LA 6. cvičení

Vektorové prostory

Lukáš Pospíšil, Martin Hasal,2011

1 Motivace

V předešlém učivu jsme operovali s prvky n-rozměrných vektorových prostorů (např $v \in \mathbb{R}^n, A \in \mathbb{R}^{m \times n}$). Nyní si konečně vektorové prostory zadefinujeme přesněji a abstraktněji. Také se podíváme na operace vektorových prostorů a operace s vektorovými prostory.

2 Algebraická operace

Definice 2.0.1
Algebraická operace $\circ$ je zobrazení na množině $A \neq \emptyset$, které každé uspořádané dvojici prvků z množiny A přiřadí právě jeden prvek z množiny A, tj.

$$\circ : A \times A \rightarrow A$$

Poznámka:

- *zobrazení* $\sim$ předpis, jak přiřazovat prvkům nějaké množiny jednoznačně prvky obecně jiné množiny
- *uspořádaná dvojice* $\sim$ záleží na pořadí (obecně *nemusí* platit $\forall a, b \in A : a \circ b = b \circ a$ - komutativní zákon)
- *právě jeden prvek* $\sim$ přiřazený prvek je jednoznačně určen a je z množiny A

$\approx$

Příklad 2.0.1
Operace *sčítání* prvků na množině $\mathbb{R}^n$ definováno předpisem

$$\forall u, v \in \mathbb{R}^n : [u+v]_i \stackrel{\text{def}}{=} [u]_i + [v]_i$$

je *komutativní*, tj.

$$\forall u, v \in \mathbb{R}^n : u + v = v + u$$

je *asociativní*, tj.

$$\forall u, v, w \in \mathbb{R}^n : u + v = v + u$$

poznamenejme, že $u + v \in \mathbb{R}^n$ (tj. $u + v$ je prvkem stejné množiny jako prvky u, v) ■

Příklad 2.0.2
Operace *umocňování* prvků na množině $\mathbb{R}$ definováno předpisem

$$\forall a, b \in \mathbb{R} : a \circ b \overset{\text{def}}{=} a^b$$

není *komutativní*, tj. neplatí

$$\forall a, b \in \mathbb{R} : a \circ b = b \circ a$$

není *asociativní*, tj. neplatí

$$\forall a, b, c \in \mathbb{R} : (a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c) \quad (\text{ protože } (a^b)^c = a^{(b+c)} \neq a^{(b^c)})$$

poznamenejme, že $a \circ b \in \mathbb{R}$ (tj. a^b je prvkem stejné množiny jako prvky a, b) ■

Příklad 2.0.3
Zobrazení *sčítání* prvků na množině $M \overset{\text{def}}{=} \{1, 2, 3\}$ definováno předpisem

$$\forall a, b \in \mathbb{R} : a \circ b \overset{\text{def}}{=} a + b$$

(pozn. $\circ$ na levé straně je sčítání prvků dané množiny, $+$ na pravé straně je sčítání reálných čísel)
není operace!
Protože například prvek $2 \circ 3 = 5 \notin M$ ■

3 Vektorový prostor

Reálným vektorovým prostorem nazýváme uspořádanou trojici $(V, +, .)$, kde

V je neprázdná množina

$+$ je binární operace nad M, čili zobrazení

$$+ : M \times M \to M$$

nazývané *sčítání vektorů*

$.$ je zobrazení

$$. : \mathbb{R} \times M \to M$$

nazývané *násobení skalárem*

přičemž platí

1. komutativita zobrazení $+$

$$\forall u, v \in V : u + v = v + u$$

2. asociativita zobrazení $+$

$$\forall u, v, w \in V : u + (v + w) = (u + v) + w$$

3. neutrální prvek zobrazení $+$ ($\sim$ "nic nedělá")

$$\exists o \in V \forall u \in V : u + o = o + u = u$$

4. inverzní prvek zobrazení $+$

$$\forall u \in V \exists -u \in V : u + (-u) = (-u) + u = o$$

5. asociativita zobrazení .

