1 Opakování lineární algebry

1.1 Normy vektorů a matic

Definice 1.1. Vektorovým (lineárním) **prostorem** nazýváme každou neprázdnou množinu X, na níž jsou definovány operace

$$+ : X \times X \to X,$$
$$\cdot : \mathbb{R} \times X \to X$$

splňující následující podmínky:

1. $\forall x, y \in X$: $x + y = y + x$ (komutativita),
2. $\forall x, y, z \in X$: $(x + y) + z = x + (y + z)$ (asociativita vzhledem k „+“),
3. $(\exists 0 \in X)\,(\forall x \in X)$: $x + 0 = x$ (0 … nulový prvek),
4. $(\forall x \in X)\,(\exists\,(-x) \in X)$: $x + (-x) = 0$ ($(-x)$ … prvek opačný k x),
5. $(\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R})\,(\forall x \in X)$: $\alpha\,(\beta x) = (\alpha\beta)\,x$ (asociativita vzhledem k „$\cdot$“),
6. $\forall x \in X$: $1 \cdot x = x$,
7. $(\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R})\,(\forall x, y \in X)$: $\begin{array}{l}\alpha\,(x + y) = \alpha x + \beta y,\\ (\alpha + \beta)\,x = \alpha x + \beta x\end{array}$ (distributivita). [3]

Definice 1.2. Nechť $X = (X, +, \cdot)$ je vektorový prostor. Zobrazení $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}_0^+$ se nazývá **norma**, jestliže $(\forall x, y \in X)\,(\forall \alpha \in \mathbb{R})$:

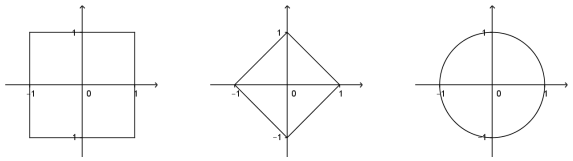
1. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$,
2. $\|\alpha x\| = |\alpha|\,\|x\|$,
3. $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$. [1, 2]

Příklad 1.3. Některé normy na prostoru $X = \mathbb{R}^n$ (tzv. vektorové normy):

- maximová norma $\|x\|_\infty = \|(x_1, \ldots, x_n)\|_\infty := \max\{|x_1|, \ldots, |x_n|\}$
- součtová norma $\|x\|_1 = \|(x_1, \ldots, x_n)\|_1 := |x_1| + \cdots + |x_n|$
- eukleidovská norma $\|x\|_2 = \|(x_1, \ldots, x_n)\|_2 := \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$

?: Ukažte, že se skutečně jedná o normy.

?: Jak vypadají množiny $\{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\| = 1\}$ pro jednotlivé normy?



Věta 1.4. *Každé dvě normy $\|\cdot\|_{(1)}$ a $\|\cdot\|_{(2)}$ na prostoru $\mathbb{R}^n$ jsou ekvivalentní, tj.*

$$\left(\exists k, K \in \mathbb{R}^+\right)(\forall x \in X) : k\,\|\cdot\|_{(1)} \leq \|\cdot\|_{(2)} \leq K\,\|\cdot\|_{(1)}.$$

Příklad 1.5. Některé normy na prostoru $X = \mathbb{R}^{n,m}$ (tzv. maticové normy):

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & & a_{nm} \end{pmatrix}$$

- řádková norma $\|A\|_\infty := \max\{|a_{j1}| + \cdots + |a_{jm}|, j = 1, \ldots, n\}$
- sloupcová norma $\|A\|_1 := \max\{|a_{1k}| + \cdots + |a_{nk}|, k = 1, \ldots, m\}$
- spektrální norma normální matice $\|A\|_2 := \sqrt{\rho\,(A^T A)} = \sqrt{\rho\,(AA^T)} = \rho\,(A)$
- Frobeniova norma $\|A\|_F := \sqrt{\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{m} |a_{jk}|^2}$

