

VYSOKÁ ŠKOLA BÁŇSKÁ – TECHNICKÁ UNIVERZITA OSTRAVA  
FAKULTA STAVEBNÍ

# Základy stavební mechaniky

Nosníky a rámy s klouby

Jiří Brožovský

Kancelář: LP – H 406/3

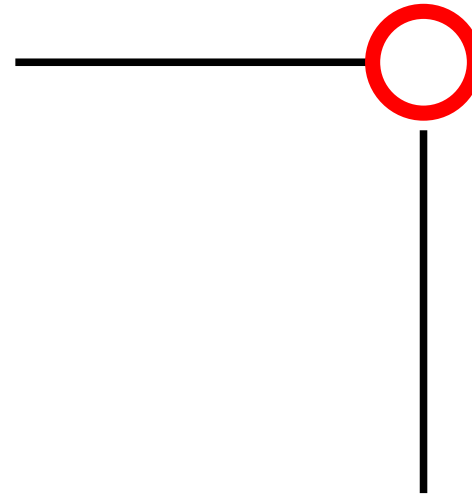
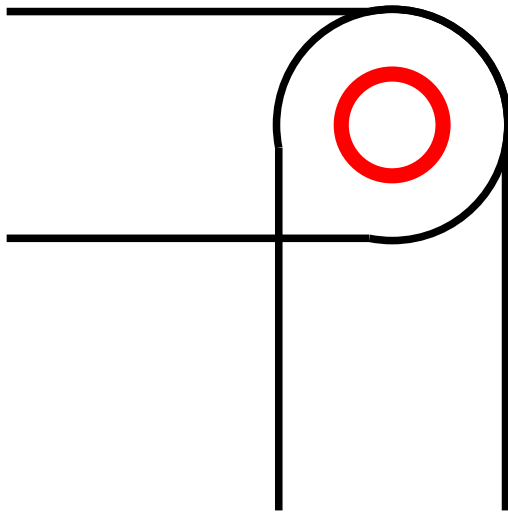
Telefon: 597 321 321

E-mail: [jiri.brozovsky@vsb.cz](mailto:jiri.brozovsky@vsb.cz)

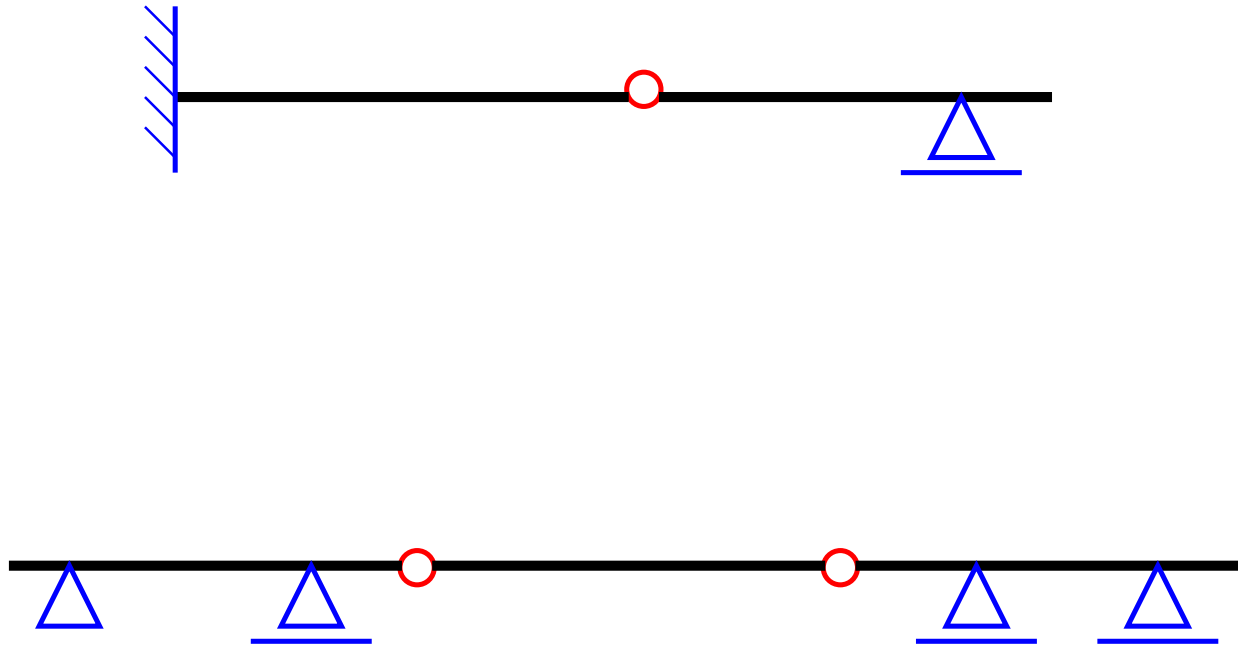
WWW: <http://fast10.vsb.cz/brozovsky>

# Kloub

Kloub: spojení dvou nebo více prutů umožňující jejich vzájemné pootáčení.



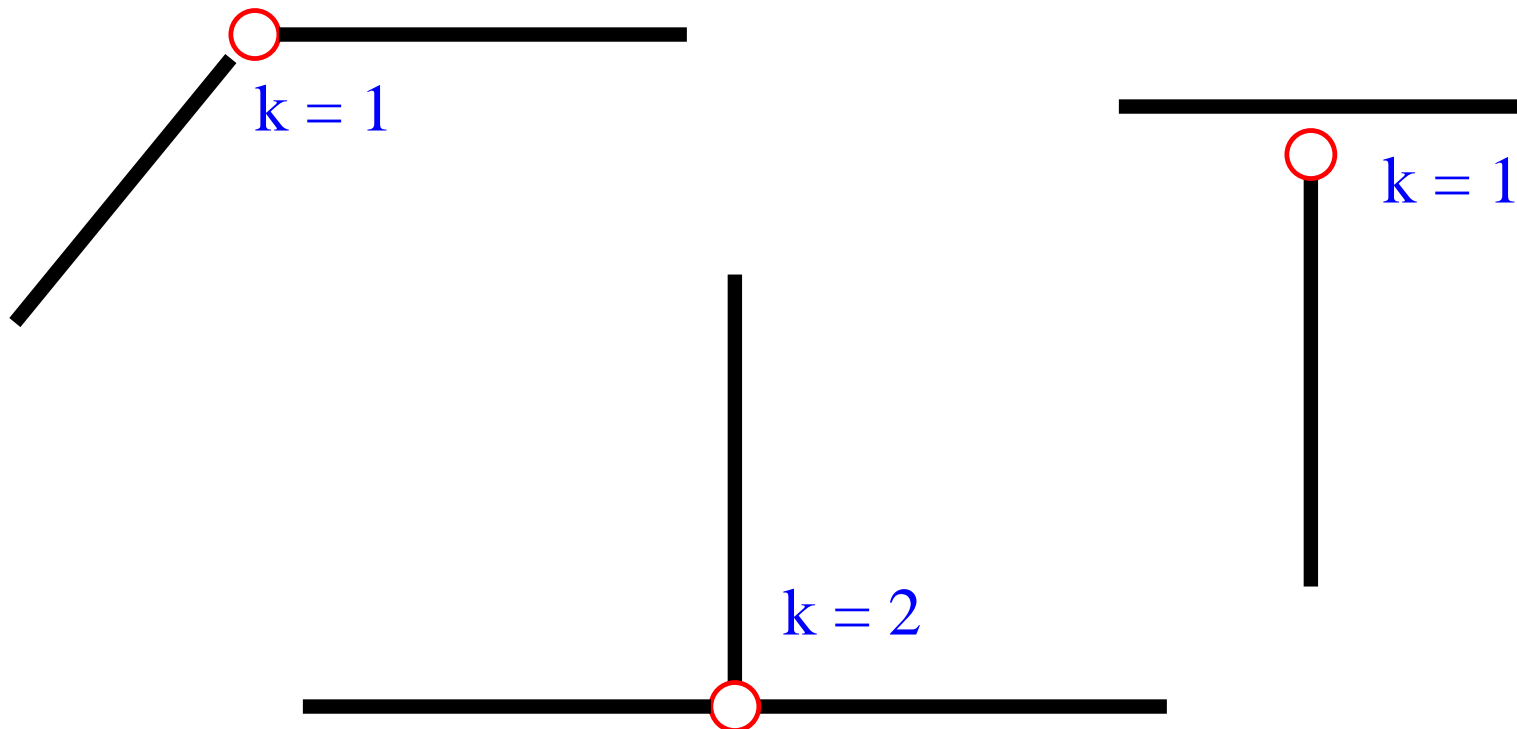
# Prutové konstrukce s kouby: Gerberův nosník



- **staticky určitý** přímý nosník s vloženými klouby

# Násobnost kloubů

**Násobnost:** počet stupňů volnosti přidaných konstrukci kloubem.



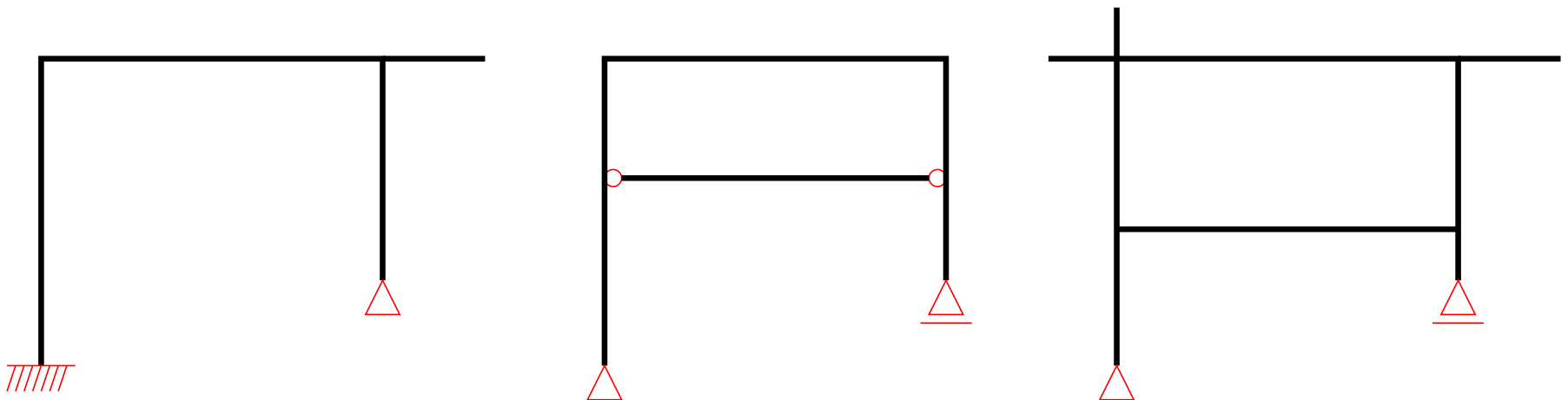
# Stupeň statické neurčitosti

$$S_n = v - 3 + 3 \times u - k$$

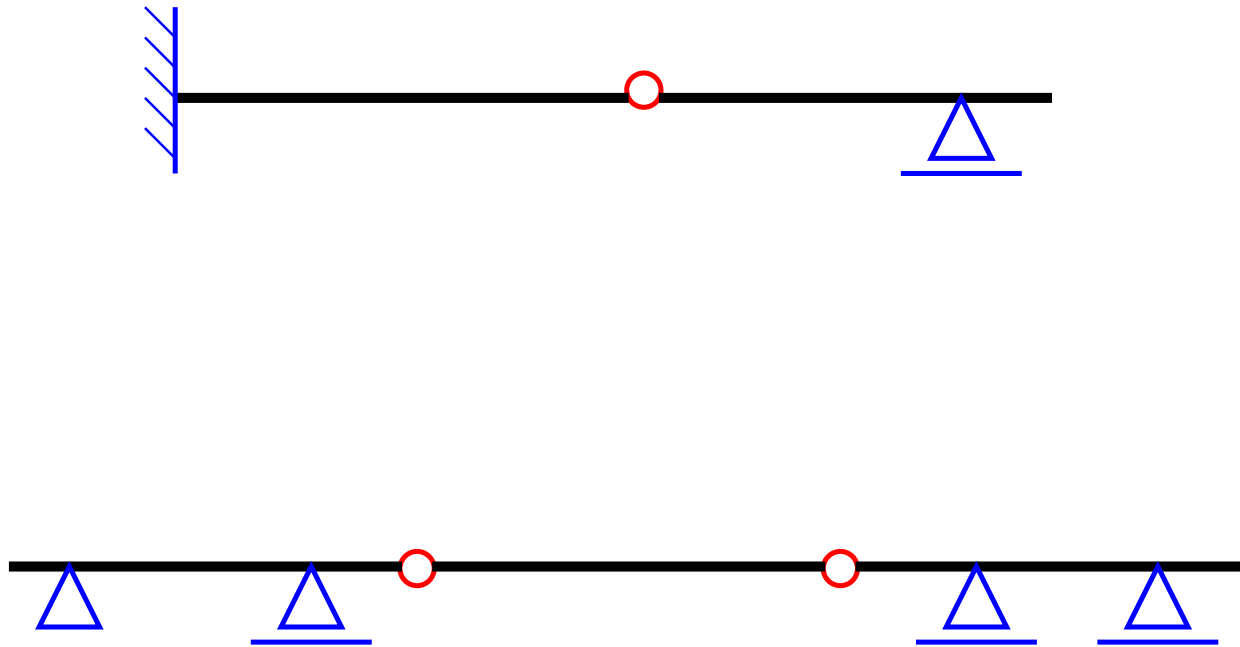
$v$  ... počet stupňů volnosti odebraný vazbami

$u$  ... počet uzavřených částí

$k$  ... počet stupňů volnosti přidáných klouby



# Gerberův nosník (1)



- **staticky určitý** *obvykle přímý* nosník s vloženými klouby

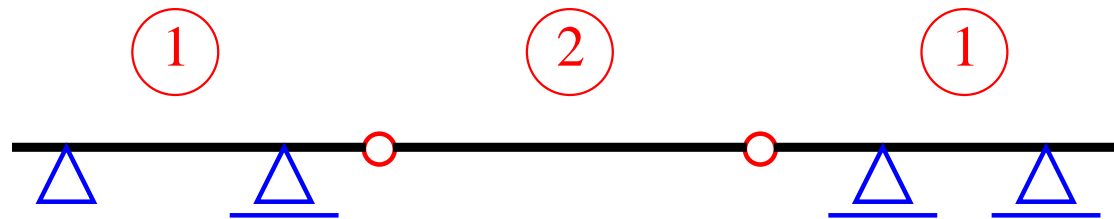
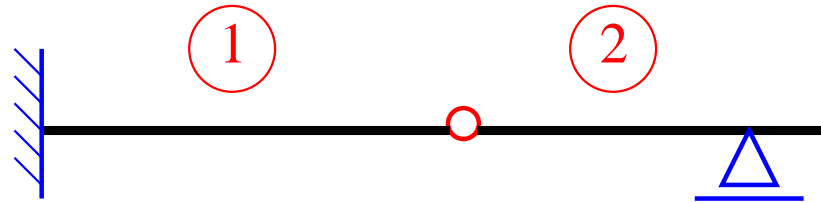
# Gerberův nosník (2)

