Základní sada typových příkladů – druhá část

8. Ověřte, zda je zobrazení $\mathcal{A}: \mathrm{R}^n \to \mathrm{R}^m$ lineární.

9. Je dáno lineární zobrazení $\mathcal{A}$: R^3 do R^2 obrazy báze a je dáno *u*. Vypočtěte jeho obraz.
Zobrazení je dáno předpisy $\mathcal{A}([1,1,0]) = [1,1]$, $\mathcal{A}([1,0,1]) = [1,-1]$, $\mathcal{A}([1,1,1]) = [-1,-2]$.
Nalezněte $\mathcal{A}([2,1,0])$ v tomto zobrazení.

Řešení: Je zadán vzor $\boldsymbol{u} = [2,1,0]$ a máme nalézt $\mathcal{A}([2,1,0])$, jeho obraz v tomto zobrazení.

Vektor $\begin{bmatrix}2\\1\\0\end{bmatrix}$ vyjádříme jako lineární kombinaci vektorů báze $\mathbb{R}^3$: $\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$.

Sestavíme soustavu lineárních rovnic, vyřešíme úpravou na schodový tvar

$$\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&1&2\\1&0&1&1\\0&1&1&0\end{array}\right]\begin{array}{c}\\-r_1\\ \\\end{array}\sim\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&1&2\\0&-1&0&-1\\0&1&1&0\end{array}\right]\begin{array}{c}\\\times(-1)\\+r_2\end{array}\sim\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&1&2\\0&1&0&1\\0&0&1&-1\end{array}\right]$$

Zpětným dosazením se dostane $\alpha_1 = 2$, $\alpha_2 = 1$, $\alpha_3 = -1$
Ověříme, že vektor, jehož obraz hledáme, je skutečně lineární kombinací vektorů báze $\mathbb{R}^3$.

$\begin{bmatrix}2\\1\\0\end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$ a použijeme základní vztah pro práci s lineárním zobrazením

$\mathcal{A}(\alpha_1\boldsymbol{u}_1 + \alpha_2\boldsymbol{u}_2 + \alpha_3\boldsymbol{u}_3) = \alpha_1\mathcal{A}(\boldsymbol{u}_1) + \alpha_2\mathcal{A}(\boldsymbol{u}_2) + \alpha_3\mathcal{A}(\boldsymbol{u}_3)$.

Lidsky řečeno: *obraz lineární kombinace vektorů je lineární kombinací obrazů*.

$$\mathcal{A}\left(\begin{bmatrix}2\\1\\0\end{bmatrix}\right) = \mathcal{A}\left(2\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}\right) = 2\mathcal{A}\left(\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}\right) + \mathcal{A}\left(\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}\right) - \mathcal{A}\left(\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}\right)$$

Podle shora uvedeného předpisu dosadíme obrazy

$$\mathcal{A}\left(\begin{bmatrix}2\\1\\0\end{bmatrix}\right) = 2\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}-1\\-2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2+1+1\\2-1+2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}4\\3\end{bmatrix}$$

Našli jsme tedy ke vzoru $\begin{bmatrix}2\\1\\0\end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$ jeho obraz $\begin{bmatrix}4\\3\end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$.

Můžeme zapsat výsledek $\mathcal{A}\left(\begin{bmatrix}2\\1\\0\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}4\\3\end{bmatrix}$

10. Je dáno lineární zobrazení $\mathcal{A}$: $\mathbb{R}^3$ do $\mathbb{R}^2$ obrazy báze a je dán obraz *v*. Najděte k němu jeden vzor.

Zobrazení je dáno předpisy $\mathcal{A}([1,1,0]) = [1,1]$, $\mathcal{A}([1,0,1]) = [1,-1]$, $\mathcal{A}([1,1,1]) = [-1,-2]$.
Nalezněte alespoň jeden vektor $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^3$ takový, že $\mathcal{A}(\boldsymbol{u}) = [4, 3]$ v tomto zobrazení.

