

VYSOKÁ ŠKOLA BÁŇSKÁ – TECHNICKÁ UNIVERZITA OSTRAVA
FAKULTA STAVEBNÍ

Základy stavební mechaniky

Lomené nosníky – rámy

Jiří Brožovský

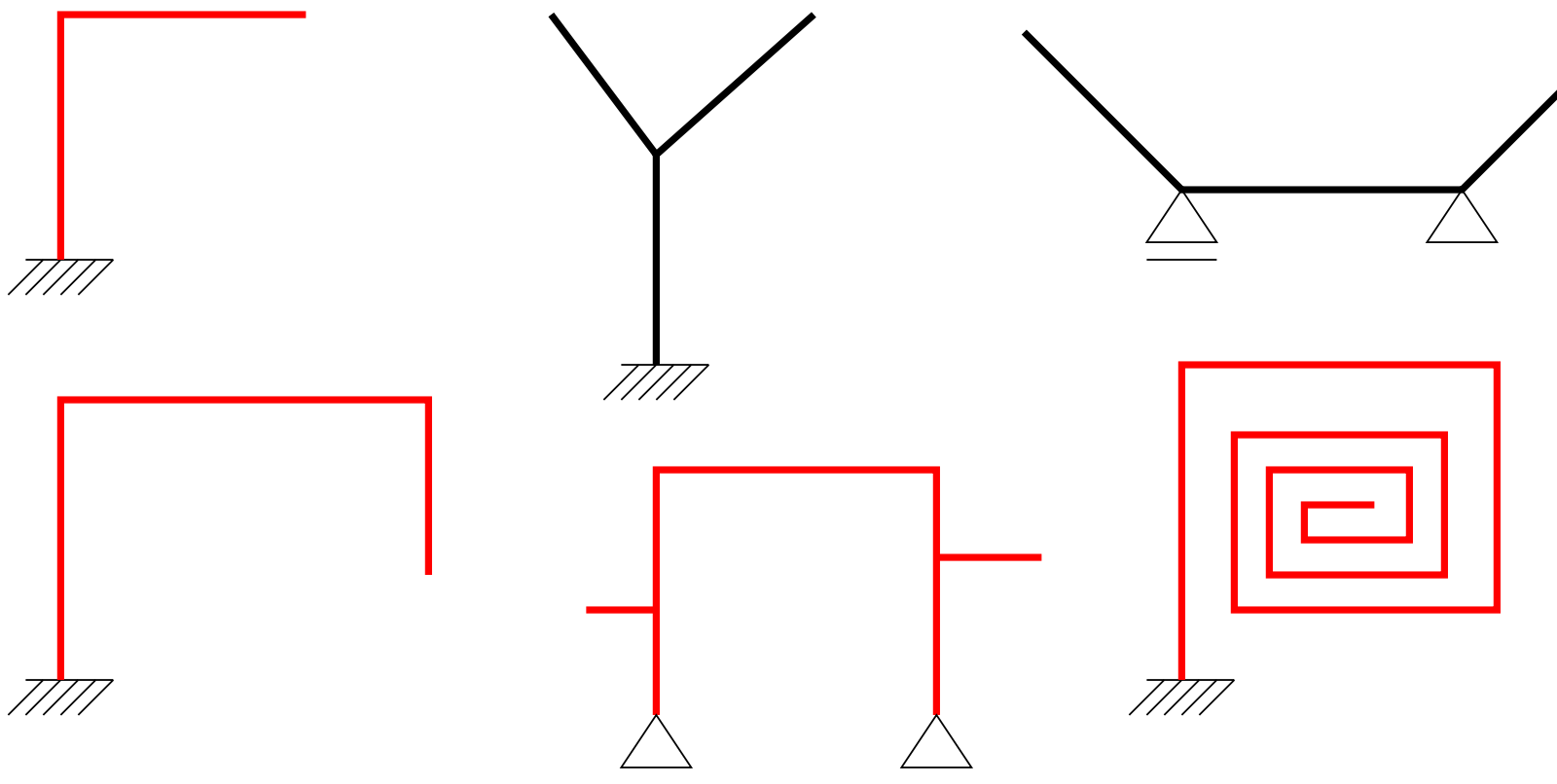
Kancelář: LP – H 406/3

Telefon: 597 321 321

E-mail: jiri.brozovsky@vsb.cz

WWW: <http://fast10.vsb.cz/brozovsky>

Lomený nosník – rám (1)



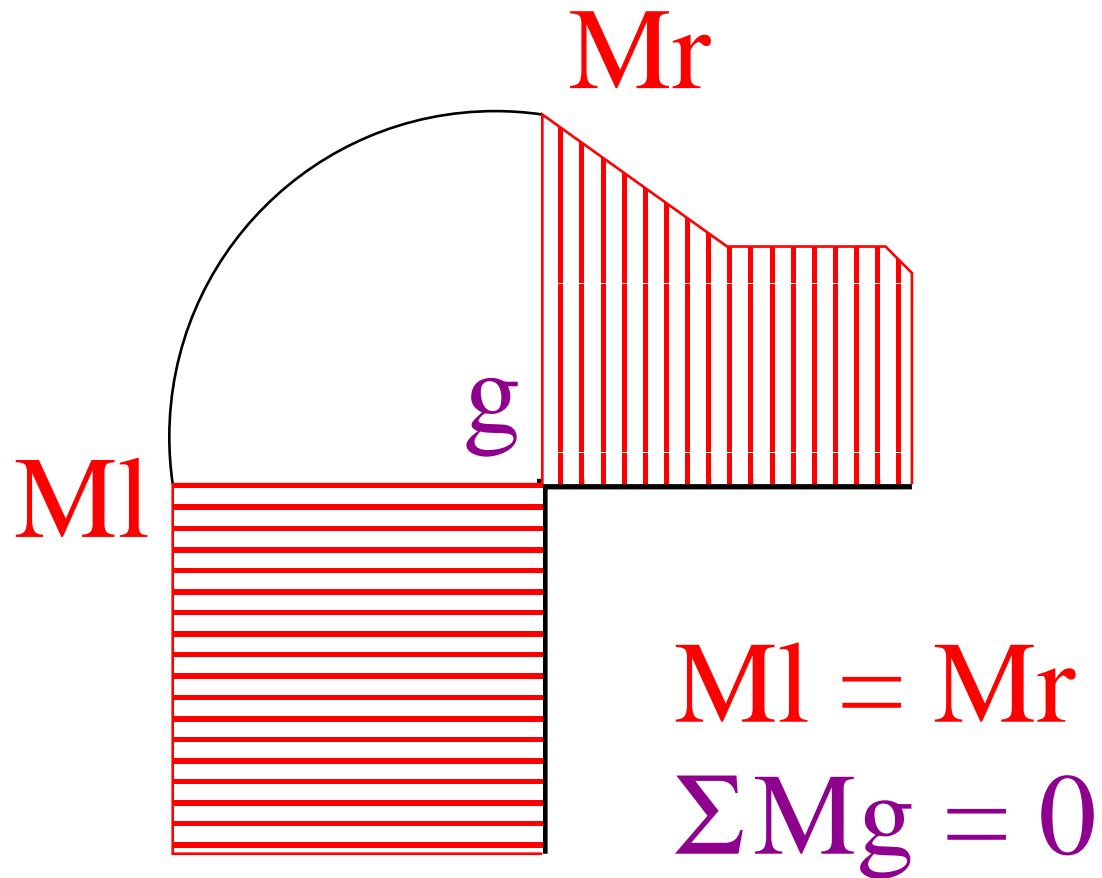
Dnes budeme řešit jen **pravoúhlé** (v obrázku červené).

Lomený nosník (2)

- opět tuhá deska (čára)
- staticky určitý lomený nosník se řeší shodně s nosníkem přímým (šikmým)
- **N** se počítají **v ose** každého prutu
- **V** se počítají **kolmo na osu** každého prutu

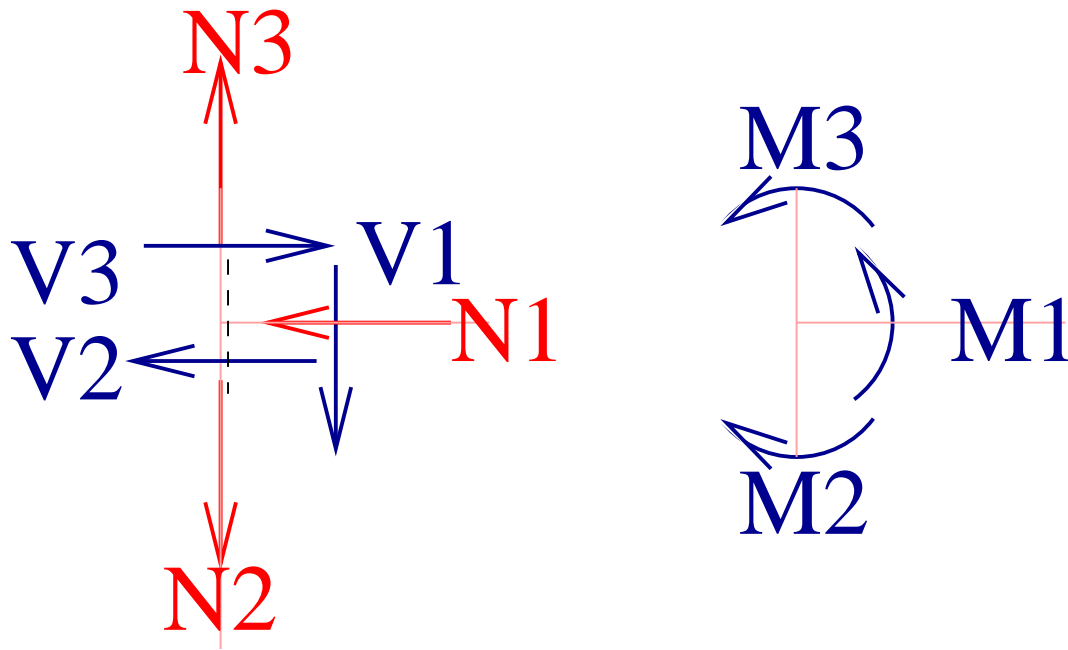
Lomený nosník (3)

Přenos momentů ve styčnicku



Lomený nosník (4)