Stupeň statické neurčitosti:

$$S_n = v - k - 3$$

- $s$  ... stupeň statické neurčitosti
- $v$  ... počet stupňů volnosti odebraný vazbami
- $k$  ... počet stupňů volnosti přidány klouby
- 3 ... počet podmínek rovnováhy v rovině

# Gerberův nosník (3)



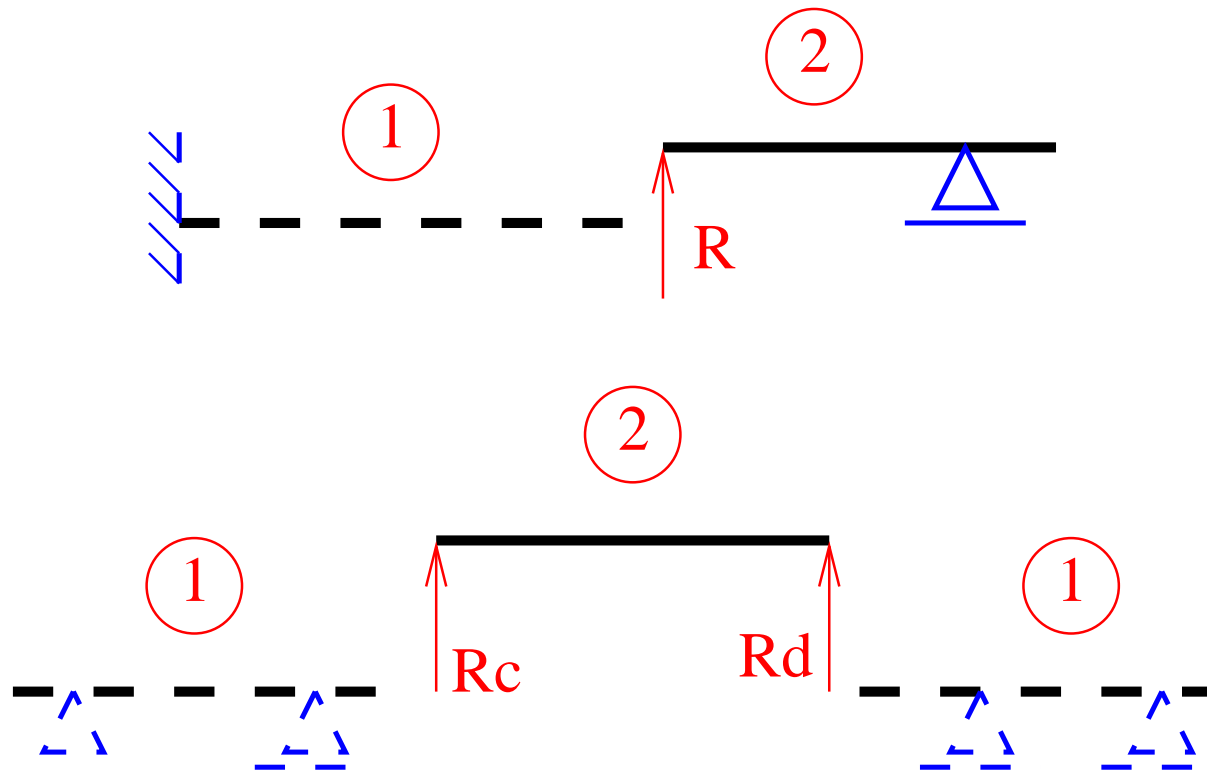
- 1... **nesoucí** (podporující) části (nesou i samostatně)
- 2... **nesené** (podporované) části



# Gerberův nosník (4)

## Postup výpočtu reakcí - krok 1

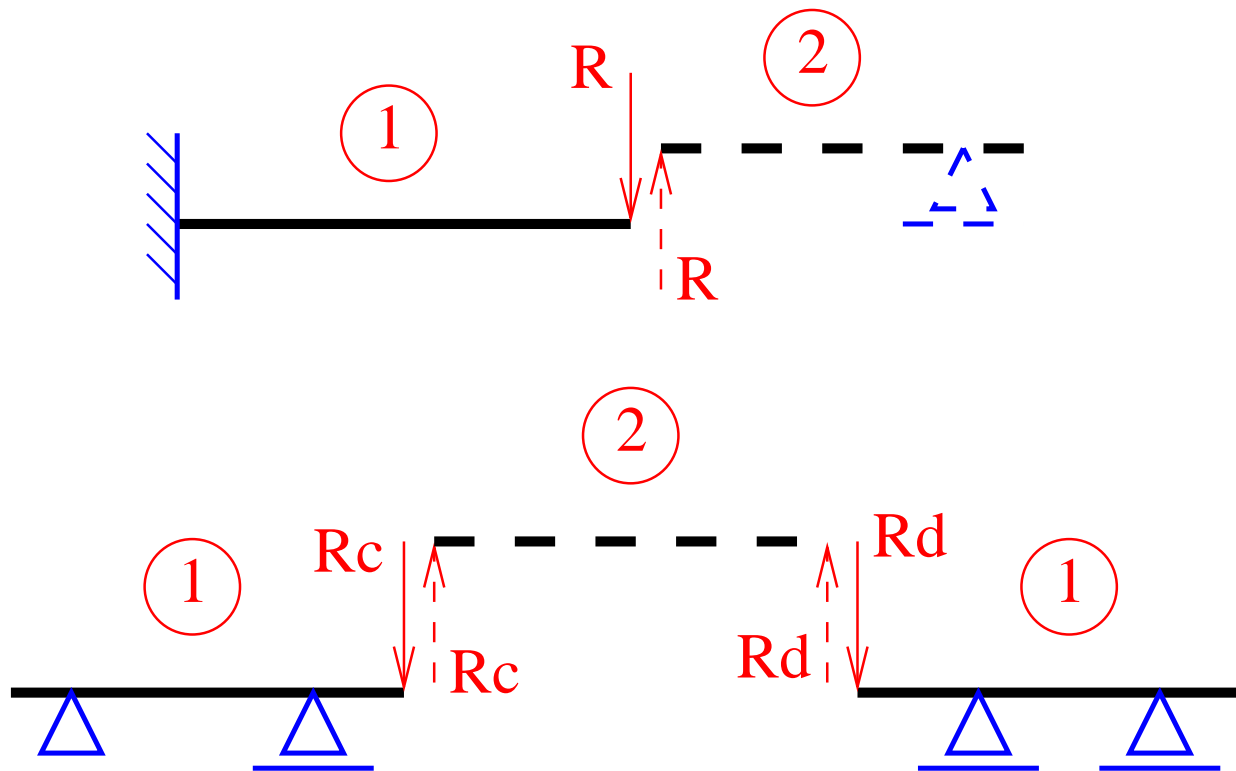
Určení reakcí na oddělených **nesených** částech:



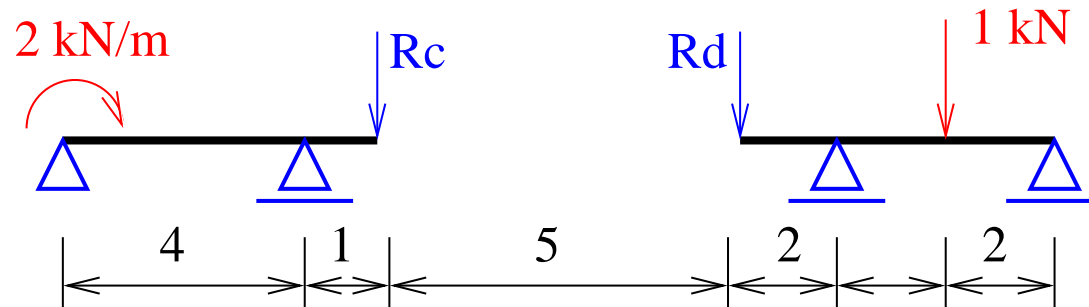
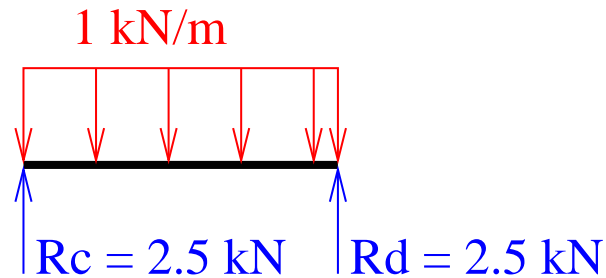
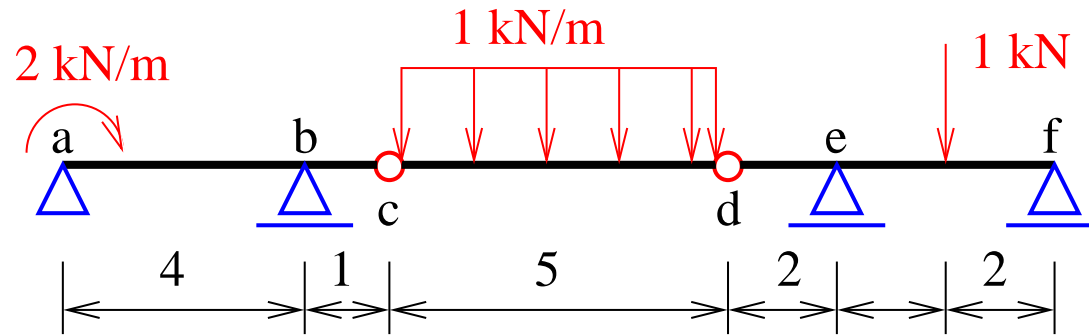
# Gerberův nosník (5)

## Postup výpočtu reakcí - krok 2

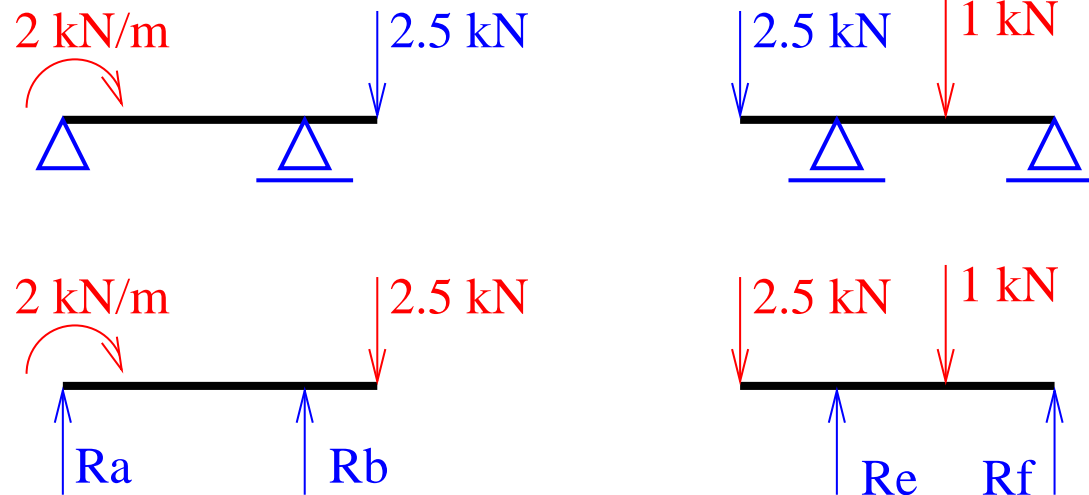
Zatížení **nesoucích** částí vypočtenými reakcemi (plus původní zatížení) a výpočet reakcí **nesoucích** částí:



# Gerberův nosník – příklad (1)



# Gerberův nosník – příklad (2)

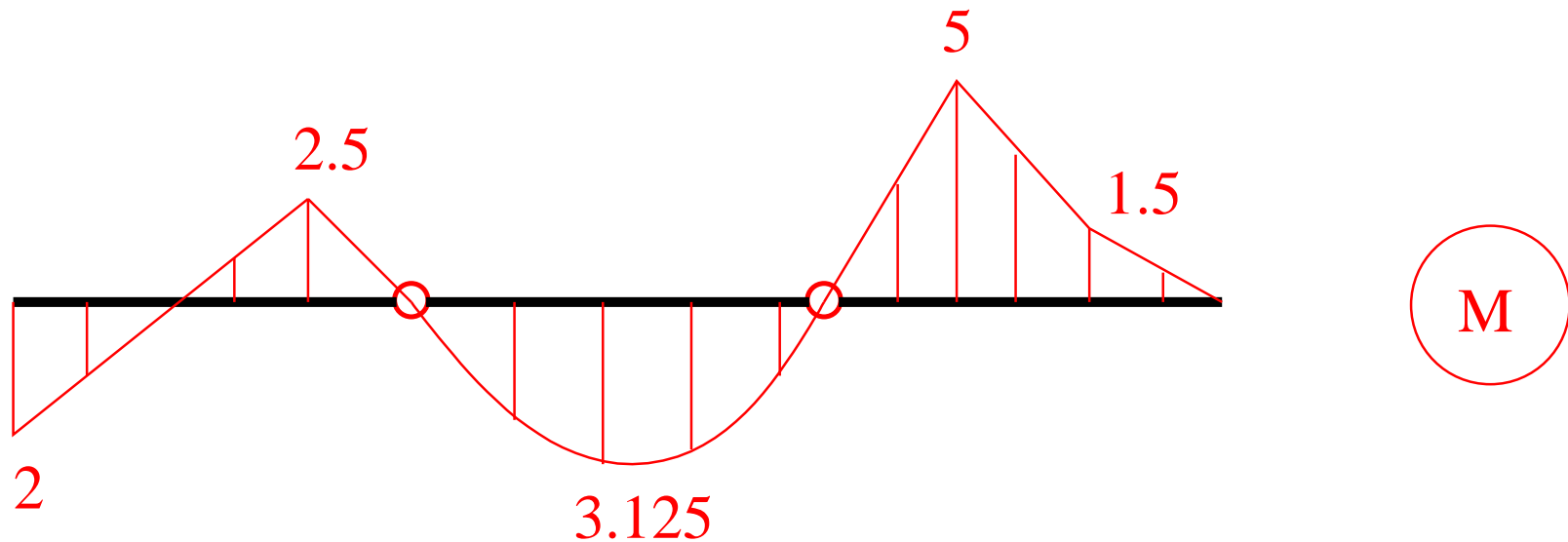
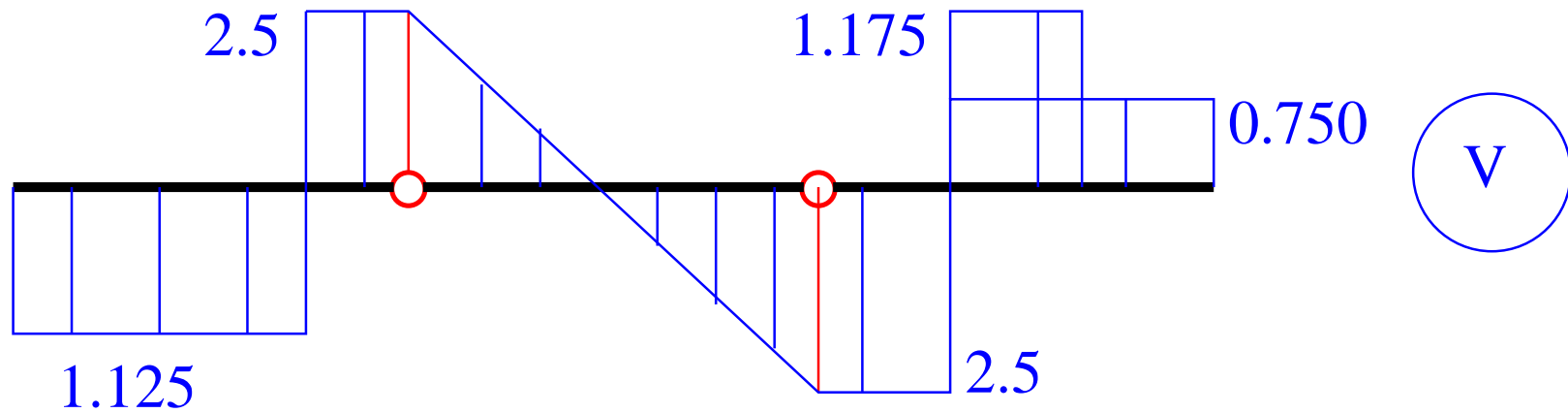


$$\sum M_a = 0 : -2 + 4 \times R_b - 5 \times 2.5 = 0 \Rightarrow R_b = 3.625 \text{ kN}(\uparrow)$$

$$\sum M_b = 0 : -2 - 4 \times R_a - 1 \times 2.5 = 0 \Rightarrow R_a = -1.125 \text{ kN}(\downarrow)$$