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \forall u \in V : \alpha(\beta u) = (\alpha\beta)u$$

6. neutrální prvek zobrazení .

$$\forall u \in V : 1u = u$$

7. distributivní zákon

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \forall u \in V : (\alpha + \beta)u = \alpha u + \beta u$$
$$\forall \alpha \in \mathbb{R} \forall u, v \in V : \alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v$$

Věta 3.0.1
Nechť $(V, +, .)$ je vektorový prostor. Pak platí

- $\forall u \in V : 0.u = o$
- $\forall \alpha \in \mathbb{R} : \alpha.o = o$
- $\forall u \in V : (-1).u = u$

Důkaz: Skripta prof. Dostála. □

3.1 Základní vektorové prostory

- $\mathbb{R}^n$
- Prostor všech polynomů $P_n : \{a_n x^n + \ldots + a_1 x^1 + a_0 x^0\}$, kde $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$
- Fourierův prostor $F_n^\omega := \left\{\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k e^{i(wkx)} : \alpha_k \in \mathbb{C}\right\}$
- Další prostory: $\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^{m \times n}$

4 Vektorový podprostor

Definice 4.0.1
Nechť $\mathcal{V} \stackrel{\text{def}}{=} (V, +, .)$ je vektorový prostor.
Uspořádanou trojici $\mathcal{U} \stackrel{\text{def}}{=} (U, +, .) \neq \phi$ nazveme *vektorovým podprostorem* $\mathcal{V}$ pokud

$$U \subset V$$

a současně $\mathcal{U}$ je sám vektorovým prostorem vzhledem k operaci $+$ a zobrazení . Píšeme

$$\mathcal{U} \subset \mathcal{V}$$

Věta 4.0.1
Platí

$$\mathcal{U} \subset \mathcal{V}$$
$$\Updownarrow$$
$$(U \subset V) \wedge (\forall u, v \in U \forall \alpha \in \mathbb{R} : (u + v \in U) \wedge (\alpha u \in U))$$

Důkaz: Skripta Doc. Vondráka. □

Příklad 4.0.1
Rozhodněte, zda-li množina

$$\mathcal{U} \stackrel{\text{def}}{=} \{[\alpha, \beta, 1] : \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$$

je podprostorem $\mathbb{R}^3$.

K ověření použijeme předešlou větu

1. Zřejmě každý prvek množiny U je i prvkem množiny $\mathbb{R}^3$.

2. Nechť

$$\begin{array}{ccccc} u & \in & \mathcal{U} & \Rightarrow & \exists \alpha_u, \beta_u \in \mathbb{R} : u = [\alpha_u, \beta_u, 1] \\ v & \in & \mathcal{U} & \Rightarrow & \exists \alpha_v, \beta_v \in \mathbb{R} : v = [\alpha_v, \beta_v, 1] \end{array}$$

   Pak pro součet (operace součtu definovaná v prostoru $\mathbb{R}^3$)

$$u + v = [\alpha_u, \beta_u, 1] + [\alpha_v, \beta_v, 1] = [\alpha_u + \alpha_v, \beta_u + \beta_v, 2]$$

   Očividně $u + v \notin \mathcal{U}$

A proto $\mathcal{U}$ není podprostorem $\mathbb{R}^3$.

Poznámka: Prostor $\mathcal{U}$ nemá nulový prvek! Podezřelým prvkem je $o \stackrel{\text{def}}{=} [0, 0, 1] \in \mathcal{U}$, ale očividně

$$u + o = [\alpha_u, \beta_u, 2] \neq u$$

$\approx$

■

Příklad 4.0.2
Množina $\mathcal{U}$ je tvořena přímkou v $\mathbb{R}^2$, předpis této přímky: $x + y = 1$. Rozhodněte, zda-li množina $\mathcal{U}$ je podmnožina $\mathbb{R}^2$?