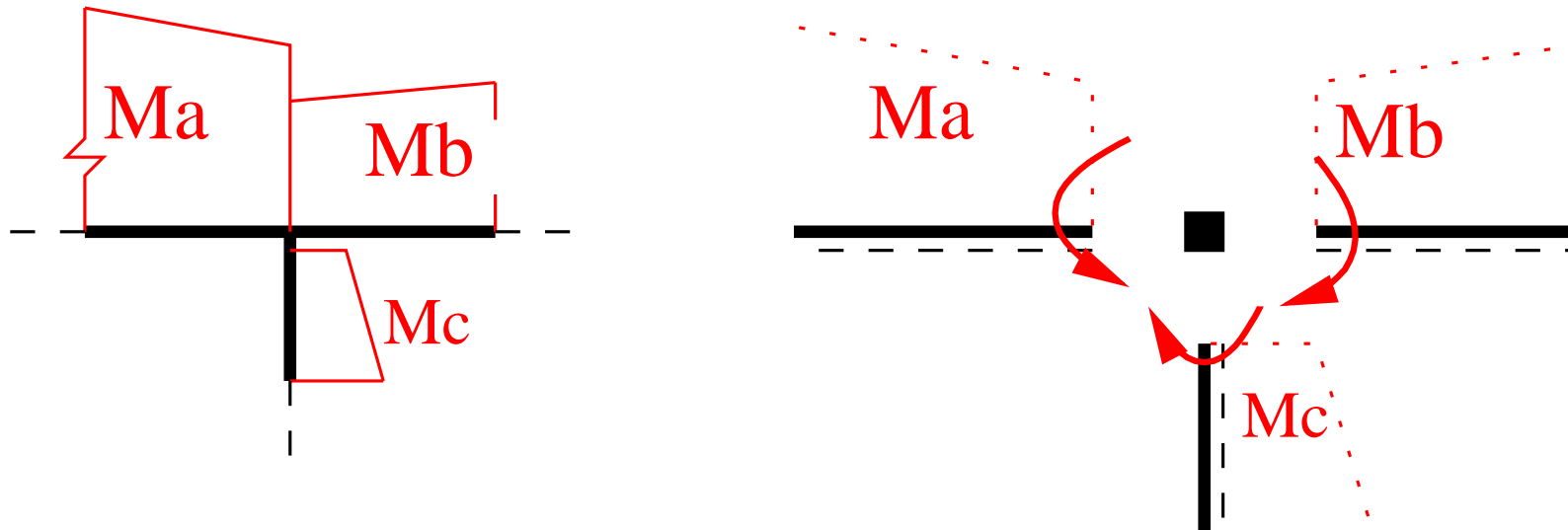
Podmínky rovnováhy ve styčnicku



$$\sum F_{i,x} = 0, \quad \sum F_{i,z} = 0, \quad \sum M_i = 0$$

Lomený nosník (5)

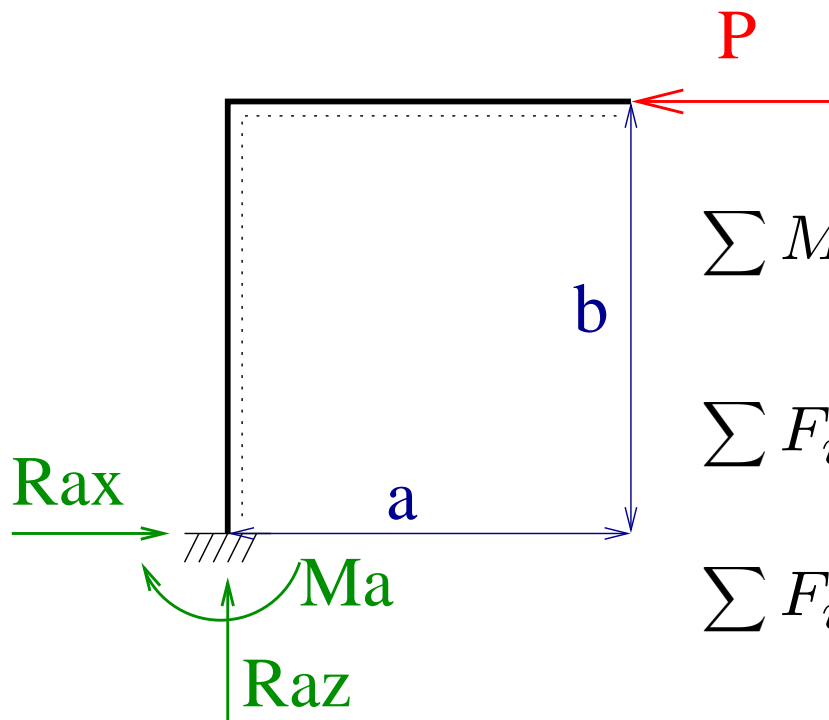
Podmínky rovnováhy ve styčnicku



$$\sum M_i = 0$$

$$M_a - M_b - M_c = 0$$

Lomený nosník – příklad 1 (1)

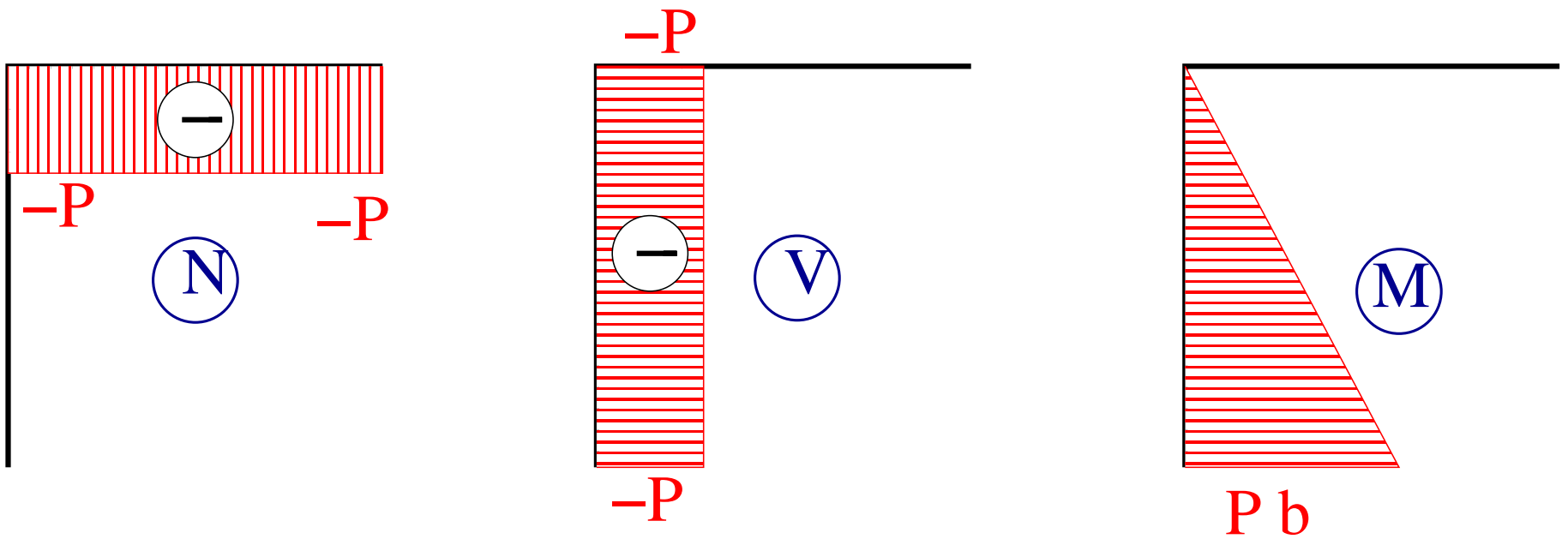


$$\sum M_{i,a} = 0 : M_a - P b = 0 \Rightarrow M_a = P b$$

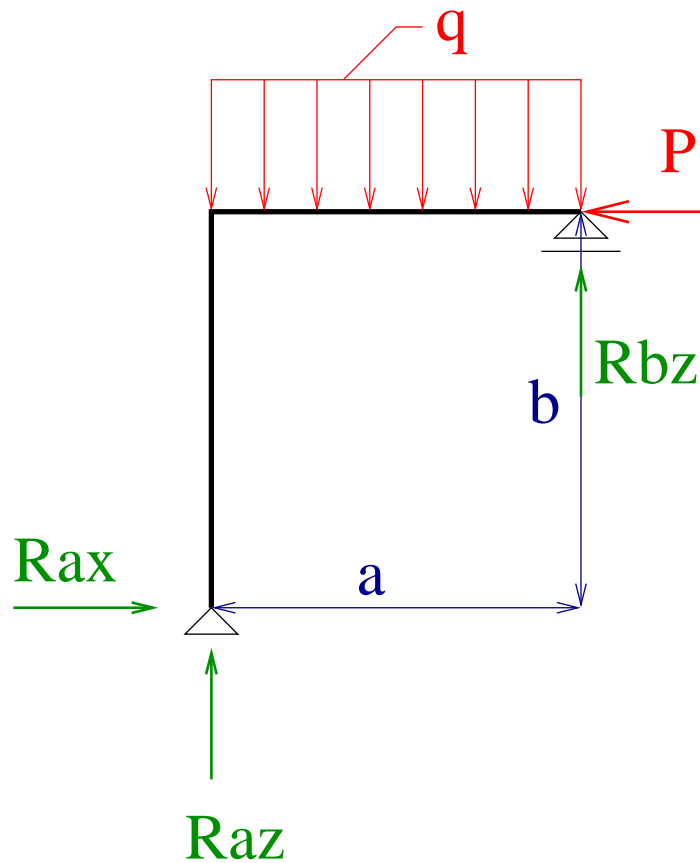
$$\sum F_{i,x} = 0 : R_{a,x} - P = 0 \Rightarrow R_{a,x} = P$$

$$\sum F_{i,z} = 0 : R_{a,z} - 0 = 0 \Rightarrow R_{a,z} = 0$$

Lomený nosník – příklad 1 (2)



Lomený nosník – příklad 2 (1)