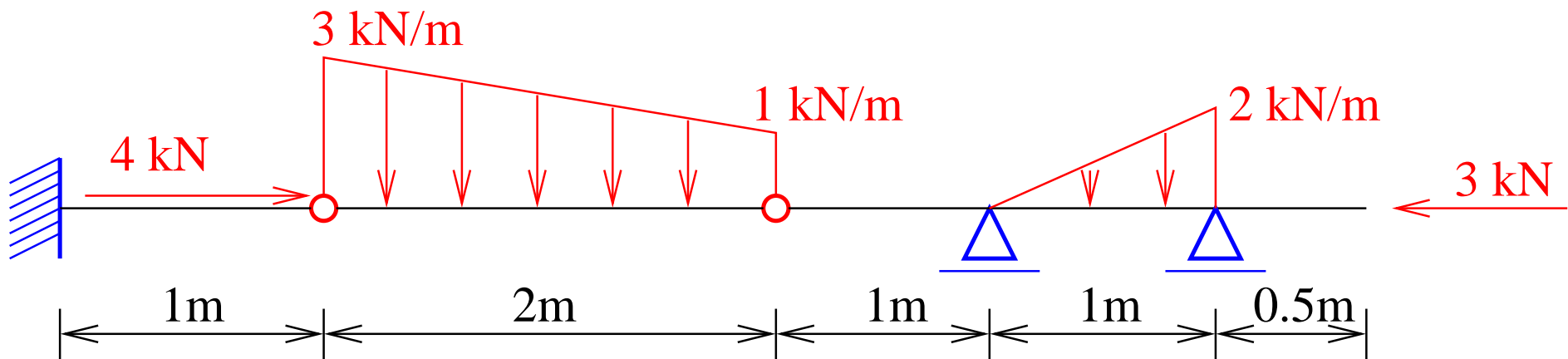
$$R_e = 4.250 \text{ kN}(\uparrow), \quad R_f = -0.750 \text{ kN}(\downarrow)$$

# Gerberův nosník – příklad (3)



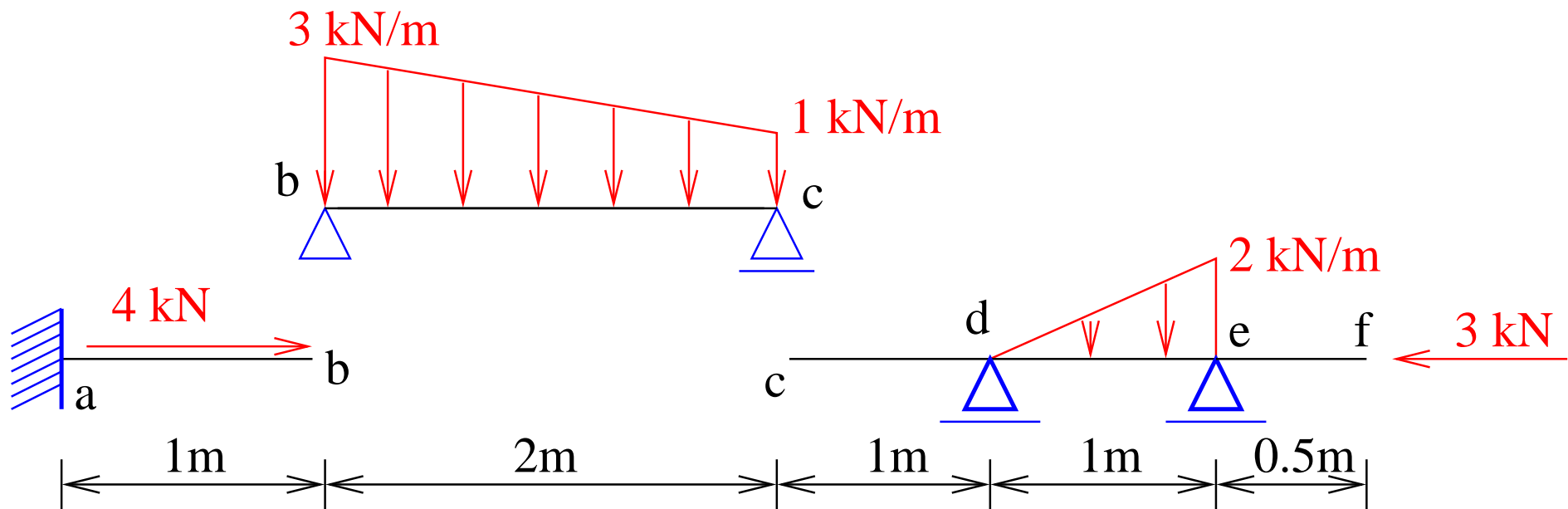
# Příklad 2 (1)

Stanovte vnitřní síly na zadaném Gerberově nosníku.

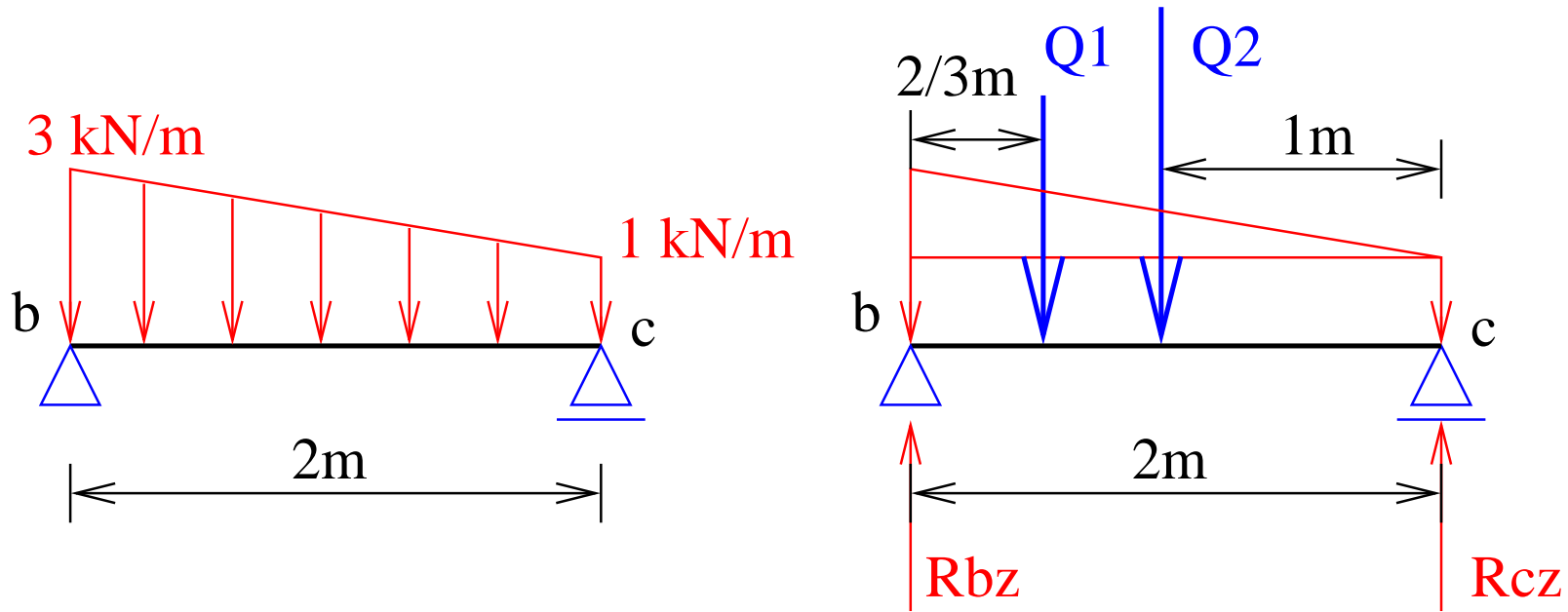


# Příklad 2 (2)

Nesená část (nahore):



# Příklad 2 (3)



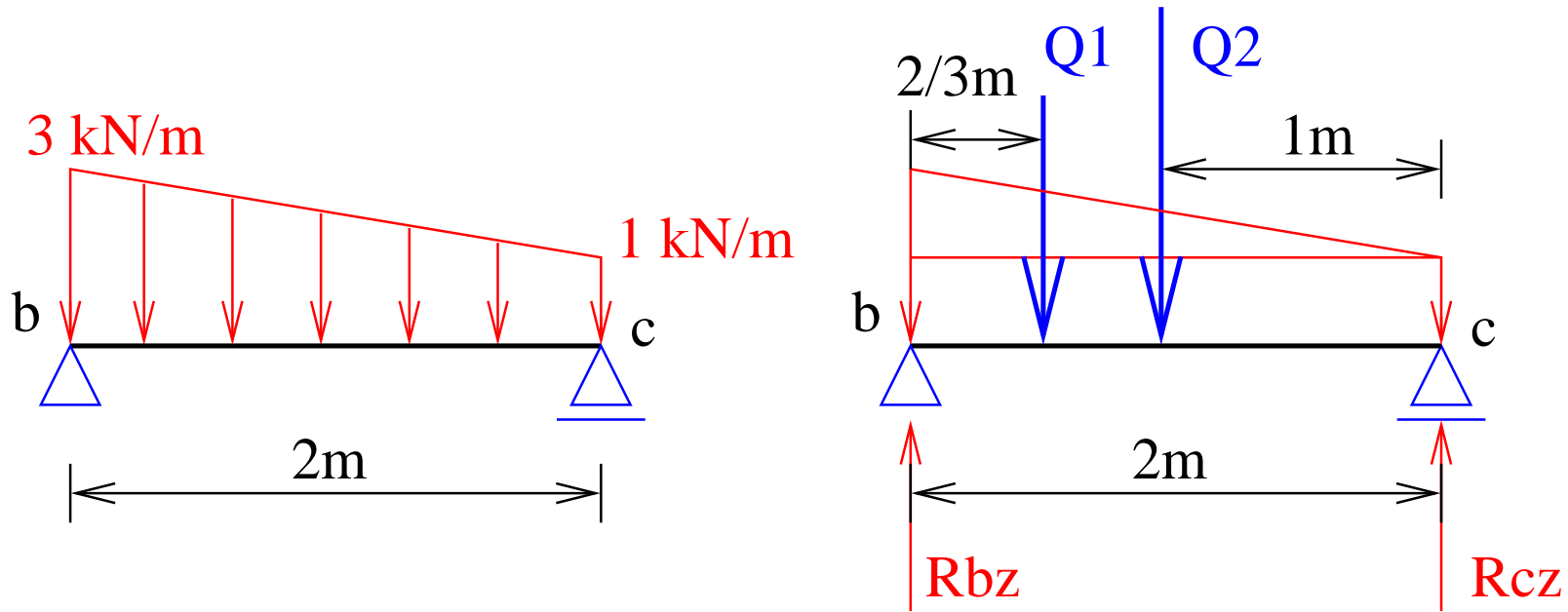
$$Q_1 = \frac{1}{2} \times (3 - 1) \times 2 = 2 \text{ kN}, \quad Q_2 = 1 \times 2 = 2 \text{ kN}$$

$$\sum M_{i,b} = \frac{2}{3} \times Q_1 + 1 \times Q_2 - 2 \times R_{cz} = 0$$

$$\frac{2}{3} \times 2 + 1 \times 2 - 2 \times R_{cz} = 0 \Rightarrow R_{cz} = 1.\overline{66} \text{ kN}(\uparrow)$$