Řešení: Jedná se o úlohu „opačnou" než v předchozím příkladě, k „obrazu" se hledá jeho „vzor". Využijeme předchozí zadání a budeme hledat v prostoru $\mathbb{R}^3$ vzor k obrazu $\begin{bmatrix}4\\3\end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$,

který jsme v předchozím příkladě vypočítali. Při správném postupu vyjde $\begin{bmatrix}2\\1\\0\end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$.

Vektor $\begin{bmatrix}4\\3\end{bmatrix}$ vyjádříme jako lineární kombinaci prvků v prostoru „obrazů", tj. v prostoru $\mathbb{R}^2$

$$\left[\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & -1 & 4\\ 1 & -1 & -2 & 3\end{array}\right] - r_1 \sim \left[\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & -1 & 4\\ 0 & -2 & -1 & -1\end{array}\right] \times (-1) \sim \left[\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & -1 & 4\\ 0 & 2 & 1 & 1\end{array}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha_3 = t; \alpha_2 = 1/2 - t/2; \alpha_1 + 1/2 - t/2 - t = 4; \alpha_1 = 7/2 + 3t/2; t \in \mathbb{R}$$

Ověříme to

$$(7/2+3t/2)\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} + (1/2-t/2)\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix} + t\begin{bmatrix}-1\\-2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}7/2+3t/2+1/2-t/2-t\\7/2+3t/2-1/2+t/2-2t\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}4\\3\end{bmatrix}$$, to sedí, pokračujme.

Vektory na levé straně rovnice nahradíme pomocí předpisu pro zobrazení $\mathcal{A}$:

$$(7/2+3t/2)\mathcal{A}\left(\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}\right) + (1/2-t/2)\mathcal{A}\left(\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}\right) + t\mathcal{A}\left(\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}4\\3\end{bmatrix}$$

Podle věty $\mathcal{A}(\alpha_1\boldsymbol{u}_1 + \alpha_2\boldsymbol{u}_2 + \alpha_3\boldsymbol{u}_3) = \alpha_1\mathcal{A}(\boldsymbol{u}_1) + \alpha_2\mathcal{A}(\boldsymbol{u}_2) + \alpha_3\mathcal{A}(\boldsymbol{u}_3)$ můžeme $\mathcal{A}$ „vytknout"

$$\mathcal{A}\left((7/2+3t/2)\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix} + (1/2-t/2)\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix} + t\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}4\\3\end{bmatrix}$$

Dalšími úpravami dostaneme

$$\mathcal{A}\left(\begin{bmatrix}4+2t\\7/2+5t/2\\1/2+t/2\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}4\\3\end{bmatrix}$$, pro $t = -1$, obdržíme $\mathcal{A}\left(\begin{bmatrix}2\\1\\0\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}4\\3\end{bmatrix}$.

Srovnání s předchozím příkladem potvrzuje správnost výpočtu.

11. Je dáno lineární zobrazení $\mathcal{A}$: $\mathbb{R}^3$ do $\mathbb{R}^2$ obrazy báze. Najděte $\mathcal{H}(\mathcal{A})$ a h($\mathcal{A}$) = dim $\mathcal{H}(\mathcal{A})$.

Zobrazení je dáno předpisy $\mathcal{A}([1,1,0]) = [1,1]$, $\mathcal{A}([1,0,1]) = [1,-1]$, $\mathcal{A}([1,1,1]) = [-1,-2]$.
Nalezněte $\mathcal{H}(\mathcal{A})$ a $h(\mathcal{A}) = \dim \mathcal{H}(\mathcal{A})$ v tomto zobrazení.

Řešení: Obor hodnot daného zobrazení $\mathcal{H}(\mathcal{A}) = \{\boldsymbol{v} \in V: \exists\, \boldsymbol{u} \in U, \mathcal{A}(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{v}\}$ je množina vektorů $\boldsymbol{v} \in V$ takových, že k nim existuje obraz $\boldsymbol{u} \in U$.