1. Zřejmě každý prvek množiny $\mathcal{U}$ je i prvkem $\mathbb{R}^2$.

2. Zřejmě platí:

$$u \in \mathcal{U} : u_1 + u_2 = 1$$
$$v \in \mathcal{U} : v_1 + v_2 = 1$$

   Pak pro součet

$$u + v = (u_1 + u_2) + (u_1 + u_2) = 1 + 1 = 2 \neq 1 \in \mathbb{R}^2$$

   Odtud vidíme, že operace sčítání v prostoru $\mathcal{U}$ dává jiný výsledek než operace sčítaní v prostoru $\mathbb{R}^2$.

■

Příklad 4.0.3
Rozhodněte, zda-li množina

$$\mathcal{W} \stackrel{\text{def}}{=} \{[u_1, u_2, u_3] : u_1, u_2, u_3 \in \mathbb{R} : u_1 + u_2 - u_3 = 0\}$$

je podprostorem $\mathbb{R}^3$.

K ověření použijeme předešlou větu

1. Zřejmě každý prvek množiny $\mathcal{W}$ je i prvkem $\mathbb{R}^3$.
2. Nechť
$$\begin{aligned} u &= [u_1, u_2, u_3] \quad \wedge \quad u_1 + u_2 - u_3 = 0 \\ v &= [v_1, v_2, v_3] \quad \wedge \quad v_1 + v_2 - v_3 = 0 \end{aligned}$$
Pak pro součet (operace součtu definovaná v prostoru $\mathbb{R}^3$)
$$u + v = [u_1, u_2, u_3] + [v_1, v_2, v_3] = [u_1 + v_1, u_2 + v_2, u_3 + v_3] \stackrel{\text{ozn}}{=} [w_1, w_2, w_3] \stackrel{\text{ozn}}{=} w$$
Tedy otázkou je, zda $w \in \mathcal{W}$?
Toto platí, pouze pokud
$$w_1 + w_2 - w_3 = 0$$
Dosaďme
$$\begin{aligned} (u_1 + v_1) + (u_2 + v_2) - (u_3 + v_3) &\stackrel{?}{=} 0 \\ u_1 + u_2 - u_3 + v_1 + v_2 - v_3 &\stackrel{?}{=} 0 \\ (u_1 + u_2 - u_3) + (v_1 + v_2 - v_3) &\stackrel{?}{=} 0 \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$
Tedy $w \in \mathcal{W}$, tj. $u + v \in \mathcal{W}$
3. Nechť
$$u = [u_1, u_2, u_3] \quad \wedge \quad u_1 + u_2 - u_3 = 0$$
Pak pro násobení skalárem $\alpha \in \mathbb{R}$ (operace násobení skalárem definovaná v prostoru $\mathbb{R}^3$)
$$\alpha.u = \alpha.[u_1, u_2, u_3] = [\alpha u_1, \alpha u_2, \alpha u_3] \stackrel{\text{ozn}}{=} [w_1, w_2, w_3] \stackrel{\text{ozn}}{=} w$$
Tedy otázkou je, zda $w \in \mathcal{W}$?
Toto platí, pouze pokud
$$w_1 + w_2 - w_3 = 0$$
Dosaďme
$$\begin{aligned} (\alpha u_1) + (\alpha u_2) - (\alpha u_3) &\stackrel{?}{=} 0 \\ \alpha(u_1 + u_2 - u_3) &\stackrel{?}{=} 0 \\ \alpha 0 &= 0 \end{aligned}$$
Tedy $w \in \mathcal{W}$, tj. $\alpha.u \in \mathcal{W}$

A proto $\mathcal{W} \subset \mathbb{R}^3$. ■

5 Lineární kombinace a lineární obal

Definice 5.0.2
Vektor $v \in \mathcal{V}$ je *lineární kombinací* vektorů $u_1, \ldots, u_n \in \mathcal{V}$, jestliže

$$\exists \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R} : v = \alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_n u_n$$

