Základní sada typových příkladů – první část

1. Vyřešte komplexní soustavu 2 lin. rovnic o 2 neznámých (0 nebo 1 řešení)

$(1+\mathrm{i})x + 2\mathrm{i}y = 2$

$\mathrm{i}x - y = 1$

Řešení 1: Postup je stejný, jako u soustavy lineárních rovnic s reálnými koeficienty. Tj. upravujeme na schodový tvar, můžeme vytvořit i kontrolní sloupec.

$$\left[\begin{array}{cc|c||c} 1+\mathrm{i} & 2\mathrm{i} & 2 & 3+3\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & -1 & 1 & \mathrm{i} \end{array}\right]\begin{matrix} -\mathrm{r}_2 \\ :i \end{matrix} \sim \left[\begin{array}{cc|c||c} 1 & 1+2\mathrm{i} & 1 & 3+2\mathrm{i} \\ 1 & -1/\mathrm{i} & 1/\mathrm{i} & 1 \end{array}\right] =$$

$$= \left[\begin{array}{cc|c||c} 1 & 1+2\mathrm{i} & 1 & 3+2\mathrm{i} \\ 1 & \mathrm{i} & -\mathrm{i} & 1 \end{array}\right]\begin{matrix} \\ -\mathrm{r}_1 \end{matrix} \sim \left[\begin{array}{cc|c||c} 1 & 1+2\mathrm{i} & 1 & 3+2\mathrm{i} \\ 0 & -1-\mathrm{i} & -1-\mathrm{i} & -2-2\mathrm{i} \end{array}\right]$$

Zpětným dosazením vypočteme $y = \dfrac{-1-\mathrm{i}}{-1-\mathrm{i}} = 1; x = -2\mathrm{i}$

Řešení 2: Kdo umí, může použít determinanty a Kramerovo pravidlo. Determinant soustavy D a determinanty D_x, D_y obou neznámých vypočteme pomocí „křížového pravidla“. Obě neznámé vypočteme podle Kramerova pravidla.

$$D = \det\begin{bmatrix} 1+\mathrm{i} & 2\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & -1 \end{bmatrix} = (1+\mathrm{i})\cdot(-1) - 2\mathrm{i}^2 = -1-\mathrm{i}+2 = 1-\mathrm{i}$$

$$D_x = \det\begin{bmatrix} 2 & 2\mathrm{i} \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = 2\cdot(-1) - 2\mathrm{i} = -2-2\mathrm{i}$$

$$D_y = \det\begin{bmatrix} 1+\mathrm{i} & 2 \\ \mathrm{i} & 1 \end{bmatrix} = (1+\mathrm{i})\cdot 1 - 2\mathrm{i} = 1-\mathrm{i}$$

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{-2-2\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}} = \frac{-2-2\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}\cdot\frac{1+\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}} = \frac{-2-2\mathrm{i}-2\mathrm{i}-2\mathrm{i}^2}{1+1} = \frac{-4\mathrm{i}}{2} = -2\mathrm{i}\,; y = \frac{D_y}{D} = \frac{1-\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}} = 1$$

2. Vyřešte reálnou 3×3 soustavu o dvou pravých stranách (1 řešení)

Řešení: Reálnou soustavu o dvou pravých stranách, tj. **A***x* = ***b***, **A***x* = ***c*** vyřešíme Gauss-Jordanovou metodou

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{c} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right]\begin{matrix} -r_2 \\ \\ -r_1 \end{matrix} \sim \left[\begin{array}{ccc|c|c} 1 & 2 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right]\begin{matrix} -2r_3 \\ +r_3 \\ \\ \end{matrix} \sim \left[\begin{array}{ccc|c|c} 1 & 0 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c|c} 1 & 0 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 2 \end{array}\right]$$

Přímo čteme výsledek $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}, \ \boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$

