VYSOKÁ ŠKOLA BÁŇSKÁ – TECHNICKÁ UNIVERZITA OSTRAVA

FAKULTA STAVEBNÍ

Základy stavební mechaniky

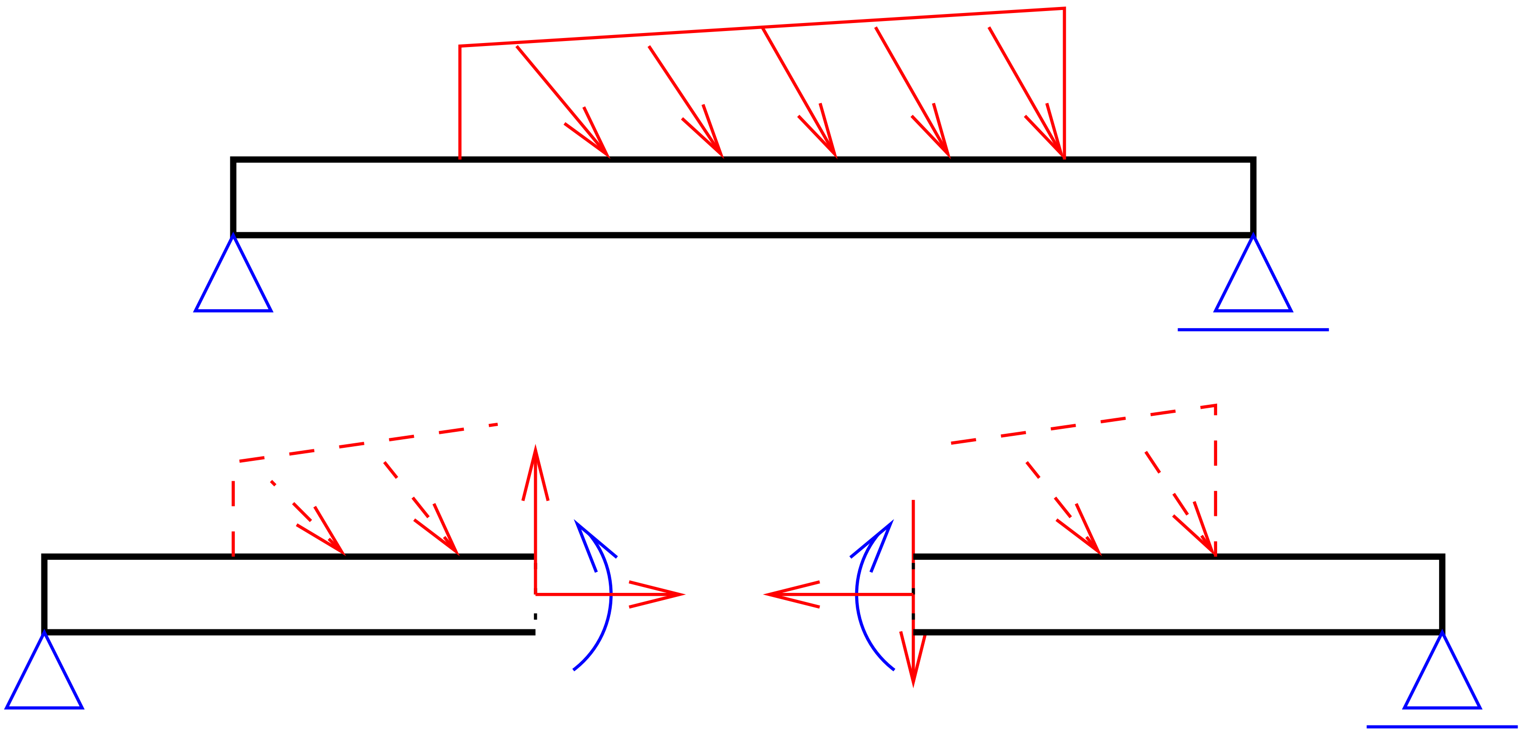
Vnitřní síly na nosnících

Jiří Brožovský

Kancelář: LP – H 406/3
Telefon: 597 321 321
E-mail: jiri.brozovsky@vsb.cz

Vnitřní síly nosníku? (1)