Obor hodnot $\mathcal{H}(\mathcal{A})$ hledáme v <[1,1], [1,–1], [–1,–2]>, což je lineární obal „obrazů“
$\mathcal{H}(\mathcal{A})$ = < [1,1], [1,–1], [–1,–2]>.

Vektory [1,1], [1,–1], [–1,–2] jsou ale lineárně závislé, ověříme výpočtem:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -2 \end{array}\right] \begin{array}{c} \\ -r_1 \end{array} \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & -1 \end{array}\right] \begin{array}{c} \\ \times(-1) \end{array} \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{array}\right] \Rightarrow \alpha_2 = 1/2; \alpha_1 = -3/2$$

$$-3/2\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + 1/2\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3/2+1/2 \\ -3/2-1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Třetí vektor je lineární kombinací předchozích dvou, vynecháme jej a píšeme
$\mathcal{H}(\mathcal{A})$ = < [1,1], [1,–1]>, dim$\mathcal{H}(\mathcal{A})$ = 2

Obor hodnot $\mathcal{H}(\mathcal{A})$ daného zobrazení lze nalézt mezi vektory množiny <[1,1], [1,–1], [–1,–2]> také takto:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{array}{c} \\ +r_3 \\ +r_1 \end{array} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -3 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{array}{c} \\ :3 \\ \\ \end{array} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{array}{c} \\ \\ -r_2 \end{array} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$\mathcal{H}(\mathcal{A})$ = <[1,1], [0, 1]>, dim$\mathcal{H}(\mathcal{A})$ = 2

12. Je dáno lineární zobrazení $\mathcal{A}$: R^3 do R^2 obrazy báze. Najděte $\mathcal{N}(\mathcal{A})$ a d($\mathcal{A}$) = dim $\mathcal{N}(\mathcal{A})$.

Zobrazení je dáno předpisy $\mathcal{A}$([1,1,0]) = [1,1], $\mathcal{A}$([1,0,1]) = [1,–1], $\mathcal{A}$([1,1,1]) = [–1,–2]. Nalezněte $\mathcal{N}(\mathcal{A})$ a $d(\mathcal{A})$ = dim $\mathcal{N}(\mathcal{A})$ v tomto zobrazení.

Řešení: Jádro daného zobrazení $\mathcal{N}(\mathcal{A}) = \{u \in U : \mathcal{A}(u) = o\}$ je množina vektorů $\boldsymbol{u} \in U$ takových, že jejich obrazem je nulový prvek**.**

Opět jedeme náš příklad. Postup je stejný jako v 10, pouze s tím rozdílem, že na pravé straně rovnice je nulový prvek, který budeme hledat v prostoru obrazů jako lineární kombinaci prvků, pro něž máme zadáno zobrazení:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -2 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{c} \\ -r_1 \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{c} \\ \times(-1) \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \alpha_3 = t; \alpha_2 = -t/2; \alpha_1 = 3t/2$$

Ověříme to

$$3t/2\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} - t/2\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} -1 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3t/2 - t/2 - t \\ 3t/2 + t/2 - 2t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$, to sedí, můžeme pokračovat.

Vektory na levé straně rovnice nahradíme pomocí předpisu pro zobrazení $\mathcal{A}$:

$$3t/2\,\mathcal{A}\left(\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}\right)-t/2\,\mathcal{A}\left(\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}\right)+t\mathcal{A}\left(\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$$

Podle věty $\mathcal{A}(\alpha_1\boldsymbol{u}_1 + \alpha_2\boldsymbol{u}_2 + \alpha_3\boldsymbol{u}_3) = \alpha_1\mathcal{A}(\boldsymbol{u}_1) + \alpha_2\mathcal{A}(\boldsymbol{u}_2) + \alpha_3\mathcal{A}(\boldsymbol{u}_3)$ můžeme $\mathcal{A}$ „vytknout“

$$\mathcal{A}\left(3t/2\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}-t/2\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}+t\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$$

