4 Předpodmínění

Ke zlepšení efektivity i robustnosti iteračních řešičů používáme tzv. předpodmínění. Tím rozumíme transformaci původní soustavy lineárních rovnic na jinou soustavu se stejným řešením, ale lepšími vlastnostmi v ohledu na iterační řešení, tedy mimo jiné s lepším číslem podmíněnosti (odtud pojmenování).

Pro transformaci využijeme regulární matici (předpodmiňovač) B, takovou že B aproximuje A, $A \sim B$. Jedna z možností transformace je přenásobení soustavy maticí B zleva, přičemž očekáváme, že $B^{-1}A \sim I$ a tedy $cond(B^{-1}A) \ll cond(A)$. Matici B lze využít pro tři způsoby transformace:

Transformace zleva
Přenásobením soustavy rovnic maticí B^{-1} zleva dostaneme soustavu

$$B^{-1}Au = B^{-1}b,$$

kde $B^{-1}A \overset{\text{ozn.}}{=} \tilde{A} = \tilde{A}_L$ je transformovaná matice soustavy a $B^{-1}b \overset{\text{ozn.}}{=} \tilde{b}$ je transformovaná pravá strana. V kombinaci s Richardsonovou metodou získáme iterační předpis

$$u_{i+1} = u_i + \omega\left(\tilde{b} - \tilde{A}u_i\right) = u_i + \omega B^{-1}\left(b - Au_i\right).$$

Pro transformované reziduum platí

$$\tilde{r}_{i+1} = \tilde{b} - \tilde{A}u_{i+1} = B^{-1}r_{i+1} \Longrightarrow B\tilde{r}_{i+1} = r_{i+1}.$$

Transformace zprava
Získáme soustavu rovnic

$$AB^{-1}Bu = b,$$

kde $AB^{-1} \overset{\text{ozn.}}{=} \tilde{A} = \tilde{A}_R$ je transformovaná matice soustavy a $Bu \overset{\text{ozn.}}{=} \tilde{u}$ jsou transformované neznámé. Iterační předpis předpodmíněné Richardsonovy metody má tvar

$$\begin{aligned} \tilde{u}_{i+1} &= \tilde{u}_i + \omega\left(b - \tilde{A}\tilde{u}_i\right) \\ Bu_{i+1} &= Bu_i + \omega\left(b - AB^{-1}Bu_i\right) = Bu_i + \omega\left(b - Au_i\right) \\ u_{i+1} &= u_i + \omega B^{-1}\left(b - Au_i\right). \end{aligned}$$

Tedy při přepisu do netransformovaných souřadnic jsme získali stejný předpis jako v případě transformace zleva, mezi těmito metodami tedy zřejmě není velký rozdíl. Platí také následující věta

Věta 4.1. *Spektrum zleva transformované matice $\tilde{A}_L = B^{-1}A$ je stejné jako spektrum zprava transformované matice $\tilde{A}_R = AB^{-1}$.*

Uvedená věta je důsledkem jednoduchého lemma.

Lemma 4.1. *Nechť X, Y jsou regulární matice, potom $\sigma(XY) = \sigma(YX)$.*

Důkaz. Nechť X, Y jsou regulární matice a $\lambda \in \sigma(XY)$. Potom ex. $v \neq 0$ tak, že $XYv = \lambda v$. Potom také $YXYv = \lambda Yv$, takže $\lambda \in \sigma(YX)$ a $Yv \neq 0$ je příslušný vlastní vektor. Opačnou inluzi dokážeme stejně. □

Oboustranná transformace

Transformace zleva nebo zprava poruší symetrii, tj. pokud A je symetrickou matici, matice $B^{-1}A$ obecně symetrická není. Nápravou je použití faktorizace $B = EE^T$ a symetrické transformace. Tím získáme

$$E^{-1}AE^{-T}E^Tu = E^{-1}b,$$

kde $E^{-1}AE^{-T} \overset{\text{ozn.}}{=} \tilde{A} = \tilde{A}_S$, $E^{-1}b \overset{\text{ozn.}}{=} \tilde{b}$ a $E^Tu \overset{\text{ozn.}}{=} \tilde{u}$ je transformovaná matice, pravá strana a neznámé. Pokud je A symetrická, je i matice $\tilde{A} = \tilde{A}_S$ symetrická. Pokud existuje faktorizace $B = EE^T$, kde E je regulární, potom B je pozitivně definitní. Platí i opačně: pokud je B pozitivně definitní, potom existuje faktorizace, např. $E = B^{1/2}$. Jiná známá faktorizace je např. Choleského rozklad.

Iterační předpis předpodmíněné Richardsonovy metody má tvar

$$\begin{aligned} \tilde{u}_{i+1} &= \tilde{u}_i + \omega\left(\tilde{b} - \tilde{A}\tilde{u}_i\right) = \tilde{u}_i + \omega E^{-1}\left(b - AE^{-T}\tilde{u}_i\right) \\ E^Tu_{i+1} &= E^Tu_i + \omega E^{-1}\left(b - AE^{-T}E^Tu_i\right) \\ u_{i+1} &= u_i + \omega E^{-T}E^{-1}\left(b - Au_i\right) = u_i + \omega B^{-1}\left(b - Au_i\right). \end{aligned}$$

Tedy při přepisu do netransformovaných souřadnic dostaneme opět stejný předpis. Odtud je vidět, že faktorizaci B nepotřebujeme pro realizaci metody, ale spíše pro analýzu s využitím symetrie matice transformované soustavy. Opět

$$\sigma(\tilde{A}_S) = \sigma(\tilde{A}_L) = \sigma(\tilde{A}_R).$$

Pro analýzu ale také můžeme využít skutečnosti, že pro B SPD je $\tilde{A}_L$ symetrická ve skalárním součinu $(u,\, v)_B = (Bu,\, v)$.

Předpodmíněná Richardsonova metoda má tedy obecně tvar

$$u_{i+1} = u_i + \omega B^{-1}\left(b - Au_i\right). \tag{24}$$

Od matice B , která má být aproximací matice A, požadujeme dvě vlastnosti:

- jednak zlepšení čísla podmíněnosti,
- ale také levné řešení soustavy s maticí B, tj. nízká složitost operace B^{-1}, která se vyskytuje v iteracích. V případě řídkých matic se snažíme udržet složitost $O(n)$ - tak jako v dalších operacích iterace včetně násobení Av.

Efekt předpodmínění můžeme vidět v úpravě vlastností řešené soustavy, nebo v použití předpodmíněného rezidua (pseudorezidua) pro opravy, viz (24). Směr pseudorezidua $B^{-1}\left(b - Au_i\right)$ je blíže směru chyby $A^{-1}\left(b - Au_i\right)$, která je ideálním směrem pro opravu.

V dalším budeme diskutovat možné aproximace matice A, mezi které patří

- $B = diag\left(A\right)\ldots$ diagonála matice A (Jacobiho předpodmínění)
- $B = L + D\ldots$ Gaussovo-Seidelovo předpodmínění
- $B = ILU\left(A\right)\ldots$ neúplná LU faktorizace, $B = \tilde{L}\cdot\tilde{U}\ldots$ součin řídkých trojúhelníkových matic
- a další techniky.