Iterační metody
Cvičení 1

Simona Domesová
e-mail: simona.domesova@vsb.cz
web: homel.vsb.cz/∼dom0015
místnost: RA310 (CPIT)

1 Úvod

Přímé vs. iterační metody

- přímé: řešení dostaneme po provedení procedury s daným konečným počtem operací (při přesné aritmetice)
- iterační: opakování určité procedury vede ke zlepšování aproximace řešení

Využití iteračních metod

- řešení soustav lineárních rovnic (vznikajících např. při řešení diferenciálních rovnic metodou sítí, konečných prvků, hraničních prvků)
  - s SPD maticí
  - se sedlobodovou maticí
  - s obecnou regulární maticí
- řešení soustav nelineárních rovnic
- odhad vlastních čísel
- optimalizační úlohy

Opakování NM:

- metoda půlení intervalu
- metoda prostých iterací
- Newtonova metoda
- metoda největšího spádu
- metoda sdružených gradientů
- mocninná metoda

Opakování NM:

- metoda půlení intervalu - hledáme $\overline{x} \in \langle a, b\rangle \subset \mathbb{R} : \; f(\overline{x}) = 0$
- metoda prostých iterací - hledáme $\overline{x} \in \Omega \subset \mathbb{R}^n : \; G(\overline{x}) = \overline{x}$
  - Ω neprázdná, souvislá, ohraničená, uzavřená; $G : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ kontraktivní v Ω; $x_{k+1} = G(x_k)$ leží v Ω
- Newtonova metoda - hledáme $\overline{x} \in \langle a, b\rangle \subset \mathbb{R} : \; f(\overline{x}) = 0$

$$
\begin{aligned}
x &= x + \lambda(x) \cdot f(x) \quad \lambda : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ nenulová} \\
G(x) &= x + \lambda(x) \cdot f(x) \quad \text{(prosté iterace)} \\
\text{metoda 2. řádu} \longrightarrow 0 = G'(\overline{x}) &= 1 + \lambda(\overline{x}) \cdot f'(\overline{x}) + \lambda'(\overline{x}) \cdot f(\overline{x}) \\
&\Rightarrow \lambda(x) = -\frac{1}{f'(x)} \text{ pro } f'(x) \neq 0
\end{aligned}
$$

  - iterační předpis $x_{k+1} = G(x_k)$, tj. $x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$
- metoda největšího spádu
- metoda sdružených gradientů
- mocninná metoda

Modelové úlohy vedoucí na soustavy lineárních rovnic

Metoda sítí (konečných diferencí) v 1d a výsledná soustava lineárních rovnic

(průhyb struny o délce L, stacionární vedení tepla, šíření koncentrace)

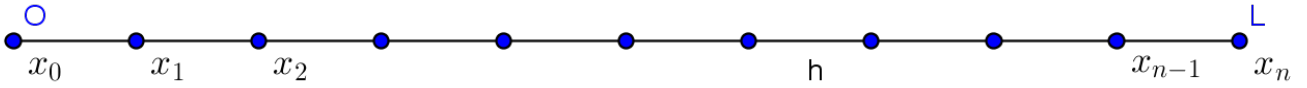
Okrajová úloha:

$$\begin{cases} -u''(x) = f(x) & x \in (0, L) \\ u(0) = u(L) = 0 & \text{(Dirichletova okrajová podmínka)} \end{cases}$$

Aproximace druhé derivace (vychází z Taylorova rozvoje):

$$u''(x) \approx \frac{u(x-h) - 2 \cdot u(x) + u(x+h)}{h^2}$$

Diskretizace oblasti $(0, L)$ na n částí o délce h (ekvidistantní síť):



$$f(x_i) \overset{ozn}{=} f_i, \quad u(x_i) \overset{ozn}{=} u_i$$

$\rightarrow$ soustava $n-1$ rovnic o neznámých $u_1, \ldots, u_{n-1}$:

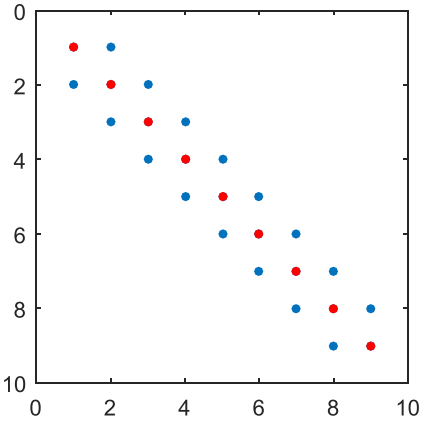
$$-(u_{i-1} - 2 \cdot u_i + u_{i+1}) = h^2 f_i$$

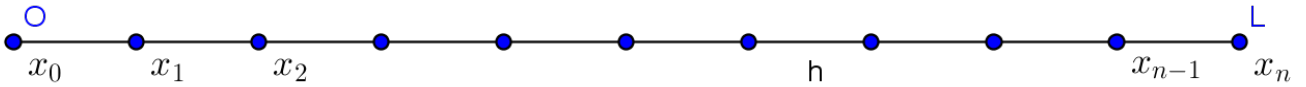
$$-\left(u_{i-1} - 2 \cdot u_i + u_{i+1}\right) = h^2 f_i$$

