

VYSOKÁ ŠKOLA BÁŇSKÁ – TECHNICKÁ UNIVERZITA OSTRAVA
FAKULTA STAVEBNÍ

Základy stavební mechaniky

Rámy s klouby a táhly

Jiří Brožovský

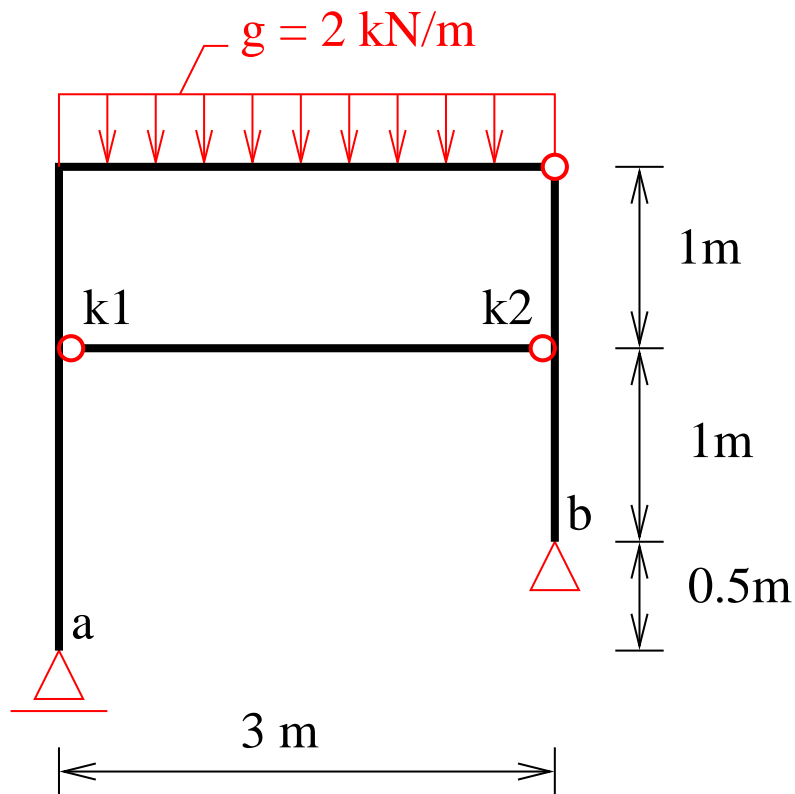
Kancelář: LP – H 406/3

Telefon: 597 321 321

E-mail: jiri.brozovsky@vsb.cz

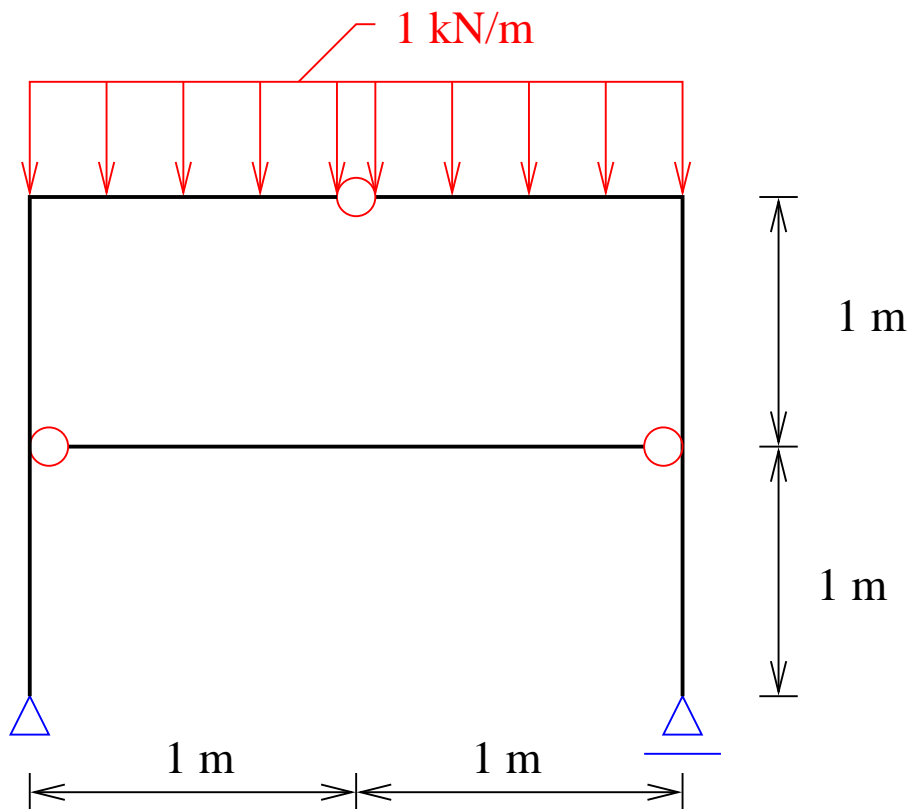
WWW: <http://fast10.vsb.cz/brozovsky>

Rám s táhlem



- **Táhlo:** prvek s klouby na koncích
- Obvykle tažený (tlačený ... *vzpěra*)
- Není-li zatíženo: pouze normálová síla (V , M jsou nulové)

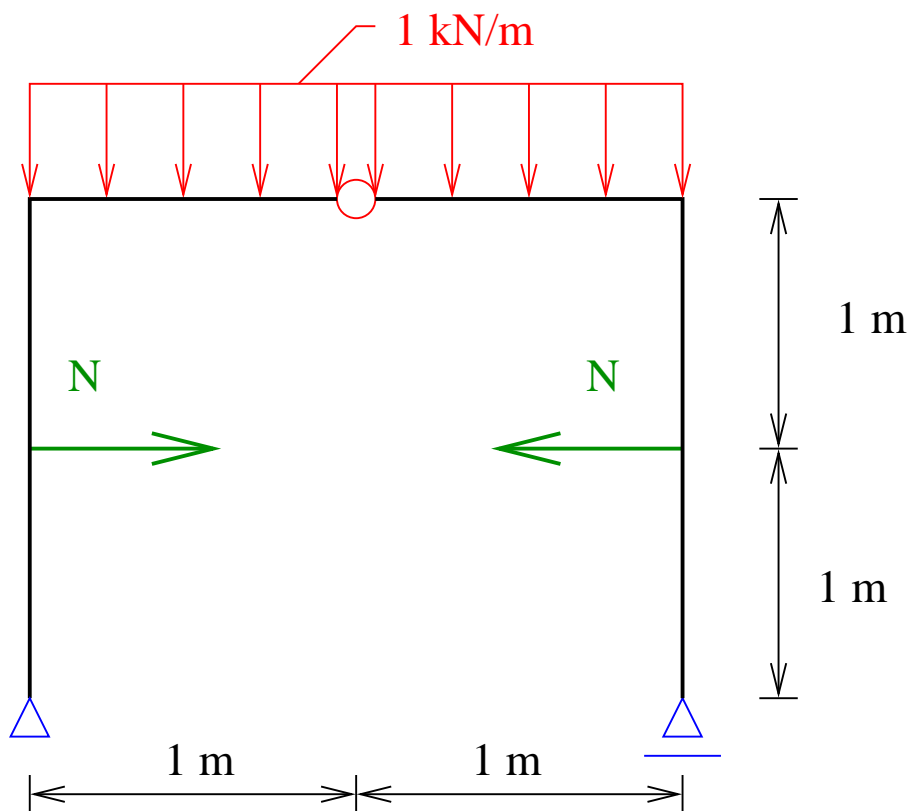
Rám s táhlem 1 – příklad (1)



Stupeň statické neurčitosti:

$$\begin{aligned} S_n &= v - 3 + 3 \times u - k \\ &= (2 + 1) - 3 + 3 \times 1 - 3 \\ &= 0 \end{aligned}$$

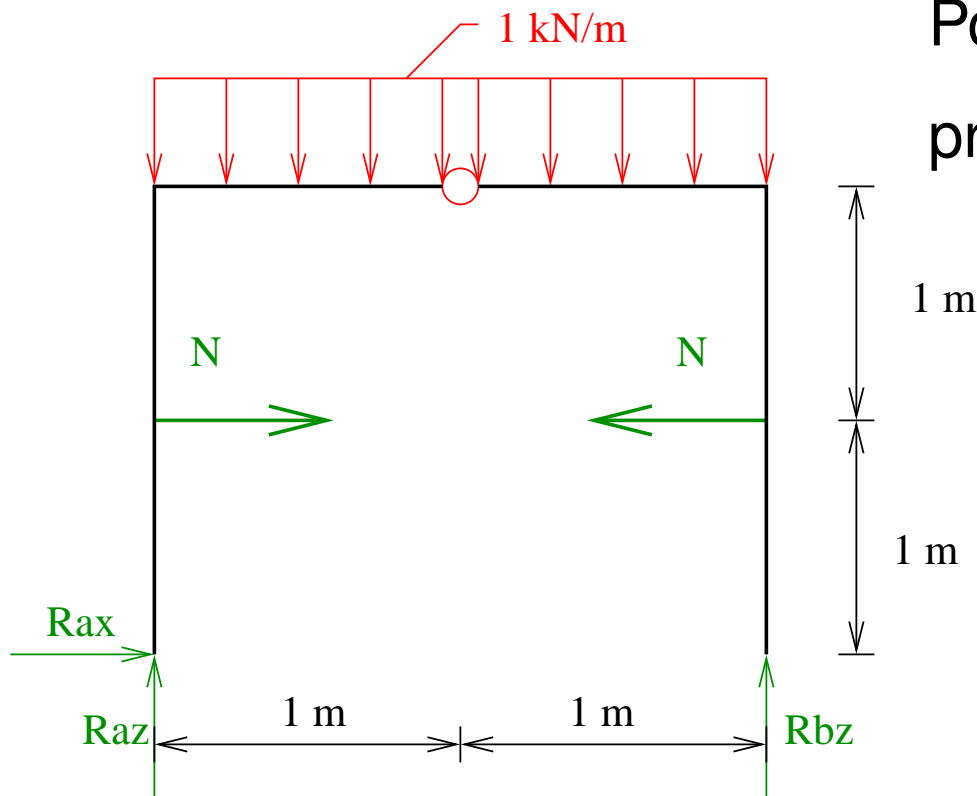
Rám s táhlem 1 – příklad (2)



Stupeň statické neurčitosti:

$$\begin{aligned} S_n &= v - 3 + 3 \times u - k \\ &= (2 + 1) - 3 + 3 \times 1 - 3 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Rám s táhlem 1 - příklad (3)



Podmínky statické rovnováhy
pro určení neznámých reakcí:

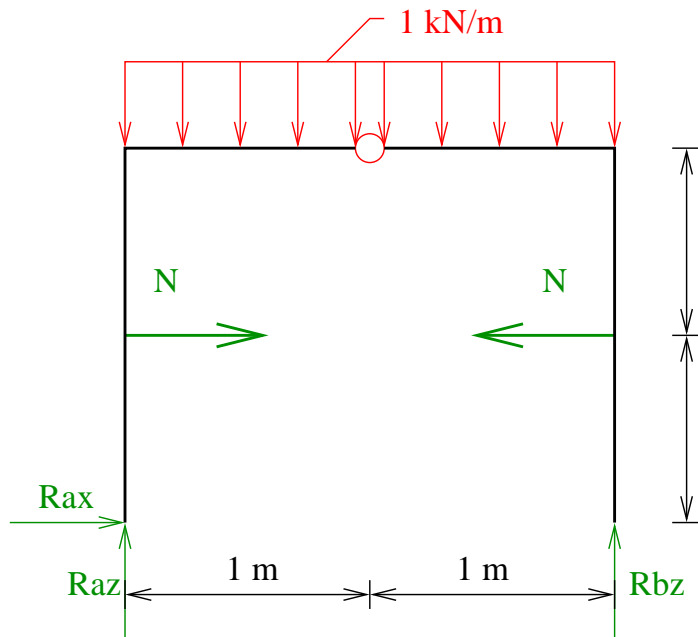
$$\sum M_{ki}^l = 0$$

$$\sum F_{xi} = 0$$

$$\sum M_{bi} = 0$$

$$\sum M_{ai} = 0$$

Rám s táhlem 1 - příklad (4)



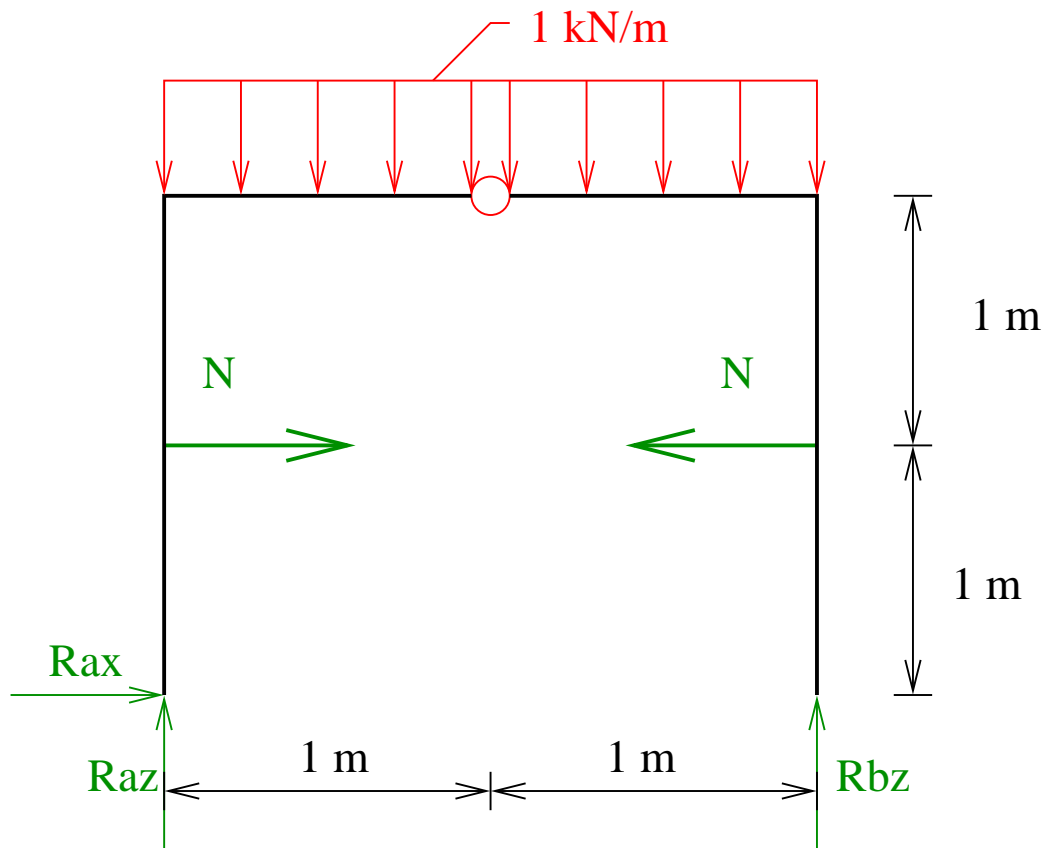
$$\sum M_{i,b} = 0 :$$

$$1\text{ m} \quad -R_{az} \times 2 + q \times 2 \times \frac{2}{2} = 0$$

$$1\text{ m} \quad -R_{az} \times 2 + 1 \times 2 \times \frac{2}{2} = 0$$

$$R_{az} = \frac{2}{2} = 1 \text{ kNm}(\uparrow)$$

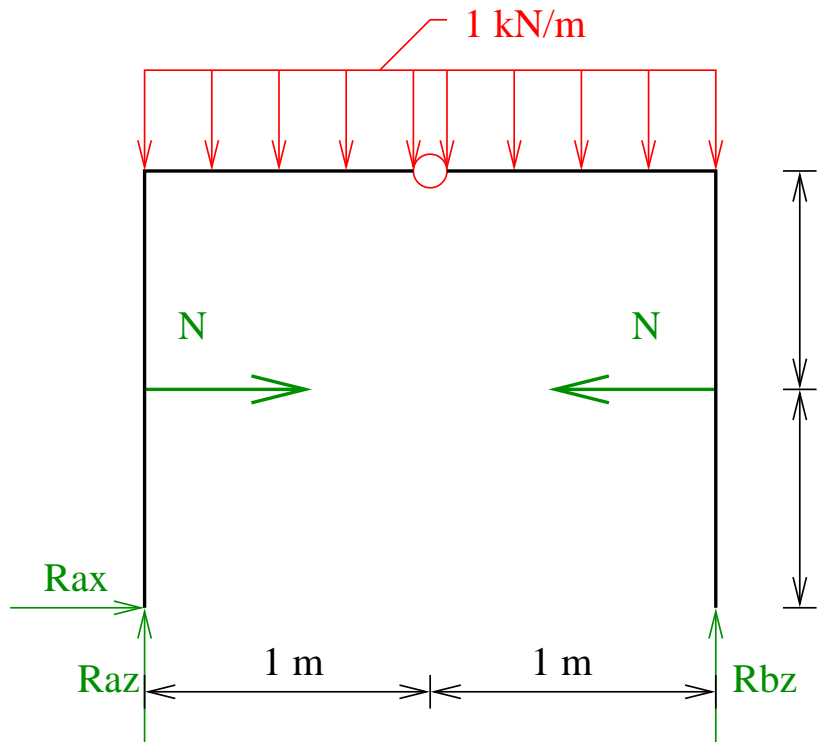
Rám s táklem 1 - příklad (5)



$$\sum F_{xi} = 0 :$$

$$R_{bx} = 0 \text{ kN}$$

Rám s táklem 1 - příklad (6)



