# Iterační metody
# 2. cvičení

21.9.2016

Simona Domesová
**e-mail:** simona.domesova@vsb.cz
**web:** homel.vsb.cz/∼dom0015
**místnost:** RA310 (CPIT)

# Řešení soustav lineárních rovnic s SPD maticí

$$Au = b$$

$$A \in \mathbb{R}^{n \times n} \text{ (SPD)}, b \in \mathbb{R}^n$$

- přesné řešení soustavy: $u^* = A^{-1}b \in \mathbb{R}^n$
- aproximace řešení v $i$-té iteraci: $u_i$
- residuum v $i$-té iteraci: $r_i = b - A \cdot u_i$
- chyba $i$-té iterace: $e_i = u_i - u^*$

## Konvergence iterační metody

$$u_i \to u^* \Leftrightarrow \|u_i - u^*\| \to 0$$

- analyzujeme chybu $e_i$ nebo reziduum $r_i$ ve vhodné normě

**?:** Jaké ukončovací podmínky můžeme použít?

# Spektrum SPD matice $A$

$$Av_j = \lambda_j v_j$$

- vlastní čísla matice $A$: $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$
- vlastní vektory matice $A$: $\{v_1, \ldots, v_n\}$ (ortonormální systém)
- číslo podmíněnosti SPD matice $A$: $\kappa(A) =$

# Spektrum SPD matice $A$

$$Av_j = \lambda_j v_j$$

- vlastní čísla matice $A$: $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$
- vlastní vektory matice $A$: $\{v_1, \ldots, v_n\}$ (ortonormální systém)
- číslo podmíněnosti SPD matice $A$: $\kappa(A) = \frac{\lambda_n}{\lambda_1}$

# Prosté iterace

$$u_{i+1} = u_i + (b - A \cdot u_i)$$

- $e_i = u_i - u^* = \cdots = (I - A)^i \cdot e_0$
- $e_i = (I - A)^i \cdot \sum_{k=1}^{n} \alpha_k v_k = \cdots = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \cdot (1 - \lambda_k)^i \cdot v_k$
- $\|e_i\| = \left\| \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \cdot (1 - \lambda_k)^i \cdot v_k \right\| = \cdots = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} \alpha_k^2 \cdot (1 - \lambda_k)^{2i}}$

$$\|e_i\| \to 0 \;\Leftrightarrow\; \|e_i\| \to 0 \;\Leftrightarrow\; \lambda_k \in (0, 2)$$

# Richardsonova metoda

$$u_{i+1} = u_i + \omega\left(b - A \cdot u_i\right)$$

- $e_i = u_i - u^* = \cdots = \left(I - \omega A\right)^i \cdot e_0$
- $e_i = \left(I - \omega A\right)^i \cdot \sum_{k=1}^{n} \alpha_k v_k = \cdots = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \cdot \left(1 - \omega\lambda_k\right)^i \cdot v_k$
- $\|e_i\|^2 = \left\| \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \cdot \left(1 - \omega\lambda_k\right)^i \cdot v_k \right\|^2 = \cdots = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k^2 \cdot \left(1 - \omega\lambda_k\right)^{2i} \leq \max_k \left|1 - \omega\lambda_k\right|^{2i} \cdot \sum_{k=1}^{n} \alpha_k^2 = \max_k \left|1 - \omega\lambda_k\right|^{2i} \cdot \|e_0\|^2$
- konvergenční faktor: $q = \max_k \left|1 - \omega\lambda_k\right|$
- iterační polynom Richardsonovy metody: $P_i^R\left(\lambda\right) = \left(1 - \omega\lambda\right)^i$
  $\|e_i\|^2 \leq \max_k \left|1 - \omega\lambda_k\right|^{2i} \cdot \|e_0\|^2 = \max_k \left|P_i^R\left(\lambda_k\right)\right|^2 \cdot \|e_0\|^2$

**?:** Jak zvolit faktor $\omega$?
**?:** Co kdyby matice $A$ nebyla SPD?