# Příklad 2 (4)

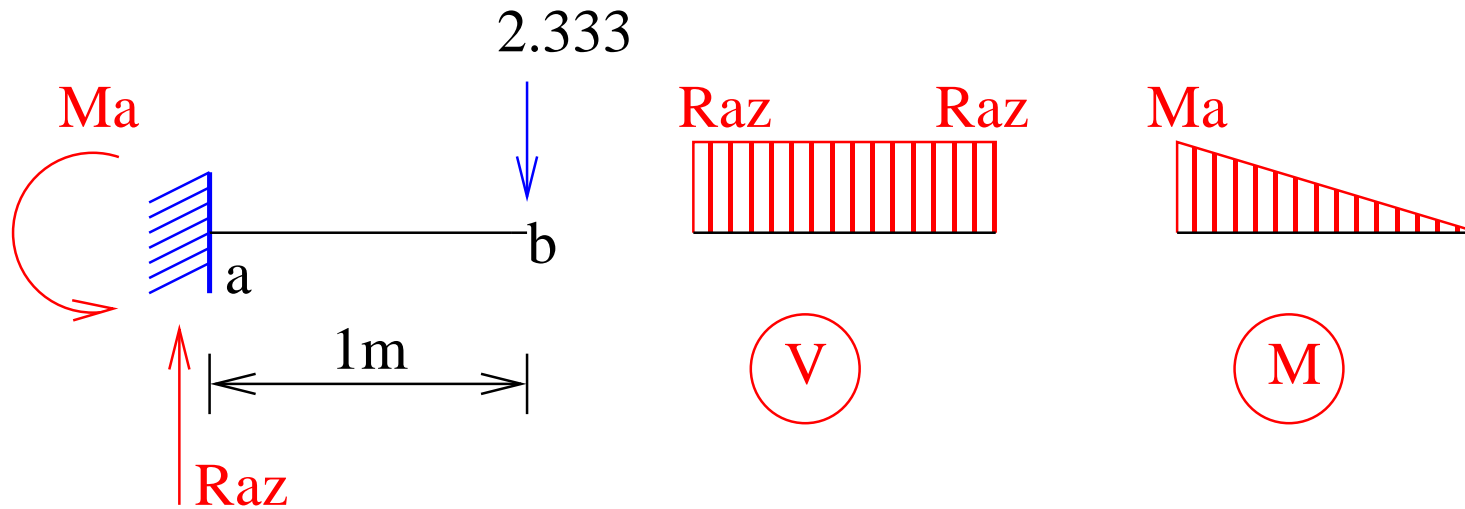


$$Q_1 = \frac{1}{2} \times (3 - 1) \times 2 = 2 \text{ kN}, \quad Q_2 = 1 \times 2 = 2 \text{ kN}$$

$$\sum M_{i,a} = -\frac{4}{3} \times Q_1 - 1 \times Q_2 + 2 \times R_{bz} = 0$$

$$-\frac{4}{3} \times 2 - 1 \times 2 + 2 \times R_{bz} = 0 \Rightarrow R_{bz} = 2.\overline{33} \text{ kN}(\uparrow)$$

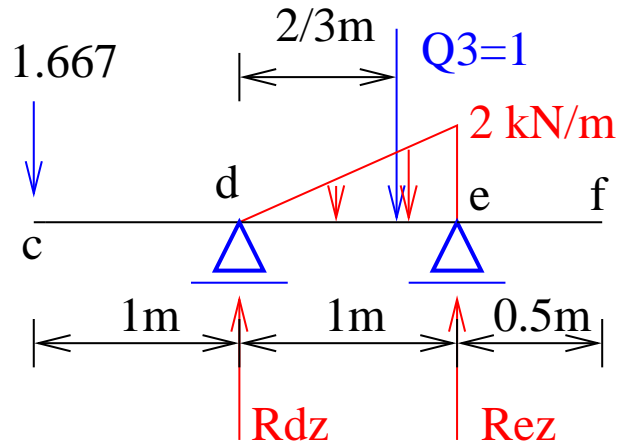
# Příklad 2 (5)



$$\sum M_{i,a} = 0 : M_a - 2.333 \times 1 = 0 \Rightarrow M_a = 2.333 \text{ kNm}$$

$$\sum F_{i,z} = 0 : R_{az} - 2.333 = 0 \Rightarrow R_{az} = 2.333 \text{ kN}(\uparrow)$$

# Příklad 2 (6)



$$\sum M_{i,d} = 0 : -Q_3 \times \frac{2}{3} + R_{ez} \times 1 + 1.667 \times 1 = 0$$

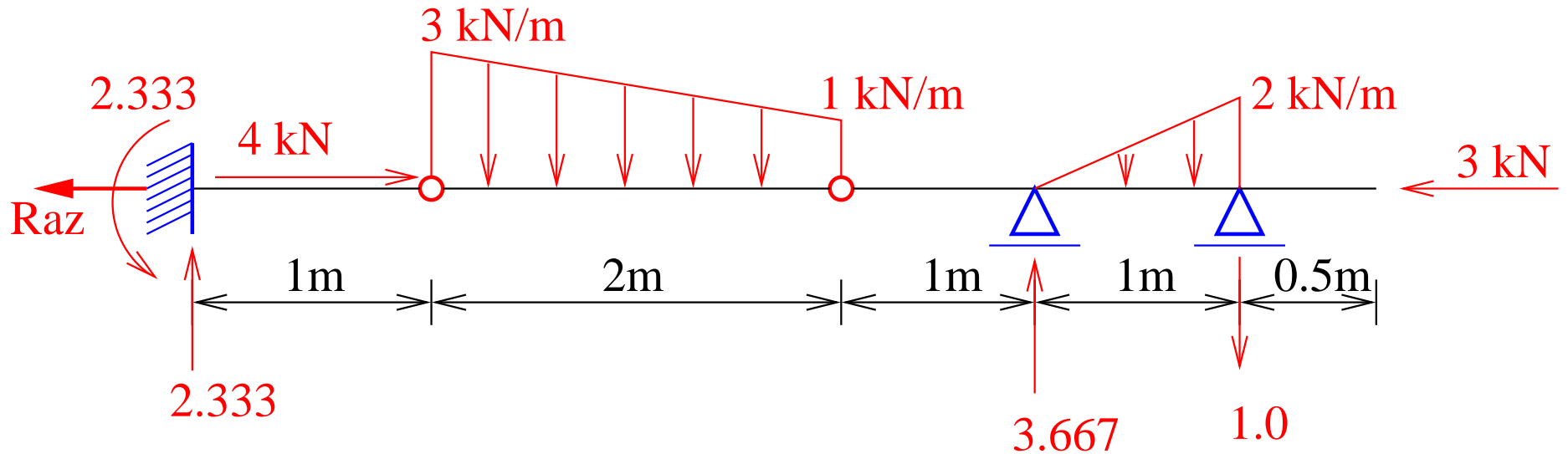
$$-1 \times \frac{2}{3} + R_{ez} \times 1 + 1.667 \times 1 = 0 \Rightarrow R_{ez} = -1.0 \text{ kN}$$

$$R_{e,z} = 1.0 \text{ kN} (\downarrow)$$

$$\sum M_{i,e} = 0 : Q_3 \times \frac{1}{3} - R_{dz} \times 1 + 1.667 \times 2 = 0$$

$$1 \times \frac{1}{3} - R_{dz} \times 1 + 1.667 \times 2 = 0 \Rightarrow R_{dz} = 3.667 \text{ kN} (\uparrow)$$

# Příklad 2 (7)



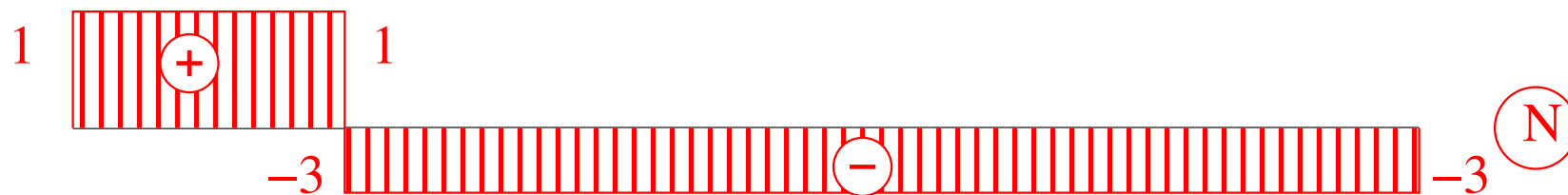
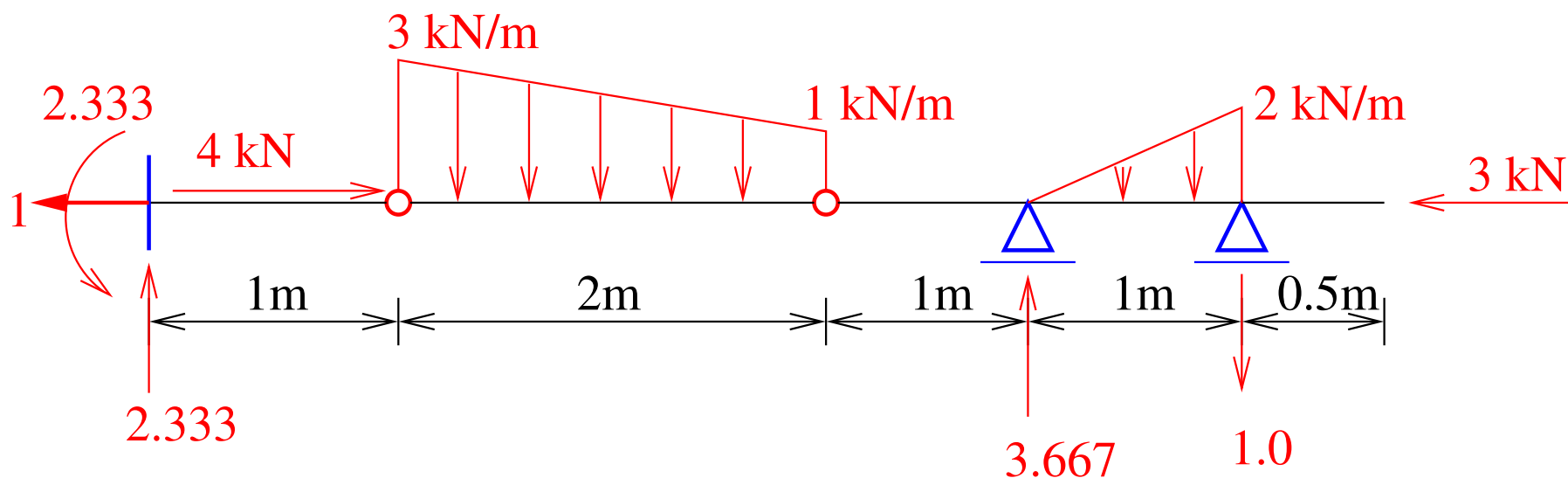
?

(N)