Dalšími úpravami dostaneme

$$\mathcal{A}\left(\begin{bmatrix}3t/2\\3t/2\\0\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}t/2\\0\\t/2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}t\\t\\t\end{bmatrix}\right)=\mathcal{A}\left(\begin{bmatrix}2t\\5t/2\\t/2\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$$

Vektory $\begin{bmatrix}2t\\5t/2\\t/2\end{bmatrix}$ zapíšeme jako $t\begin{bmatrix}2\\5/2\\1/2\end{bmatrix}=t\begin{bmatrix}4\\5\\1\end{bmatrix}$ nebo jako <[4, 5, 1]>, jejich obrazem je $\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$

Je tedy $\mathcal{N}(\mathcal{A})$ = <4, 5, 2>, dim$\mathcal{N}(\mathcal{A})$ = 1

Platí, že dim$\mathcal{N}(\mathcal{A})$ + dim$\mathcal{H}(\mathcal{A})$ = dim (U), v našem případě 1 + 2 = 3

13. Je dáno lineární zobrazení $\mathcal{A}$: R^n do R^m předpisem. Napište jeho matici v kanonické bázi.

Zobrazení je dáno předpisy $\mathcal{A}$([1,1,0]) = [1,1], $\mathcal{A}$([1,0,1]) = [1,–1], $\mathcal{A}$([1,1,1]) = [–1,–2]. Napište jeho matici v kanonické bázi.

Řešení: Kanonická (standardní) báze je $\mathcal{E}=\left\{\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\right\}$. Matice lineárního zobrazení

$[\mathcal{A}]_{\mathcal{EF}}$ je matice obrazů báze $\mathcal{E}$ vyjádřená v bázi $\mathcal{F}$.

$[\mathcal{A}]_{\mathcal{EF}} = [[\mathcal{A}([\boldsymbol{e}_1])]_{\mathcal{F}}, [\mathcal{A}([\boldsymbol{e}_2])]_{\mathcal{F}}, [\mathcal{A}([\boldsymbol{e}_3])]_{\mathcal{F}}]$.

Vytvoříme tedy obrazy vektorů standardní báze v zadaném zobrazení (použijeme Gauss Jordanovu metodu).

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&1&1&1&0&0\\1&0&1&0&1&0\\0&1&1&0&0&1\end{array}\right]\begin{array}{l}-r_2\\ \\-r_1\end{array}\sim\left[\begin{array}{ccc|ccc}0&1&0&1&-1&0\\1&0&1&0&1&0\\-1&0&0&-1&0&1\end{array}\right]\begin{array}{l} \\+r_3\\\times(-1)\end{array}\sim\left[\begin{array}{ccc|ccc}0&1&0&1&-1&0\\0&0&1&-1&1&1\\1&0&0&1&0&-1\end{array}\right]\sim$$

$$\sim\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&1&0&-1\\0&1&0&1&-1&0\\0&0&1&-1&1&1\end{array}\right]\qquad \alpha=\begin{bmatrix}1\\1\\-1\end{bmatrix};\beta=\begin{bmatrix}0\\-1\\1\end{bmatrix};\gamma=\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}$$

$$\mathcal{A}\left(\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}\right)=\mathcal{A}\left(\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}\right)=\mathcal{A}\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}+\mathcal{A}\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}-\mathcal{A}\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}-1\\-2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix}$$

$$\mathcal{A}\left(\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}\right)=\mathcal{A}\left(-\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}\right)=-\mathcal{A}\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}+\mathcal{A}\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}=-\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-1\\-2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2\\-1\end{bmatrix}$$

$$\mathcal{A}\left(\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\right)=\mathcal{A}\left(-\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}\right)=-\mathcal{A}\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}+\mathcal{A}\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}=-\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-1\\-2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2\\-3\end{bmatrix}$$