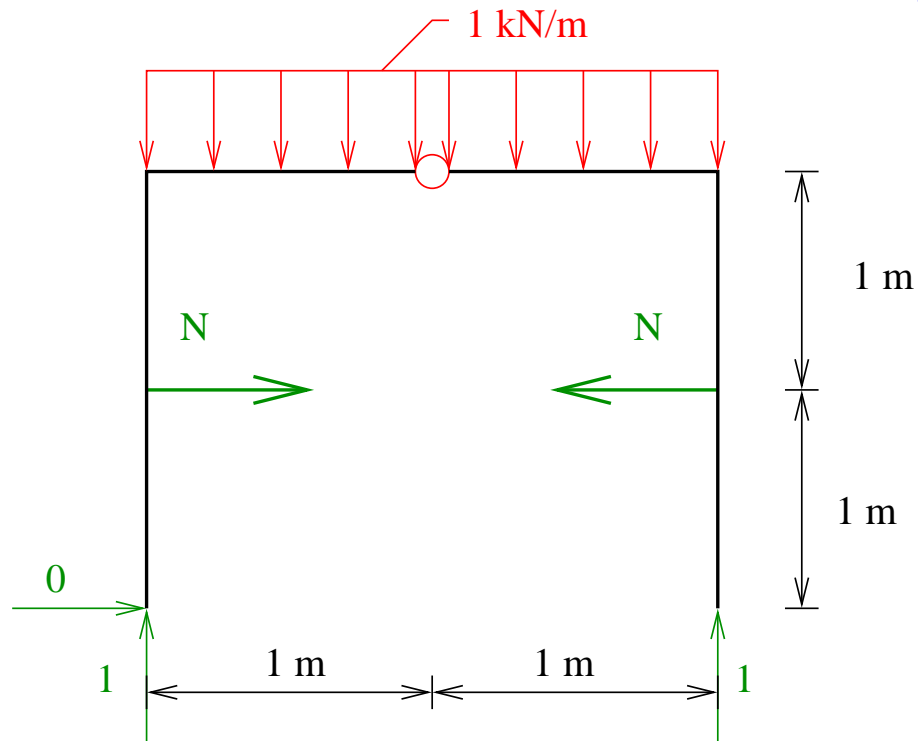
$$\sum M_{ai} = 0 :$$

$$R_{bz} \times 2 - q \times 2 \times \frac{2}{2} = 0$$

$$R_{bz} \times 2 - 1 \times 2 \times \frac{2}{2} = 0$$

$$R_{bz} = \frac{2}{2} = 1 \text{ kNm } (\uparrow)$$

Rám s táhlem 1 - příklad (7)

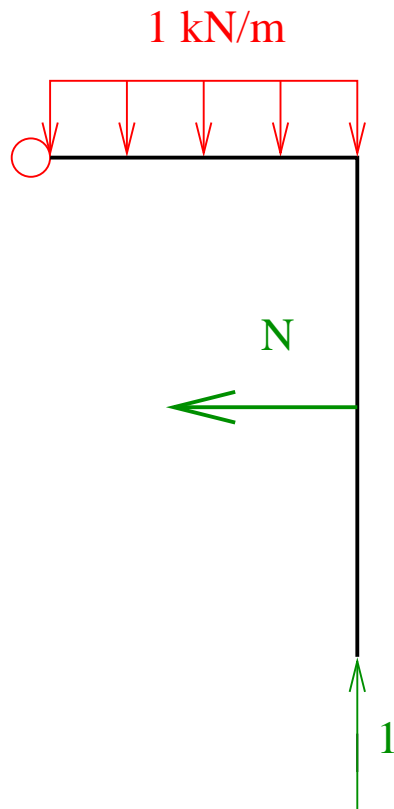


Kontrola svislých reakcí ($\sum F_{iy} = 0$):

$$R_{az} + R_{bz} - q \times 2 = 0$$

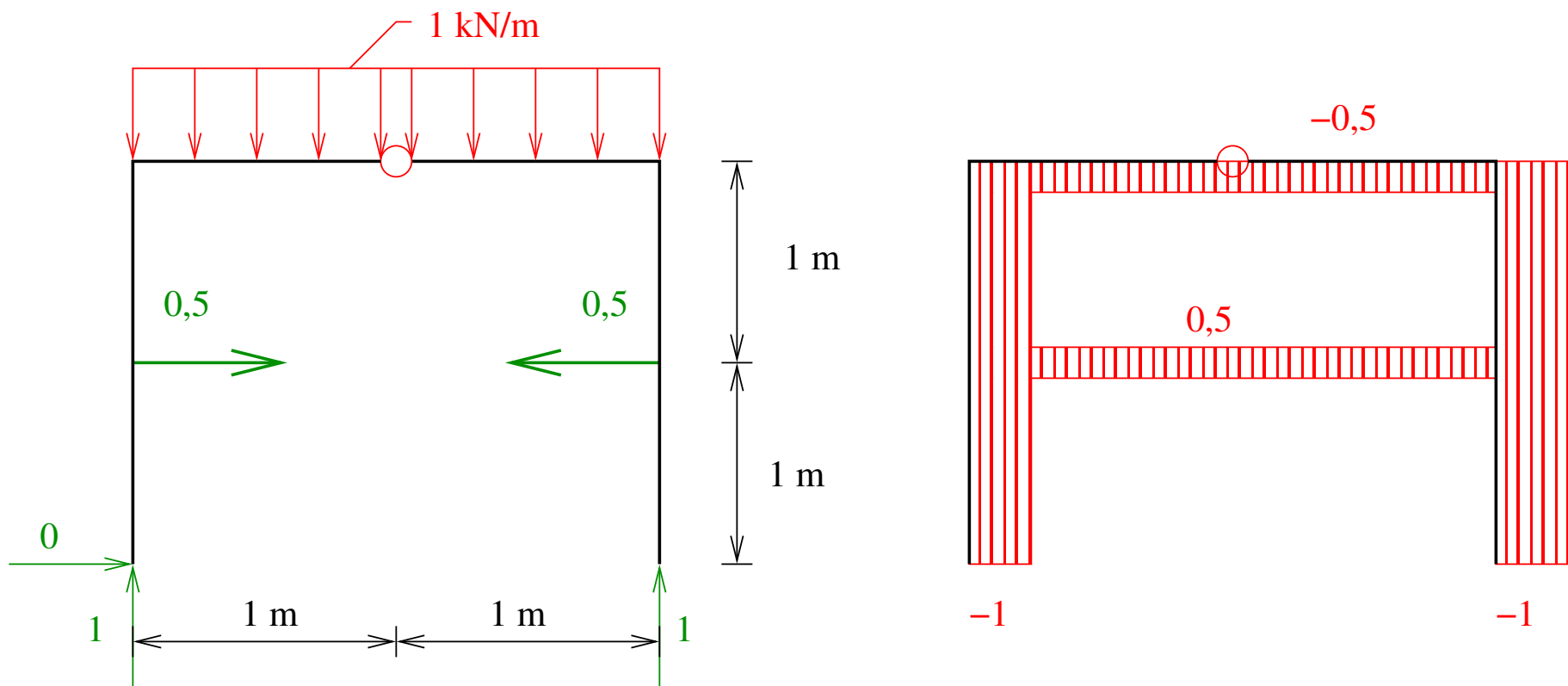
$$1 + 1 - 2 = 0$$

Rám s táklem 1 - příklad (8)

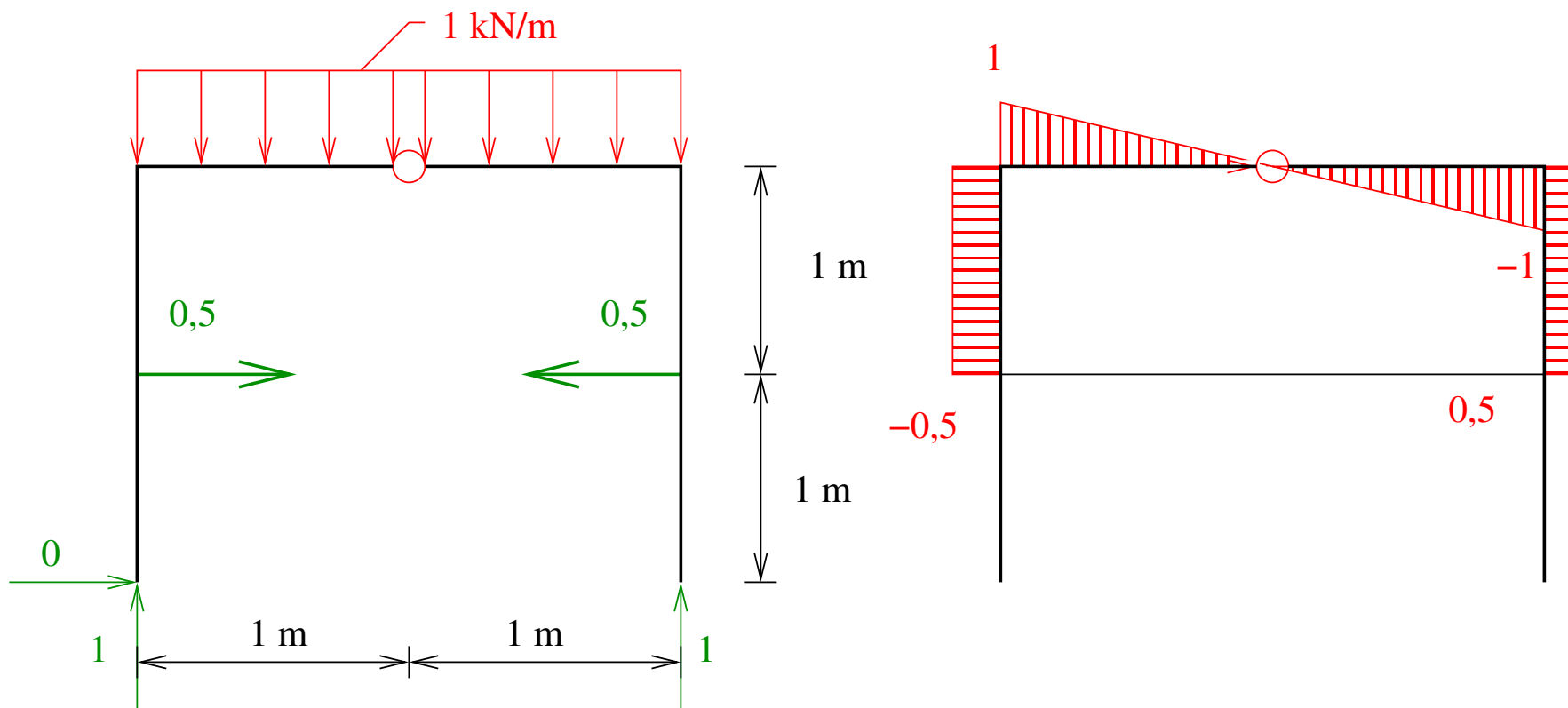


$$\sum M_{ki}^p = 0 :$$
$$R_{bz} \times 1 - q \times 1 \times \frac{1}{2} - N \times 1 = 0$$
$$1 \times 1 - 1 \times 1 \times \frac{1}{2} - N \times 1 = 0$$
$$N = 1 \times 1 - 0,5 = 0,5 \text{ kN}(tah)$$

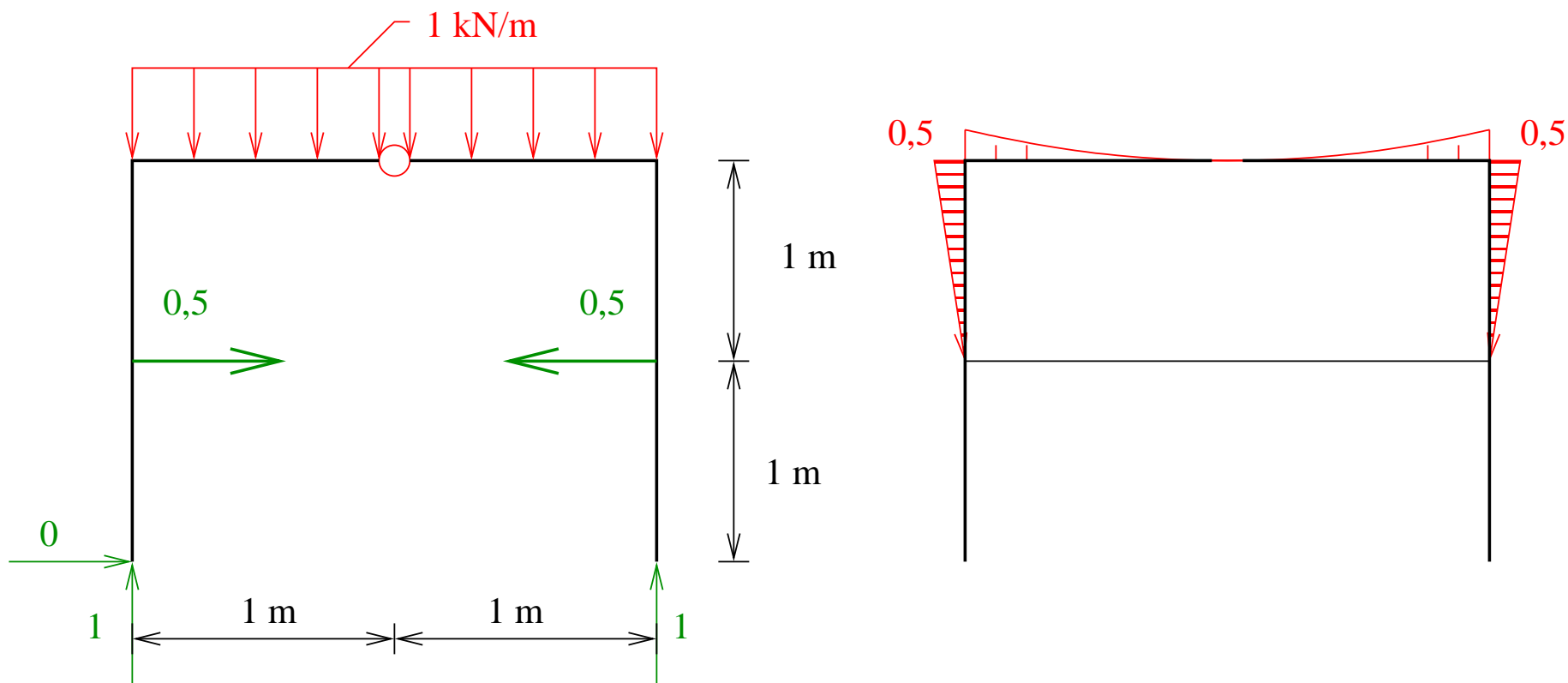
Rám s táhlem 1 - příklad (9)



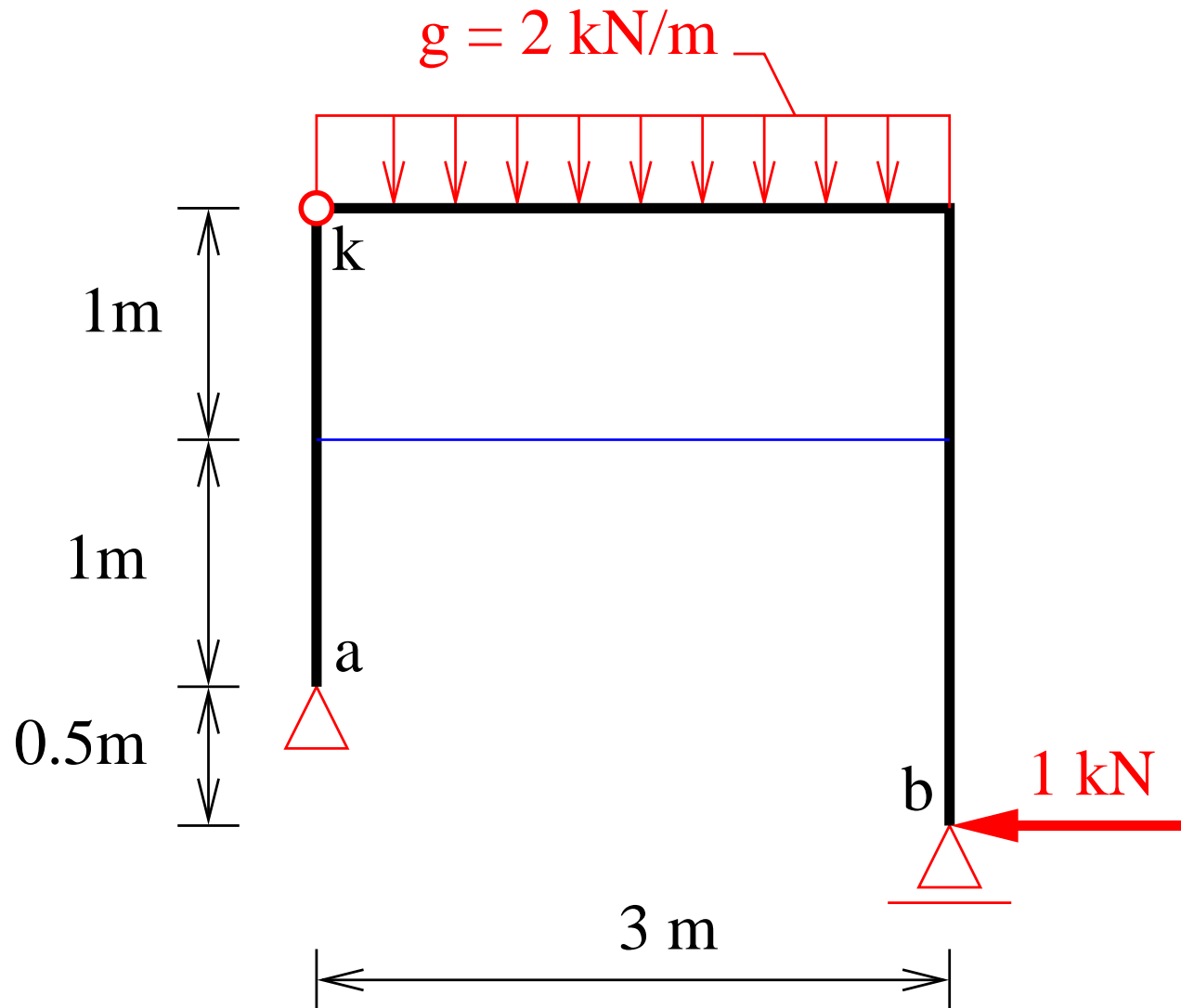
Rám s táhlem 1 - příklad (10)