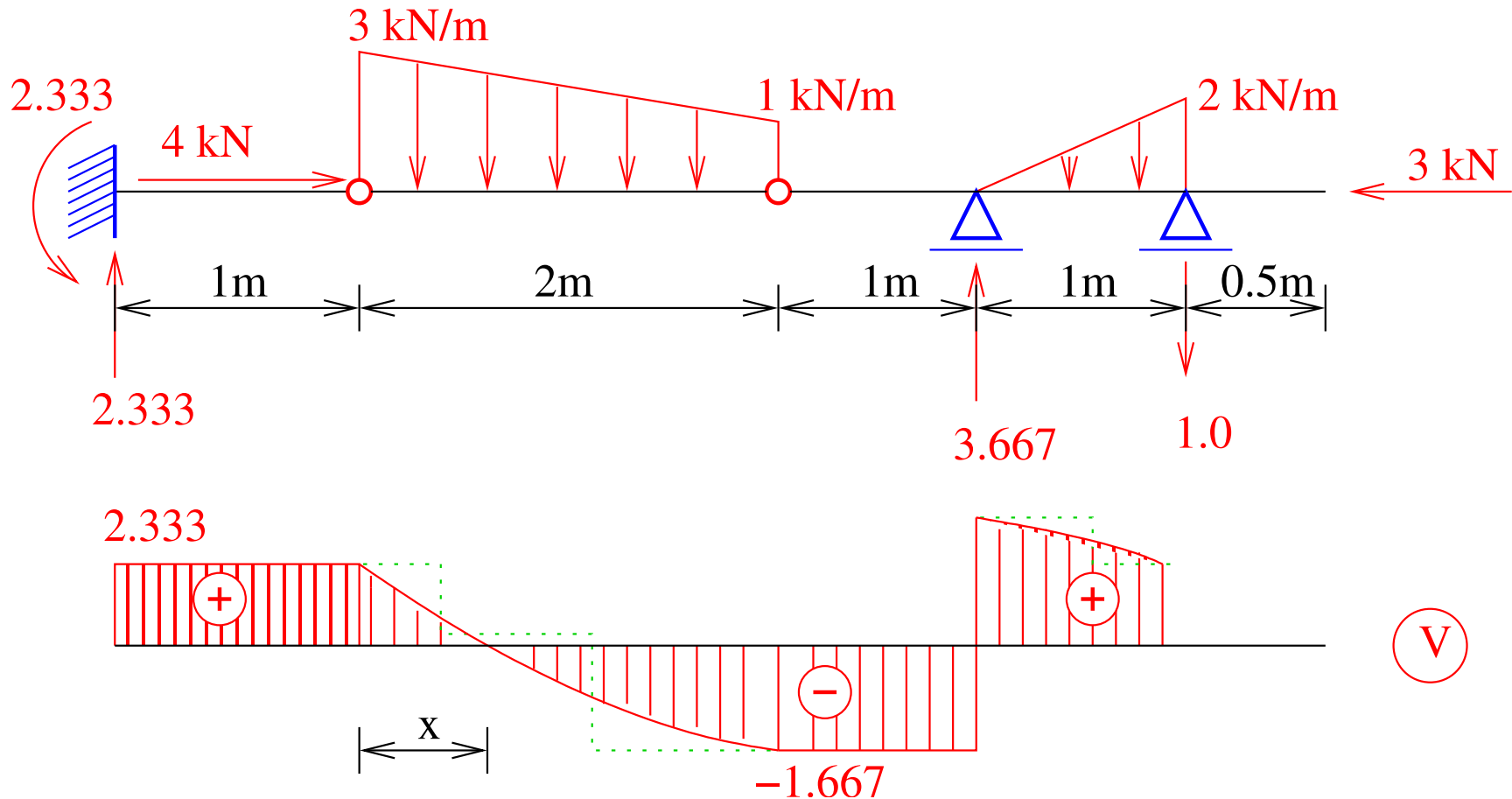
$$\sum F_{i,x} = 0 : \quad (1)$$

$$R_{ax} - 4 + 3 = 0 \Rightarrow R_{a,x} = 1 \text{ kN}(\leftarrow) \quad (2)$$

# Příklad 2 (8)

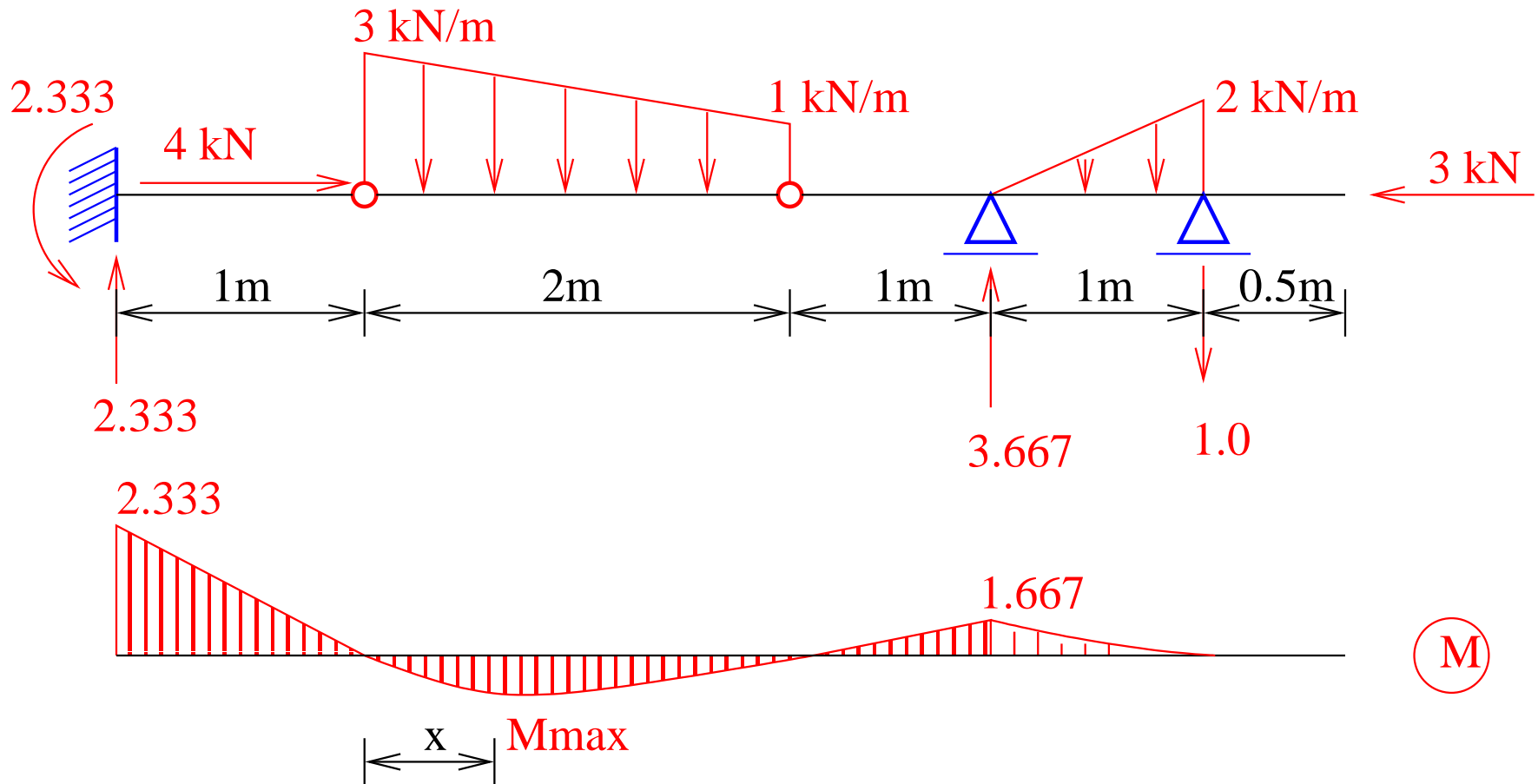


# Příklad 2 (9)



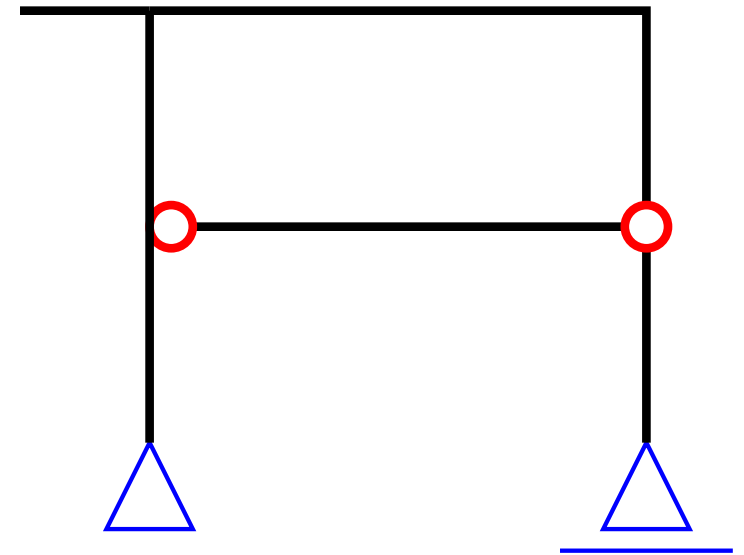
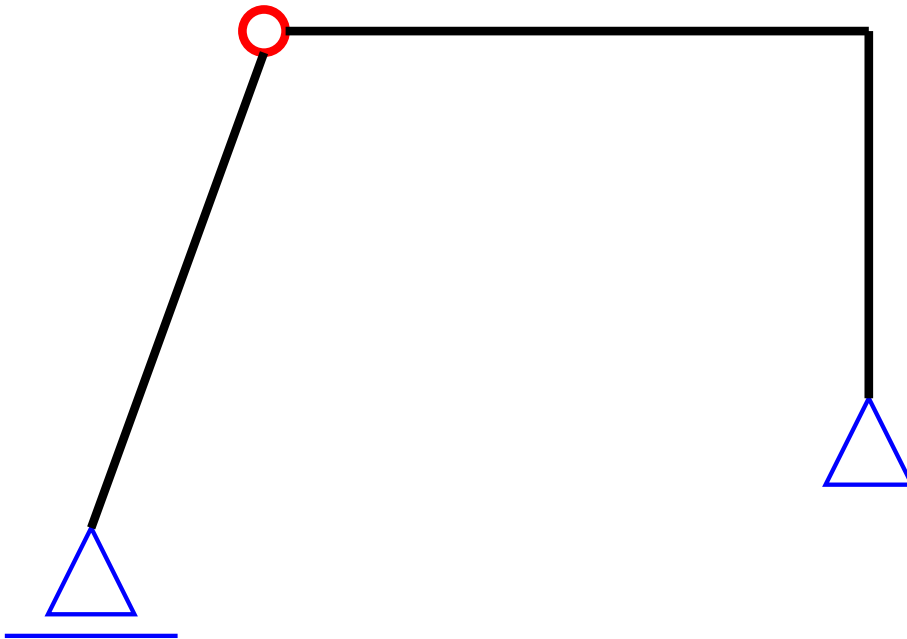
$$2.333 - x \times 761 - \frac{1}{2} 2 \times 2 - \frac{1}{2} (2 - x) \times \frac{(2 - x)}{2} \times 2 = 0 \Rightarrow x = 0.92 \text{ m}$$

# Příklad 2 (10)



$$M_{max} = 1.007 \text{ kNm}$$

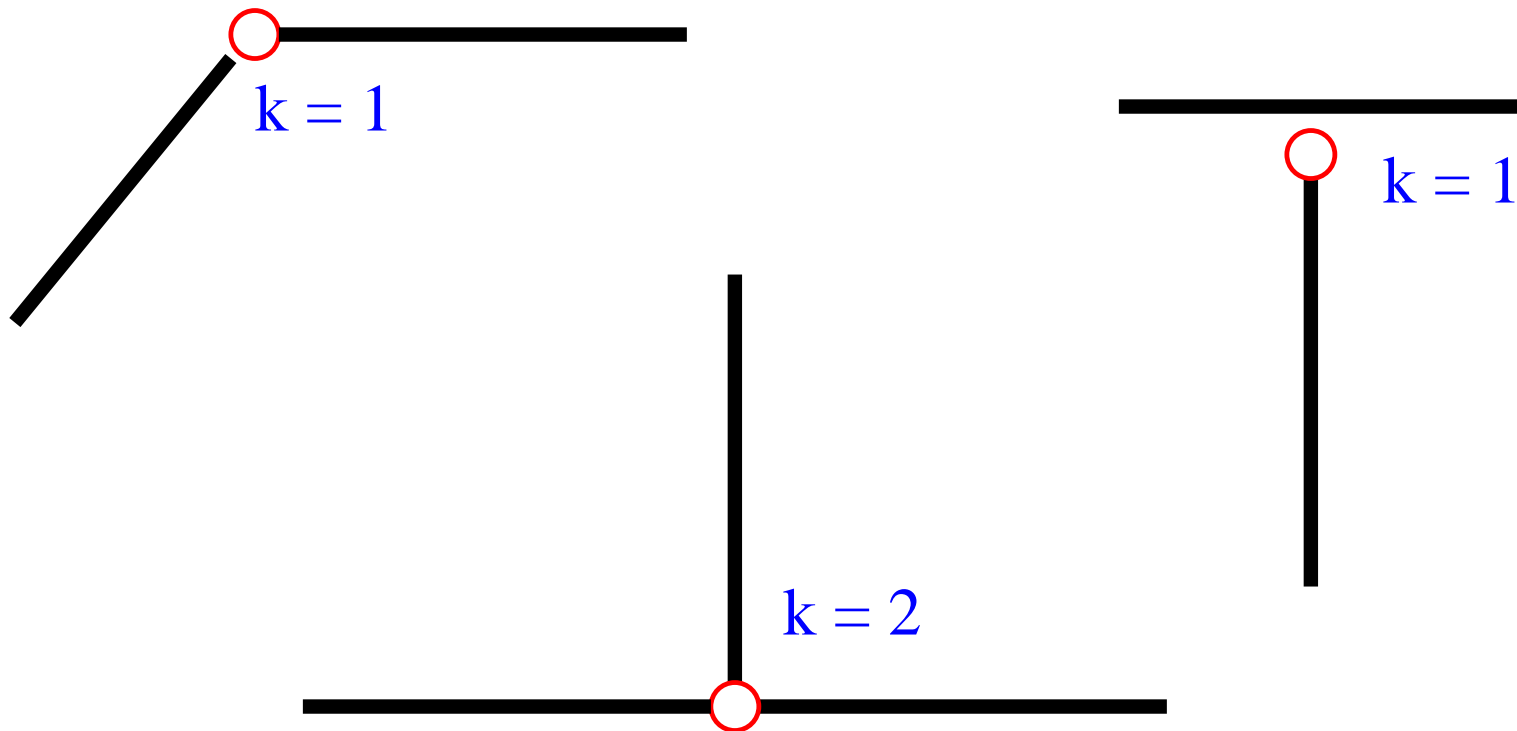
# Prutové konstrukce s kouby: rámy





# Opakování: násobnost kloubů

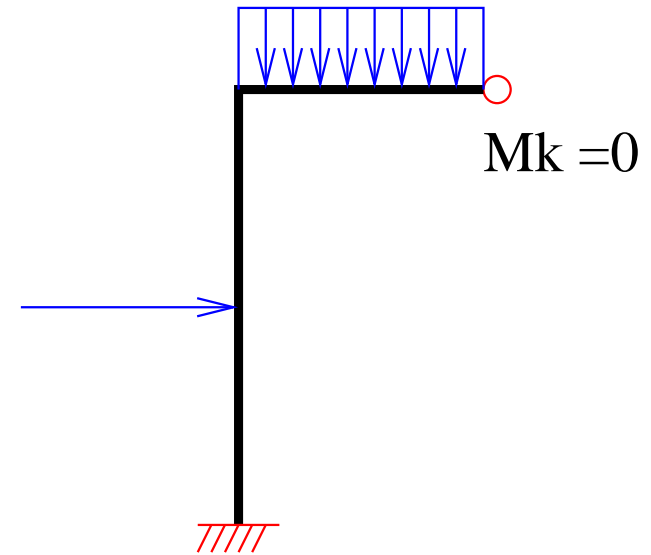
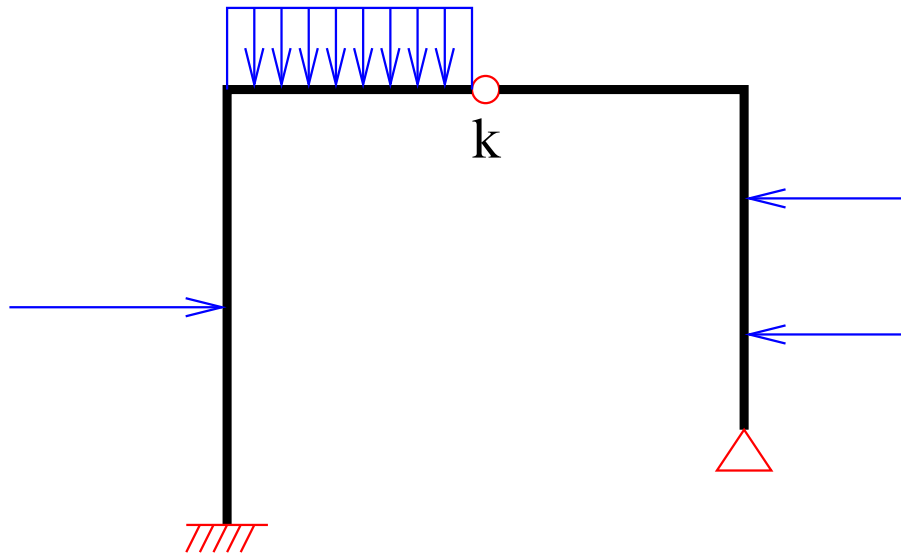
**Násobnost:** počet stupňů volnosti přidanych konstrukci kloubem.



# Nosník s kloubem (1)

Kloub **nepřenáší** moment  $\Rightarrow$  je možné psát v kloubu podmínku

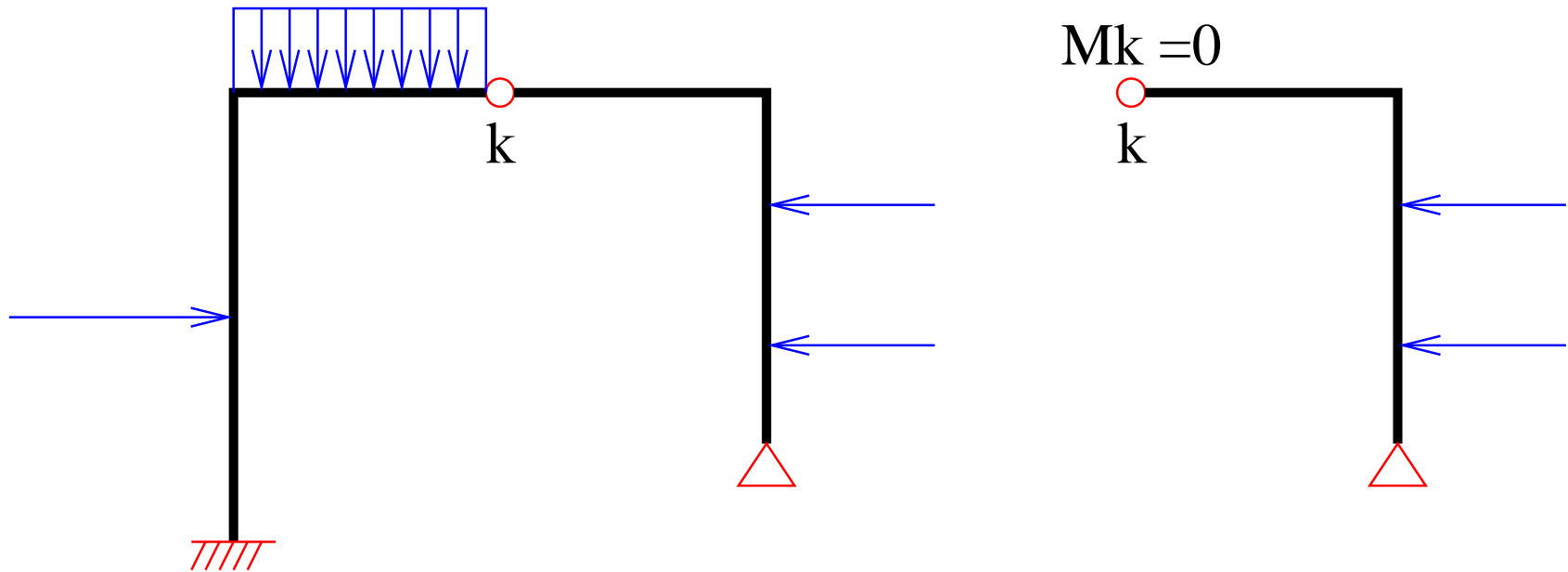
$\sum M_k = 0$  z levé nebo z pravé strany kloubu.