$$[\mathcal{A}]_{EF}=\begin{bmatrix}3 & -2 & -2\\2 & -1 & -3\end{bmatrix}$$

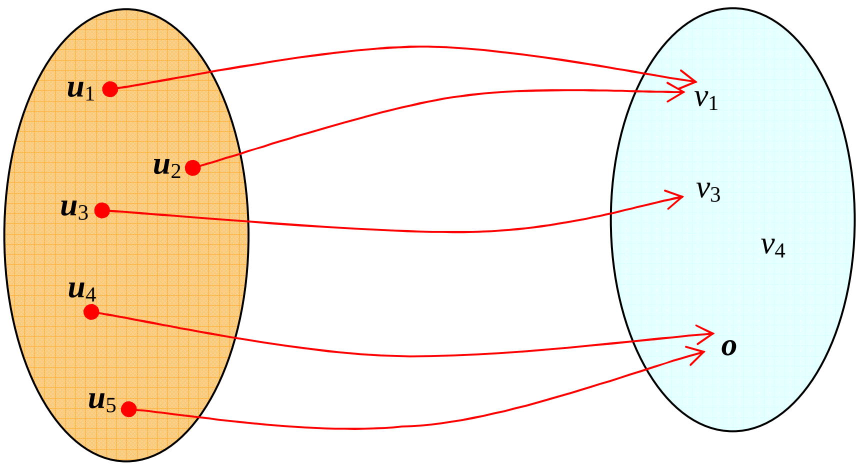
Jiná, snazší varianta úlohy je tato:
Nalezněte matici lineárního zobrazení $\mathcal{A}:\mathbb{R}^3 \ni (x_1, x_2, x_3) \to (x_1 + 2x_2,\ 3x_2 + 4x_3)$ vzhledem ke standardním bázím.

Řešení: jedná se o zobrazení $\mathbb{R}^3$ do $\mathbb{R}^2$. Podle předpisu zobrazíme vektory jednotkové báze

$$\mathcal{A}\left(\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}1+2\cdot 0\\3\cdot 0+4\cdot 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix};\ \mathcal{A}\left(\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}0+2\cdot 1\\3\cdot 1+4\cdot 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix};\ \mathcal{A}\left(\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}0+2\cdot 0\\3\cdot 0+4\cdot 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\4\end{bmatrix}$$

A už to vlastně máme $[\mathcal{A}]_{\mathcal{EF}}=\begin{bmatrix}1 & 2 & 0\\0 & 3 & 4\end{bmatrix}$. Můžete ověřit v tom EXCELu, co mám na stránce.

Zobrazení množiny U do V je předpis, který každému prvku $\boldsymbol{u} \in U$ přiřazuje právě jeden prvek $\boldsymbol{v} \in V$.



Při zobrazení množiny U do V je celá množina U vyčerpána, v množině U neexistuje prvek, který nemá „partnera“ ve V. Pro množinu V to ale neplatí. Tam jsou dva prvky, $\boldsymbol{v}_2$ a $\boldsymbol{v}_4$, které jsou „singl“.
Jádro zobrazení $\langle \boldsymbol{u}_4, \boldsymbol{u}_5\rangle$, *obor hodnot* $\langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_3\rangle$. V závorkách je *lineární obal vektorů*.

---

14. Rozložte čtvercovou matici (bil. formy) na symetrickou a antisymetrickou část.

$\mathbf{B}=\begin{bmatrix}1 & -3 & 3\\ 0 & 5 & 6\\ 2 & -3 & 4\end{bmatrix}$ **Řešení :** Sestavíme $\mathbf{B}^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 2\\ -3 & 5 & -3\\ 3 & 6 & 4\end{bmatrix}$ záměnou řádků za sloupce a počítáme podle vztahů $\mathbf{B}^{\mathrm{S}}=\frac{1}{2}\left(\mathbf{B}+\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\right)$; $\mathbf{B}^{\mathrm{A}}=\frac{1}{2}\left(\mathbf{B}-\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\right)$.