3. Správně uzávorkujte a vypočtěte výraz obsahující násobení matice × vektor
Řešení: výraz $\mathbf{A}\boldsymbol{x} + \mathbf{A}\boldsymbol{y}$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Nejprve výraz upravíme tím, že vytkneme **A**: $\mathbf{A}\boldsymbol{x} + \mathbf{A}\boldsymbol{y} = \mathbf{A}(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y})$, vypočteme $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}$

$$\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$, potom <u>*zleva*</u> násobíme maticí **A**

$$\mathbf{A}(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+0-0 \\ 2+2+0 \\ -1+4+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}$$

4. Jsou vektory $\boldsymbol{u} = (1, 2, 0)$, $\boldsymbol{v} = (-2, 3, 1)$, $\boldsymbol{w} = (5, 0, 2) \in \mathbb{R}^3$ lineárně nezávislé?
Řešení: Dané vektory jsou lineárně nezávislé, má-li rovnice $\alpha_1\boldsymbol{u} + \alpha_2\boldsymbol{v} + \alpha_3\boldsymbol{w} = \boldsymbol{o}$ pouze triviální (nulové) řešení. Vektory zapíšeme jako sloupce a řešíme Gaussovou eliminací.

$$\alpha_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} + \alpha_3 \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 5 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ -2r_1 \\ \\ \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 5 & 0 \\ 0 & 7 & -10 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ -r_2/7 \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 5 & 0 \\ 0 & 7 & -10 & 0 \\ 0 & 0 & 24/7 & 0 \end{array}\right]$$

Zpětným dosazením vypočteme $\alpha_3 = 0$, $\alpha_2 = 0$, $\alpha_1 = 0$. Rovnice má <u>*pouze triviální řešení*</u>, dané vektory jsou <u>*lineárně nezávislé*</u>.

5. Je vektor $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^3$ lineární kombinací vektorů $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \in \mathbb{R}^3$?
$\boldsymbol{v} = (-8, -10, -2)$, $\boldsymbol{x} = (-1, 2, 1)$, $\boldsymbol{y} = (0, 2, 1)$, $\boldsymbol{z} = (-2, 0, 1)$

Řešení: Vektor $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^3$ je lineární kombinací vektorů $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}$, platí – li rovnice $\alpha_1\boldsymbol{x} + \alpha_2\boldsymbol{y} + \alpha_3\boldsymbol{z} = \boldsymbol{v}$. Vektory zapíšeme jako sloupce a řešíme Gaussovou – Jordanovou eliminací.

$$\alpha_1 \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} + \alpha_3 \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 \\ -10 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & -2 & -8 \\ 2 & 2 & 0 & -10 \\ 1 & 1 & 1 & -2 \end{array}\right] \begin{array}{l} \cdot(-1) \\ +2r_1 \\ +r_1 \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 8 \\ 0 & 2 & -4 & -26 \\ 0 & 1 & -1 & -10 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ :2 \\ -r_2/2 \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 8 \\ 0 & 1 & -2 & -13 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right] \begin{array}{l} -2r_3 \\ +2r_3 \\ \\ \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

Koeficienty jsou $\alpha_1 = 2$, $\alpha_2 = -7$, $\alpha_3 = 3$, <u>*vektor*</u> $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^3$ <u>*je lineární kombinací vektorů*</u> $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}$.

O správnosti výpočtu se přesvědčíme dosazením

$$2\cdot\begin{bmatrix}-1\\2\\1\end{bmatrix}-7\cdot\begin{bmatrix}0\\2\\1\end{bmatrix}+3\cdot\begin{bmatrix}-2\\0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2+0-6\\4-14+0\\2-7+3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-8\\-10\\-2\end{bmatrix}$$

6. Určete bázi a dimenzi $\mathcal{V} = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3: x_1 - x_2 - x_3 = 0,\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 0\}$