$$\sum M_k^l = 0$$

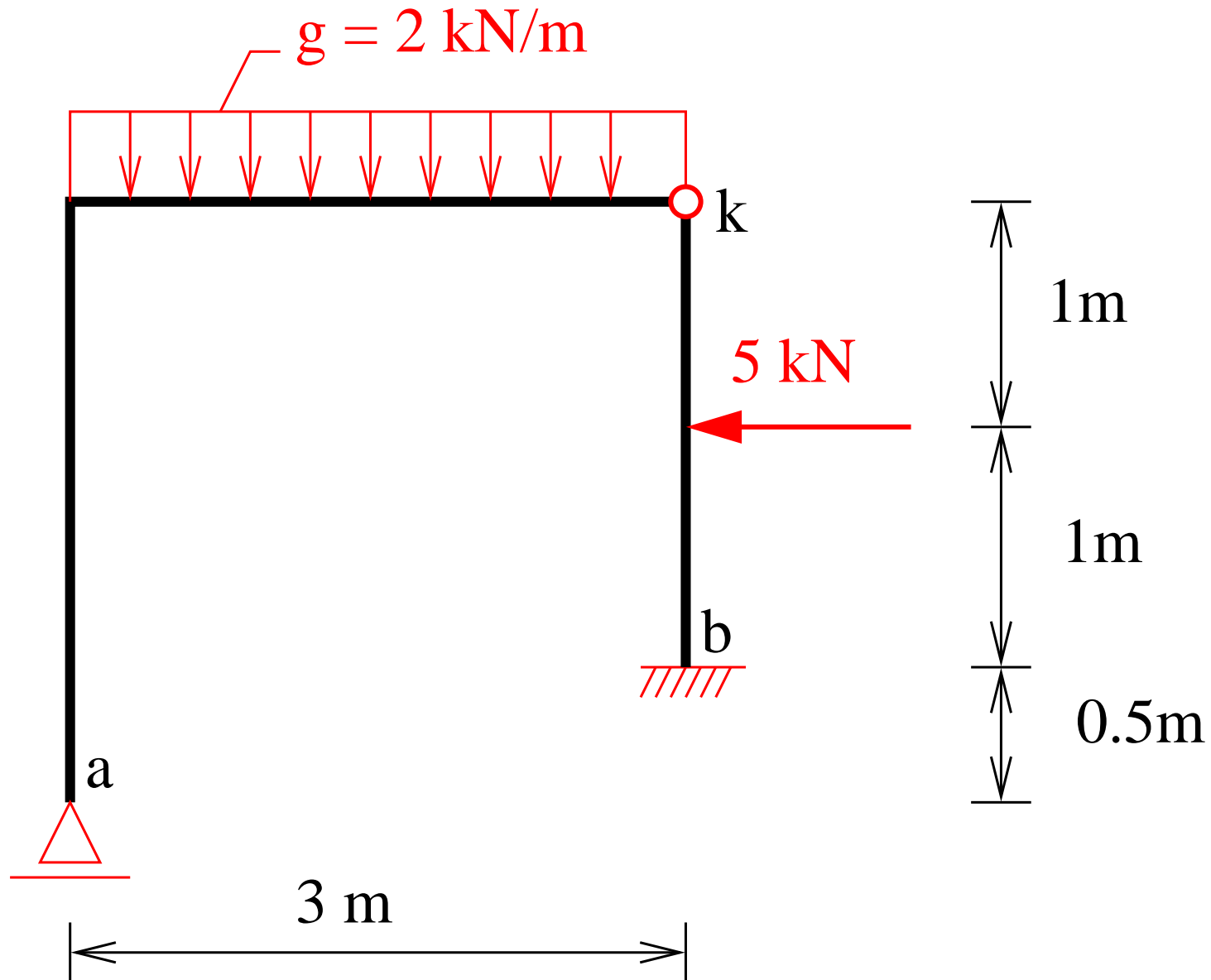
# Nosník s kloubem (2)

Kloub **nepřenáší** moment  $\Rightarrow$  je možné psát v kloubu podmínku  $\Sigma M_k = 0$  z levé nebo z pravé strany kloubu.

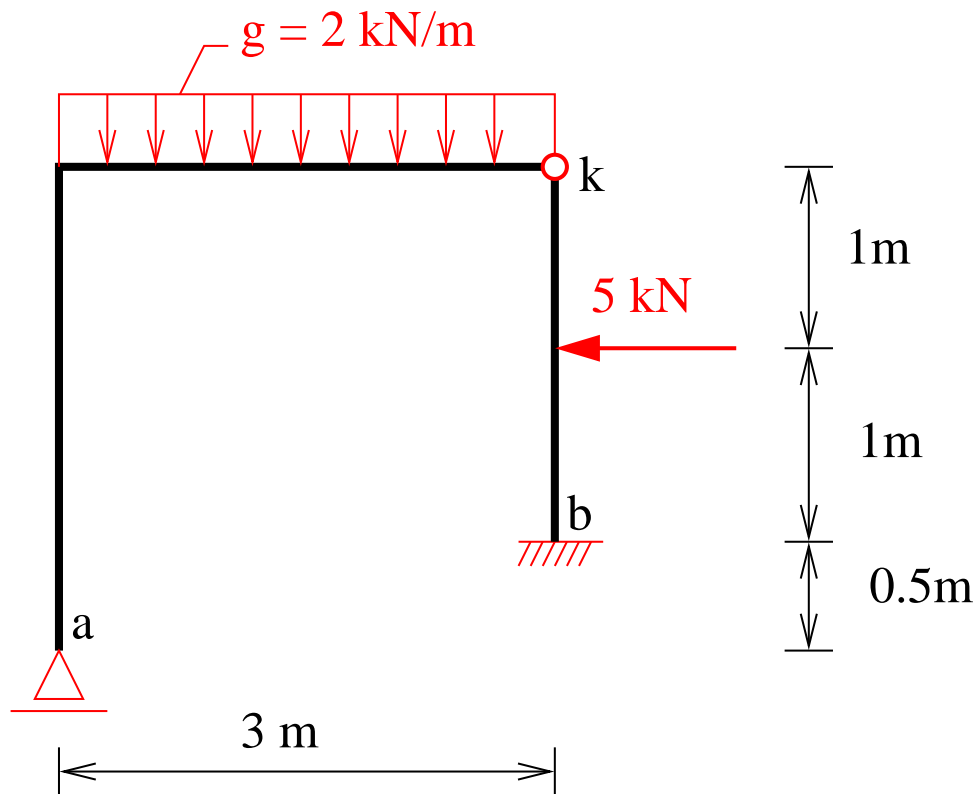


$$\Sigma M_k^p = 0$$

# Rám s kloubem - příklad (1)



# Rám s kloubem - příklad (2)



Stupeň statické neurčitosti:

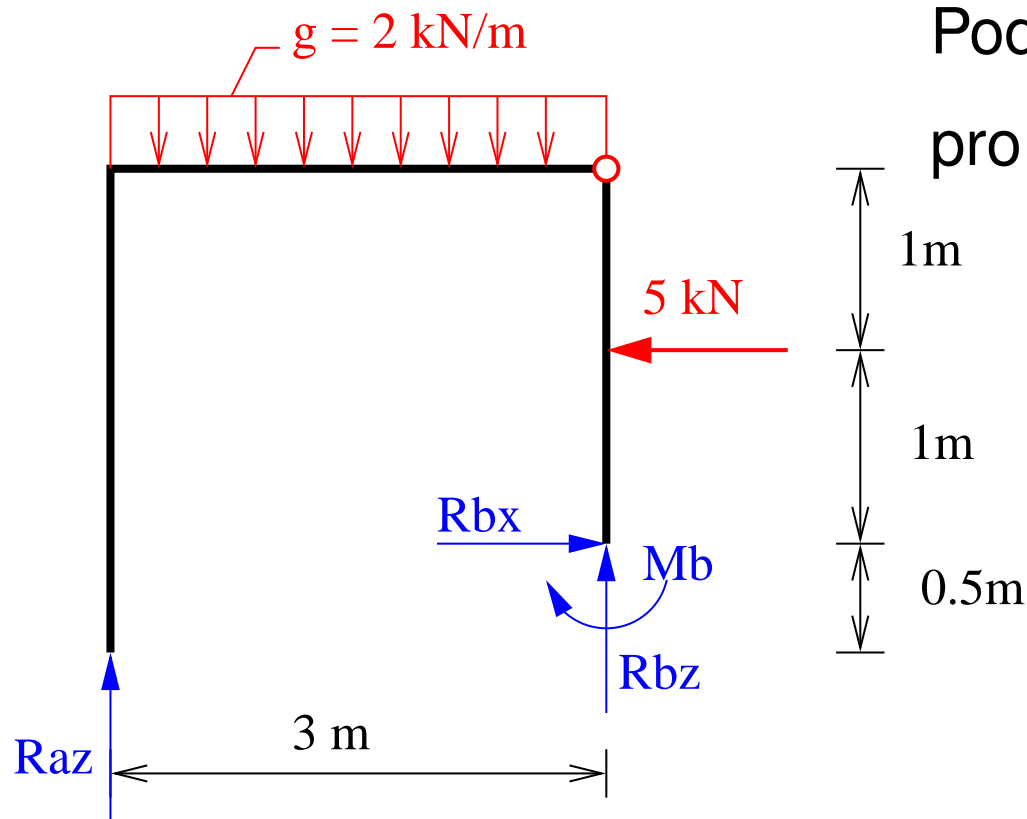
$$S_n = v - 3 + 3 \times u - k$$

$$S_n = 1 + 3 - 3 + 3 \times 0 - 1$$

$$S_n = 0$$

Uvedený lomený nosník  
(rám) je **staticky určitý**.

# Rám s kloubem - příklad (3)



Podmínky statické rovnováhy  
pro určení neznámých reakcí:

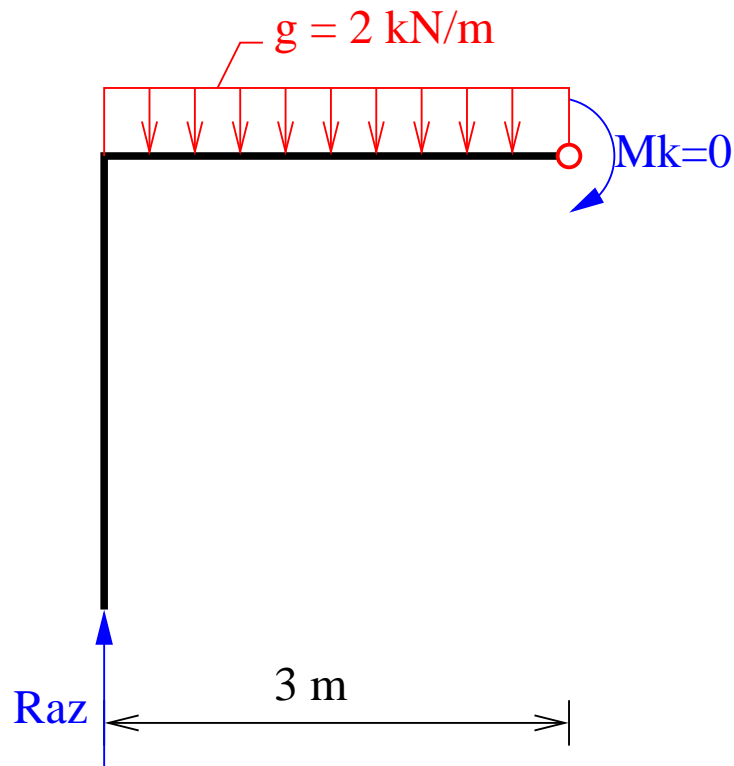
$$\sum M_{ki}^l = 0$$

$$\sum F_{xi} = 0$$

$$\sum M_{bi} = 0$$

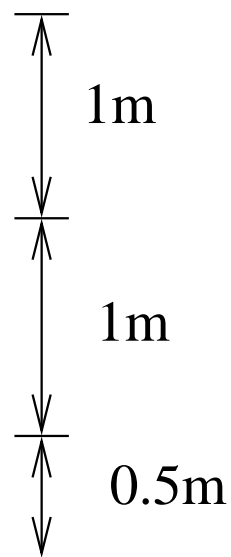
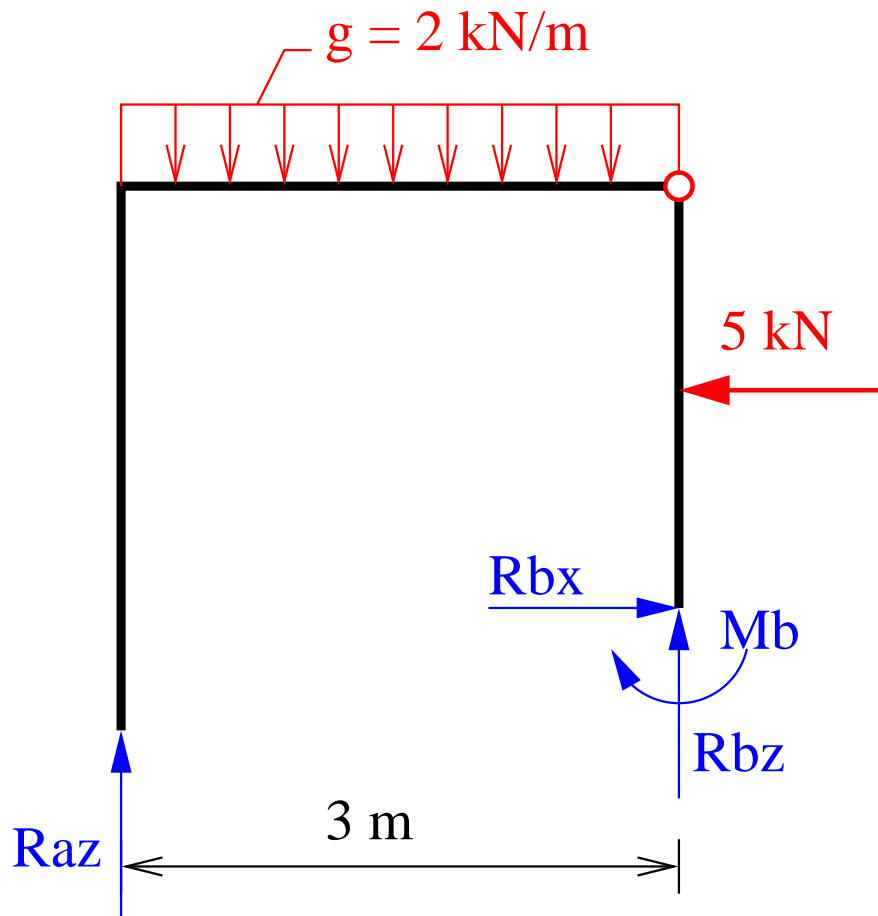
$$\sum M_{ai} = 0$$