$$\sum F_{i,x} = 0 : R_{a,x} - P = 0 \Rightarrow R_{a,x} = P$$

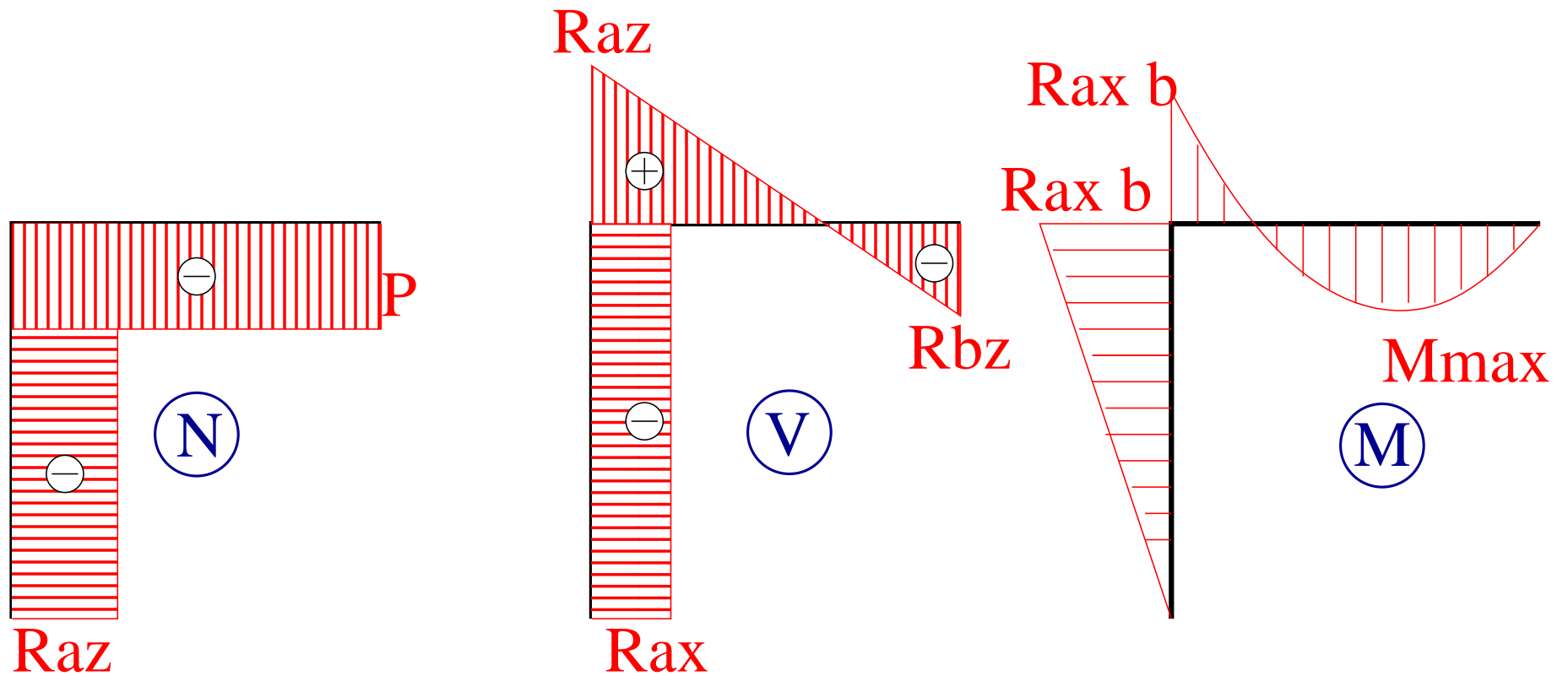
$$\sum M_{i,a} = 0 : P b - \frac{a^2 q}{2} + a R_{b,z} = 0 \Rightarrow$$

$$R_{b,z} = \frac{\frac{a^2 q}{2} - P b}{a} \quad (\uparrow)$$

$$\sum M_{b,i} = 0 : R_{a,x} b - R_{a,z} a + \frac{a^2 q}{2} = 0 \Rightarrow$$

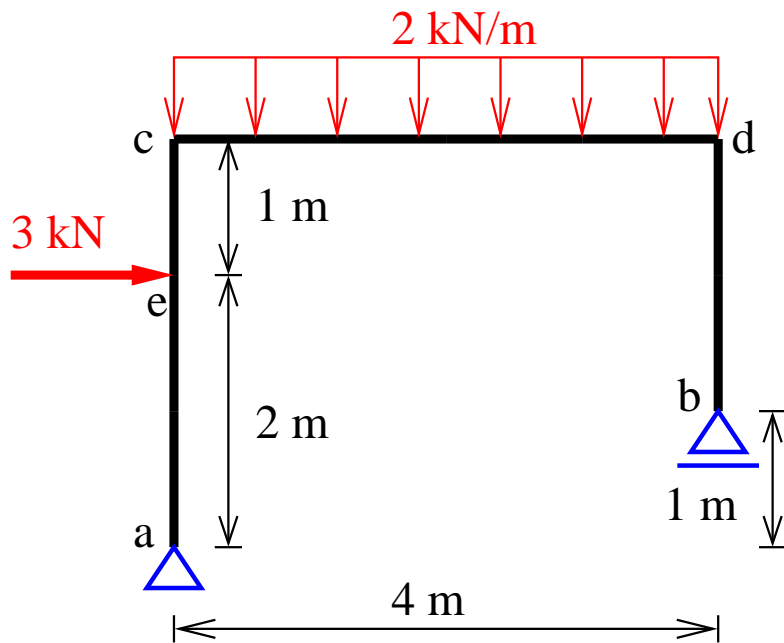
$$R_{b,z} = \frac{R_{a,x} b + \frac{a^2 q}{2}}{b} \quad (\uparrow)$$

Lomený nosník – příklad 2 (2)



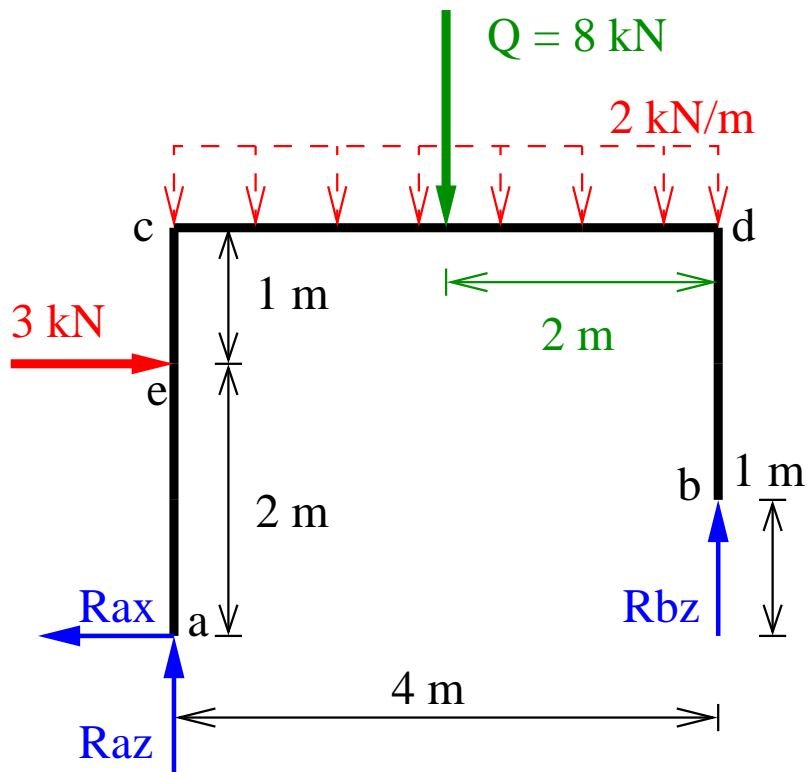
Lomený nosník – příklad 3 (1)

Stanovte reakce a vnitřní síly uvedeného staticky určitého lomeného nosníku.



Pozor: podpory **a** a **b** nejsou ve stejné výšce.

Lomený nosník – příklad 3 (2)



Náhradní břemeno:

$$Q = q \times L = 2 \times 4 = 8 \text{ kN}$$

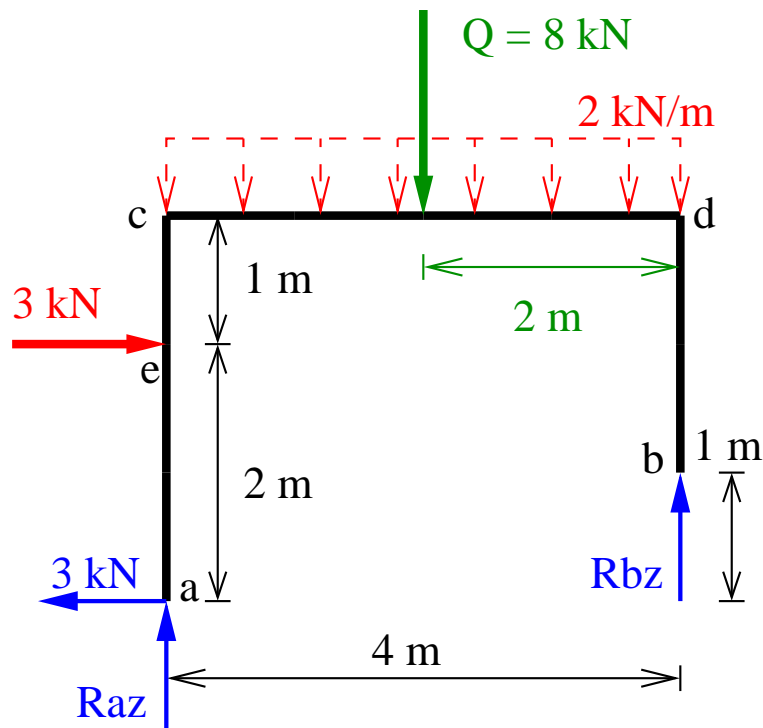
Vodorovná reakce:

$$\sum_{i=1}^n F_{i,x} = 0 :$$

$$3 - R_{ax} = 0$$

$$R_{ax} = 3 \text{ kN} (\leftarrow)$$

Lomený nosník – příklad 3 (3)



Momentová podmínka k bodu **a**:

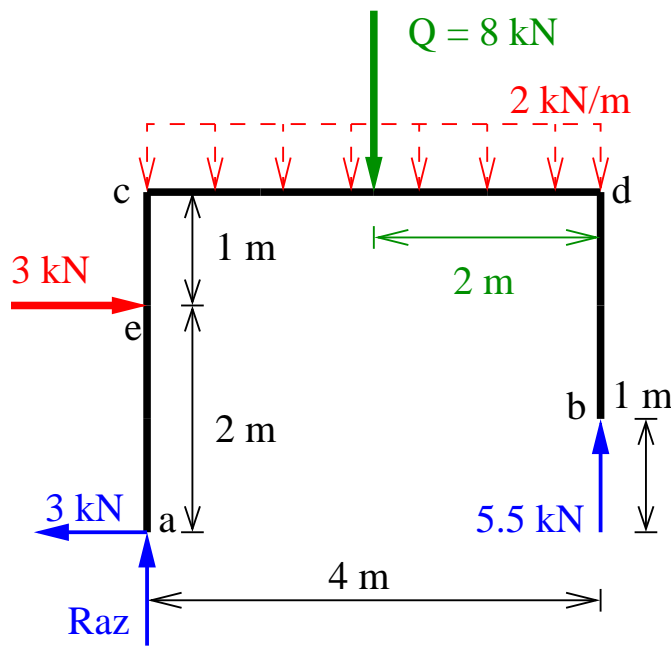
$$\sum_{i=1}^n M_{i,a} = 0 :$$

$$-3 \times 2 - 8 \times 2 + R_{bz} \times 4 = 0$$

$$R_{bz} = \frac{1}{4} (3 \times 2 + 8 \times 2)$$

$$R_{bz} = \frac{22}{4} = 5,5 \text{ kN}(\uparrow)$$

Lomený nosník – příklad 3 (4)



Momentová podmínka k bodu **b**:

$$\sum_{i=1}^n M_{i,a} = 0 :$$

$$-R_{ax} \times 1 - R_{az} \times 4 - 3 \times 1 + 8 \times 2 = 0$$

$$-3 \times 1 - R_{az} \times 4 - 3 \times 1 + 8 \times 2 = 0$$

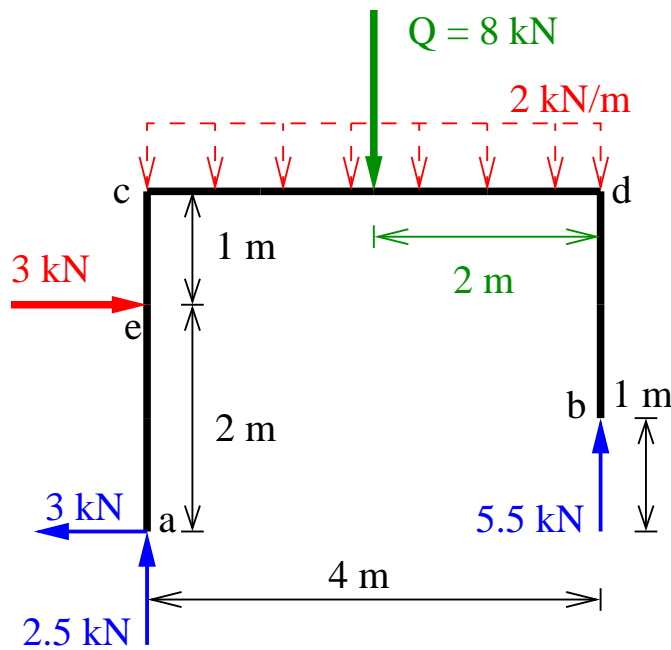
$$R_{az} = \frac{1}{4}(3 \times 1 - 3 \times 1 + 8 \times 2)$$

$$R_{az} = \frac{10}{4} = 2,5 \text{ kN } (\uparrow)$$

Pozn.: podpory nejsou ve stejné výšce, tedy i vodorovná reakce

R_{ax} vyvozuje moment k bodu **b**!