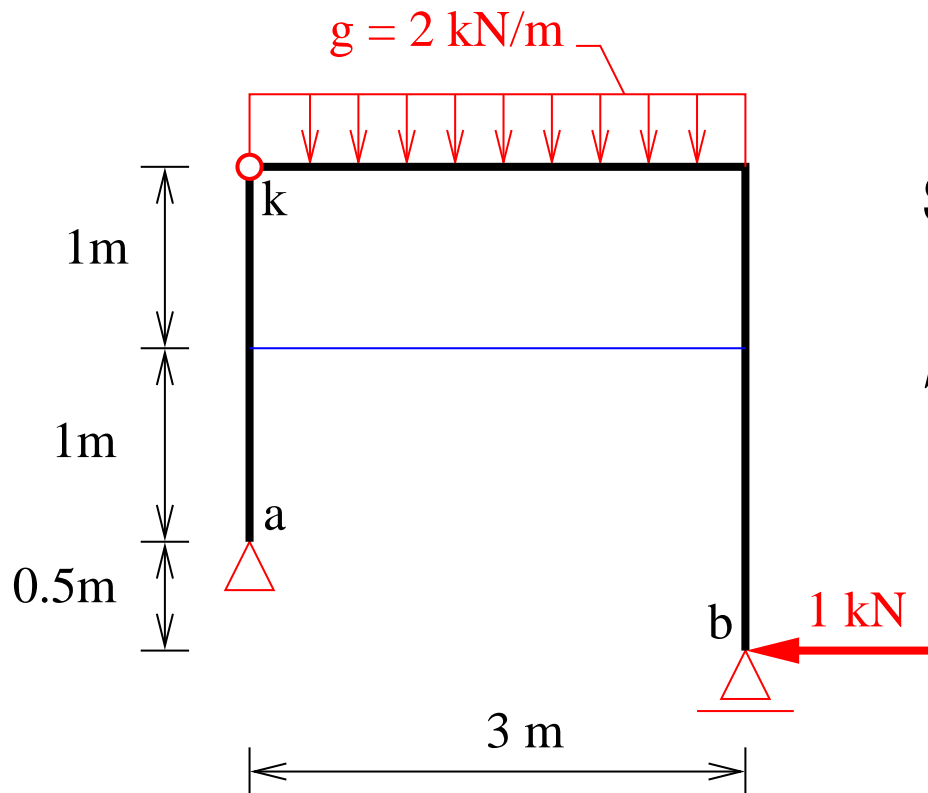
Rám s táhlem 1 - příklad (11)



Rám s táklem - příklad 2 (1)



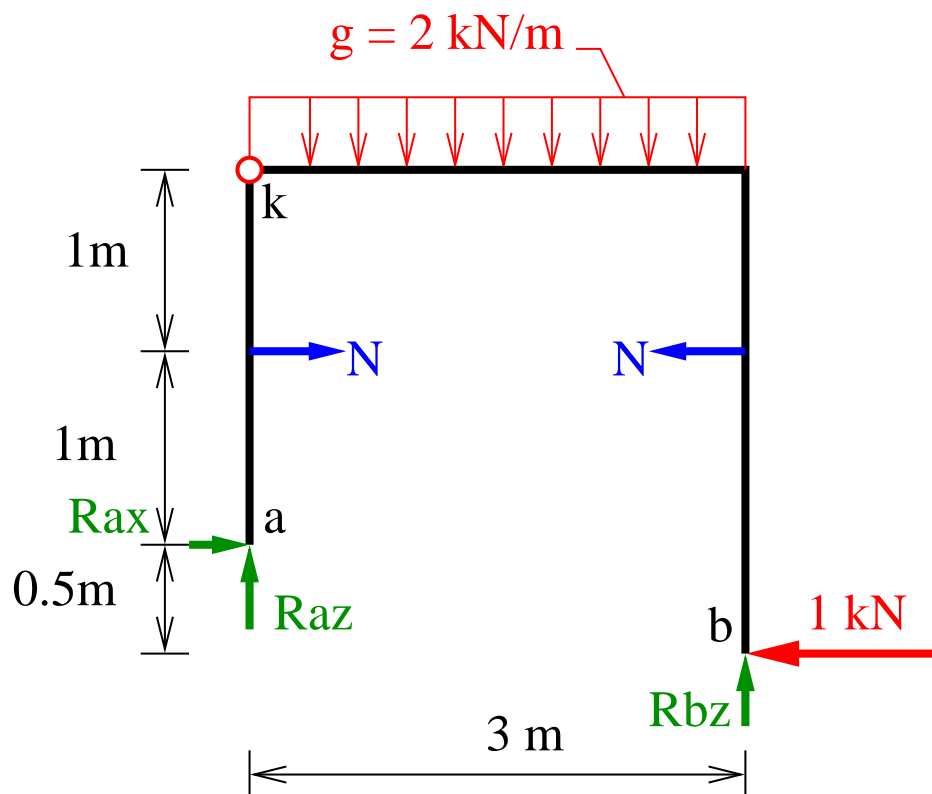
Rám s táhlem – příklad 2 (2)



Stupeň statické neurčitosti:

$$\begin{aligned} S_n &= v - 3 + 3 \times u - k \\ &= (2 + 1) - 3 + 3 \times 1 - 3 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Rám s táhlem - příklad 2 (3)



Podmínky statické rovnováhy pro určení neznámých reakcí:

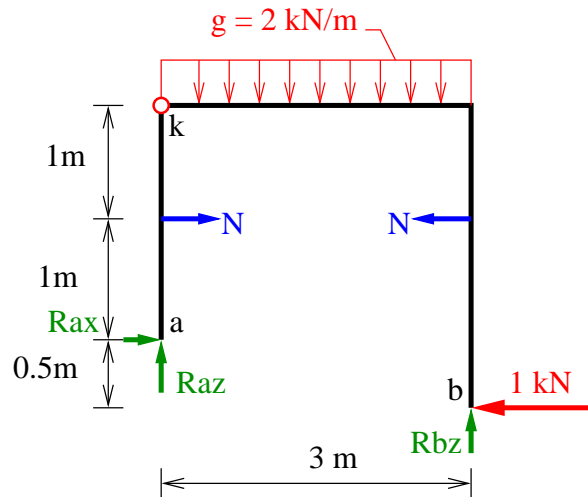
$$\sum F_{xi} = 0$$

$$\sum M_{bi} = 0$$

$$\sum M_{ai} = 0$$

$$\sum M_{ki}^l = 0$$

Rám s táklem - příklad 2 (5)



$$\sum F_{i,x} = 0 :$$

$$R_{a,x} - 1 = 0$$

$$R_{a,x} = 1 \text{ kN } (\rightarrow)$$

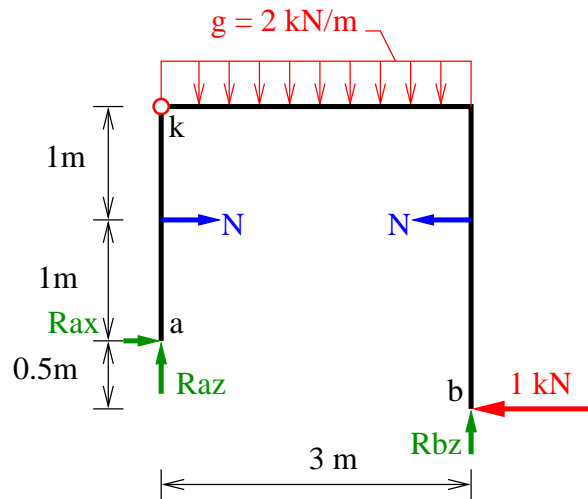
$$\sum M_{i,a} = 0 :$$

$$R_{b,z} \times 3 - 1 \times 0,5 - g \times 3 \times \frac{3}{2} = 0$$

$$R_{b,z} \times 3 - 1 \times 0,5 - 2 \times 3 \times \frac{3}{2} = 0$$

$$R_{b,z} = \frac{0,5 + 9}{3} = 3,167 \text{ kN } (\uparrow)$$

Rám s táklem - příklad 2 (6)



Již známe:

$$R_{a,x} = 1 \text{ kN } (\rightarrow)$$

$$R_{b,z} = 3,167 \text{ kN } (\uparrow)$$

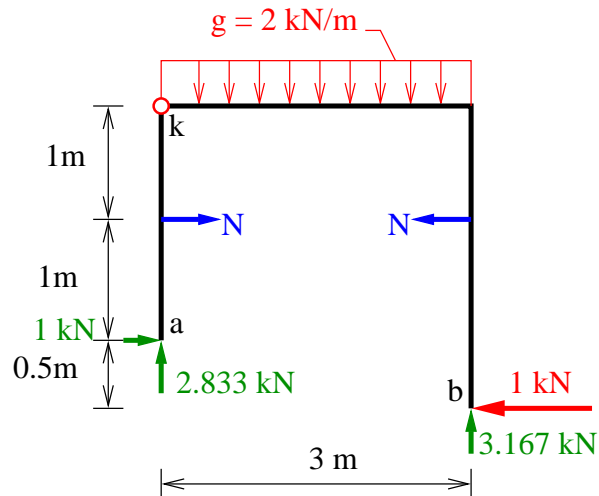
$$\sum M_{i,b} = 0 :$$

$$R_{a,z} \times 3 + R_{a,x} \times 5 - g \times 3 \times \frac{3}{2} = 0$$

$$R_{a,z} \times 3 - 1 \times 0,5 - 2 \times 3 \times \frac{3}{2} = 0$$

$$R_{a,z} = \frac{9 - 0,5}{3} = 2,833 \text{ kN } (\uparrow)$$

Rám s táklem - příklad 2 (7)



$$R_{a,x} = 1 \text{ kN} (\rightarrow)$$

$$R_{a,z} = 2,833 \text{ kN} (\uparrow)$$

$$R_{b,z} = 3,167 \text{ kN} (\uparrow)$$

Provedeme kontrolu:

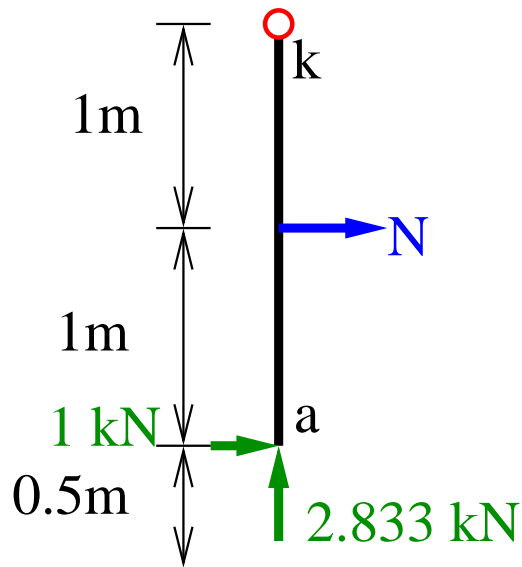
$$\sum F_{i,y} = 0 :$$

$$R_{a,z} + R_{b,z} - g \times 3 = 0$$

$$2.833 + 3.167 - 2 \times 3 = 0$$

$$0 \text{ kN} = 0 \text{ kN}$$

Rám s táklem - příklad 2 (8)



$$\sum M_{k,i}^l = 0 :$$

$$R_{a,x} \times 2 + N \times 1 = 0$$

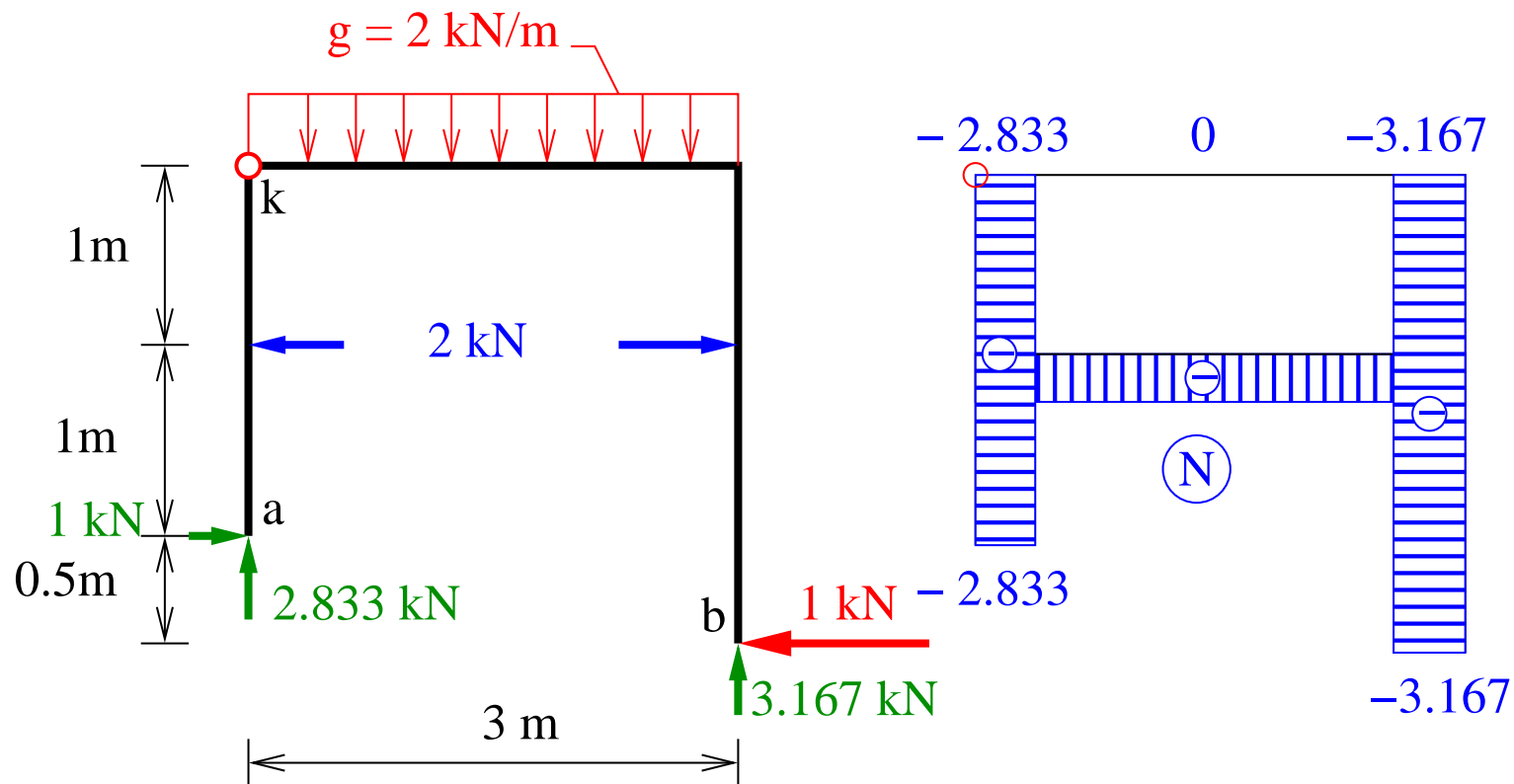
$$1 \times 2 + N \times 1 = 0$$

$$N = -2 \text{ kN tlak!}$$

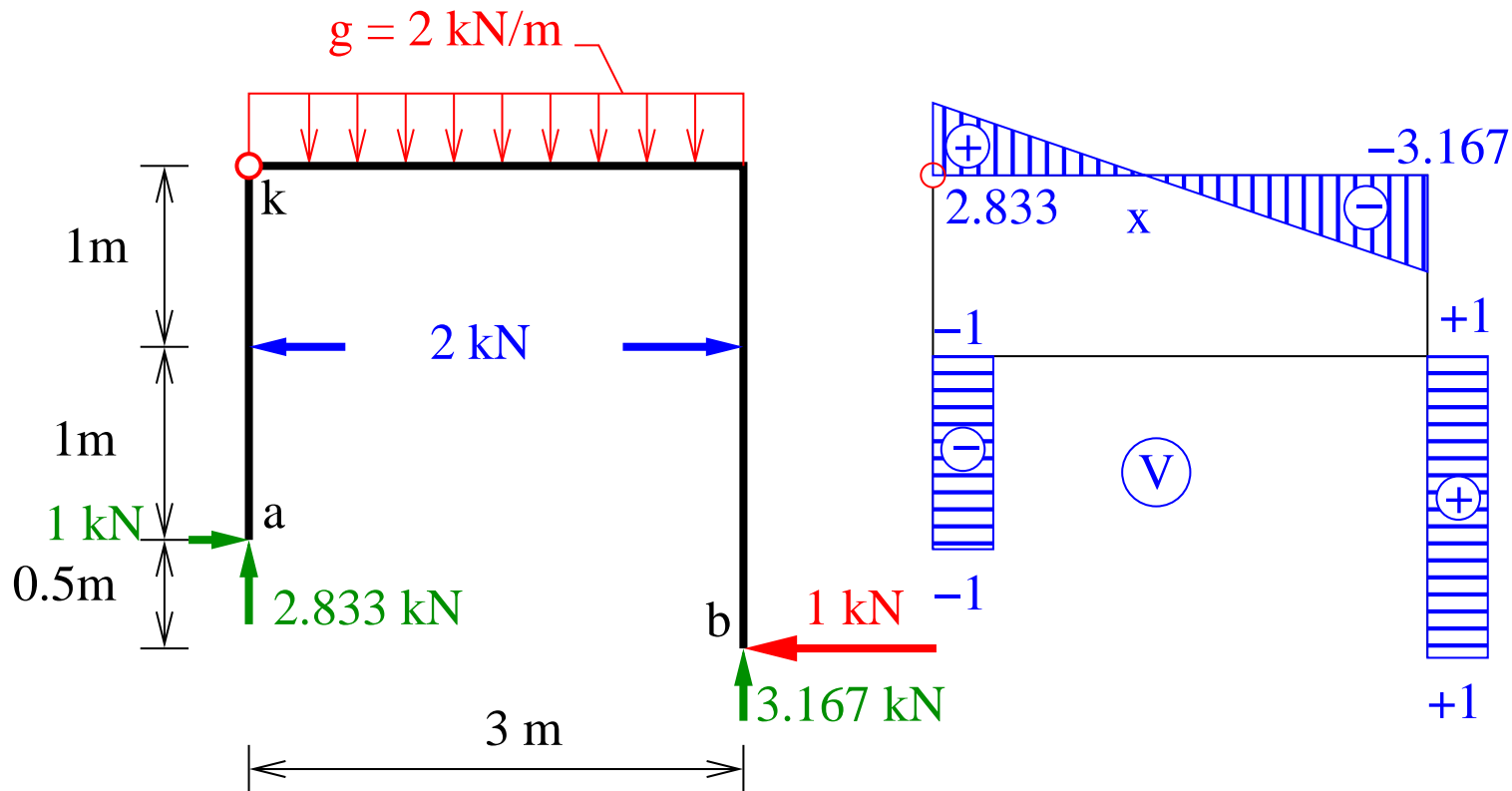
$$N = 2 \text{ kN}(\leftarrow)\text{tlak!}$$

I to se může stát (v prvku označovaném jako „táhlo“ je v našem případě **tlak**, tedy je to spíše „vzpěra“).