Příklad 5.0.4
Vektor u vyjádřete jako lineární kombinaci vektorů a, b, c, pokud

$$\begin{aligned} u &\stackrel{\text{def}}{=} [3, -1, 1] \\ a &\stackrel{\text{def}}{=} [1, -1, 0] \\ b &\stackrel{\text{def}}{=} [0, 1, 2] \\ c &\stackrel{\text{def}}{=} [-1, 0, 1] \end{aligned}$$

tedy hledáme koeficienty $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ takové, že

$$u = \alpha_1 a + \alpha_2 b + \alpha_3 c$$

nebo-li

$$[3, -1, 1] = \alpha_1[1, -1, 0] + \alpha_2[0, 1, 2] + \alpha_3[-1, 0, 1]$$

po úpravě

$$\begin{aligned} [3, -1, 1] &= [\alpha_1, -\alpha_1, 0] + [0, \alpha_2, 2\alpha_2] + [-\alpha_3, 0, \alpha_3] \\ [3, -1, 1] &= [\alpha_1 - \alpha_3, -\alpha_1 + \alpha_2, 2\alpha_2 + \alpha_3] \end{aligned}$$

2 vektory jsou si rovny, pokud jsou si rovny všechny odpovídající složky, tedy získáváme soustavu rovnic

$$\begin{aligned} 3 &= \alpha_1 - \alpha_3 \\ -1 &= -\alpha_1 + \alpha_2 \\ 1 &= 2\alpha_2 + \alpha_3] \end{aligned}$$

maticově

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

po použití Gaussovy eliminační metody získáme, v tomto případě, jednoznačné řešení

$$[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3] = [2, 1, -1]$$

Tedy vektor u lze vyjádřit touto lineární kombinací:

$$u = 2a + b - c$$

■

Příklad 5.0.5
Lze vyjádřit polynom $p(x) = x - x^2$, jako lineární kombinací polynomů $p_1(x), p_2(x)$ a $p_3(x)$? Kde

$$\begin{aligned} p_1(x) &= 1 + x \\ p_2(x) &= 1 - x + x^2 \\ p_3(x) &= 1 + x^2 \end{aligned}$$

Opět hledáme koeficienty $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ takové, že

$$p(x) = \alpha_1 p_1(x) + \alpha_2 p_2(x) + \alpha_3 p_3(x)$$

nebo-li

$$x - x^2 = \alpha_1(1 + x) + \alpha_2(1 - x + x^2) + \alpha_3(1 + x^2)$$

Roznásobíme

$$x - x^2 = \alpha_1 + x\alpha_1 + \alpha_2 - x\alpha_2 + x^2\alpha_2 + \alpha_3 + x^2\alpha_3$$

A vytkneme stejné mocniny

$$x - x^2 = 1(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) + x(\alpha_1 - \alpha_2) + x^2(\alpha_3 + \alpha_2)$$

Porovnáním koeficientů na levé pravé straně dostaneme soustavu rovnic

$$\begin{array}{rcrcr} x^0 = 1 & : & \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 & = & 0 \\ x^1 = x & : & \alpha_1 - \alpha_2 + 0 & = & 1 \\ x^2 & : & 0 + \alpha_3 + \alpha_2 & = & -1 \end{array}$$

Gaussovu eliminaci ponechám čtenáři. Výsledkem bude vektor $\alpha = [1, 0, -1]$. Jinak řečeno polynom $p(x)$ jde vyjádřit jako lineární kombinace polynomů $p_1(x), p_2(x)$ a $p_3(x)$, kdy

$$p(x) = p_1(x) - p_3(x).$$

Pro kontrolu dosadíme

$$p(x) = x - x^2 = 1 + x - (1 + x^2) = p_1(x) - p_3(x).$$

■

6 Reference

[1] Z. Dostál, *Lineární algebra*, skriptum, Ostrava

[2] V. Vondrák, *LA1 - 6.přednáška*, prezentace