# 3 Iterační metody pro řešení soustav lineárních rovnic s obecnou maticí

Uvažujeme řešení soustavy

$$Au = b \tag{14}$$

s **regulární** $n \times n$ maticí $A$, nemusí být symetrická.

- V případě, že existuje regulární matice $K$ taková, že

$$A = K^{-1}DK, \tag{15}$$

kde $D$ je diagonální matice, řekneme, že $A$ je diagonalizovatelná. V tomto případě existuje báze prostoru $\mathbb{R}^n$ tvořená vlastními vektory. Pokud $A$ není symetrická, potom $K$ není ortogonální matice.

- Matice $A$ ale může mít i složitější strukturu, neplatí pak (15), ale pouze

$$A = K^{-1}JK,$$

kde $J$ je matice v Jordanově formě.

Pro řešení soustavy (14) lze využít řešení ekvivalentní soustavy

$$A^TAu = A^Tb \tag{16}$$

s maticí $A^TA$, která je symetrická a pozitivně definitní. Soustava rovnic daná maticí $A^TA$ je tedy řešitelná metodami popsanými v předchozí kapitole. Pokud použijeme metodu sdružených gradientů, přecházíme k metodě CG-NE (CG - normal equations). Nevýhodou uvedeného postupu však může být skutečnost, že pokud $cond(A) = \left\|A^{-1}\right\| \|A\|$, potom $cond(A^TA) = cond^2(A)$.

Poznamenejme, že soustavu (16) je možné řešit i v případě, kdy $A$ **není regulární**, a dokonce i v případě, kdy $A$ je obdélníková a soustava (14) má jen zobecněné řešení $u$,

$$\|Au - b\| \to \min. \tag{17}$$

**Věta 3.1.** *Podmínky (17) a (16) jsou ekvivalentní.*

*Důkaz.* (i) (17)⇒(16). Nechť $z \in \mathbb{R}^n, t \in R^1$, potom

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= \| b - A(u + tz) \|^2 = (b - Au - tAz, b - Au - tAz) = \\ &= \| b - Au \|^2 - 2t\,(b - Au,\, Az) + t^2\,(Az,\, Az) \end{aligned}$$

má minimum v $t = 0$, tedy $\varphi'(0) = 0$, což dává $(b - Au,\, Az) = 0$, tedy $A^TAu = A^Tb$.

(ii) Opačně, nechť $u$ je řešením (16). Potom pro libovolné $z \in R^n$ dostaneme

$$\|b - A\,(u + z)\|^2 = \|b - Au - Az\|^2 = \|b - Au\|^2 + \|Az\|^2 \geq \|b - Au\|^2.$$

□

## 3.1 Richardsonova metoda

Opět uvažujeme iterační předpis

$$u_{i+1} = u_i + \omega\,(b - Au_i). \tag{18}$$

Chyba po $(i+1)$. iteraci má tvar

$$e_{i+1} = (I - \omega A)^{i+1}\, e_0.$$

V případě diagonalizovatelné matice (15) platí

$$\begin{aligned} e_{i+1} &= \left(I - \omega K^{-1}DK\right)^{i+1} e_0 = \left(K^{-1}\,(I - \omega D)\,K\right)^{i+1} e_0 = \\ &= K^{-1}\,(I - \omega D)^{i+1}\, Ke_0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|e_{i+1}\| &= \left\|K^{-1}\,(I - \omega D)^{i+1}\, Ke_0\right\| \leq \left\|K^{-1}\right\| \|K\| \left\|(I - \omega D)^{i+1}\right\| \|e_0\| \leq \\ &\leq \left\|K^{-1}\right\| \|K\|\, q^i\, \|e_0\|, \quad q = \max_k |1 - \omega\lambda_k|. \end{aligned}$$

**Věta 3.2.** *Pokud je matice $A$ diagonalizovatelná a existuje $\omega > 0$ tak, že $q = \max_k |1 - \omega\lambda_k| < 1$, potom metoda (18) konverguje a*

$$\|e_{i+1}\| \leq \left\|K^{-1}\right\| \|K\|\, q^i\, \|e_0\|. \tag{19}$$

*Pokud je matice $A$ symetrická, potom $\left\|K^{-1}\right\| \|K\| = 1$.*