Rám s táhlem - příklad 2 (9)

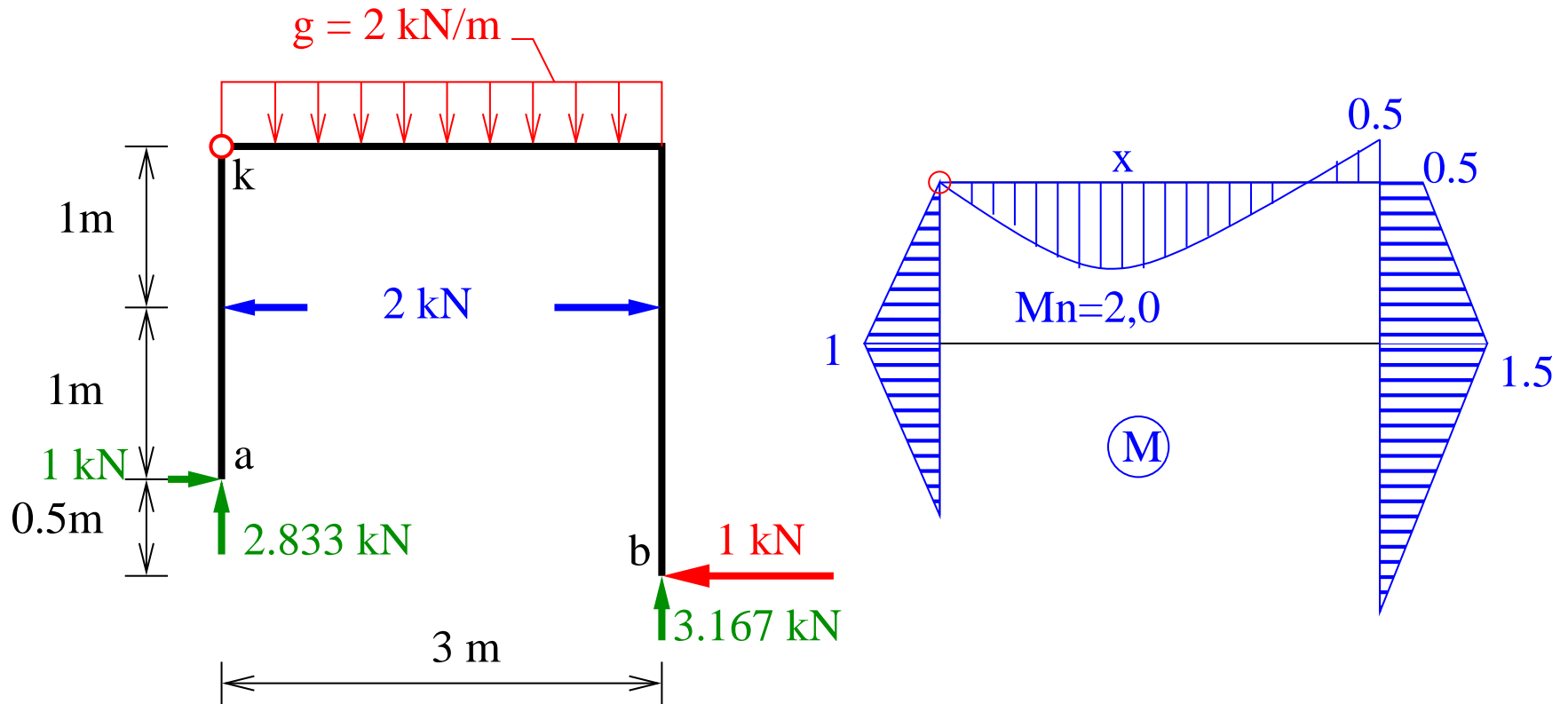


Rám s táklem - příklad 2 (10)



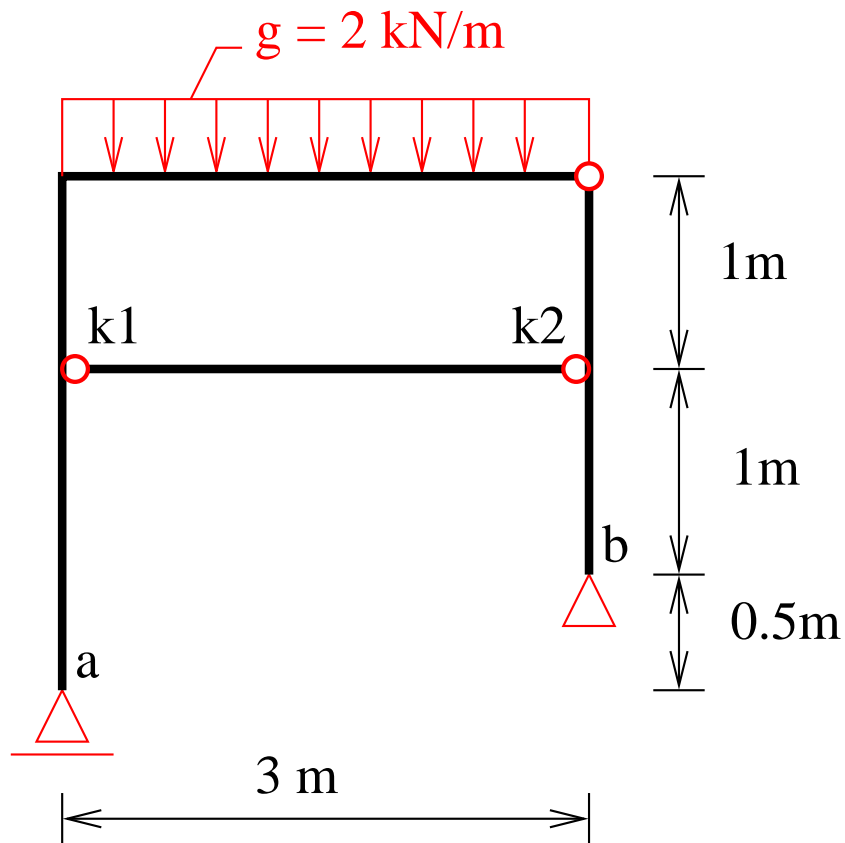
$$\frac{x}{2.933} = \frac{L}{q} \Rightarrow x = \frac{2.833 \times 2}{3} = 1,889 \text{ m}$$

Rám s táklem - příklad 2 (11)



$$\begin{aligned}
 M_n &= 2,833 \times x - g \times x \times \frac{x}{2} \\
 &= 2,833 \times 1,665 \text{ m} - 2 \times 1,4665 \times \frac{1,4665}{2} \\
 &= 2,0 \text{ kNm}
 \end{aligned}$$

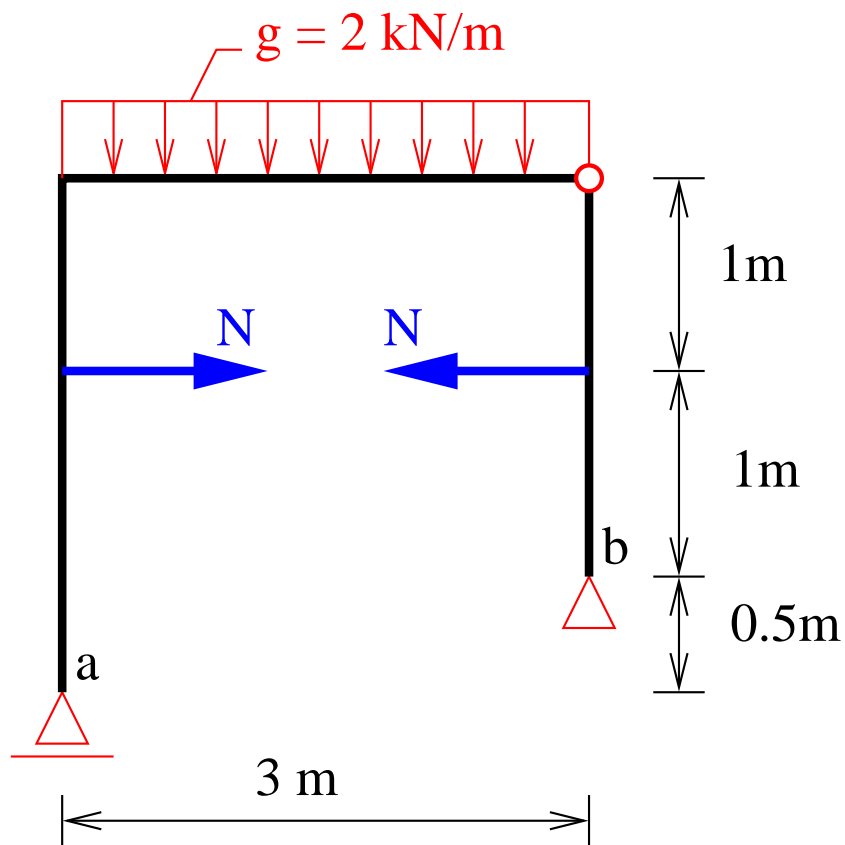
Rám s táhlem – příklad 3 (1)



Stupeň statické neurčitosti:

$$\begin{aligned} S_n &= v - 3 + 3 \times u - k \\ &= (2 + 1) - 3 + 3 \times 1 - 3 \\ &= 0 \end{aligned}$$

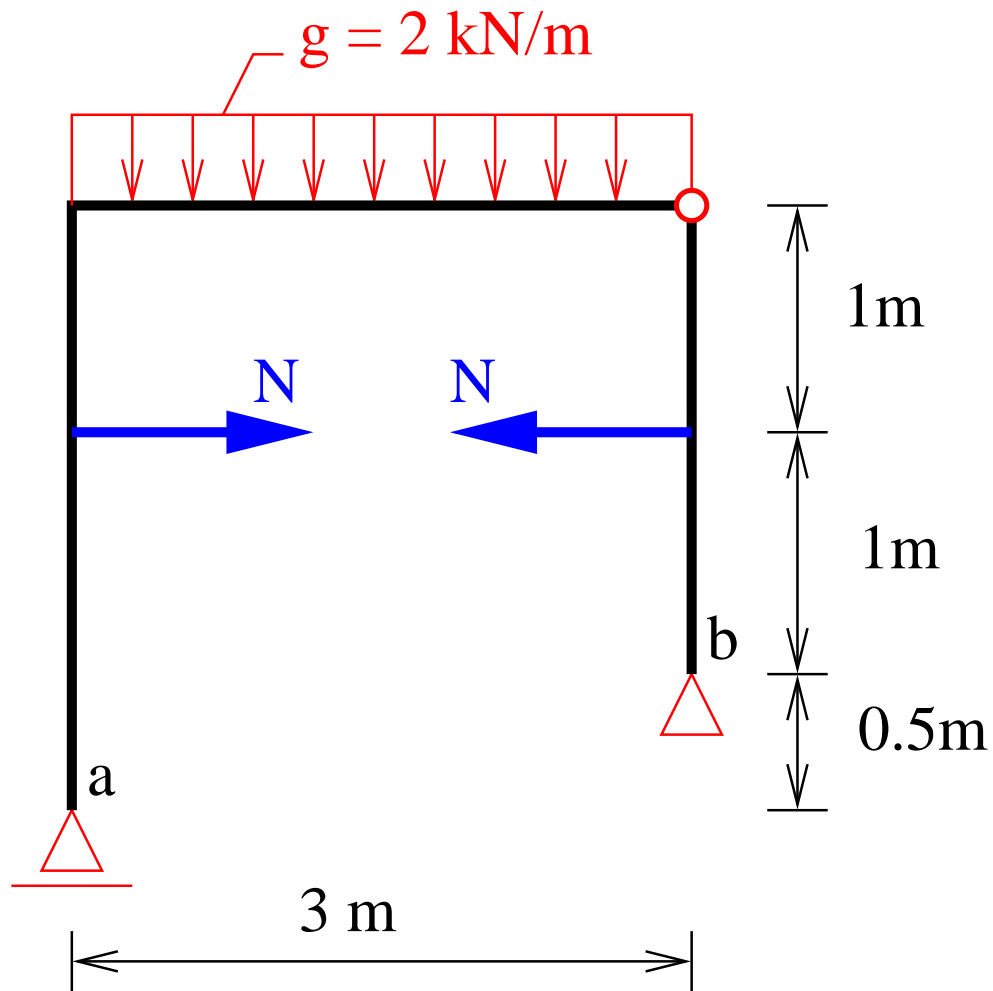
Rám s táhlem – příklad 3 (2)



Stupeň statické neurčitosti:

$$\begin{aligned} S_n &= v - 3 + 3 \times u - k \\ &= (2 + 1) - 3 + 3 \times 1 - 3 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Rám s táklem - příklad 3 (3)



Podmínky statické rovnováhy pro určení neznámých reakcí:

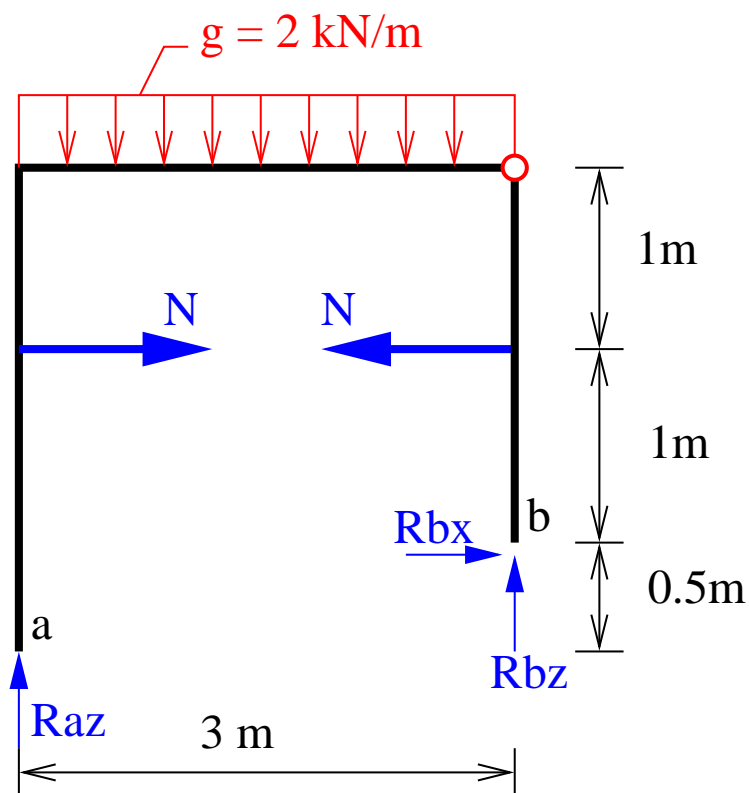
$$\sum M_{ki}^l = 0$$

$$\sum F_{xi} = 0$$

$$\sum M_{bi} = 0$$

$$\sum M_{ai} = 0$$

Rám s táklem - příklad 3 (4)



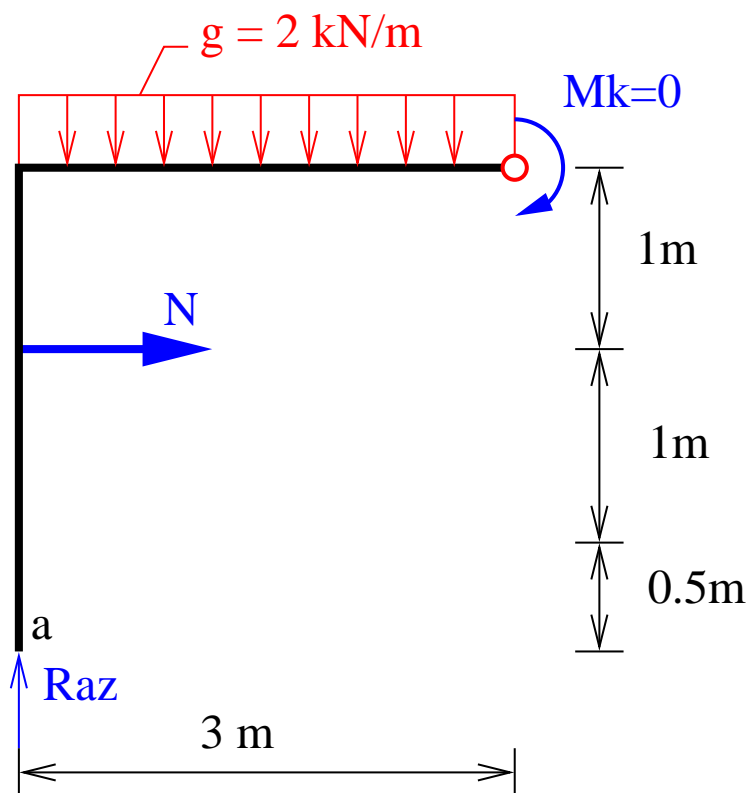
$$\sum M_{bi} = 0 :$$

$$-R_{az} \times 3 + q \times 3 \times \frac{3}{2} = 0$$

$$-R_{az} \times 3 + 2 \times 3 \times \frac{3}{2} = 0$$

$$R_{az} = \frac{9}{3} = 3 \text{ kNm}(\uparrow)$$

Rám s táklem - příklad 3 (5)