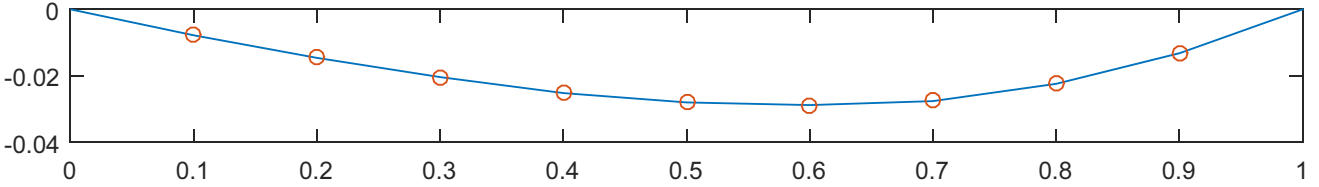
soustava lineárních rouvnic s SPD maticí

$$A \cdot u = b$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \ddots & \vdots \\ 0 & -1 & 2 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{n-2} \\ u_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h^2 f_1 + u_0 \\ h^2 f_2 \\ \vdots \\ h^2 f_{n-2} \\ h^2 f_{n-1} + u_n \end{pmatrix}$$







Metoda sítí (konečných diferencí) ve 2d

(průhyb membrány o rozměrech $L \times L$, stacionární vedení tepla, šíření koncentrace)

Okrajová úloha:

$$\begin{cases} -\triangle u\left(x\right) = f\left(x\right) & x \in \Omega = (0, L) \times (0, L) \\ u\left(x, y\right) = 0 & x \in \partial\Omega \end{cases}$$

Aproximace druhých parciálních derivací:

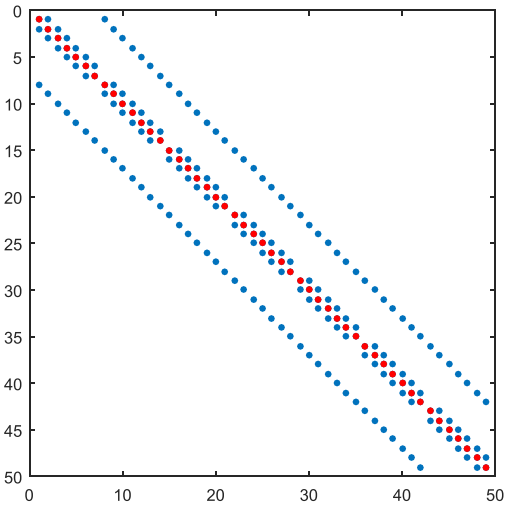
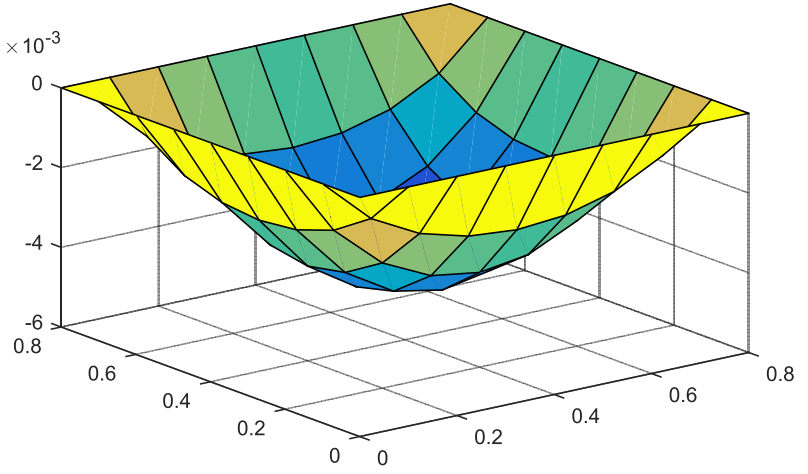
$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} u\left(x, y\right) \approx \frac{u\left(x - h, y\right) - 2 \cdot u\left(x, y\right) + u\left(x + h, y\right)}{h^2}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} u\left(x, y\right) \approx \frac{u\left(x, y - h\right) - 2 \cdot u\left(x, y\right) + u\left(x, y + h\right)}{h^2}$$

Diskretizace oblasti $(0, L) \times (0, L)$ na $n \times n$ čtverců o straně délky h:

$$f\left(x_i, y_j\right) \overset{ozn}{=} f_{i,j}, \quad u\left(x_i, y_j\right) \overset{ozn}{=} u_{i,j}$$

$\rightarrow$ soustava $(n-1) \times (n-1)$ rovnic:

$$-u_{i-1,j} - u_{i,j-1} + 4 \cdot u_{i,j} - u_{i+1,j} - u_{i,j+1} = h^2 f_{i,j}$$

$$A = \begin{pmatrix} B & I & 0 & \cdots & 0 \\ I & B & I & \ddots & \vdots \\ 0 & I & B & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & I \\ 0 & \cdots & 0 & I & B \end{pmatrix}, \text{ kde } B = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 4 & -1 & \ddots & \vdots \\ 0 & -1 & 4 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$