Lomený nosník – příklad 3 (5)



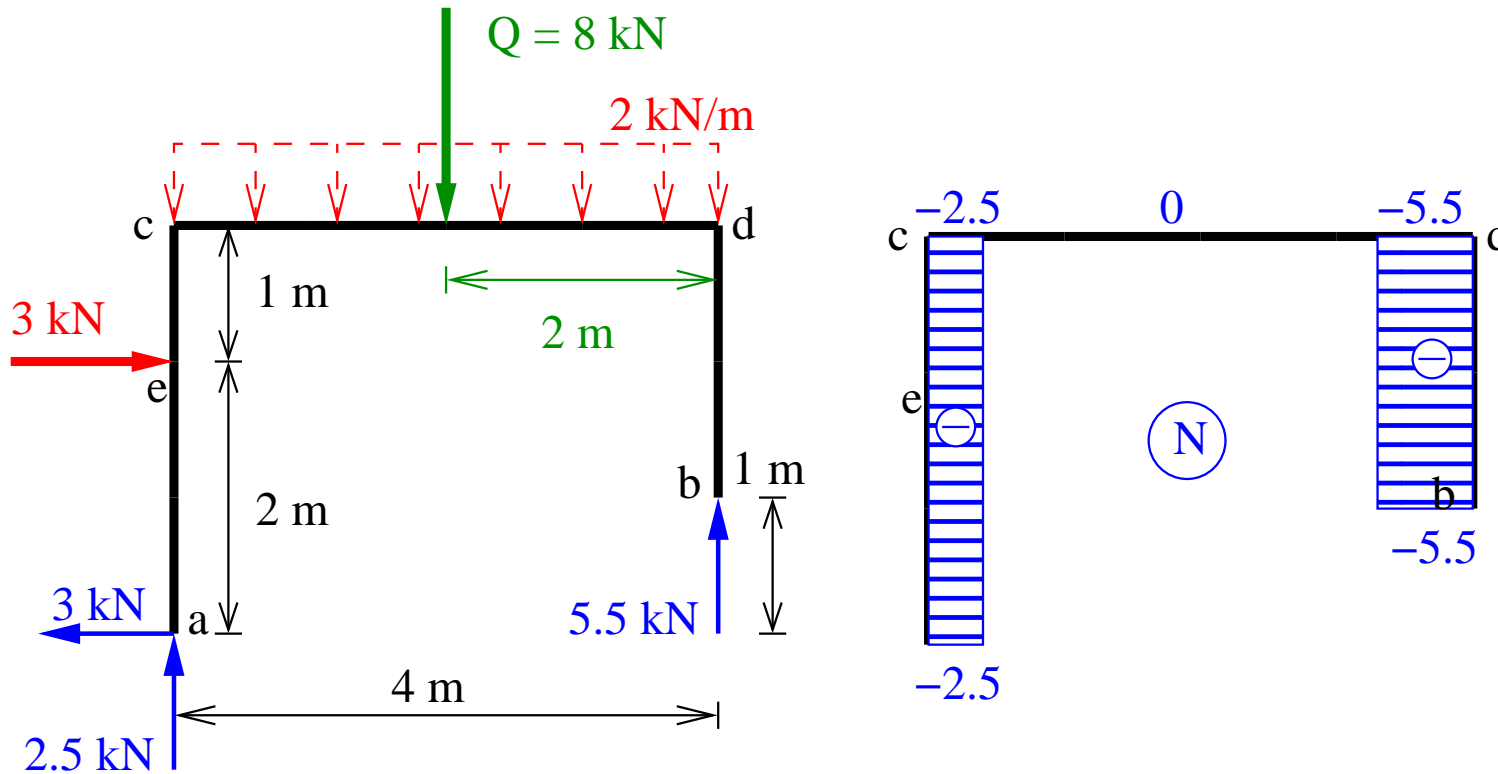
Kontrola:

$$\sum_{i=1}^n F_{i,z} = 0 :$$
$$-R_{az} - R_{bz} + 8 = 0$$
$$-2,5 - 5,5 + 8 = 0$$
$$0 = 0$$

Kontrola vyšla!

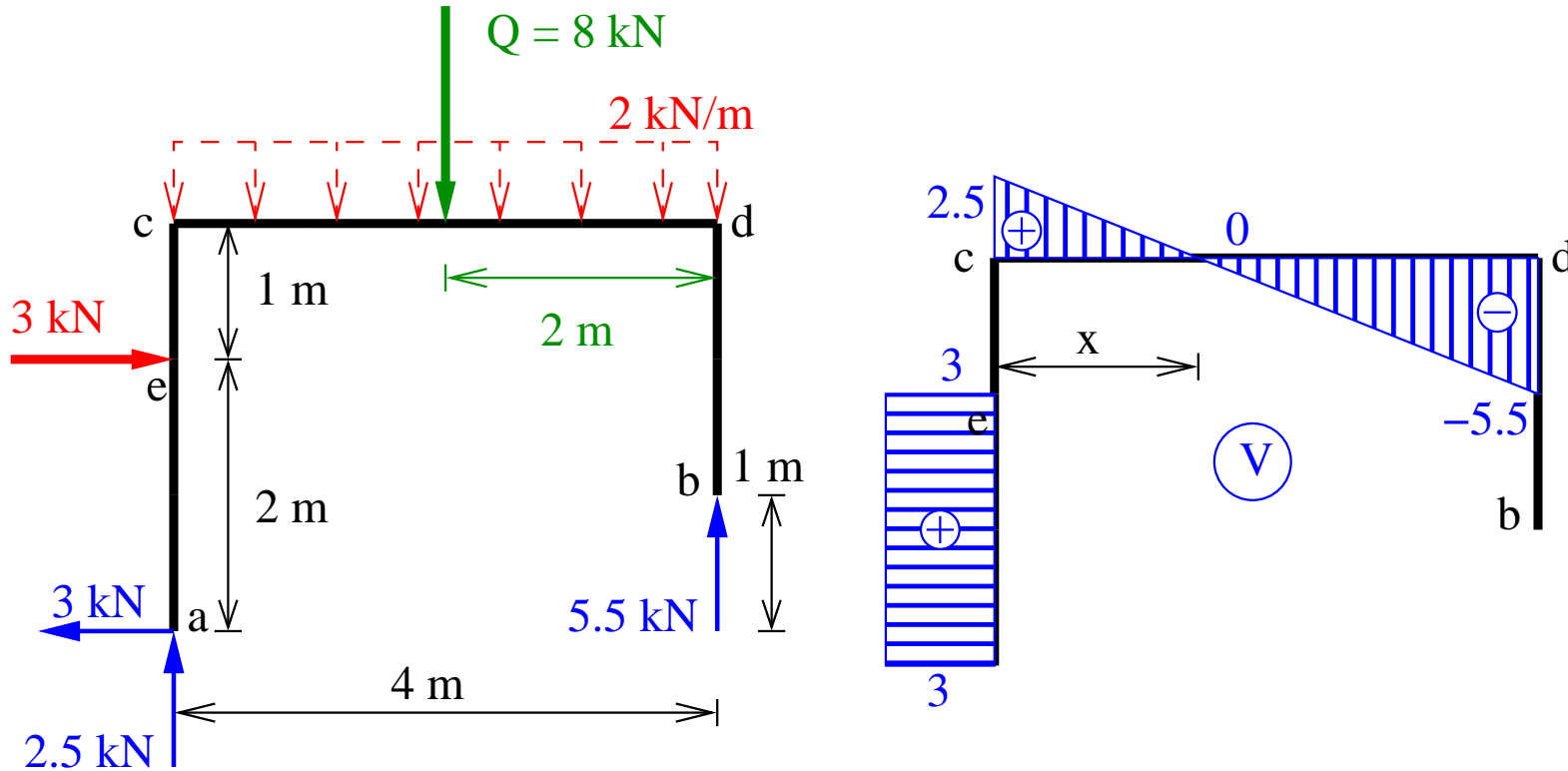
Lomený nosník – příklad 3 (6)

Normálové síly:



Lomený nosník – příklad 3 (7)

