nemusí být spněna.

Proto množina E není bází P_3. ■

Poznámka: Množina E je bází prostoru $P_3^* \subset P_3$, kde

$$P_3^* = \{p = (b+c)x^2 + bx + c \in P_3,\ b, c \in \mathbb{R}\}$$

Ale to je jiný příklad :) $\approx$

4 Reference

[1] Z. Dostál, *Lineární algebra*, skriptum, Ostrava

[2] V. Vondrák, *LA1 - 7. přednáška*, prezentace

[3] V. Vondrák, *LA1 - 7. cvičení*