Snadno dokážeme $\mathbf{B}=\mathbf{B}^{\mathrm{S}}+\mathbf{B}^{\mathrm{A}}$. Vztah slouží pro kontrolu výpočtu.

$$\mathbf{B}^{\mathrm{S}}=1/2\left(\begin{bmatrix}1 & -3 & 3\\ 0 & 5 & 6\\ 2 & -3 & 4\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 0 & 2\\ -3 & 5 & -3\\ 3 & 6 & 4\end{bmatrix}\right)=1/2\begin{bmatrix}2 & -3 & 5\\ -3 & 10 & 3\\ 5 & 3 & 8\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & -3/2 & 5/2\\ -3/2 & 5 & 3/2\\ 5/2 & 3/2 & 4\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B}^{\mathrm{A}}=1/2\left(\begin{bmatrix}1 & -3 & 3\\ 0 & 5 & 6\\ 2 & -3 & 4\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1 & 0 & 2\\ -3 & 5 & -3\\ 3 & 6 & 4\end{bmatrix}\right)=1/2\begin{bmatrix}0 & -3 & 1\\ 3 & 0 & 9\\ -1 & -9 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & -3/2 & 1/2\\ 3/2 & 0 & 9/2\\ -1/2 & -9/2 & 0\end{bmatrix}$$

Kontrola výpočtu

$$\mathbf{B}^{\mathrm{S}}+\mathbf{B}^{\mathrm{A}}=\begin{bmatrix}1 & -3/2 & 5/2\\ -3/2 & 5 & 3/2\\ 5/2 & 3/2 & 4\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & -3/2 & 1/2\\ 3/2 & 0 & 9/2\\ -1/2 & -9/2 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & -3 & 3\\ 0 & 5 & 6\\ 2 & -3 & 4\end{bmatrix}=\mathbf{B}$$

15. Klasifikujte symetrickou matici (kv. formy)

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}2 & 2 & -6\\ 2 & 4 & -2\\ -6 & -2 & 29\end{bmatrix}$$

Řešení: Matici upravujeme elementárními kongruencemi, tj. řádkovými úpravami, za nimiž následuje stejná úprava sloupcová. Můžeme provést i dvě úpravy najednou, jak je tomu v našem příkladu.

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}2 & 2 & -6\\ 2 & 4 & -2\\ -6 & -2 & 29\end{bmatrix}\begin{matrix}\\ -r_1\\ +3r_1\end{matrix}\sim\underset{-s_1\quad +3s_1}{\begin{bmatrix}2 & 2 & -6\\ 0 & 2 & 4\\ 0 & 4 & 11\end{bmatrix}}\sim\begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 4\\ 0 & 4 & 11\end{bmatrix}\begin{matrix}\\ \\ -2r_2\end{matrix}\sim\underset{-2s_2}{\begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 4\\ 0 & 0 & 3\end{bmatrix}}\sim\begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{bmatrix}$$

Určitě nás zajímá „původní“ kvadratická forma, která představuje dosti nepříjemný výraz:

$$Q(x)=2x_1^2+2x_1x_2-6x_1x_3+2x_2x_1+4x_2^2-2x_2x_3-6x_3x_1-2x_3x_2+29x_3^2$$

Rozhodnout, zda bude její hodnota vždy kladná, nebo záporná, atd. je z tohoto tvaru velmi obtížné.

Proto celá ta záležitost s kongruencemi, která vede na kvadratickou formu jednodušší $Q(\xi) = 2\xi_1^2 + 2\xi_2^2 + 3\xi_3^2$. Zde máme hned jasno. Pro $[\xi_1,\ \xi_2,\ \xi_3\ ] \neq [0,\ 0,\ 0]$ je $Q(\xi) > 0$, kvadratická forma je pozitivně definitní, proto i její matice je pozitivně definitní.