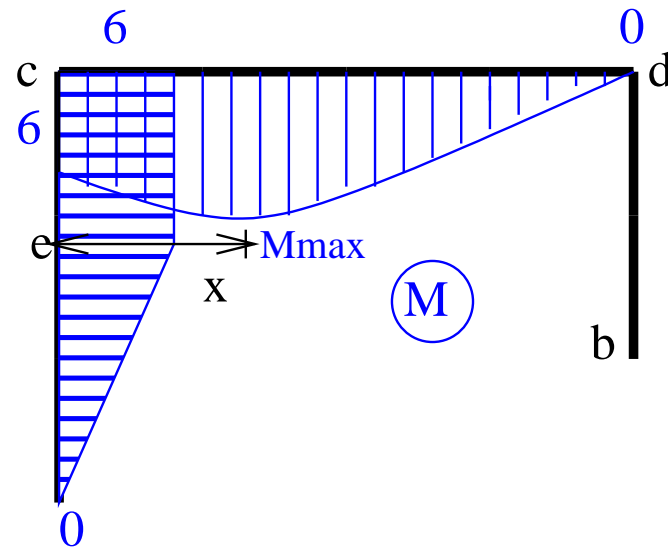
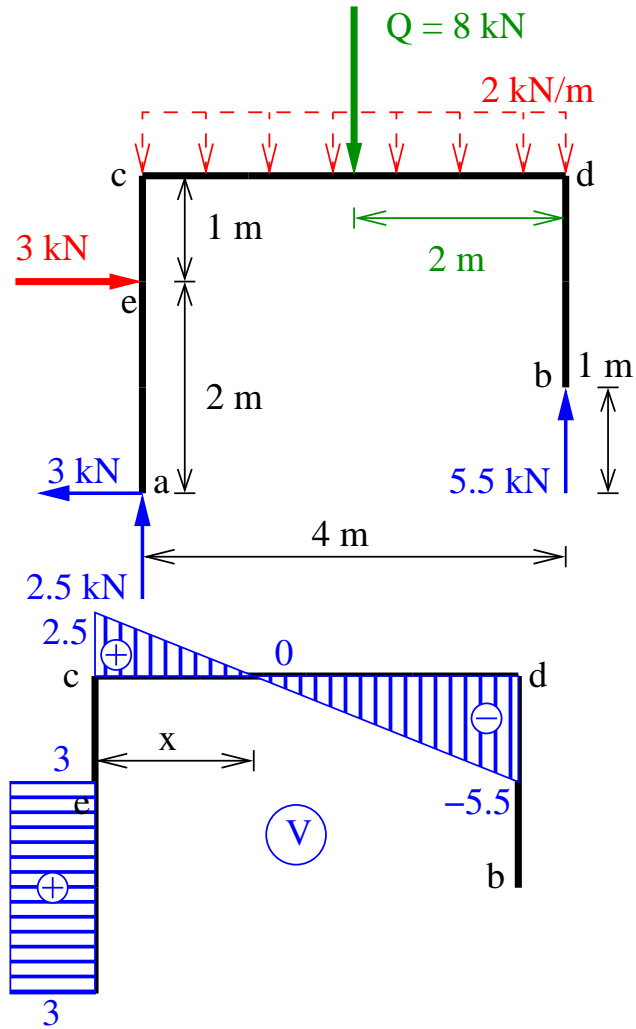
Posouvající síly:



$$\frac{x}{2,5} = \frac{4}{8} \Rightarrow x = 2,5 \times \frac{4}{8} = 1,25 \text{ m}$$

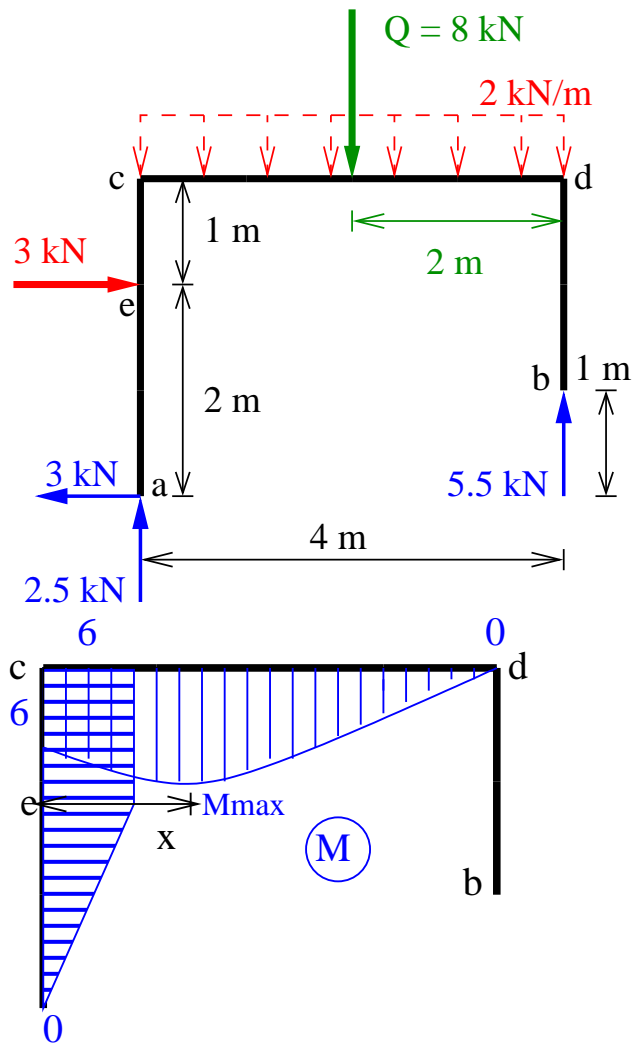
Lomený nosník – příklad 3 (8)

Ohybové momenty:



Lomený nosník – příklad 3 (9)

Ohybové momenty – $M_x = M_{max}$:

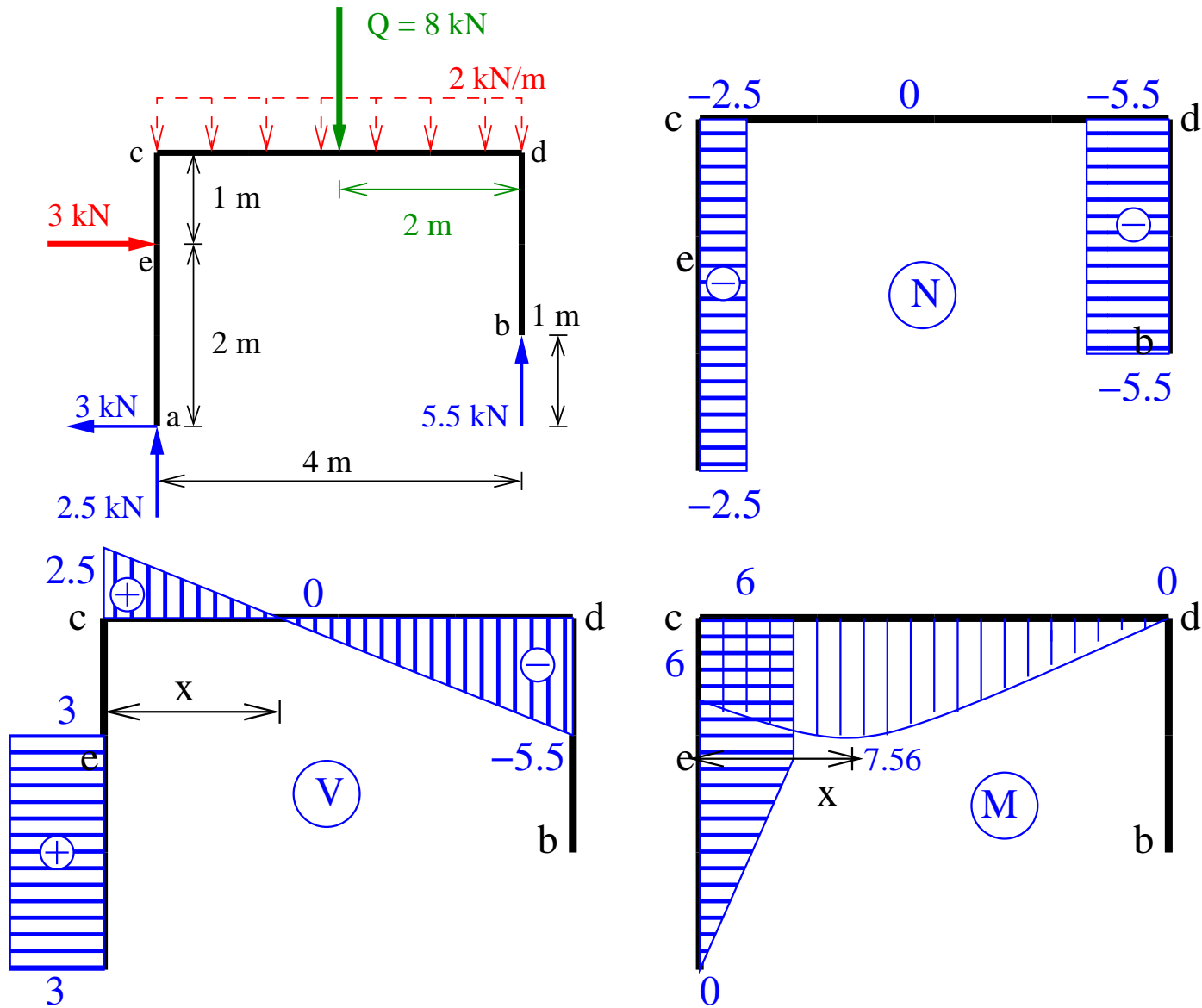


$$M_x = (4-x) \times R_{b,z} - q \times (4-x) \times \frac{4-x}{2}$$

$$M_x = (4-1,25) \times 5,5 - 2 \times \frac{(4-1,25)^2}{2}$$

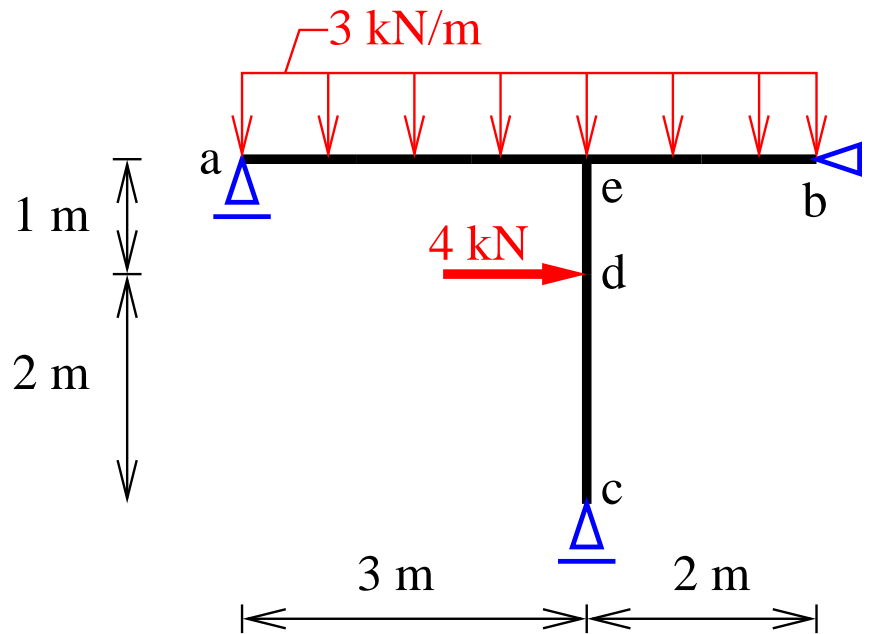
$$M_x = M_{max} = 7,56 \text{ kNm}$$

Lomený nosník – příklad 3 (10)



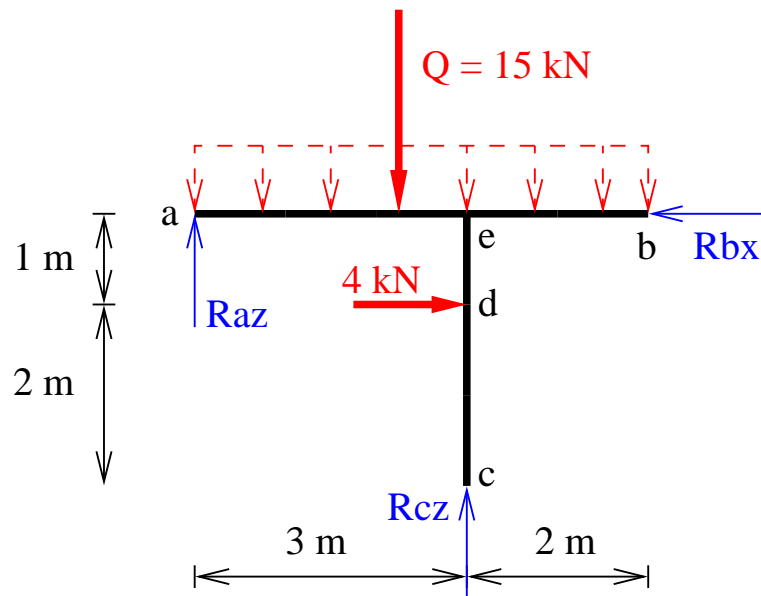
Lomený nosník – příklad 4 (1)

Stanovte reakce a vnitřní síly uvedeného staticky určitého lomeného nosníku.