# Rám s kloubem - příklad (4)



$$\begin{aligned}
 & 1\text{m} \quad \sum M_{k,i}^l = 0 : \\
 & \quad - R_{az} \times 3 + q \times 3 \times \frac{3}{2} = 0 \\
 & 1\text{m} \\
 & \quad - R_{az} \times 3 + 2 \times 3 \times \frac{3}{2} = 0 \\
 & 0.5\text{m} \\
 & \quad R_{az} = \frac{9}{3} = 3 \text{ kN}(\uparrow)
 \end{aligned}$$

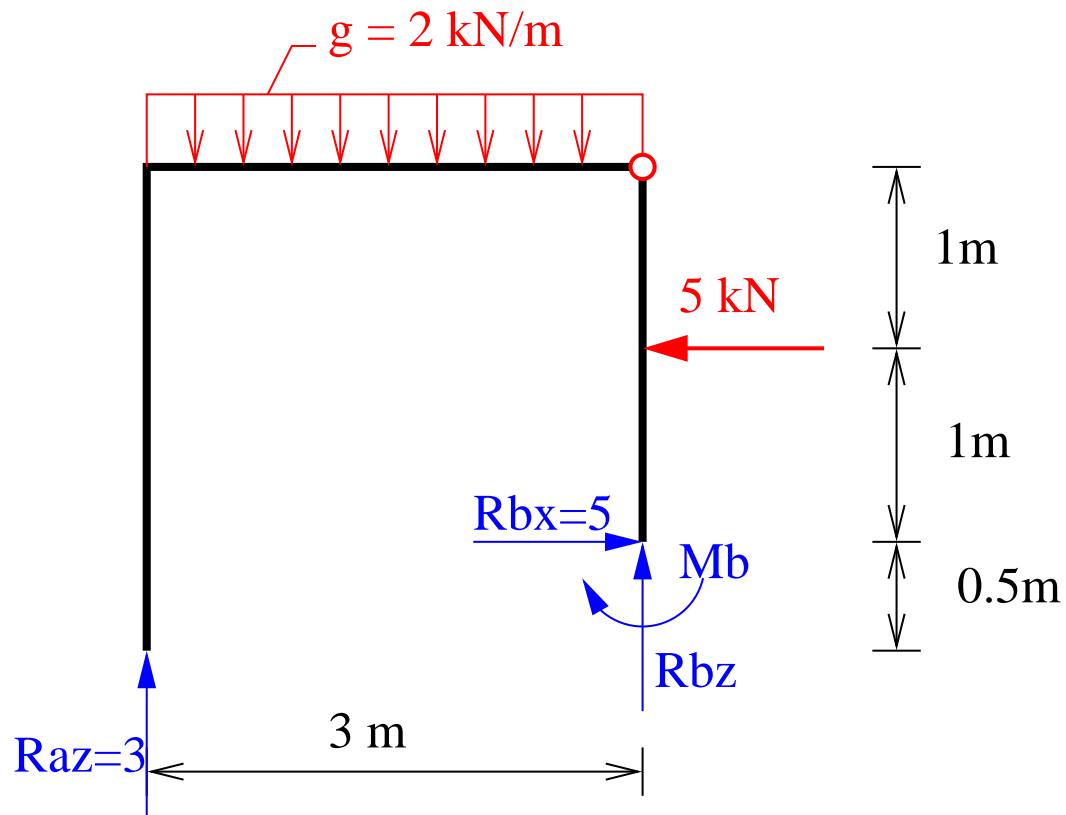
# Rám s kloubem - příklad (5)



$$\begin{aligned}\sum F_{i,x} &= 0 : \\ R_{bx} - 5 &= 0 \\ R_{bx} &= 5 \text{ kN} (\rightarrow)\end{aligned}$$

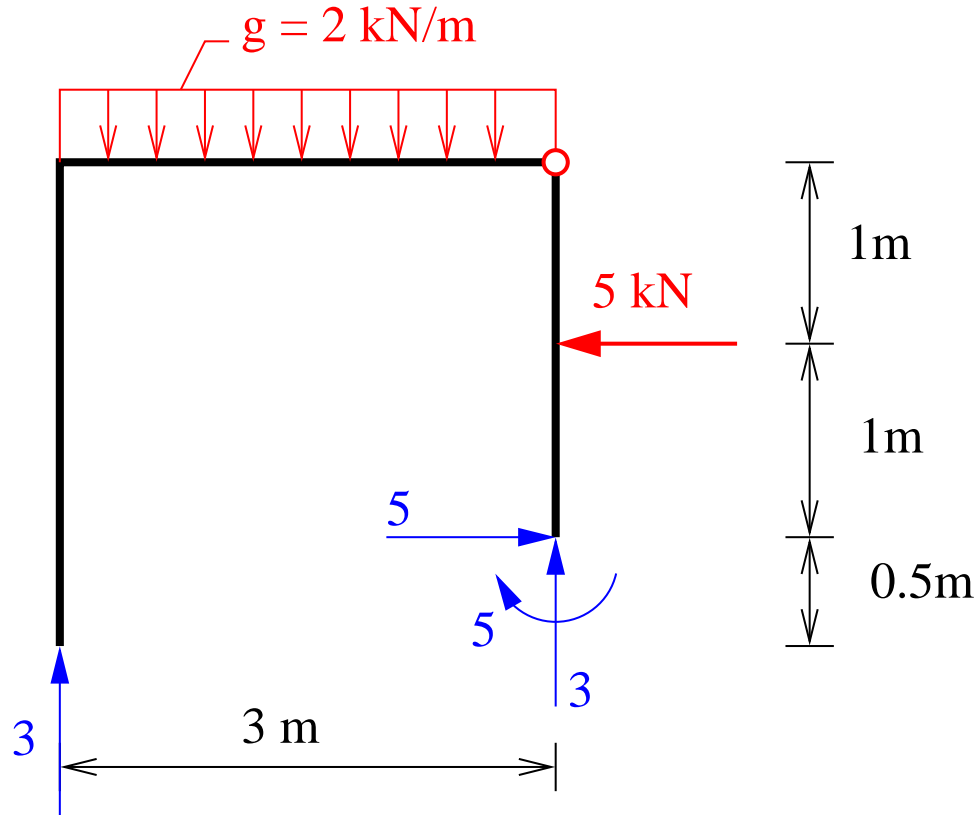


# Rám s kloubem - příklad (6)



$$\begin{aligned} \sum M_{i,b} = 0 : -M_b - R_{az} \times 3 + q \times 3 \times \frac{3}{2} + 5 \times 1 &= 0 \\ -M_b - 3 \times 3 + 2 \times 3 \times \frac{3}{2} + 5 \times 1 &= 0 \\ M_b = 9 + 5 - 9 &= 5 \text{ kNm} \end{aligned}$$

# Rám s kloubem - příklad (7)

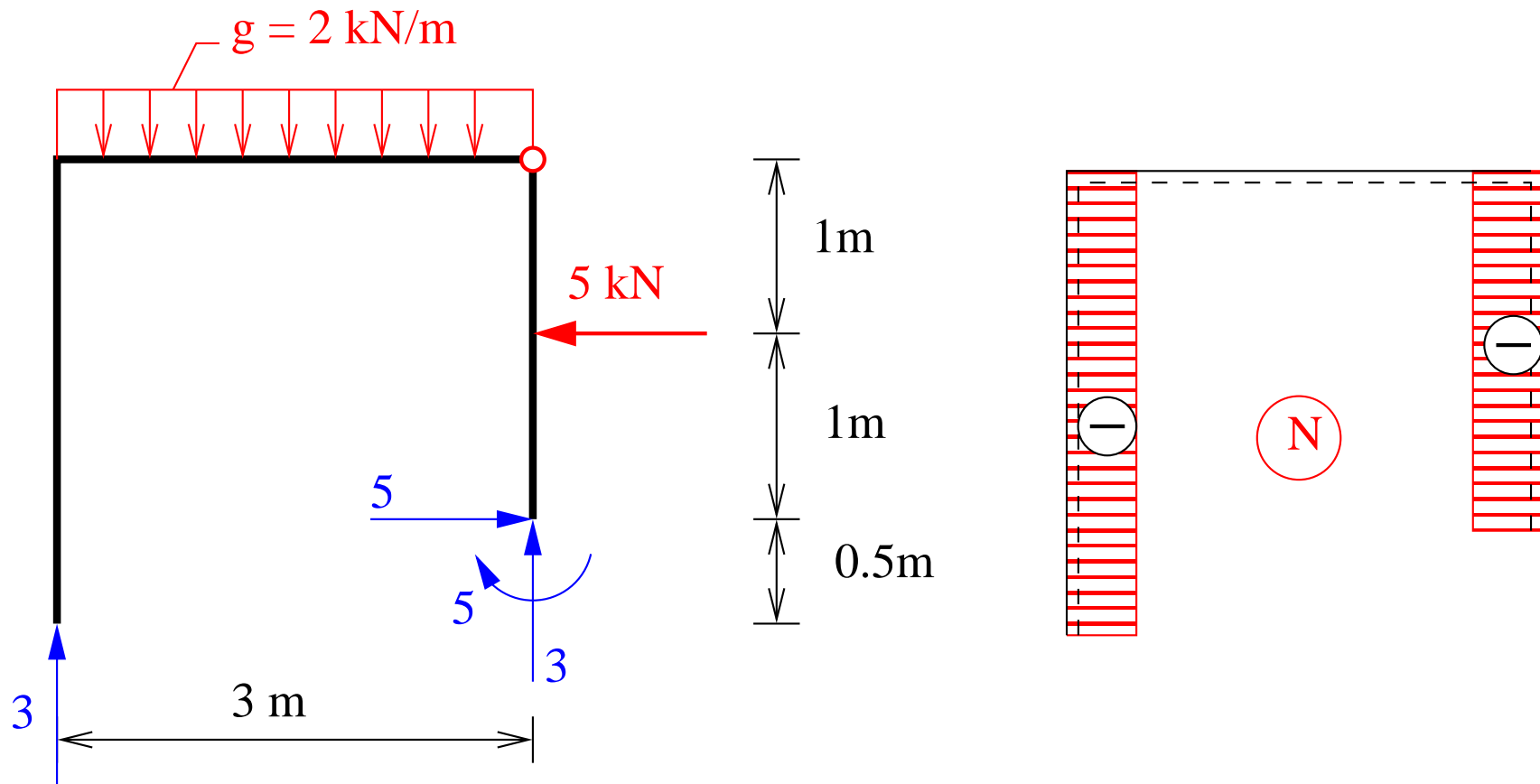


Kontrola svislých reakcí ( $\sum F_{i,z} = 0$ ):