Věta 1.6. *Každé dvě normy $\|\cdot\|_{(1)}$ a $\|\cdot\|_{(2)}$ na prostoru $\mathbb{R}^{n,m}$ jsou ekvivalentní, tj.*

$$\left(\exists k, K \in \mathbb{R}^+\right)(\forall x \in X) : k\,\|\cdot\|_{(1)} \leq \|\cdot\|_{(2)} \leq K\,\|\cdot\|_{(1)}.$$

1.2 Skalární součin

Definice 1.7. Nechť $X = (X, +, \cdot)$ je vektorový prostor. Zobrazení $(\cdot, \cdot) : X \times X \to \mathbb{R}$ se nazývá **skalární součin**, jestliže $\forall x, y \in X$:

1. $x \mapsto (x, y)$ je lineární zobrazení na X,
2. $(x, y) = (y, x)$,
3. $(x, x) \geq 0$
4. $(x, x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$. [3]

Poznámka 1.8. Zobrazení $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$ definované předpisem $\|x\| := \sqrt{(x, x)}$ je normou na X, jedná se o tzv. normu indukovanou skalárním součinem.

Příklad 1.9. Některé skalární součiny na prostoru $X = \mathbb{R}^n$ a příslušné indukované normy:

- eukleidovský skalární součin $(x, y) := x^T y$
  $\longrightarrow \|x\|_2 := \sqrt{x^T x} = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$ (eukleidovská norma)
- energetický skalární součin $(x, y)_A := (Ax, y)$
  $\longrightarrow \|x\|_A := \sqrt{(Ax, x)}$ (norma indukovaná SPD maticí A)

1.3 Ortogonalita

Definice 1.10. Nenulové vektory $x, y \in \mathbb{R}^n$ se nazývají **ortogonální**, jestliže $(x, y) = 0$. Jestliže navíc $(x, x) = (y, y) = 1$, jedná se o vektory **ortonormální**.

Definice 1.11. Čtvercová matice $U \in \mathbb{R}^{n,n}$, která splňuje $U^T U = I$, se nazývá **ortogonální matice**.

Poznámka 1.12. Ortogonální matice má ortonormální sloupce a splňuje $U^{-1} = U^T$.

Definice 1.13. Nechť A je SPD matice. Nenulové vektory $x, y \in \mathbb{R}^n$ se nazývají **A-ortogonální**, jestliže $x^T A y = 0$.

1.4 Vlastní čísla a vektory

Definice 1.14. Nechť $A \in \mathbb{R}^{n,n}$. Jestliže existuje nenulový vektor $e \in \mathbb{C}^n$ a skalár $\lambda \in \mathbb{C}$ tak, že

$$Ae = \lambda e,$$

pak se λ nazývá **vlastní číslo** matice A, e se nazývá **vlastní vektor** příslušný k λ a (λ, e) se nazývá **vlastní dvojice** matice A. [2]

Definice 1.15. Pojmem **charakteristický polynom** matice A rozumíme polynom

$$p(\lambda) := \det(A - \lambda I)$$

a pojmem **charakteristická rovnice** matice A rozumíme rovnici $p(\lambda) = 0$. [2]

Definice 1.16. Nechť $A \in \mathbb{R}^{n,n}$. Množinu všech vlastních čísel matice A nazýváme **spektrum matice** A a značíme $\sigma(A)$.

Definice 1.17. Nechť $\sigma(A) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_m\}$. **Spektrálním poloměrem** matice A nazveme číslo $\rho(A) = \max\{|\lambda_1|, \ldots, |\lambda_m|\}$.

Definice 1.18. Nechť $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ je regulární (tj. čtvercová, k níž existuje inverzní). Pak **číslem podmíněnosti** matice rozumíme číslo $cond(A) = \|A\| \cdot \|A^{-1}\|$. **Spektrálním číslem podmíněnosti** matice rozumíme číslo $\kappa(A) = \rho(A)\,\rho(A^{-1})$. [2]

Poznámka 1.19. Je-li navíc matice A SPD, pak $\kappa(A) = cond(A) = \frac{\lambda_{\max}}{\lambda_{\min}} \geq 1$.