Pozn.: v bodě **e** a se stýkají 3 pruty (tzv. trojný styčník).

Lomený nosník – příklad 4 (2)



Náhradní břemeno:

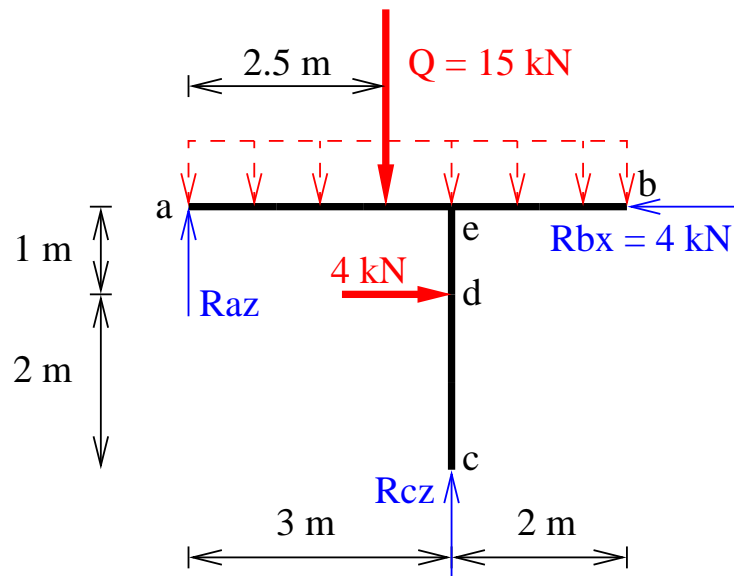
$$Q = q \times L = 3 \times 5 = 15 \text{ kN}$$

Vodorovná reakce:

$$\sum_{i=1}^n F_{i,x} = 0 :$$
$$4 - R_{ax} = 0$$

$$R_{ax} = 4 \text{ kN} (\leftarrow)$$

Lomený nosník – příklad 4 (3)



Momentová podmínka k bodu **a**:

$$\sum_{i=1}^n M_{i,a} = 0 :$$

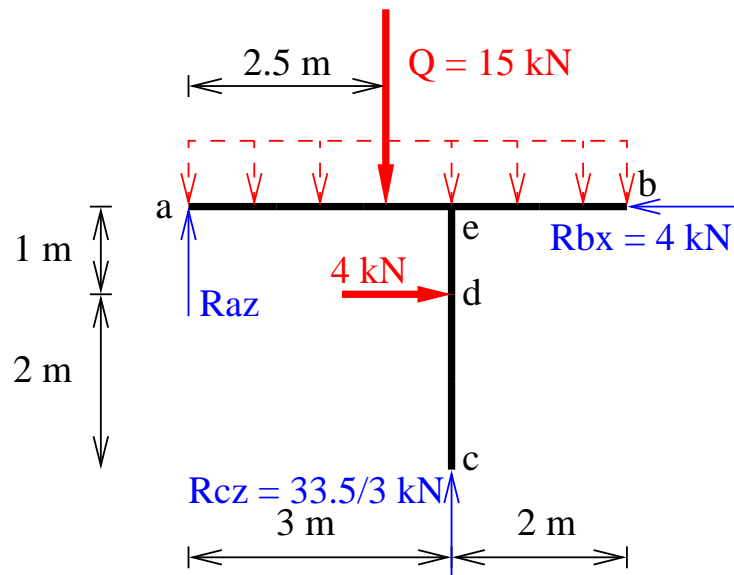
$$4 \times 1 - Q \times 2,5 + R_{cz} \times 3 = 0$$

$$4 \times 1 - 15 \times 2,5 + R_{cz} \times 3 = 0$$

$$R_{cz} = \frac{1}{3}(15 \times 2,5 - 4 \times 1)$$

$$R_{cz} = \frac{33,5}{3} = 11,167 \text{ kN}(\uparrow)$$

Lomený nosník – příklad 4 (4)



Momentová podmínka k bodu **e**:

$$\sum_{i=1}^n M_{i,e} = 0 :$$

$$-R_{az} \times 3 + Q \times 0,5 + 4 \times 1 = 0$$

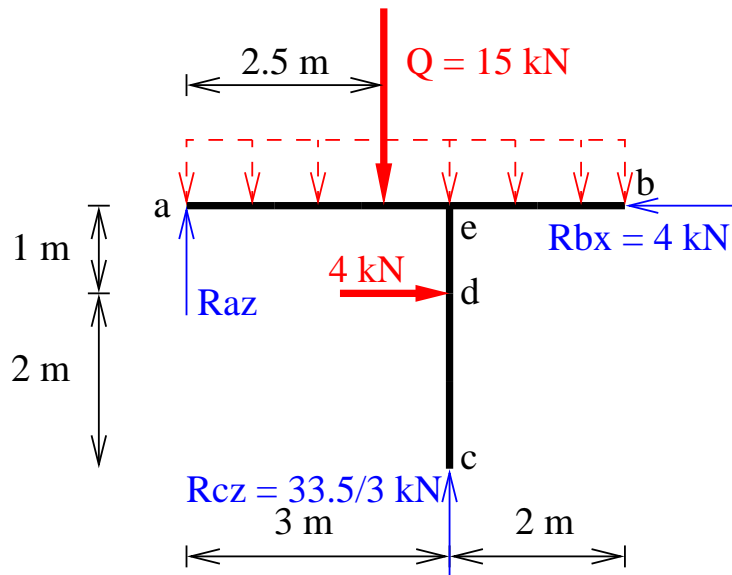
$$R_{az} = \frac{1}{3}(15 \times 2,5 + 4 \times 1)$$

$$R_{cz} = \frac{11,5}{3} = 3,833 \text{ kN}(\uparrow)$$

Pozn.: bodem **e** procházejí paprsky sil R_{bx} i $R_{cz} \Rightarrow$ méně sil k počítání.

Lomený nosník – příklad 4 (5)

Kontrola:



$$\sum_{i=1}^n F_{i,z} = 0 :$$

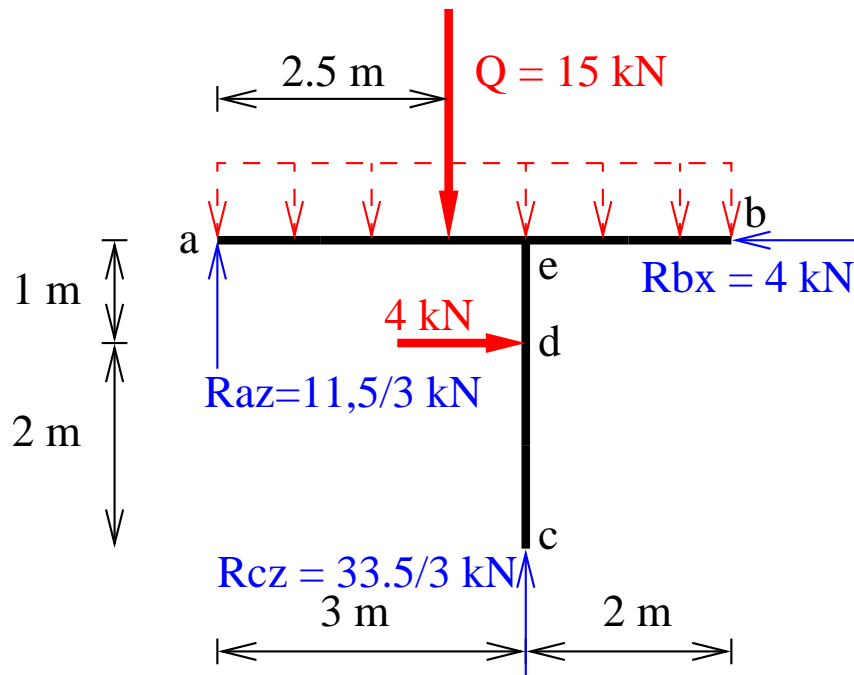
$$R_{az} + R_{cz} - Q = 0$$

$$\frac{11,5}{3} + \frac{33,5}{3} - 15 = 0$$

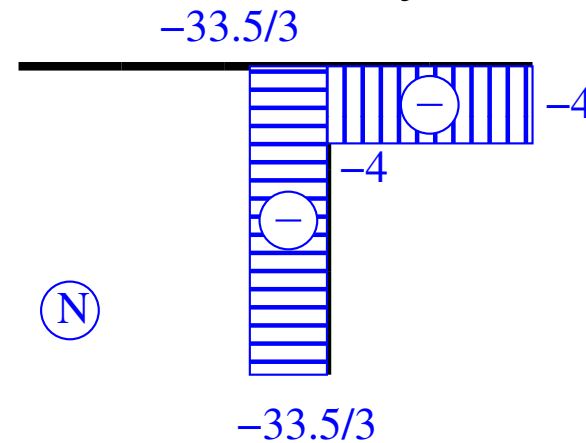
$$\frac{45}{3} - 15 = 0$$

$$0 = 0$$

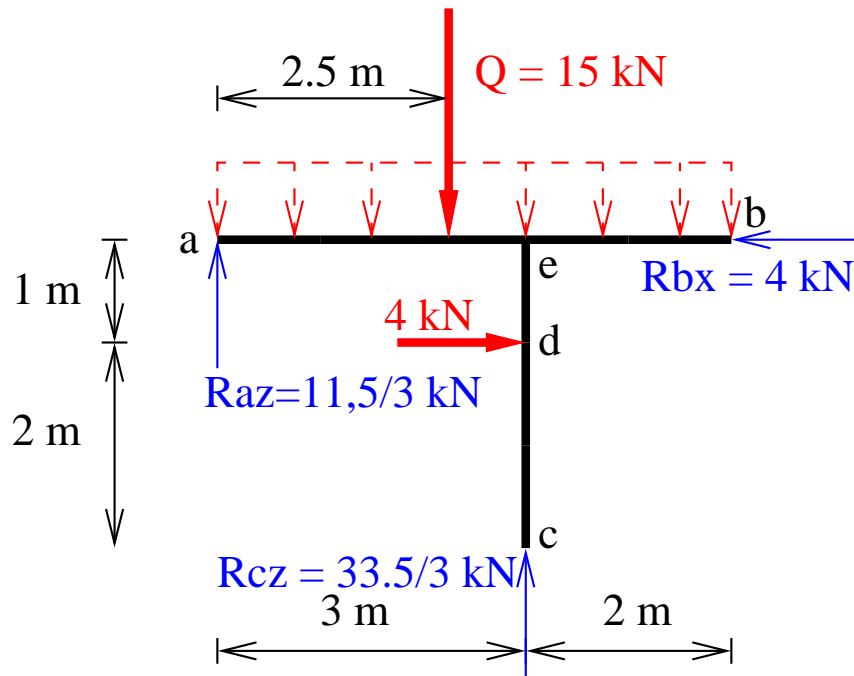
Lomený nosník – příklad 4 (6)