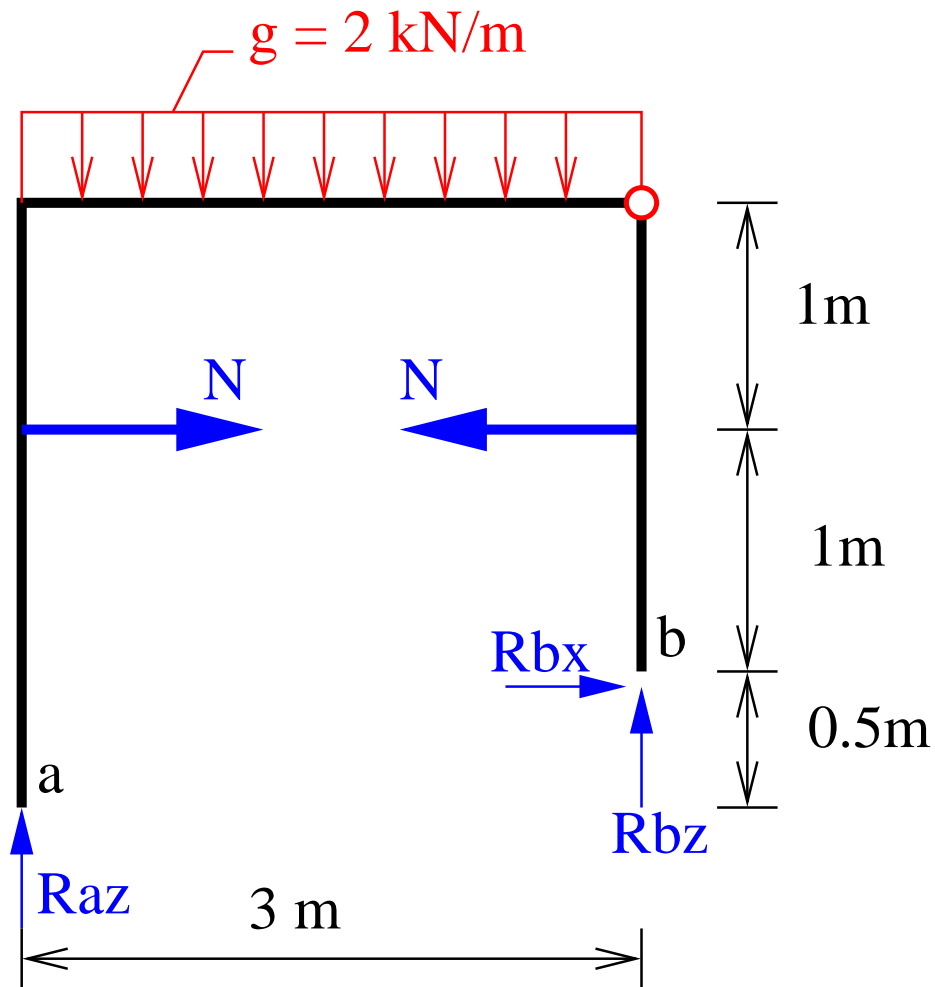
$$\sum M_{ki}^l = 0$$

$$-R_{az} \times 3 + q \times 3 \times \frac{3}{2} + N \times 1 = 0$$

$$-3 \times 3 + 2 \times 3 \times \frac{3}{2} + N \times 1 = 0$$

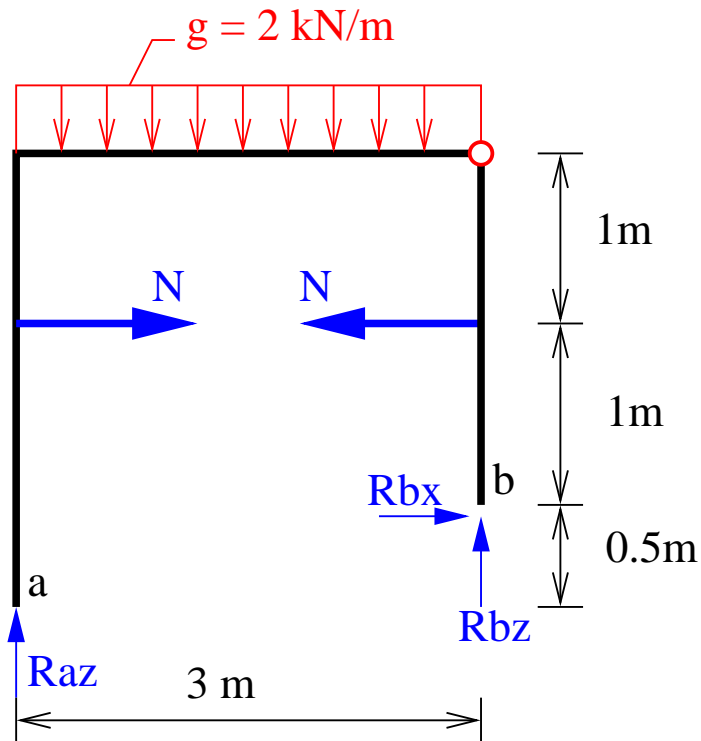
$$N = R_{az} \times 3 - 9 = 9 - 9 = 0$$

Rám s táklem - příklad 3 (6)



$$\sum F_{xi} = 0 :$$
$$R_{bx} = 0 \text{ kN}$$

Rám s táklem - příklad 3 (7)



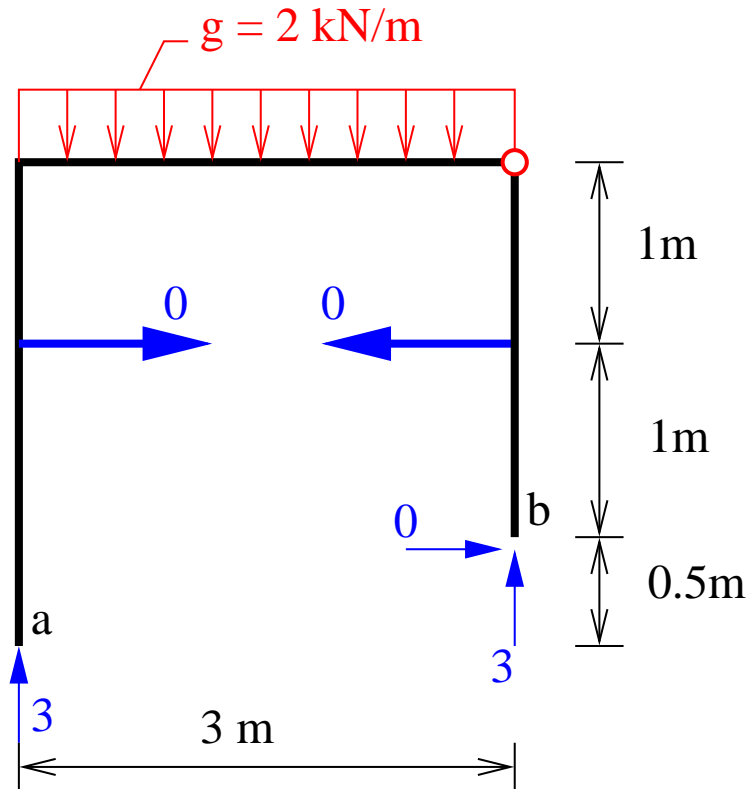
$$\sum M_{ai} = 0 :$$

$$R_{bz} \times 3 - R_{bx} \times 0.5 - q \times 3 \times \frac{3}{2} = 0$$

$$R_{bz} \times 3 - 0 \times 0.5 - 2 \times 3 \times \frac{3}{2} = 0$$

$$R_{bz} = \frac{9}{3} = 3 \text{ kNm} \quad (\uparrow)$$

Rám s táhlem - příklad 3 (8)

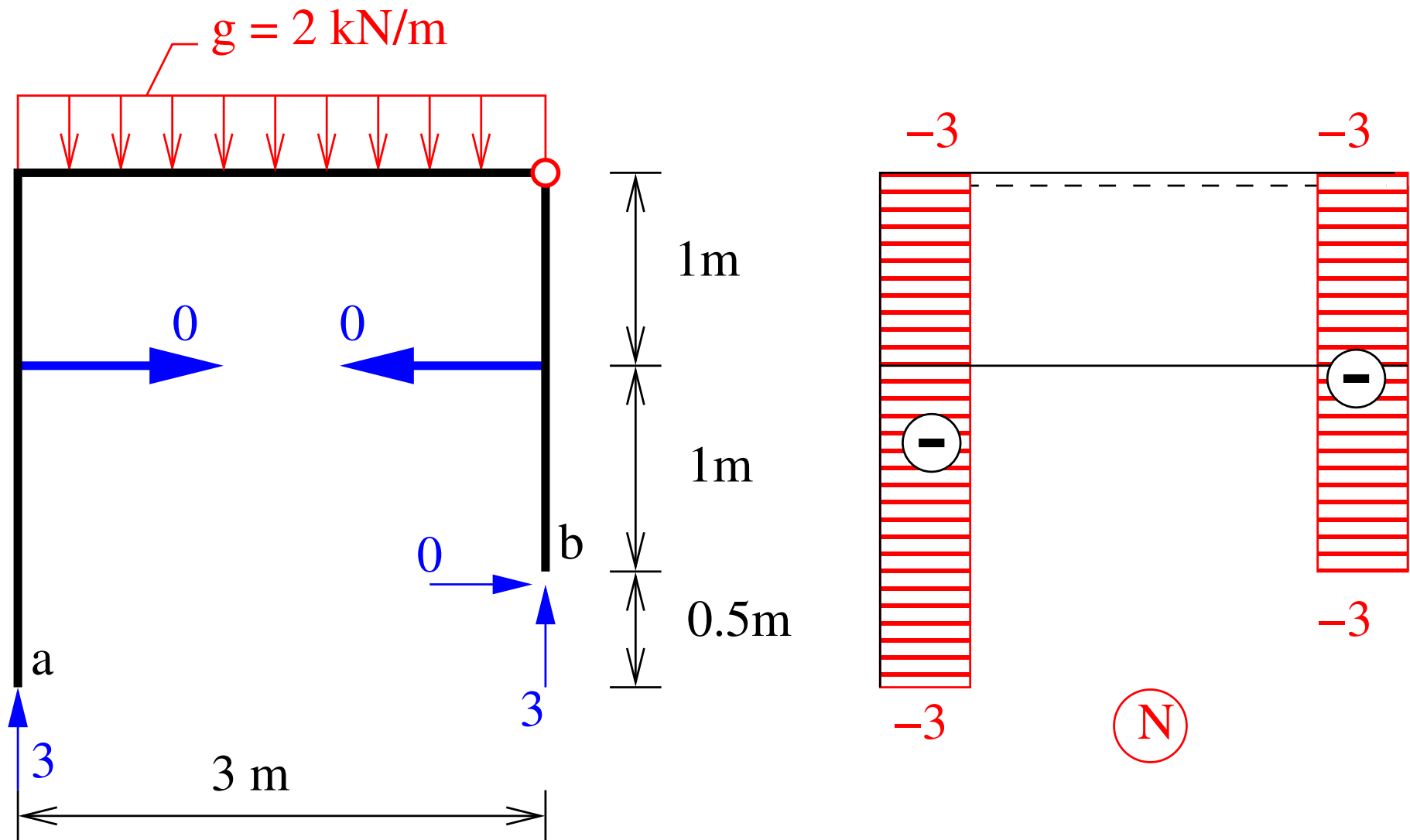


Kontrola svislých reakcí ($\sum F_{iy} = 0$):

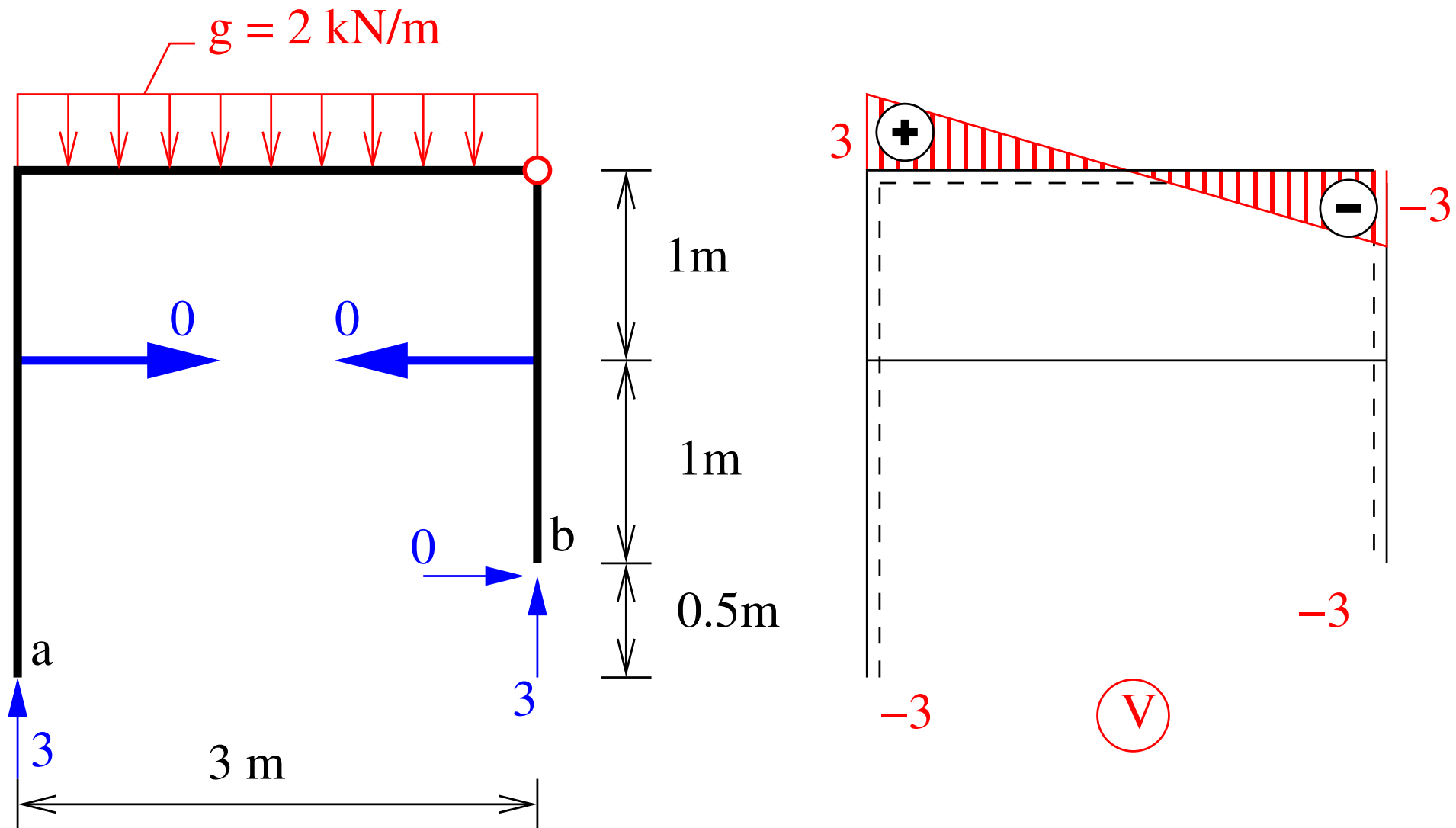
$$R_{az} + R_{bz} - q \times 3 = 0$$

$$3 + 3 - 6 = 0$$

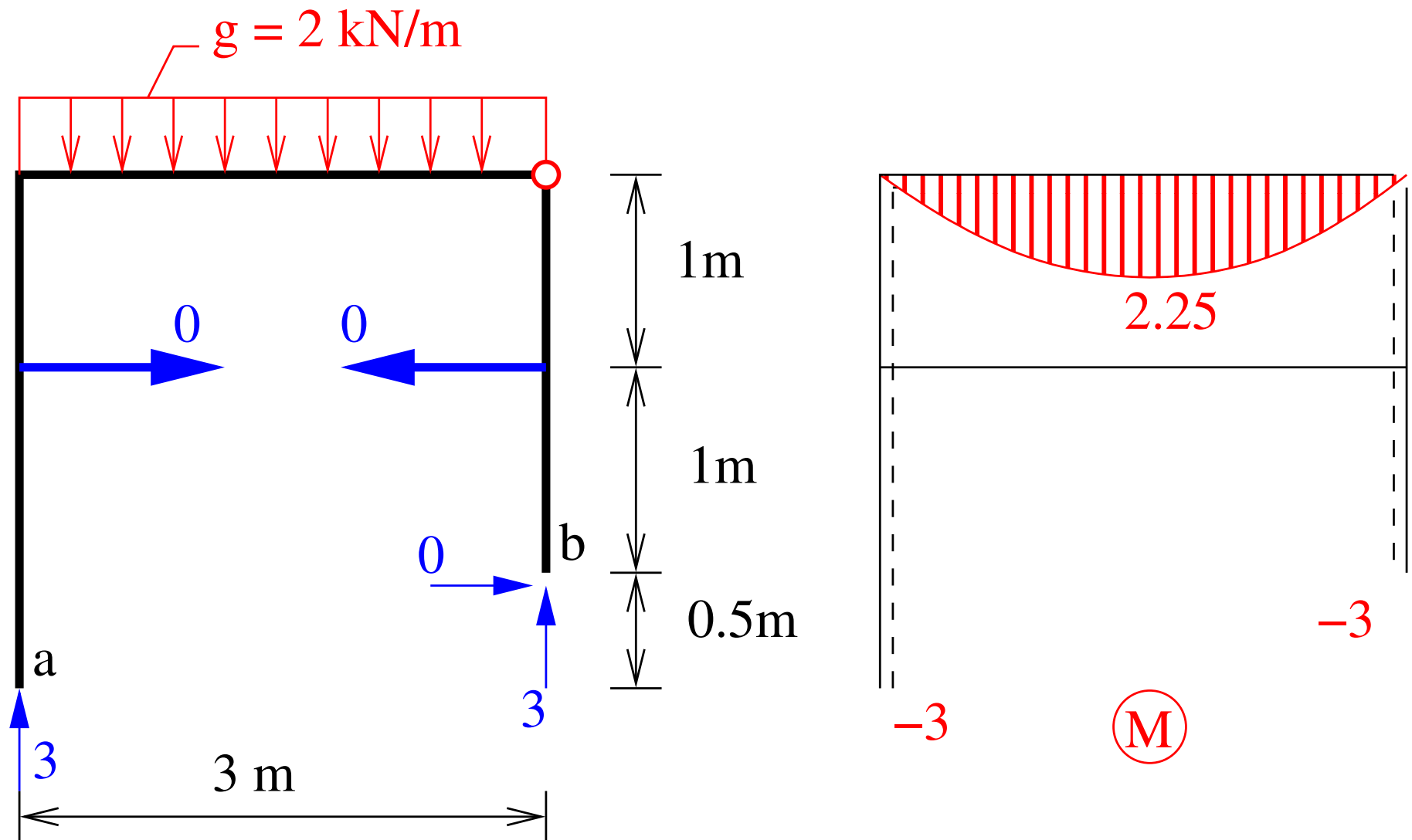
Rám s táklem - příklad 3 (9)