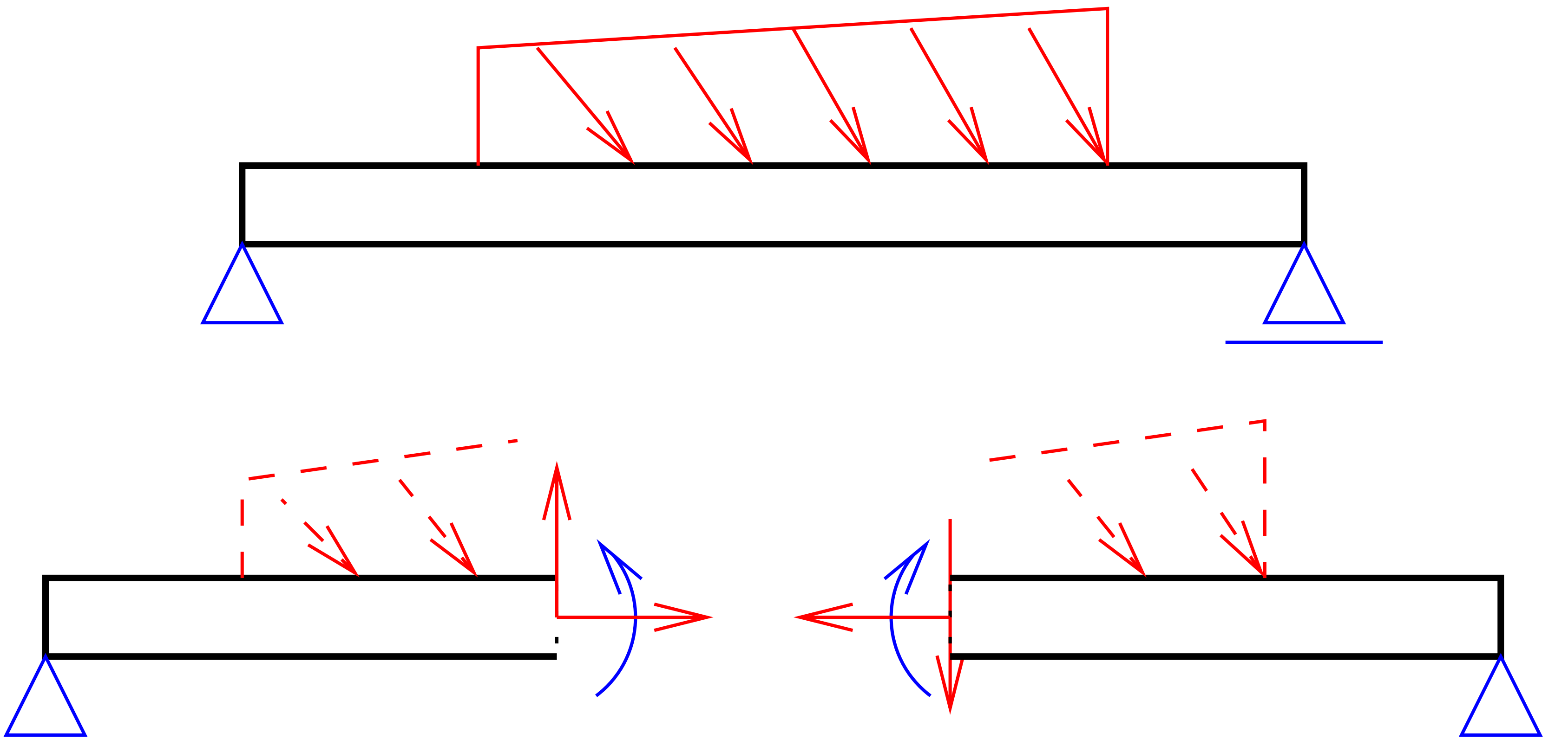
Vnější zatížení vyvolává účinky ,,uvnitř" konstrukce (nosníku) – **vnitřní síly**.



Tedy vnitřní síly působí ,,proti" účinkům zatížení.