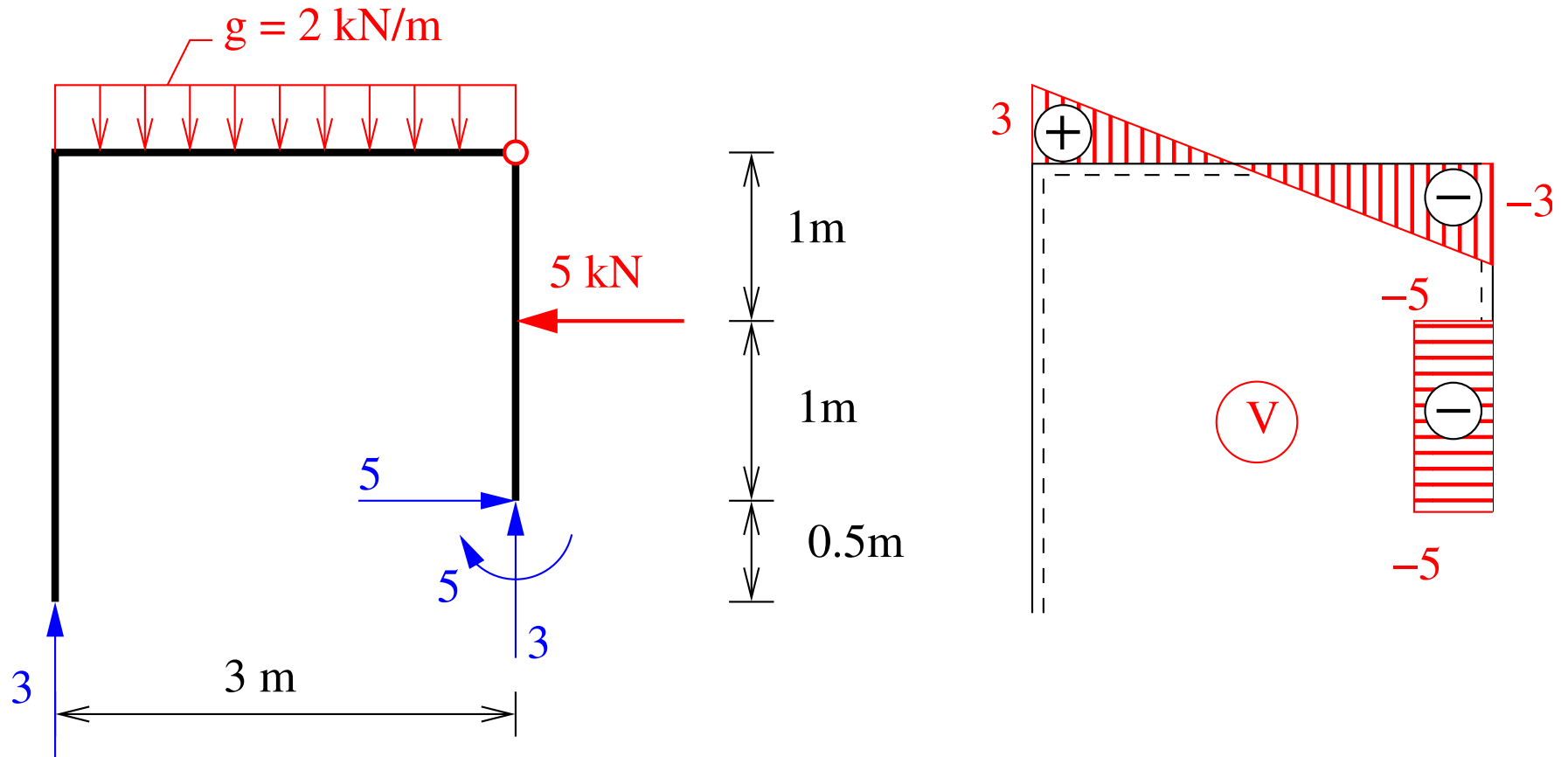
$$R_{az} + R_{bz} - q \times 3 = 0$$

$$3 + 3 - 6 = 0$$

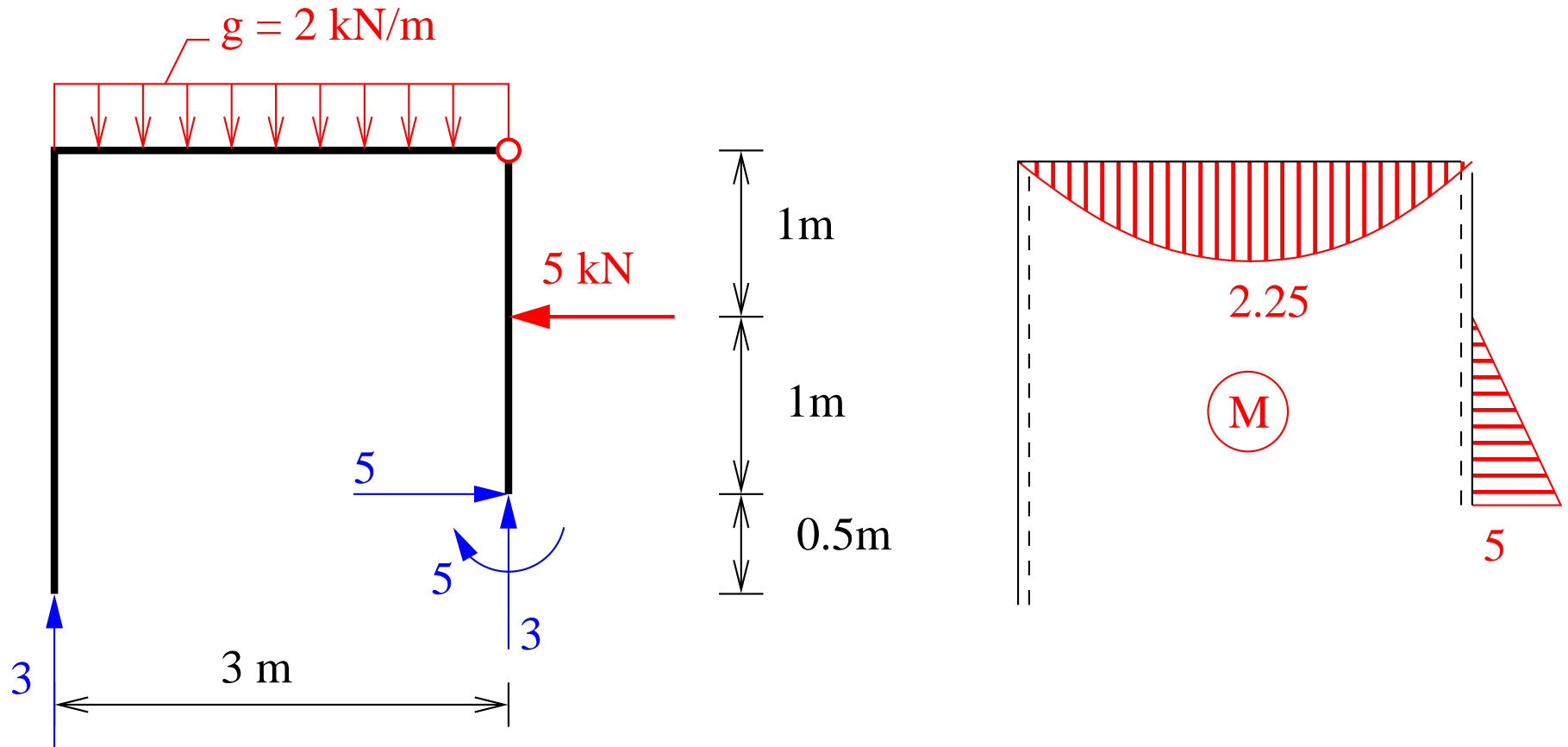
# Rám s kloubem - příklad (8)



# Rám s kloubem - příklad (9)

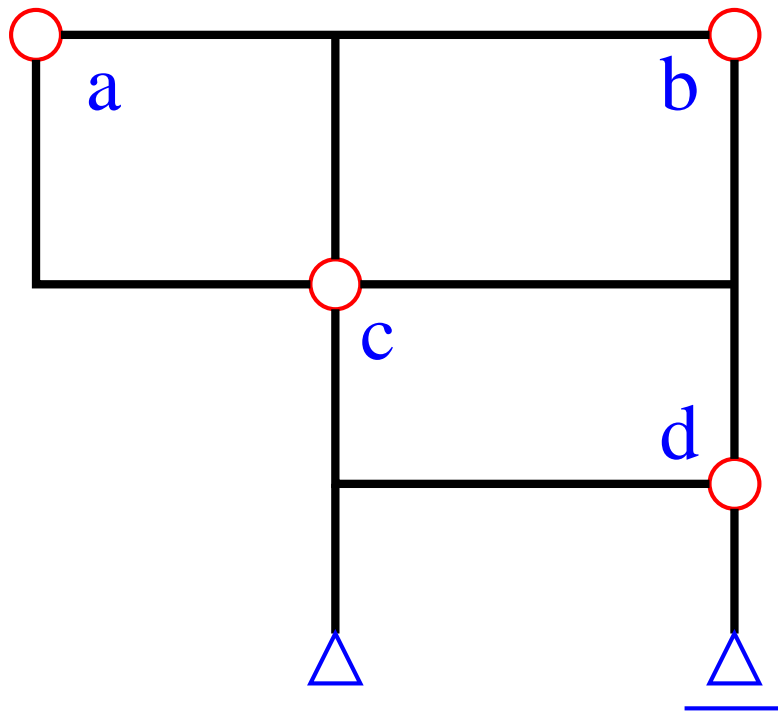


# Rám s kloubem - příklad (10)

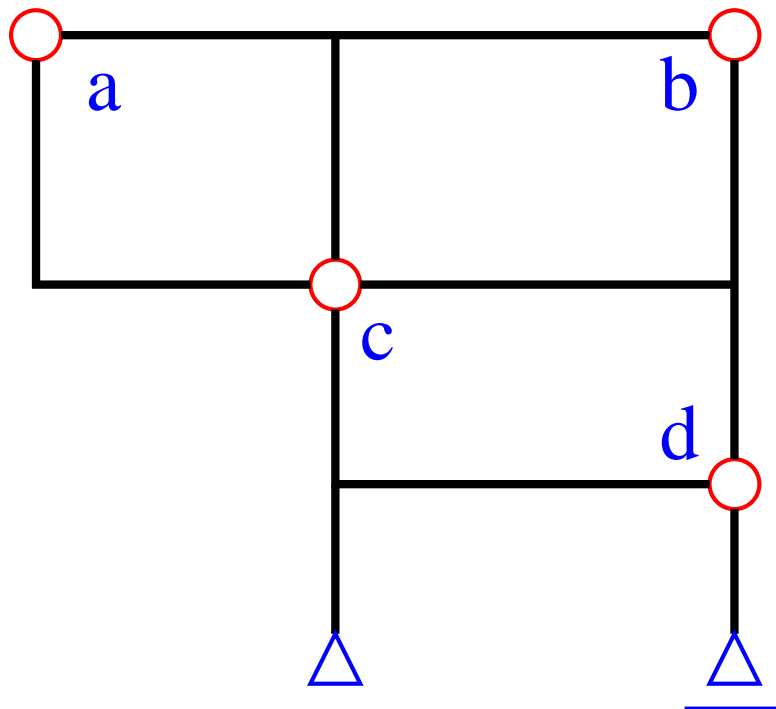


# Násobnost kloubů - příklad (1)

Určete který kloub je jak „násobný“, tedy kolik přidává stupňů volnosti.



# Násobnost kloubů - příklad (2)

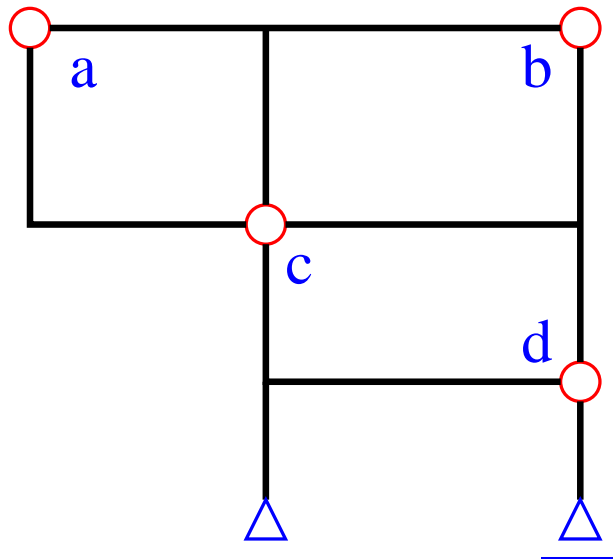


Násobnost:

- a ... 1
- b ... 1
- c ... 3
- d ... 2

# Násobnost kloubů - příklad (3)

Stupeň statické neurčitosti:



$$\begin{aligned} S_n &= v - 3 + 3 \times u - k \\ &= 3 - 3 + 3 \times 3 - 7 \\ &= 2 \end{aligned}$$

$v$  ... počet stupňů volnosti odebraný vazbami

$u$  ... počet uzavřených část

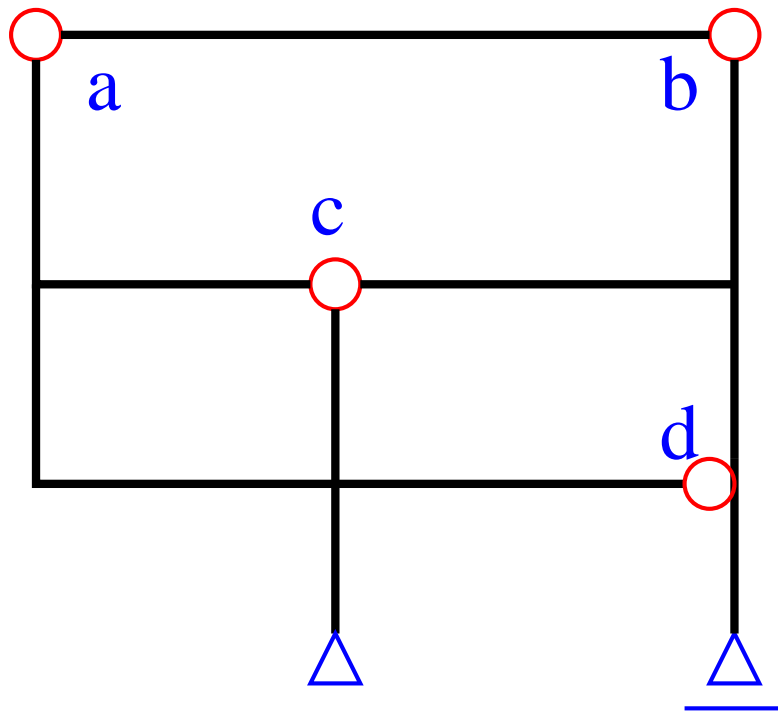
$k$  ... počet stupňů volnosti přidaných klouby

Konstrukce je **dvakrát** staticky neurčitá.

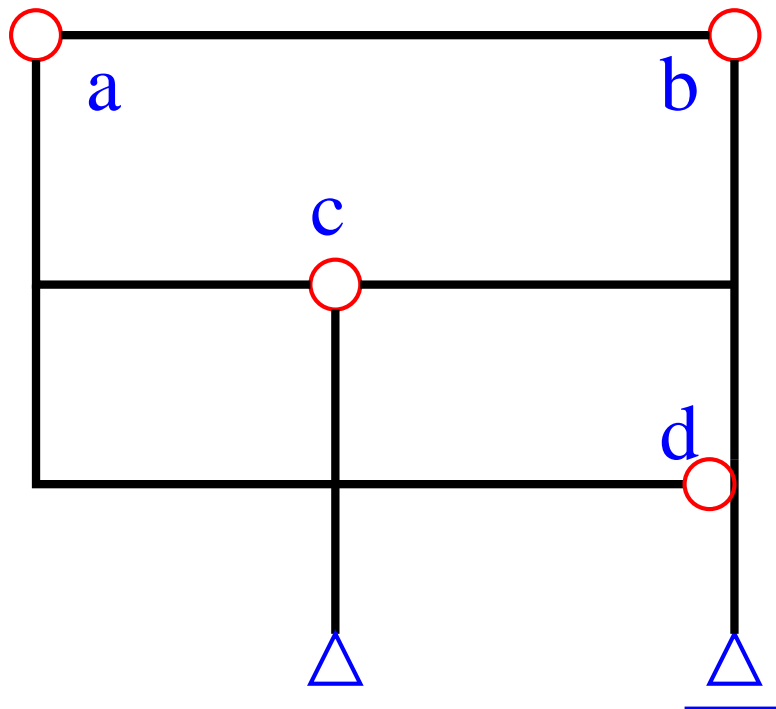


# Násobnost kloubů - příklad 2 (1)

Určete který kloub je jak „násobný“, tedy kolik přidává stupňů volnosti.



# Násobnost kloubů - příklad 2 (2)

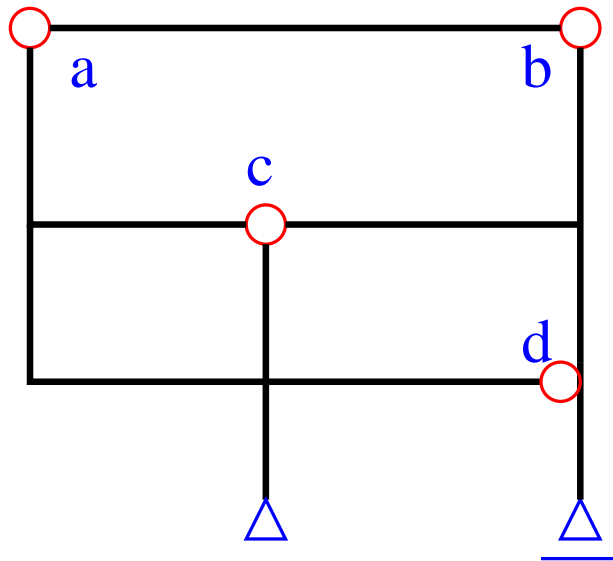


Násobnost:

- a ... 1
- b ... 1
- c ... 2
- d ... 1

# Násobnost kloubů - příklad 2 (3)

Stupeň statické neurčitosti:



$$\begin{aligned} S_n &= v - 3 + 3 \times u - k \\ &= 3 - 3 + 3 \times 3 - 5 \\ &= 4 \end{aligned}$$

$v$  ... počet stupňů volnosti odebraný vazbami

$u$  ... počet uzavřených část

$k$  ... počet stupňů volnosti přidaných klouby

Konstrukce je **čtyřikrát** staticky neurčitá.