Zkusme ještě jeden příklad

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 3 & 5 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{matrix} \\ -1{,}5r_1 \\ \\ \end{matrix} \sim \underset{-1{,}5s_1}{\begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0{,}5 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}} \sim \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}5 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{matrix} \\ \times 2 \\ \\ \end{matrix} \sim \underset{\times 2}{\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}} \sim \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 2 \end{bmatrix}\begin{matrix} \\ \\ +r_2 \end{matrix} \sim$$

$$\sim \underset{+s_2}{\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}} \sim \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Opět jednoduchá kvadratická forma $Q(\xi) = 2\xi_1^2 + 2\xi_2^2 + 0\xi_3^2$, která je pozitivně semidefinitní, matice je tudíž také pozitivně semidefinitní.

16. Vypočtěte determinant matice 3x3

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 0 & 5 & 6 \\ 2 & -3 & 4 \end{bmatrix}$$

Řešení: Pokud není řečeno jinak, použijeme k výpočtu determinantu matice 3x3 Sarrusovo pravidlo. Pro praktické výpočty se hodí tato varianta:

1. opíšeme matici a přidáme ještě první a druhý řádek
2. vyznačíme diagonály zprava doleva a zleva doprava podle obrázku
3. vypočteme součiny prvků na diagonálách a sečteme

1 x 5 x 4 = 20
0 x (–3) x 3 = 0
2 x (–3) x 6 = –36
Σ = –16

$$\begin{array}{ccc} 1 & -3 & 3 \\ 0 & 5 & 6 \\ 2 & -3 & 4 \\ \hline 1 & -3 & 3 \\ 0 & 5 & 6 \end{array}$$

3 x 5 x 2 = 30
6 x (–3) x 1 = –18
4 x (–3) x 0 = 0
Σ = 12

4. Od prvního součtu <u>*odečteme*</u> druhý součet –16 – 12 = – 28 a to je hodnota determinantu matice **A**.
5. Zapíšeme výsledek det **A** = – 28
6. <u>*Sarrusovo pravidlo neplatí pro n > 3*</u>

17. Rozhodněte, které z následujících vektorů jsou vlastními vektory matice A.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 0 & -5 & 6 \\ 0 & -3 & 4 \end{bmatrix}, \boldsymbol{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{e}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{e}_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Řešení: Pro vlastní vektory matice A platí $A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$.
Musíme vyzkoušet všechny čtyři možnosti

$$\mathbf{A}\boldsymbol{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 0 & -5 & 6 \\ 0 & -3 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\times1+(-3)\times1+3\times1 \\ 0\times1+(-5)\times0+6\times0 \\ 0\times1+(-3)\times0+4\times0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 1\cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$, $\boldsymbol{e}_1$ je vlastní vektor matice **A**

$$\mathbf{A}\boldsymbol{e}_2 = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 0 & -5 & 6 \\ 0 & -3 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\times0+(-3)\times1+3\times1 \\ 0\times0+(-5)\times1+6\times1 \\ 0\times0+(-3)\times1+4\times1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 1\cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$, $\boldsymbol{e}_2$ je vlastní vektor matice **A**

$$\mathbf{A}\boldsymbol{e}_3 = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 0 & -5 & 6 \\ 0 & -3 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\times1+(-3)\times2+3\times1 \\ 0\times1+(-5)\times2+6\times1 \\ 0\times1+(-3)\times2+4\times1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -4 \\ -2 \end{bmatrix} = -2\cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$, $\boldsymbol{e}_3$ je vlastní vektor matice **A**

$$\mathbf{A}\boldsymbol{e}_4 = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 0 & -5 & 6 \\ 0 & -3 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\times1+(-3)\times1+3\times0 \\ 0\times1+(-5)\times1+6\times0 \\ 0\times1+(-3)\times1+4\times0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -5 \\ -3 \end{bmatrix} \neq \lambda\cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$, $\boldsymbol{e}_4$ není vlastní vektor matice **A**