Lemma 1.20 (Posun spektra, viz [2])**.** *Nechť λ je vlastní číslo matice A a v odpovídající vlastní vektor. Pak matice $A - qI$, $q \in \mathbb{R}$ má vlastní číslo $\lambda - q$ a stejný vlastní vektor v.*

Důkaz. $(A - qI)\,v = Av - qv = \lambda v - qv = (\lambda - q)\,v$ □

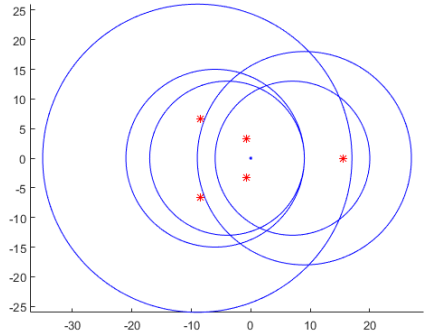
Lemma 1.21 (Invariantnost vzhledem k podobnosti)**.** *Nechť $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ je libovolná čtvercová matice a $T \in \mathbb{R}^{n,n}$ regulární matice. Pak matice TAT^{-1} má stejná vlastní čísla jako matice A. [1]*

Důkaz. $Ae = \lambda e \Leftrightarrow TAe = \lambda Te \Leftrightarrow TA\left(T^{-1}T\right)e = \lambda Te \Leftrightarrow TAT^{-1}(Te) = \lambda\,(Te)$ □

Věta 1.22 (Geršgorinova, viz [2])**.** *Všechna vlastní čísla matice $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ leží ve sjednocení kruhů $S := S_1 \cup S_2 \cup \cdots \cup S_n$, kde*

$$S_i := \left\{ z \in \mathbb{C} : |z - a_{ii}| \leq \sum_{j=1, j\neq i}^{n} |a_{ij}| \right\},\ i = 1, \ldots, n.$$

$$A = \begin{pmatrix} -4 & -3 & 1 & -4 & -5 \\ 2 & 7 & 4 & -2 & -5 \\ 8 & -1 & -6 & 1 & -5 \\ 8 & 8 & -3 & -9 & -7 \\ 2 & -9 & -6 & 1 & 9 \end{pmatrix}$$



Obrázek 1: Matice a její spektrum

1.5 Reálné symetrické matice

Věta 1.23. *Nechť A je reálná symetrická matice. Pak $\sigma(A) \subset \mathbb{R}$.*

Poznámka 1.24. V případě reálné symetrické matice se Geršgorinovy kruhy redukují na intervaly reálných čísel a spektrum matice pak leží ve sjednocení těchto intervalů. [2]

Věta 1.25. *Vlastní vektory reálné symetrické matice A odpovídající různým vlastním číslům jsou ortogonální.*

Věta 1.26 (Spektrální rozklad, viz [1])**.** *Nechť A je reálná symetrická matice. Pak existuje ortogonální matice U a diagonální matice D tak, že*

$$A = UDU^T.$$

Sloupce s_i matice U jsou transponované ortonormální valstní vektory matice A příslušné vlastním číslům $\lambda_i = [D]_{ii}$.

1.6 Výpočet vlastních čísel

- přímý výpočet: každé vlastní číslo je kořenem charakteristické rovnice
- lokalizace spektra pomocí Geršgorinovy věty
- mocninná metoda pro odhad dominantního vlastního čísla
- metody založené na podobnosti matic, viz [2]

Reference

[1] Dostál, Z., Vondrák, V. *Lineární algebra.* Dostupné na mi21.vsb.cz, 2012.

[2] Vondrák, V., Pospíšil, L. *Numerické metody I.* Dostupné na mi21.vsb.cz, 2011.

[3] Bouchala, J. Úvod do funkcionální analýzy. Dostupné na mi21.vsb.cz, 2012.