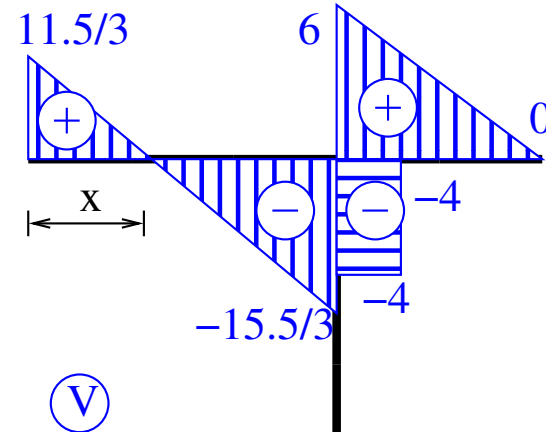
Normálové síly:



Lomený nosník – příklad 4 (7)

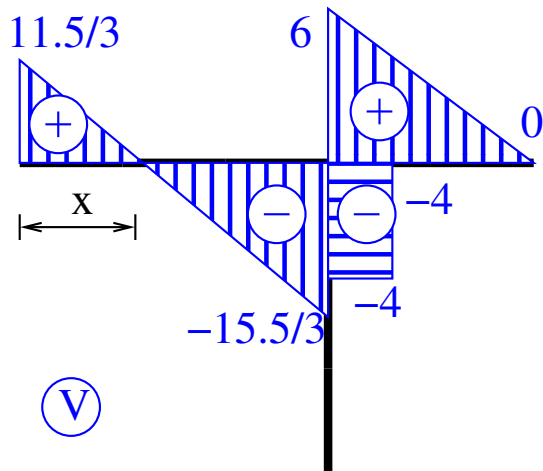


Posouvající síly:

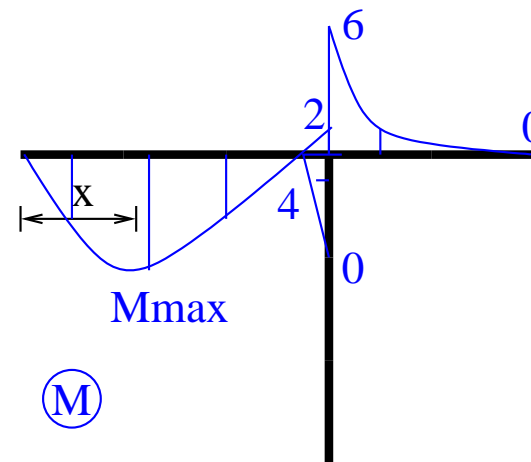


$$\frac{x}{11.5/3} = \frac{3}{9} \Rightarrow x = 1,278\text{ m}$$

Lomený nosník – příklad 4 (8)

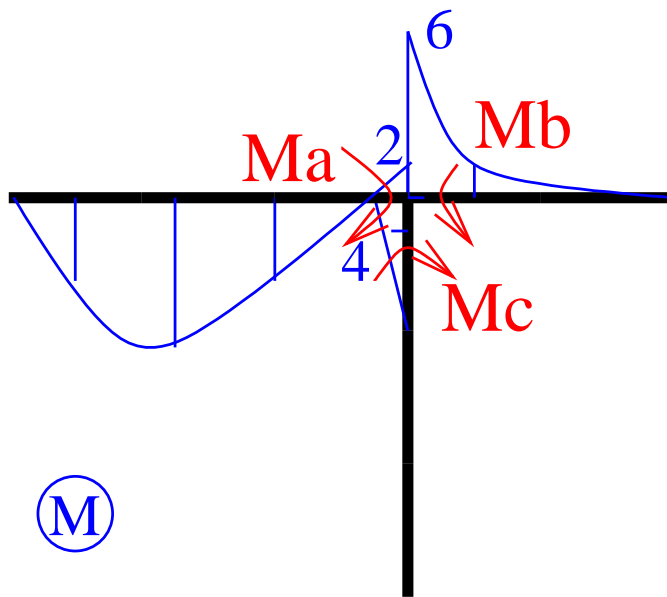


Ohybové momenty:



$$M_x = M_{max} = \frac{11,5}{3} \times x - 3 \times x \times \frac{x}{3} = 2,44 \text{ kNm}$$

Lomený nosník – příklad 4 (9)



Ohybové momenty v bodě **e**
(trojném styčnicku):

$$M_a = -2 \text{ kNm}$$

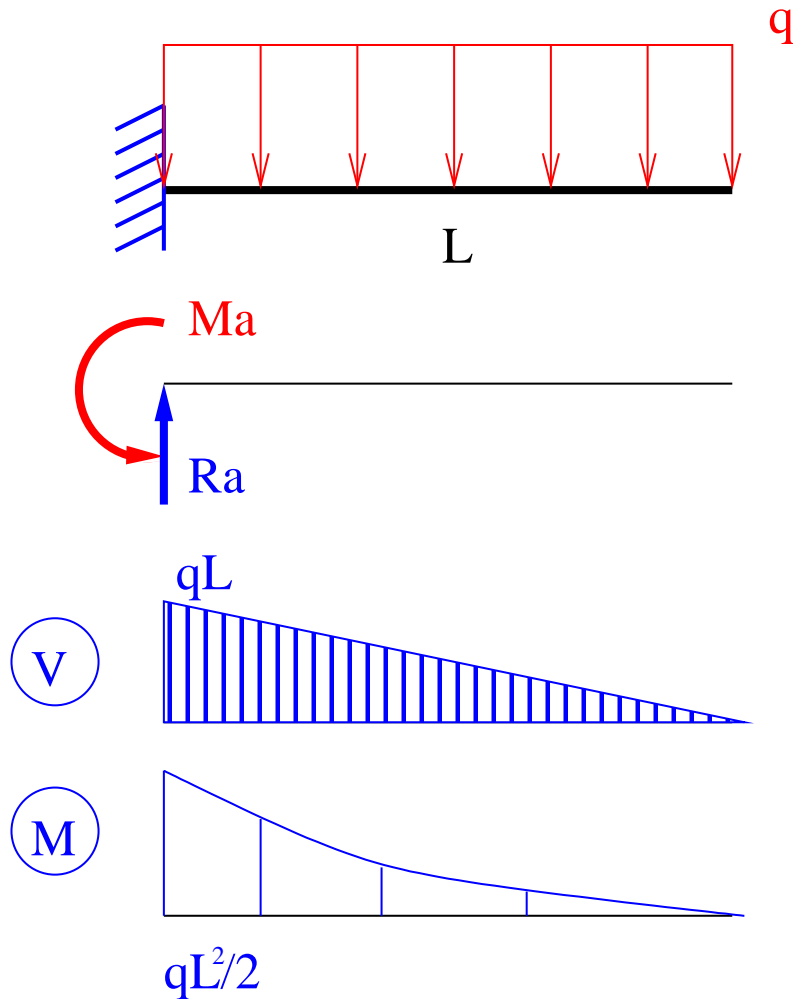
$$M_b = +6 \text{ kNm}$$

$$M_c = -4 \text{ kNm}$$

Musí platit: $\sum_{i=0}^n M_{i,e} = 0$.

$$\text{Vyjde: } M_a + M_b + M_c = -2 + 6 - 4 = 0$$

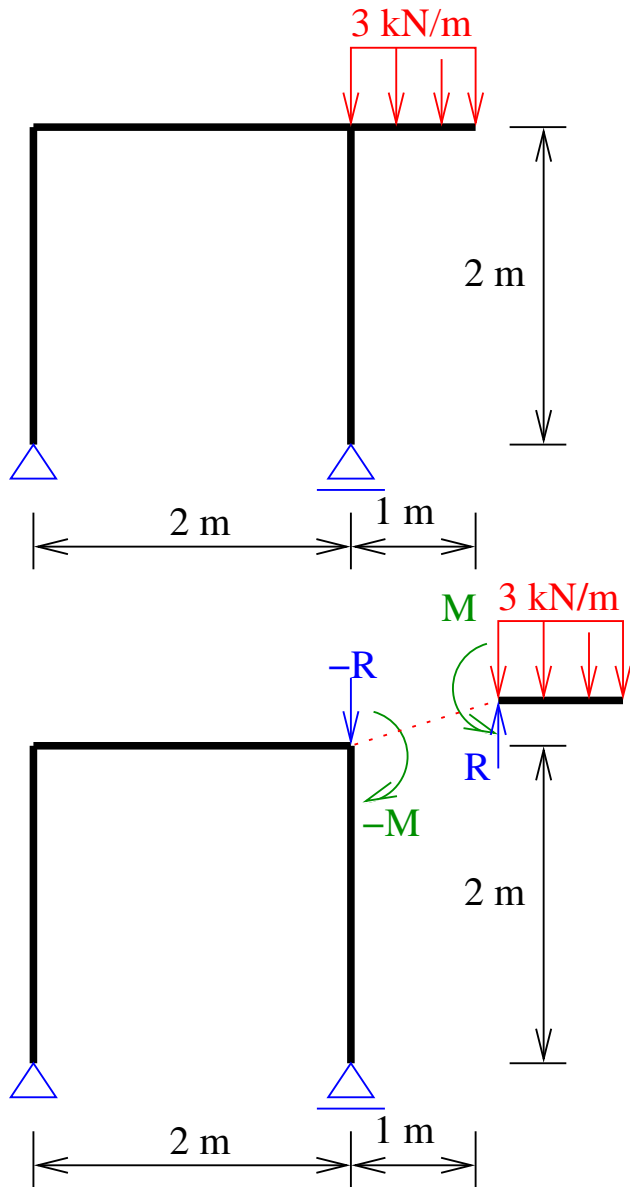
Konzola jako součást rámu (1)



Reakce na konzole:

$$\begin{aligned} \sum M_{i,a} &= 0 : \\ Ma - q \times L \times \frac{L}{2} &= 0 \\ Ma &= \frac{q \times L^2}{2} (\curvearrowleft) \\ \sum F_{i,z} &= 0 : \\ -R_a + q \times L &= 0 \\ R_a &= q \times L (\uparrow) \end{aligned}$$