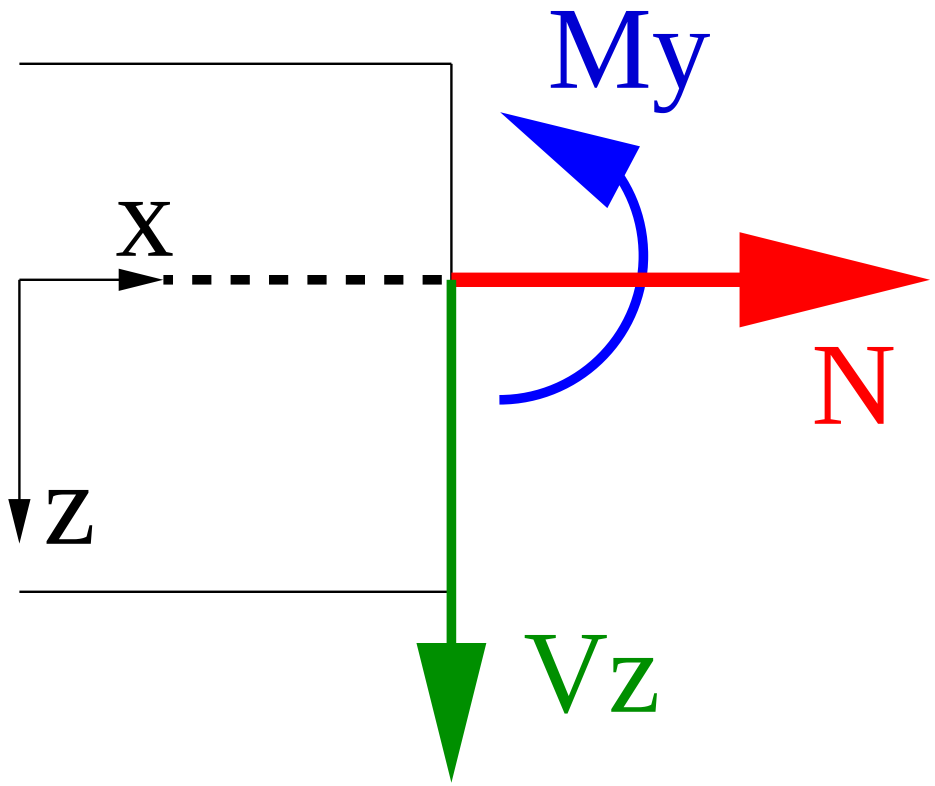
Vnitřní síly nosníku? (2)

Pro představu myšleně „rozřízněme“ nosník:



Síly v „řezu“: viz výslednice rovinné soustavy sil.

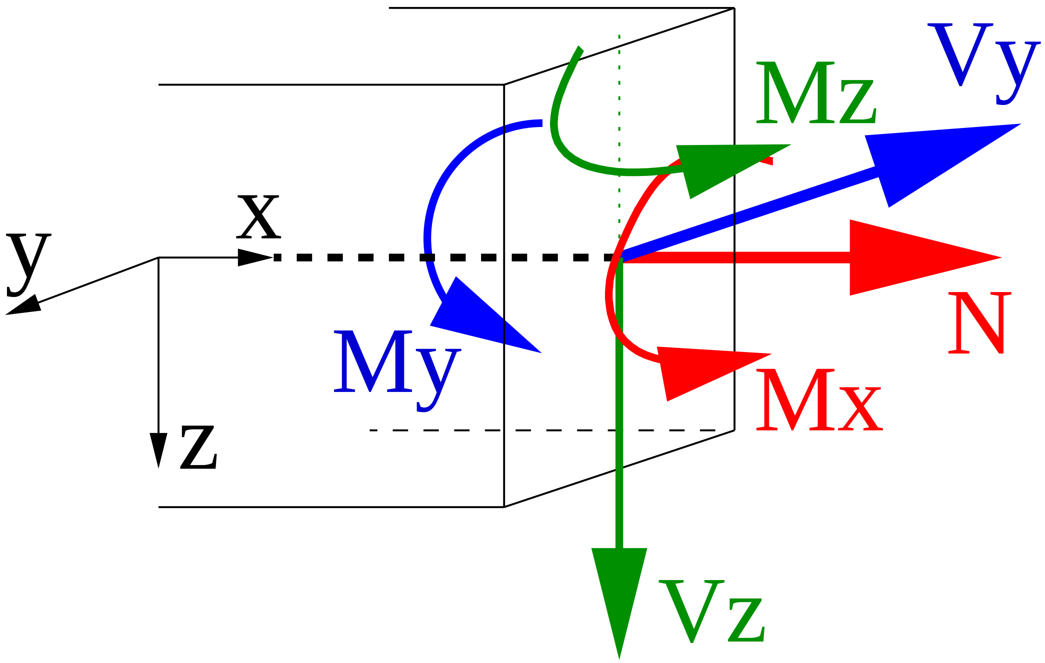
Rovinný nosník (2D, rovina XZ)



- **N** . . . normálová síla
- **V** (Vz) . . . posouvající síla
- **M** (My) . . . ohybový moment

Celkem 2 síly a 1 moment.