Řešení: Co se tu má vlastně počítat? $\mathbb{R}^3$ je vektorový prostor, to se snad všeobecně ví. Je tam splněno těch 8 axiomů. Do $\mathcal{V}$ nepatří všechny body z $\mathbb{R}^3$. $\mathcal{V}$ je vybraná společnost bodů (říkejme raději podprostor $\mathbb{R}^3$) , které splňují shora uvedené rovnice a to současně:

$x_1 - x_2 - x_3 = 0$

$x_1 + 2x_2 + x_3 = 0$

Vyřešme tedy obě rovnice a výsledek zapišme jako sloupcový vektor.

$$\left[\begin{array}{ccc|c}1&-1&-1&0\\1&2&1&0\end{array}\right]\begin{array}{c}\\-r_1\end{array}\sim\left[\begin{array}{ccc|c}\boxed{1}&-1&-1&0\\0&\boxed{3}&2&0\end{array}\right]$$

Vedoucí prvky v řádcích (pivoty) jsou 1, 3. Příslušné neznámé x_1, x_2 jsou <u>*vázané neznámé*</u> a vypočítáme je zpětným dosazením, x_3 je <u>*volná neznámá*</u>, položíme ji rovnu parametru t, $x_3 = t$, zpětným dosazením vypočteme $x_2 = -2t/3$ a $x_1 = t/3$.

Každý bod podmnožiny $\mathcal{V}$ lze vyjádřit $\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}t/3\\-2t/3\\t\end{bmatrix}=t\begin{bmatrix}1\\-2\\3\end{bmatrix}, t\in \mathrm{R}$

Označme $t(1, -2, 3) = \langle 1, -2, 3\rangle$, lineární obal vektoru (1, –2, 3). Je to přímka v R^3, obsahuje nulový prvek, a je to podprostor $\mathbb{R}^3$. Bází podprostoru $\mathcal{V}$ je vektor (1, –2, 3), ale může to být klidně také vektor (16, –32, 48) atd., dimenze $\mathcal{V}$, zkracujeme $\dim\mathcal{V} = 1$.

7. Vypočtěte souřadnice vektoru $\boldsymbol{v} = (2, 2, -1)$ **v bázi** $\mathcal{F} = \{\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2, \boldsymbol{f}_3\}$, **kde** $\boldsymbol{f}_1 = (1, 0, 1)$, $\boldsymbol{f}_2 = (1, -1, 2)$, $\boldsymbol{f}_3 = (1, 1, 1)$.

Řešení: Vektor v vyjádříme jako lineární kombinaci vektorů dané báze, za tím účelem vyřešíme soustavu lineárních rovnic:

$$\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&1&2\\0&-1&1&2\\1&2&1&-1\end{array}\right]\begin{array}{c}\\\\-r_1\end{array}\sim\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&1&2\\0&-1&1&2\\0&1&0&-3\end{array}\right]\begin{array}{c}\\+r_3\\\\\end{array}\sim\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&1&2\\0&0&1&-1\\0&1&0&-3\end{array}\right]\begin{array}{c}-r_2\\\\\\\end{array}\sim\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&0&3\\0&0&1&-1\\0&1&0&-3\end{array}\right]\begin{array}{c}-r_3\\\\\\\end{array}$$

$$\sim\left[\begin{array}{ccc|c}1&0&0&6\\0&0&1&-1\\0&1&0&-3\end{array}\right]\sim\left[\begin{array}{ccc|c}1&0&0&6\\0&1&0&-3\\0&0&1&-1\end{array}\right]$$

Čteme přímo $\alpha_1 = 6$, $\alpha_2 = -3$, $\alpha_3 = -1$. Mělo by to fungovat.

$$6\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}-3\begin{bmatrix}1\\-1\\2\end{bmatrix}-1\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6-3-1\\0+3-1\\6-6-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\2\\-1\end{bmatrix}$$

Souřadnicový vektor vektoru v bázi $\mathcal{F}$: $[v]_{\mathcal{F}} = [6, -3, -1]$