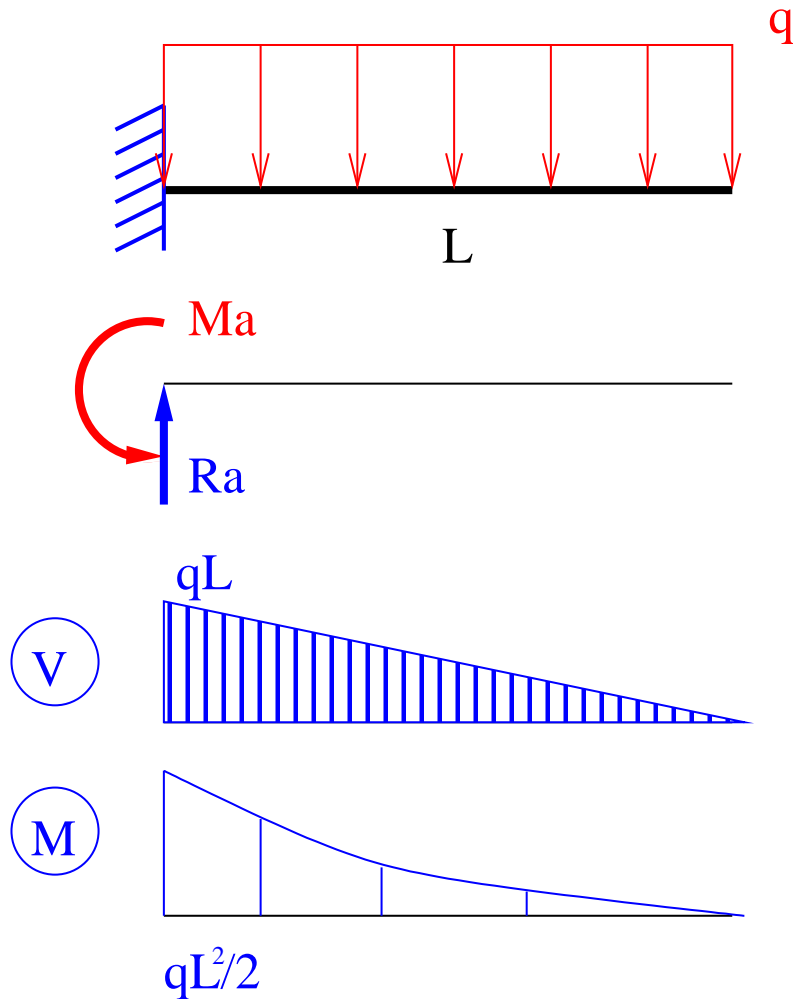
Konzola jako součást rámu (2)



Účinek konzoly na „zbytek“ konstrukce je možné nahradit pomocí **M** a **V**.

Konstrukci potom vyřešíme jako obvykle.

Konzola jako součást rámu (3)



Reakce na konzole:

$$\sum M_{i,a} = 0 :$$

$$M_a + q \times L \times \frac{L}{2} = 0$$

$$M_a + 3 \times 1 \times \frac{1}{2} = 0$$

$$M_a = 1,5 \text{ kNm} (\curvearrowleft)$$

$$\sum F_{i,z} = 0 :$$

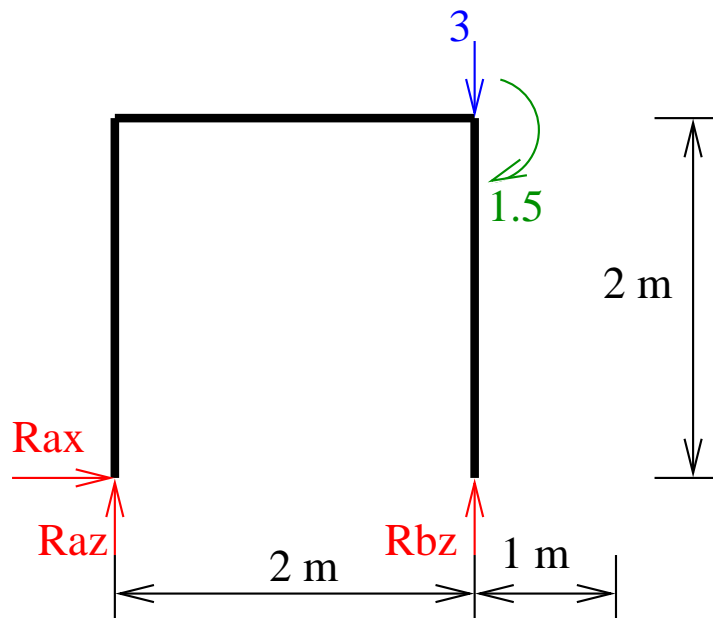
$$-R_a + q \times L = 0$$

$$-R_a + 3 \times 1 = 0$$

$$R_a = 3 \text{ kN} (\uparrow)$$

Konzola jako součást rámu (4)

Reakce:



$$\sum M_{i,a} = 0 :$$

$$R_{bz} \times 2 - 3 \times 2 - 1,5 = 0$$

$$R_{bz} = \frac{1}{2} \times (1,5 + 3 \times 2)$$

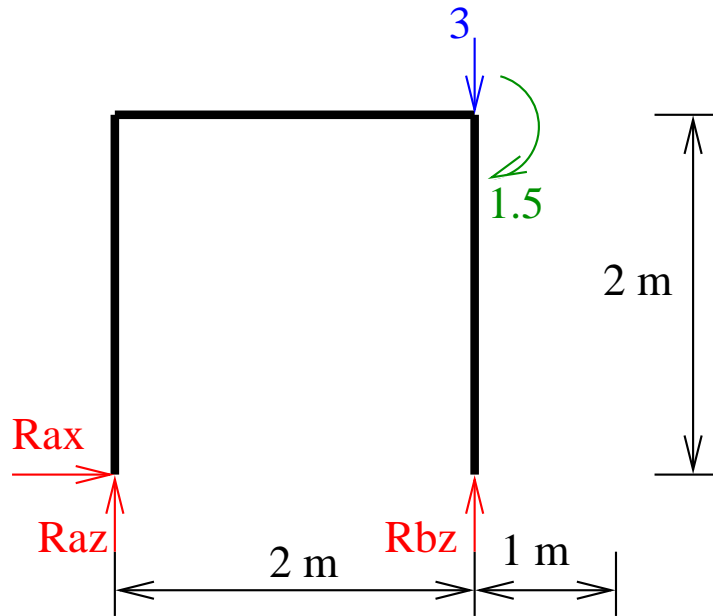
$$R_{bz} = 3,75 \text{ kN}(\uparrow)$$

$$\sum F_{i,x} = 0 :$$

$$R_{ax} = 0$$

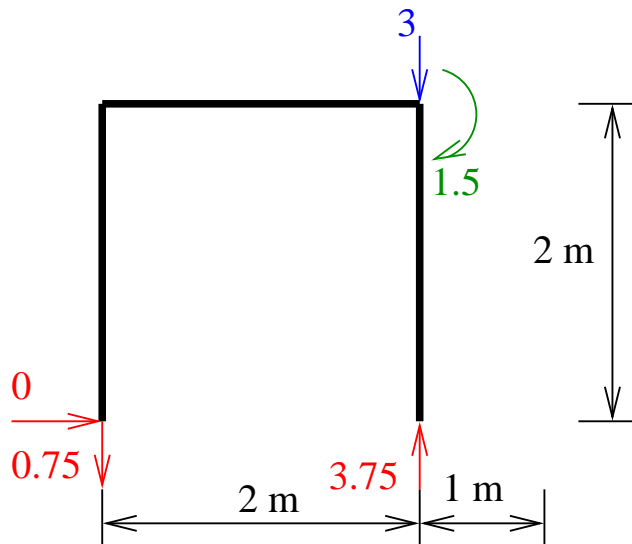
$$R_{ax} = 0 \text{ kN}$$

Konzola jako součást rámu (5)



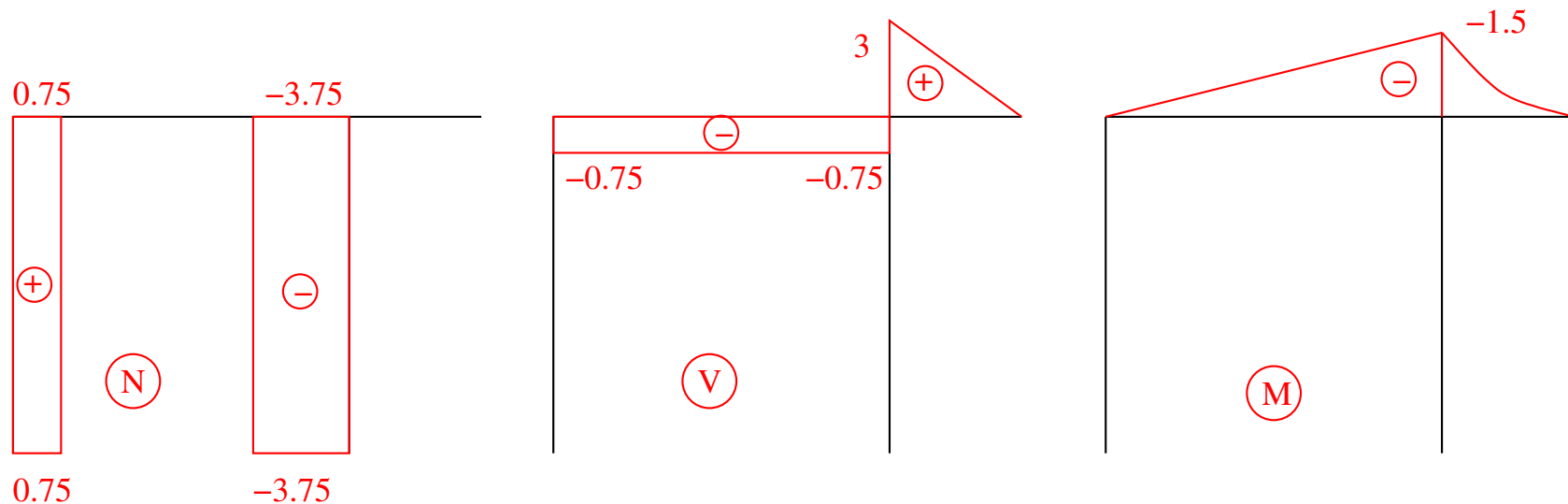
$$\begin{aligned} \sum M_{i,b} &= 0 : \\ -R_{az} \times 2 - 1,5 &= 0 \\ R_{az} &= -\frac{1}{2} \times 1,5 \\ R_{az} &= -0,75 \text{ kN} \\ R_{az} &= 0,75 \text{ kN}(\downarrow) \end{aligned}$$

Kontrola:



$$\begin{aligned} \sum F_{i,z} &= 0 : \\ R_{az} - R_{bz} + 3 &= 0 \text{ kN} \\ 0,75 - 3,75 + 3 &= 0 \text{ kN} \\ 0 &= 0 \text{ kN} \end{aligned}$$

Konzola jako součást rámu (6)



Průběhy na konzole můžeme vykreslit jako první a potom doplnit průběhy na ostatních prutech....