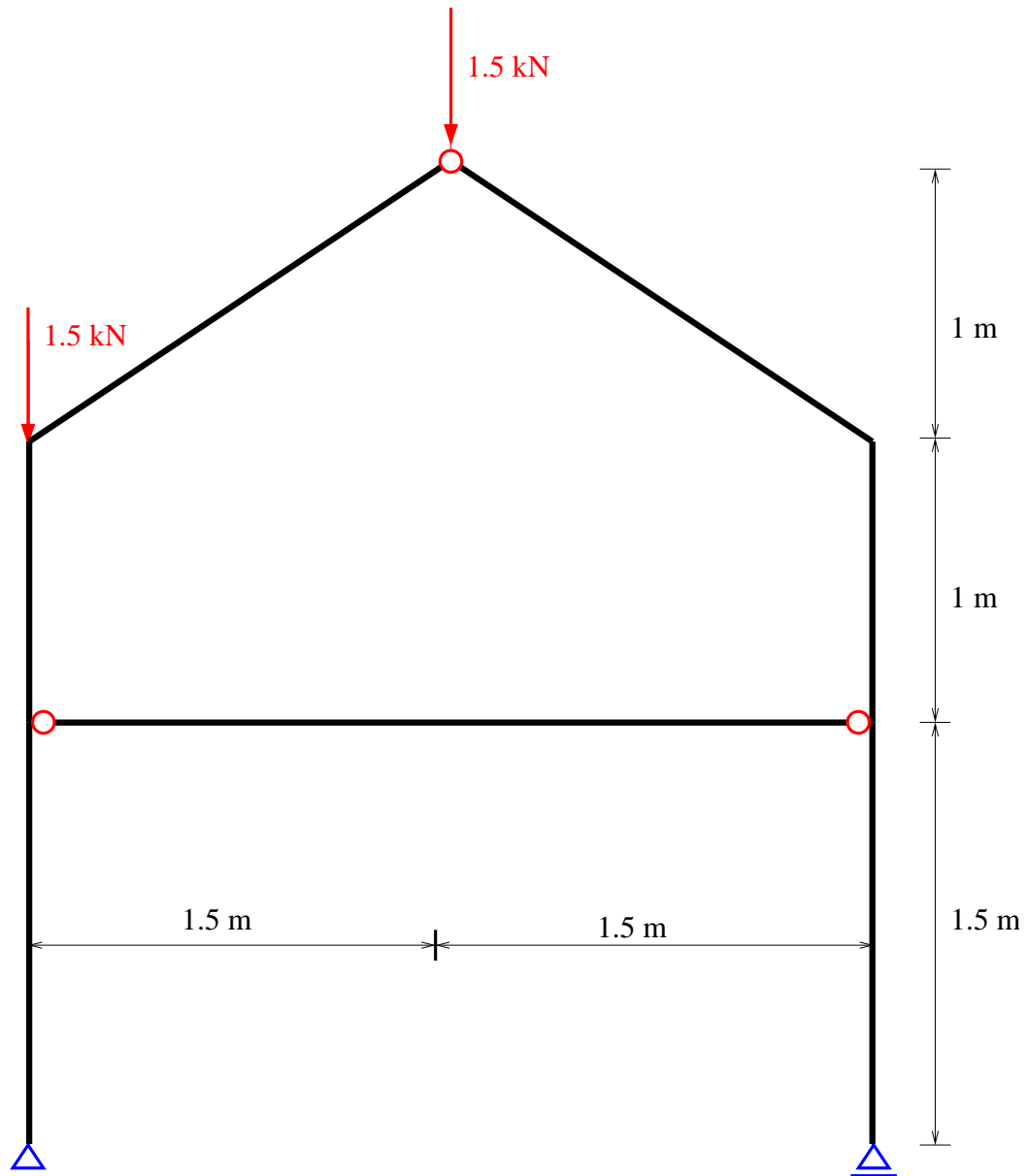
Rám s táklem - příklad 3 (10)



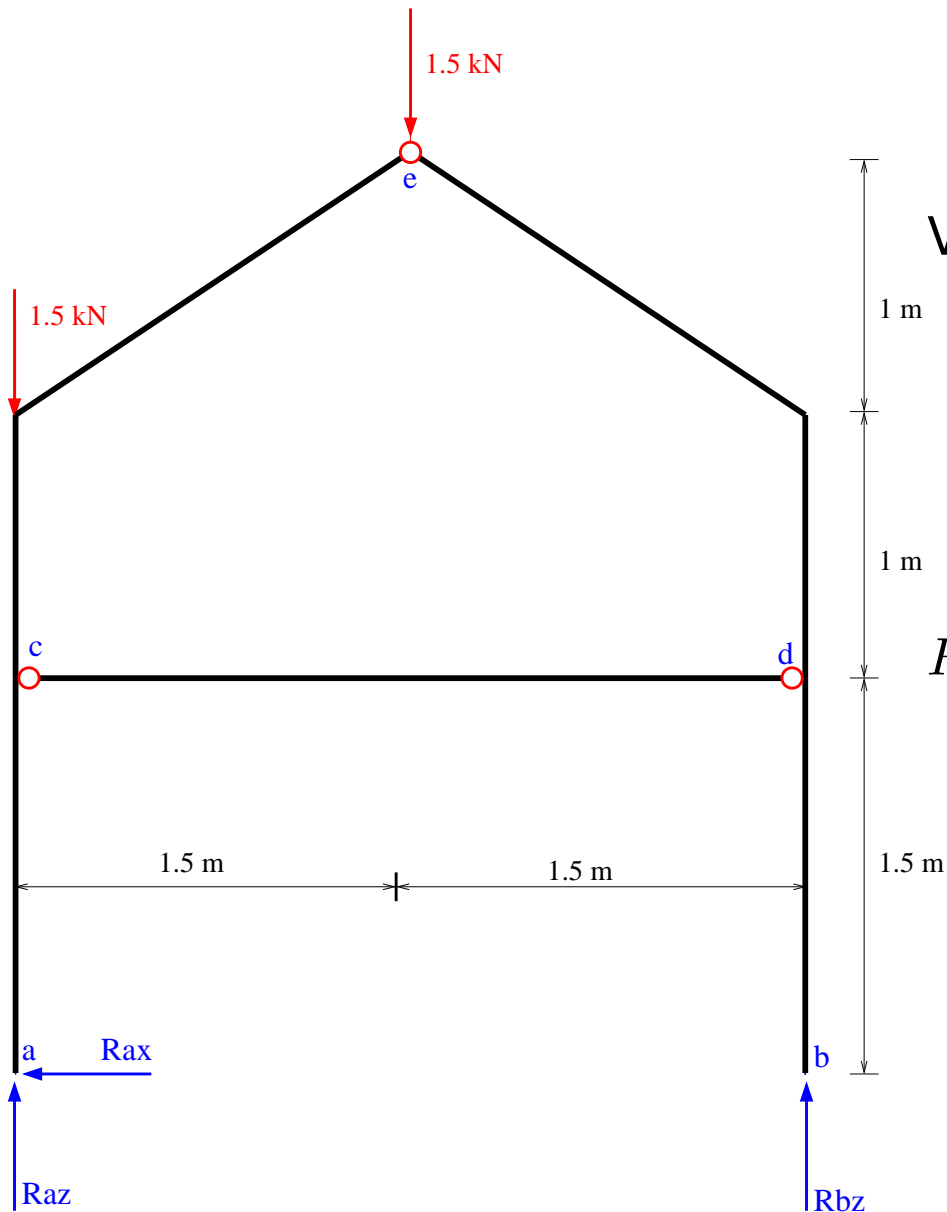
Rám s táklem - příklad 3 (11)



Rám s táhlem - příklad 4 (1)



Rám s táklem - příklad 4 (2)



Výpočet reakcí (1/2):

$$\sum F_{i,x} = 0 :$$

$$R_{ax} = 0$$

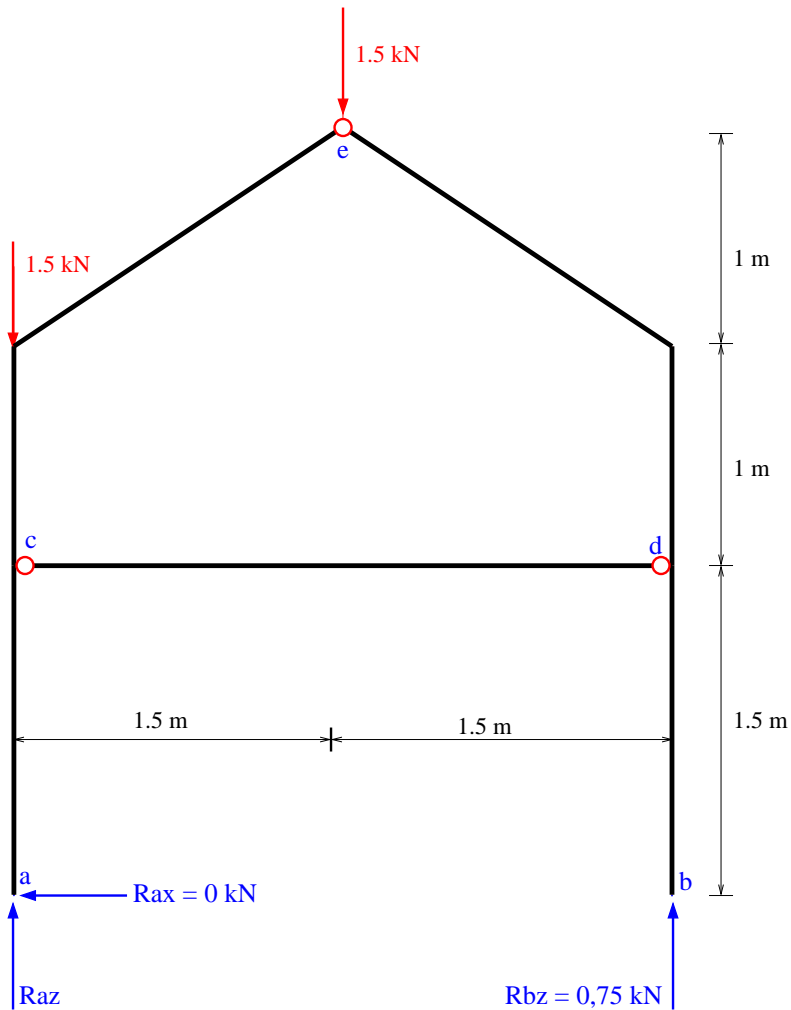
$$\sum M_{i,a} = 0 :$$

$$R_{bz} \times 3 - 1,5 \times 1,5 = 0$$

$$R_{bz} = \frac{1,5 \times 1,5}{3}$$

$$R_{bz} = 0,75 \text{ kN}(\uparrow)$$

Rám s táklem - příklad 4 (3)



Výpočet reakcí (2/2):

$$\sum M_{i,b} = 0 :$$

$$-R_{az} \times 3 + 1,5 \times 3 + 1,5 \times 1,5 = 0$$

$$R_{az} = \frac{(1,5 + 3) \times 1,5}{3}$$

$$R_{az} = 2,25 \text{ kN}(\uparrow)$$

Kontrola:

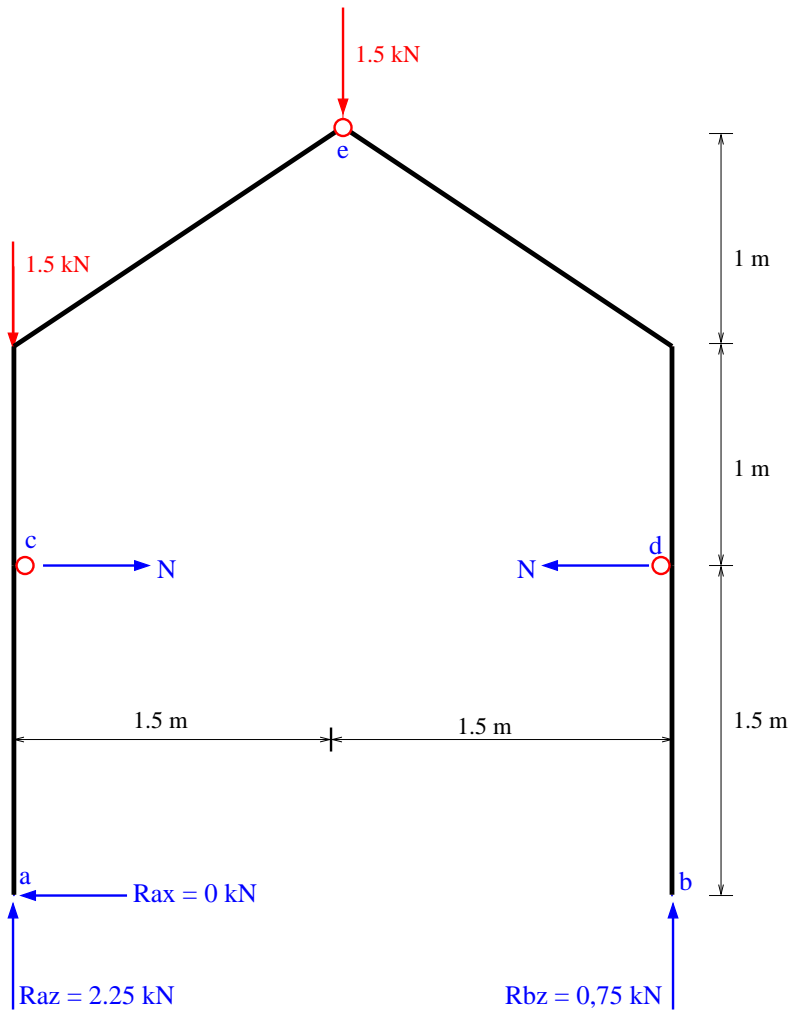
$$\sum F_{i,z} = 0 :$$

$$R_{az} + R_{bz} - 1,5 - 1,5 = 0$$

$$2,25 + 0,75 - 1,5 - 1,5 = 0$$

$$0 = 0$$

Rám s táklem - příklad 4 (4)



Síla v táklu:

$$\sum M_{i,e}^p = 0 :$$

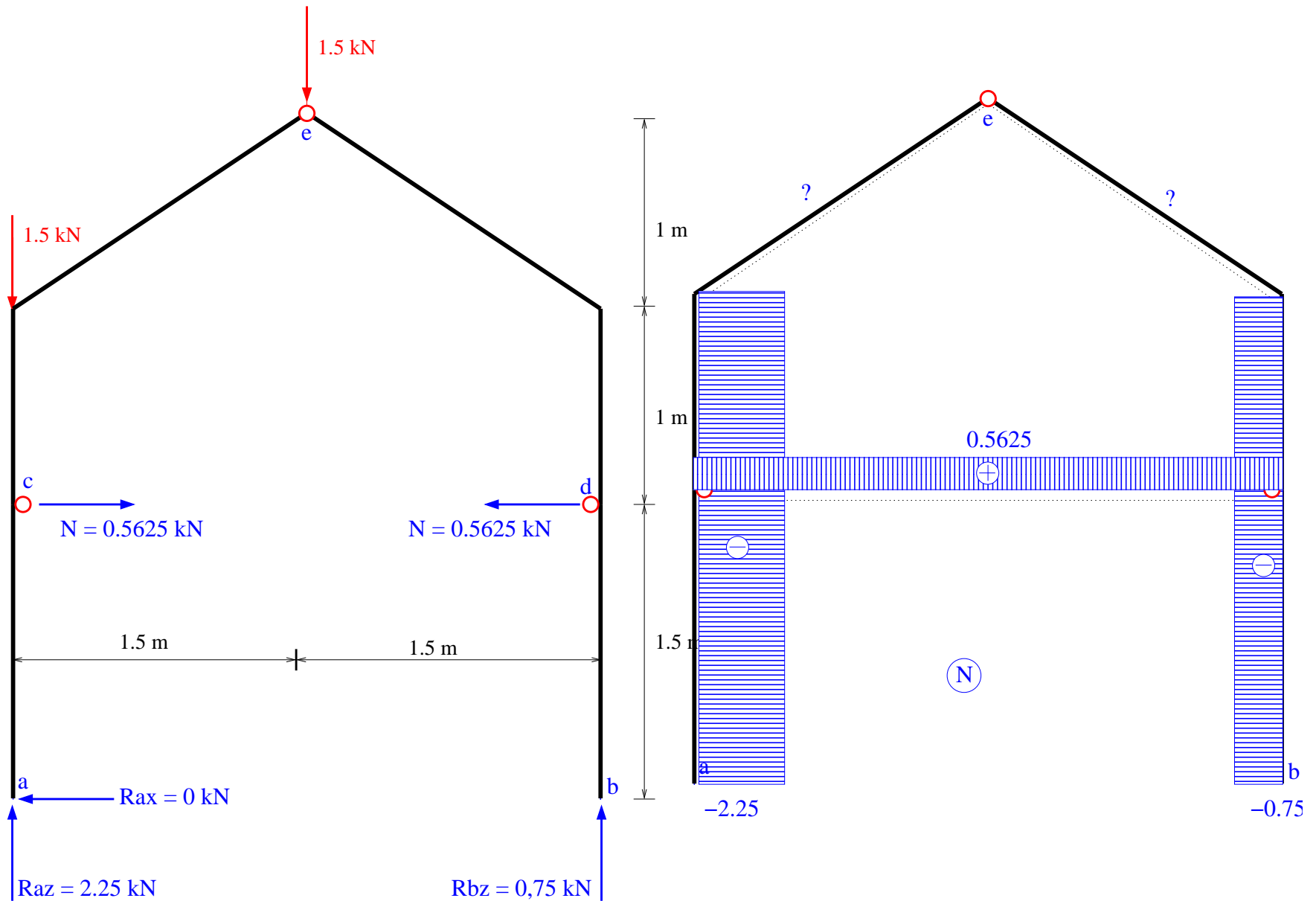
$$R_{bz} \times 1,5 - N \times 2 = 0$$

$$N = \frac{0,75 \times 1,5}{2}$$

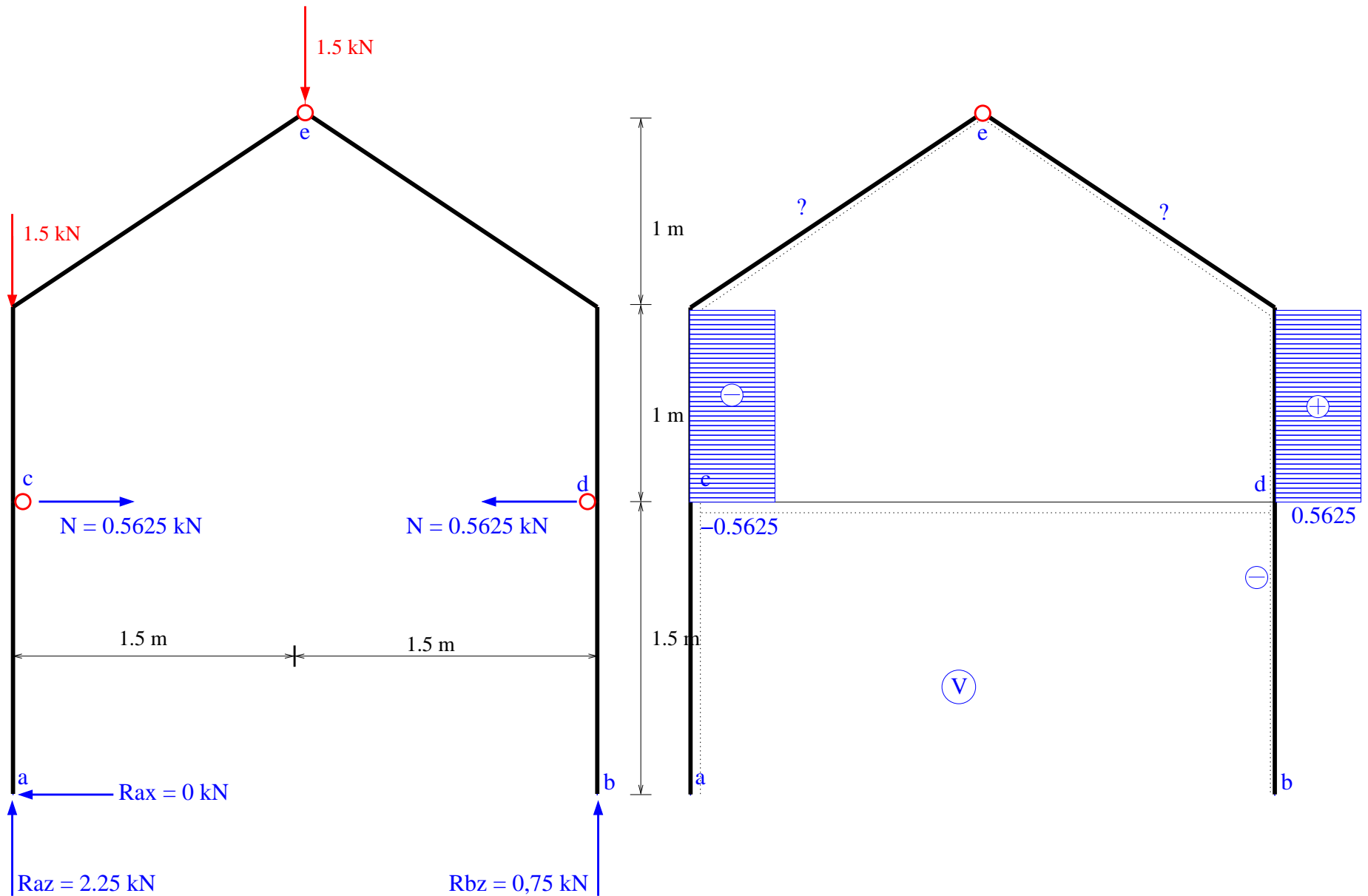
$$N = 0,5625 \text{ kN}(\text{táh})$$

Pro kontrolu lze vypočítat také zleva (zkuste samostatně!).

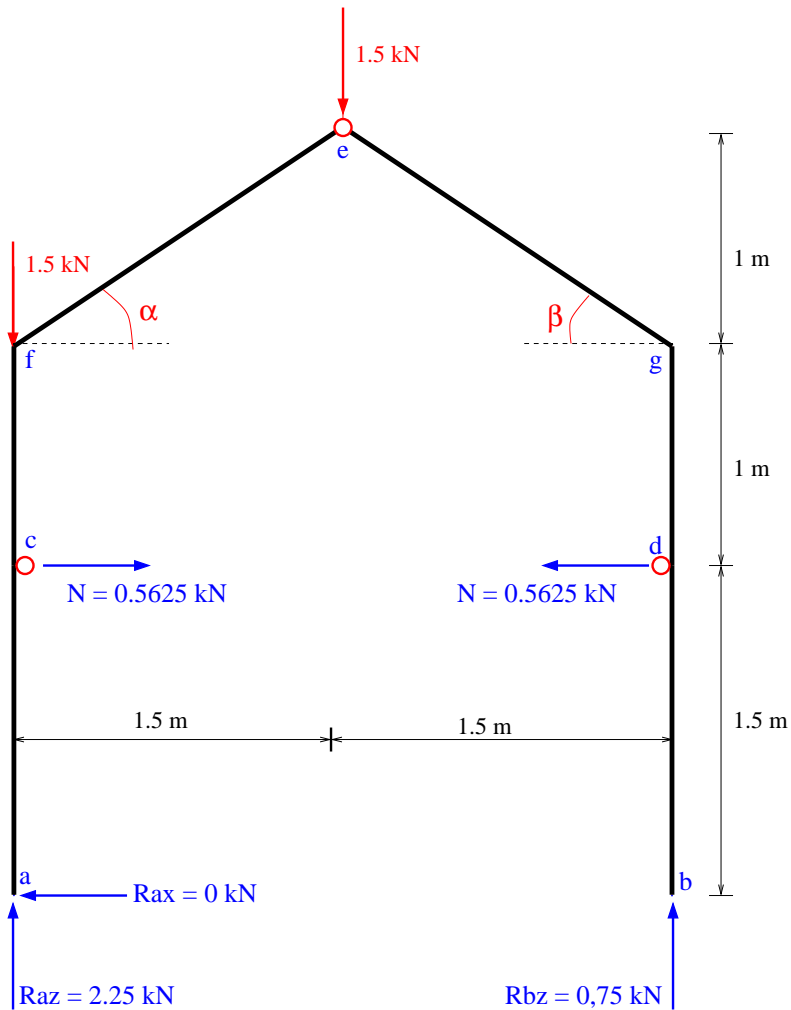
Rám s táhlem - příklad 4 (5)



Rám s táhlem - příklad 4 (6)



Rám s táklem - příklad 4 (7)



Rozklad sil v bodě g :

$$\beta = \arctan\left(\frac{1}{1,5}\right) = 0,588 \text{ rad}$$

$$V_{ge} = N_{bd} \times \cos \beta + V_{bd} \times \sin \beta$$

$$V_{ge} = -0,75 \times \cos \beta + 0.5625 \times \sin \beta$$

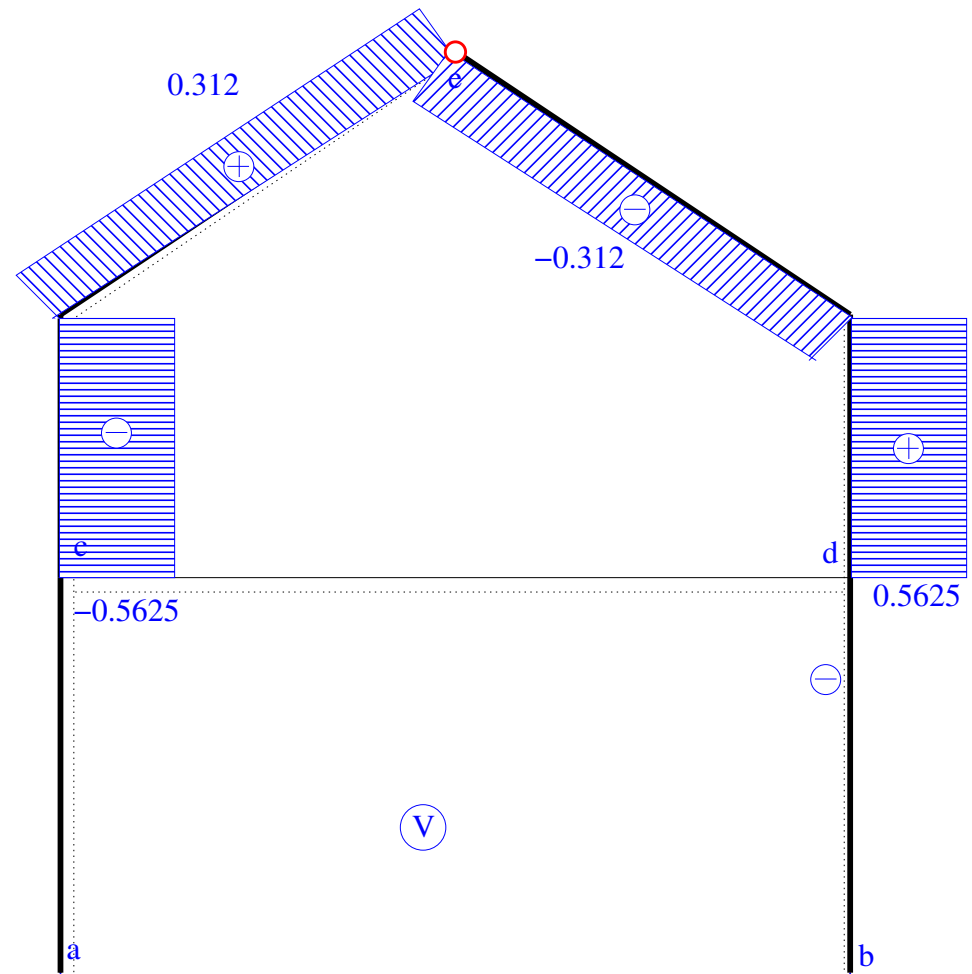
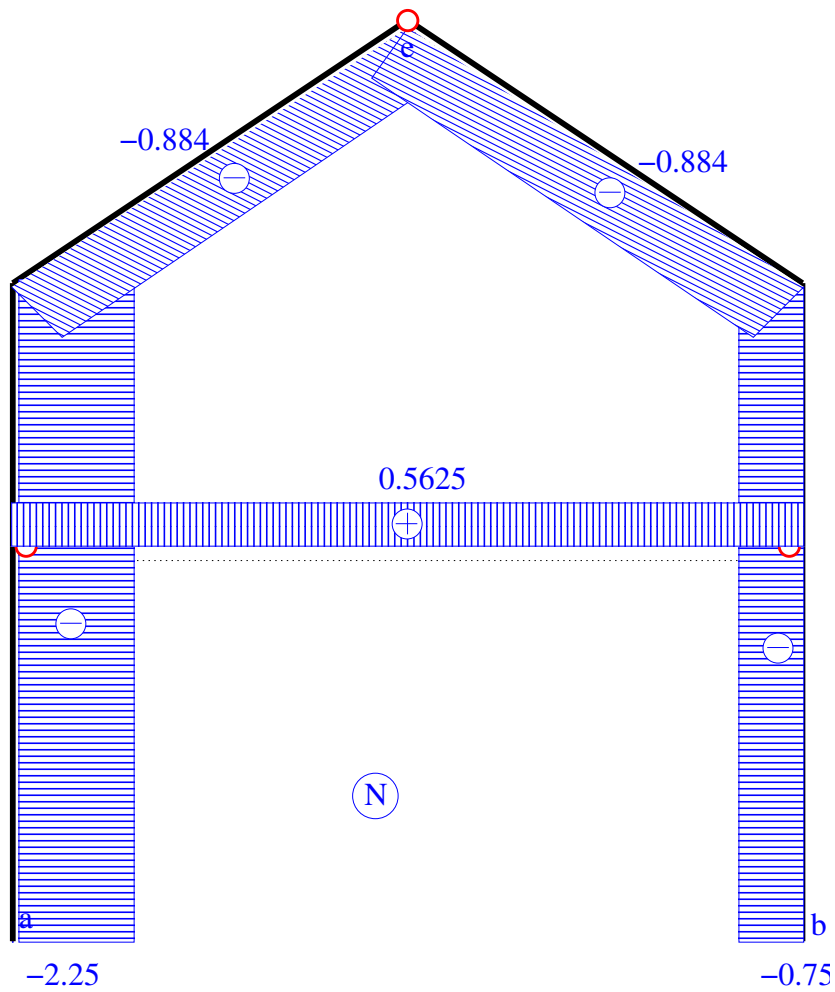
$$V_{ge} = -0,312 \text{ kN}$$

$$N_{ge} = N_{bd} \times \sin \beta - V_{bd} \times \cos \beta$$

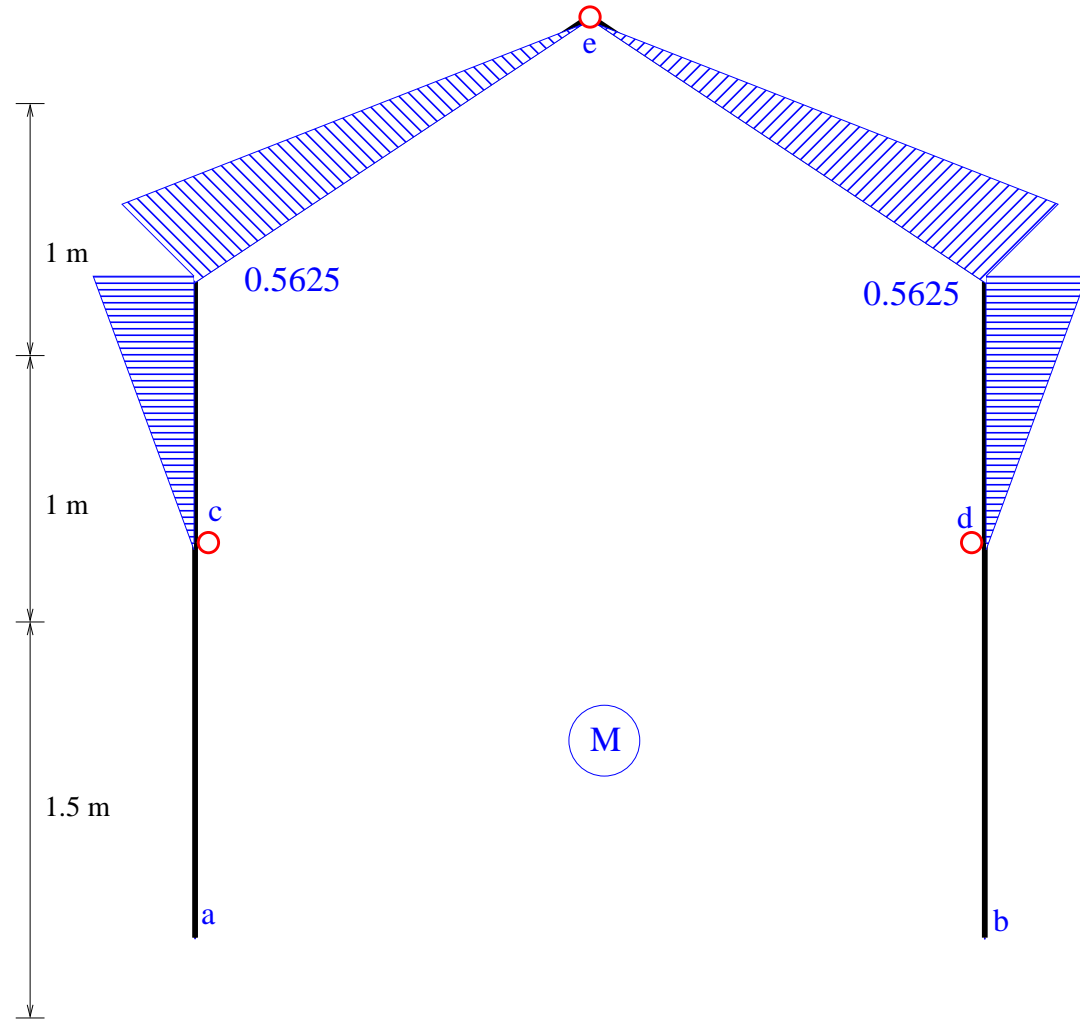
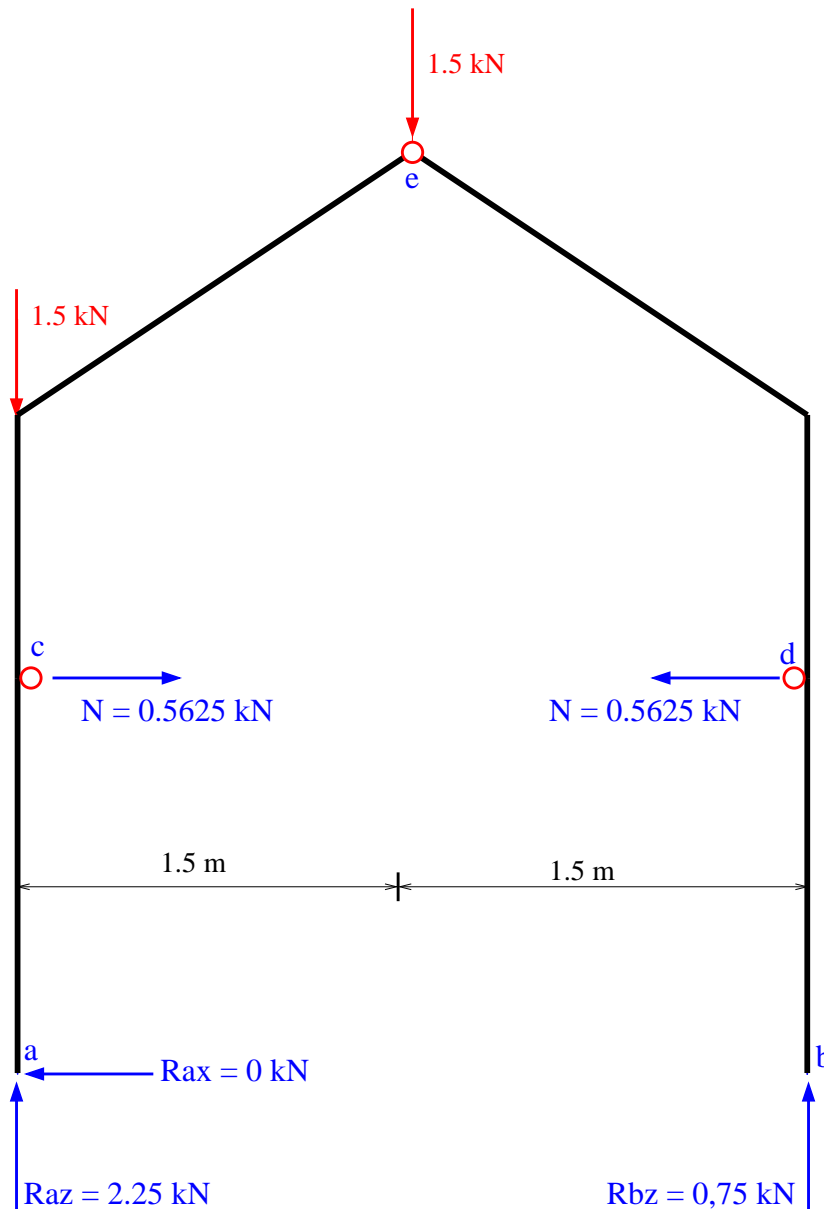
$$N_{ge} = -0,75 \times \sin \beta - 0.5625 \times \cos \beta$$

$$N_{ge} = -0,884 \text{ kN}$$

Rám s táhlem - příklad 4 (8)



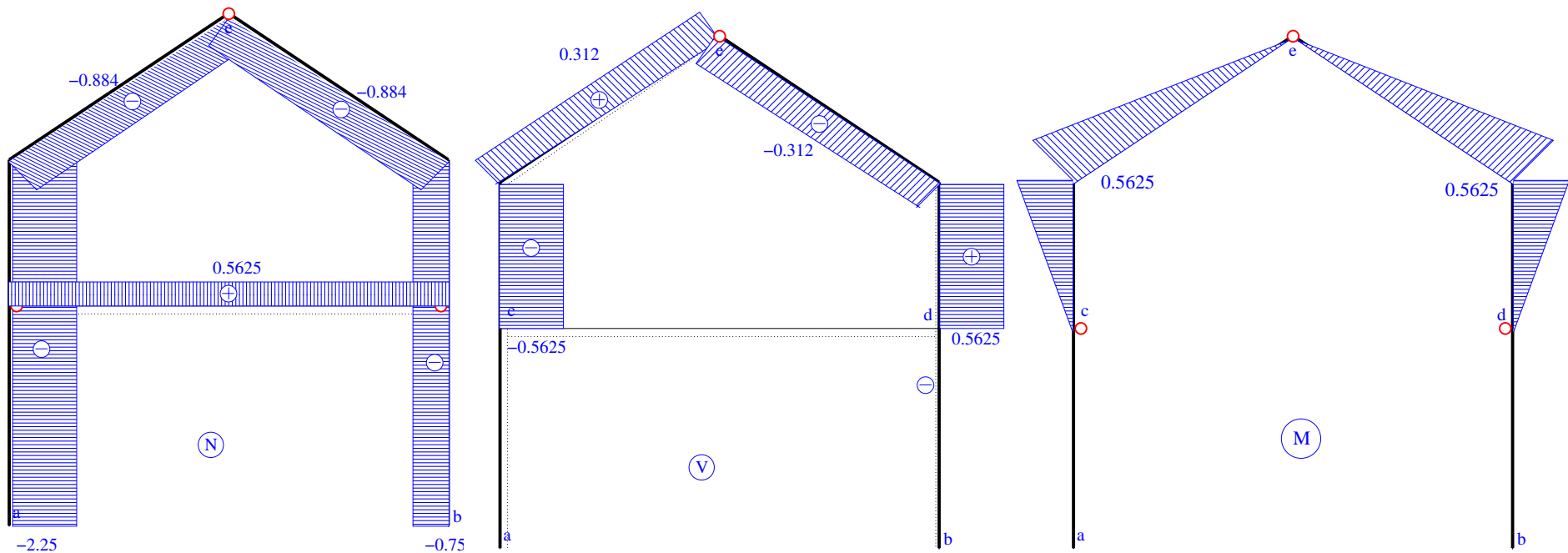
Rám s táklem - příklad 4 (9)



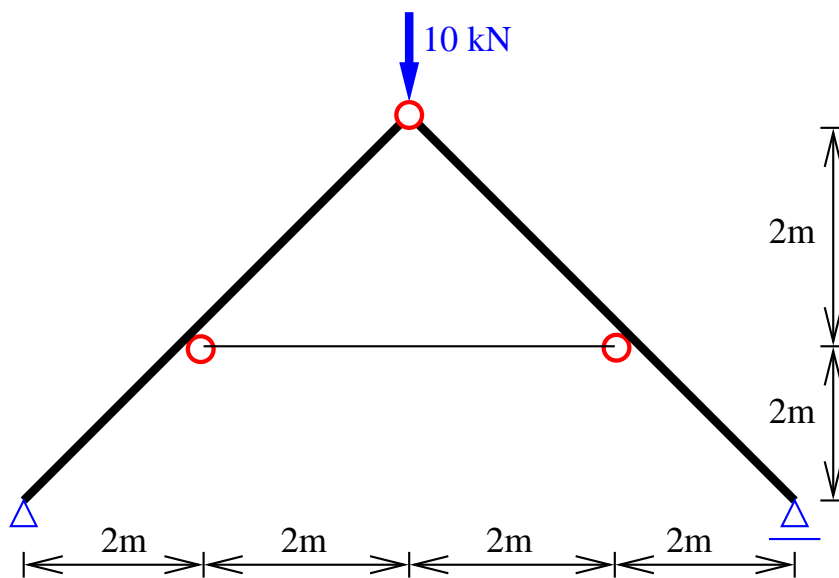
$$M_d = N \times 1 = 0,5625 \times 1 = 0,5625 \text{ kNm}$$

Rám s táklem - příklad 4 (10)

Kompletně dokreslené obrazce N, V a M (v kN , kNm):

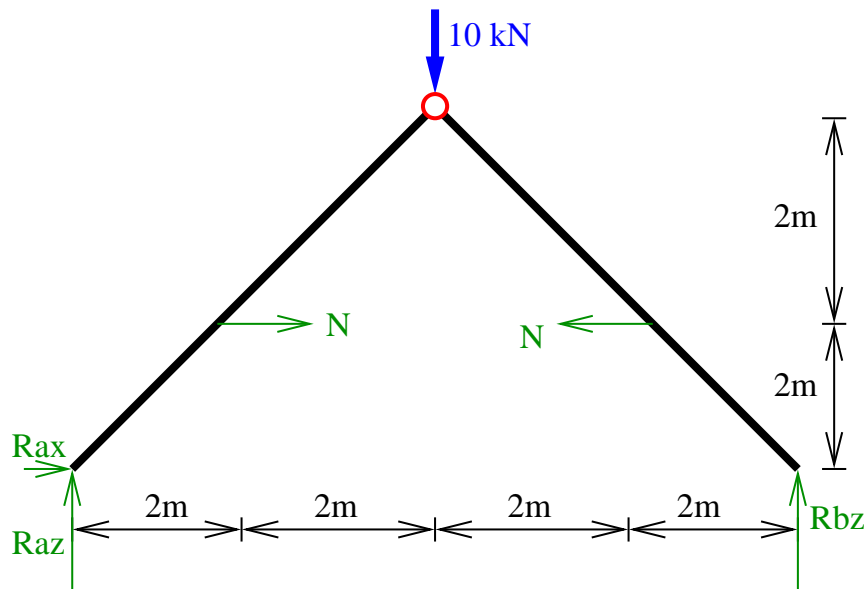


Šikmý rám – příklad 5 (1)



- Stanovte momenty na zadaném šikmém rámu.
- **Ostatní vnitřní síly stanovte jako domácí úkol.**
- Kde se vyskytuje takovýto tvar nosné konstrukce?

Šikmý rám – příklad 5 (2)



Reakce:

$$\sum M_{i,a} = 0 :$$

$$R_{bz} \times 8 - 10 \times 4 = 0$$

$$R_{bz} = \frac{1}{8} \times (10 \times 4)$$

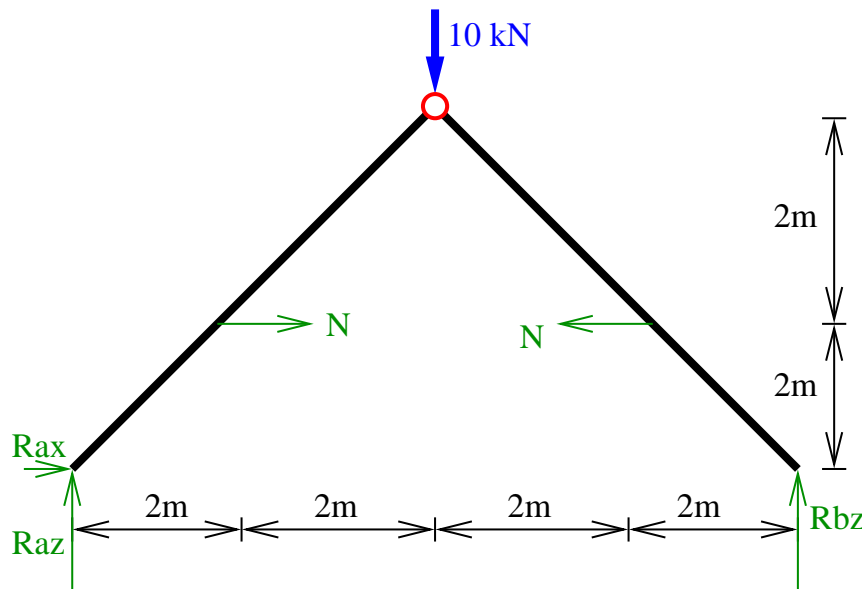
$$R_{bz} = 5 \text{ kN}(\uparrow)$$

$$\sum F_{i,x} = 0 :$$

$$R_{ax} - 0 = 0$$

$$R_{ax} = 0 \text{ kN}$$

Šikmý rám – příklad 5 (3)



$$\sum M_{i,b} = 0 :$$

$$R_{az} \times 8 - 10 \times 4 = 0$$

$$R_{az} = \frac{1}{8} \times (10 \times 4)$$

$$R_{bz} = 5 \text{ kN}(\uparrow)$$

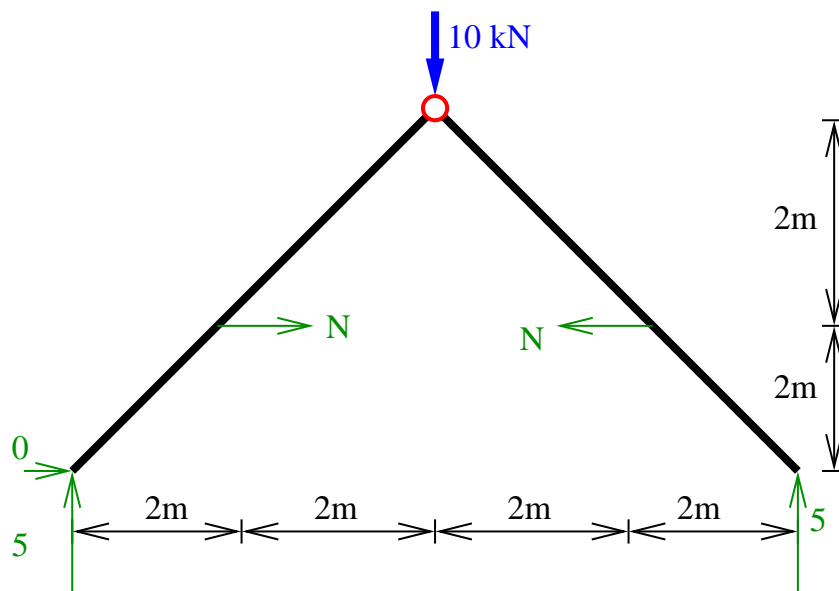
Kontrola:

$$\sum F_{i,z} = 0 :$$

$$5 + 5 - 10 = 0 \text{ kN}$$

$$0 = 0 \text{ kN}$$

Šikmý rám – příklad 5 (4)



$$\sum M_{i,k}^P = 0 :$$

$$R_{bz} \times 4 - N \times 2 = 0$$

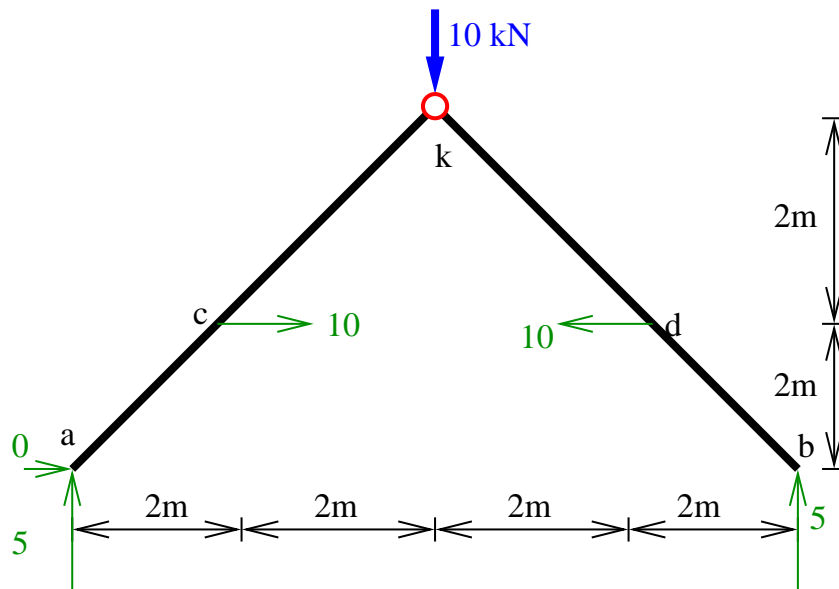
$$5 \times 4 - N \times 2 = 0$$

$$N = \frac{5 \times 4}{2}$$

$$N = 10 \text{ kN (tah)}$$

(1)

Šikmý rám – příklad 5 (5)



$$M_a = 0 \text{ (podpora – kloub)}$$

$$M_k = 0 \text{ (kloub)}$$

$$M_c = R_{az} \times 2$$

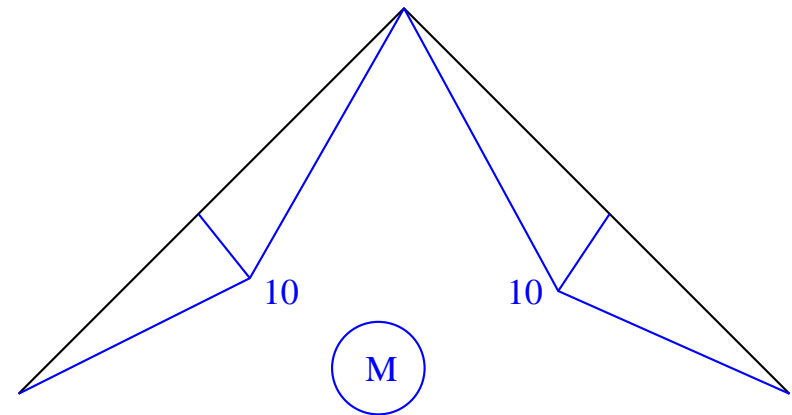
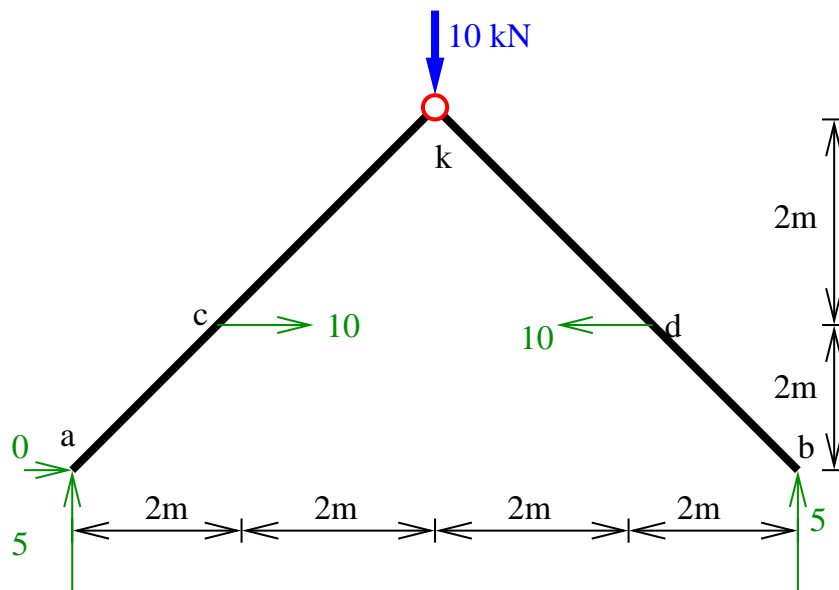
$$M_c = 5 \times 2$$

$$M_c = 10 \text{ kNm}$$

M_c táhne „dolní“ vlákna.

Šikmý rám – příklad 5 (6)

Ohybové momenty (M):



Šikmý rám – příklad 5 (7)

Normálové (N) a posouvající (V) síly :