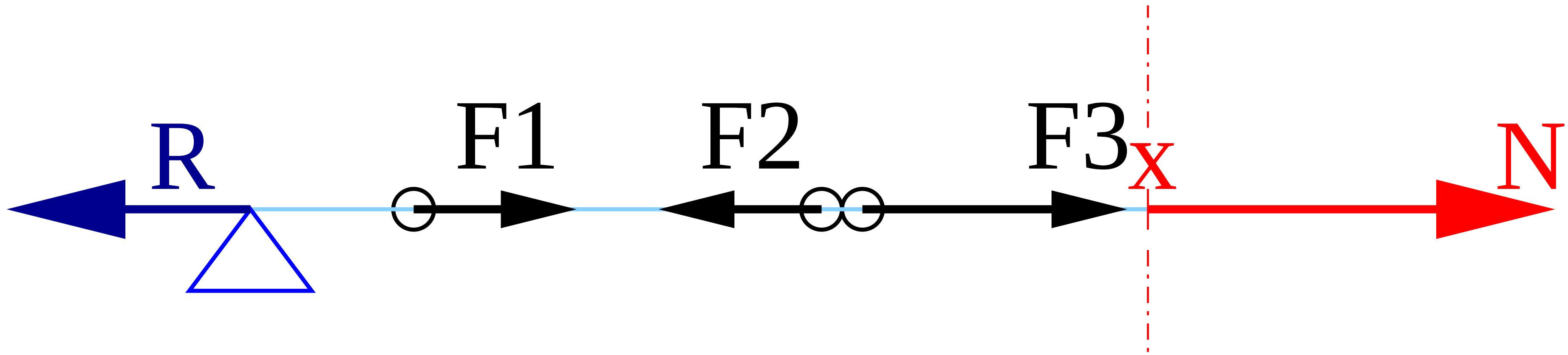
Prostorový nosník (3D)



- N . . . normálová síla
- Vy,   Vz   . . . posouvající síly
- Mx . . . krouticí moment
- My, Mz . . . ohybové momenty

Celkem 3 síly a 3 momenty (**6** vnitřních sil).

Normálová síla (osová úloha)



$$N = \sum F_{i,x}$$

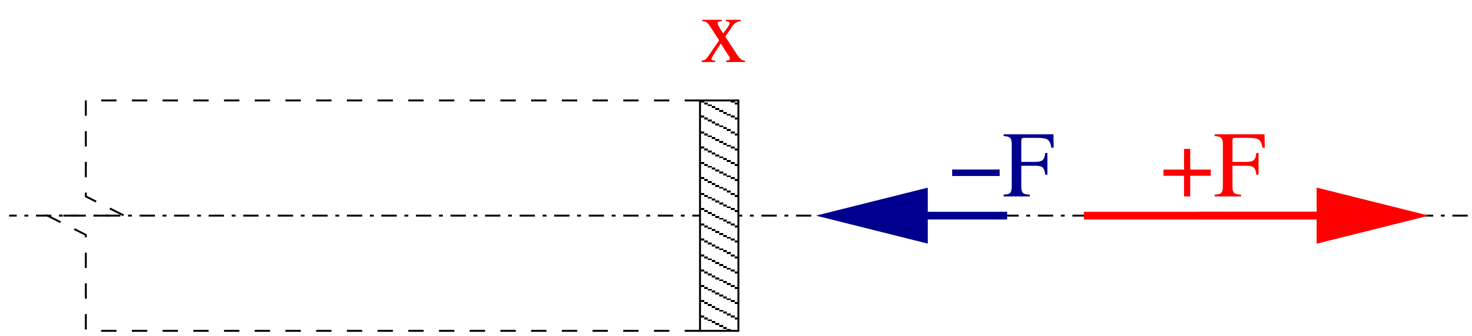
Normálová síla v průřezu **x** se určí jako výslednice všech osových sil působících po jedné straně zadaného průřezu (platí pro obě strany průřezu).

Tedy stejně lze postupovat i zprava – výsledek musí být stejný.

Normálová síla – znaménka

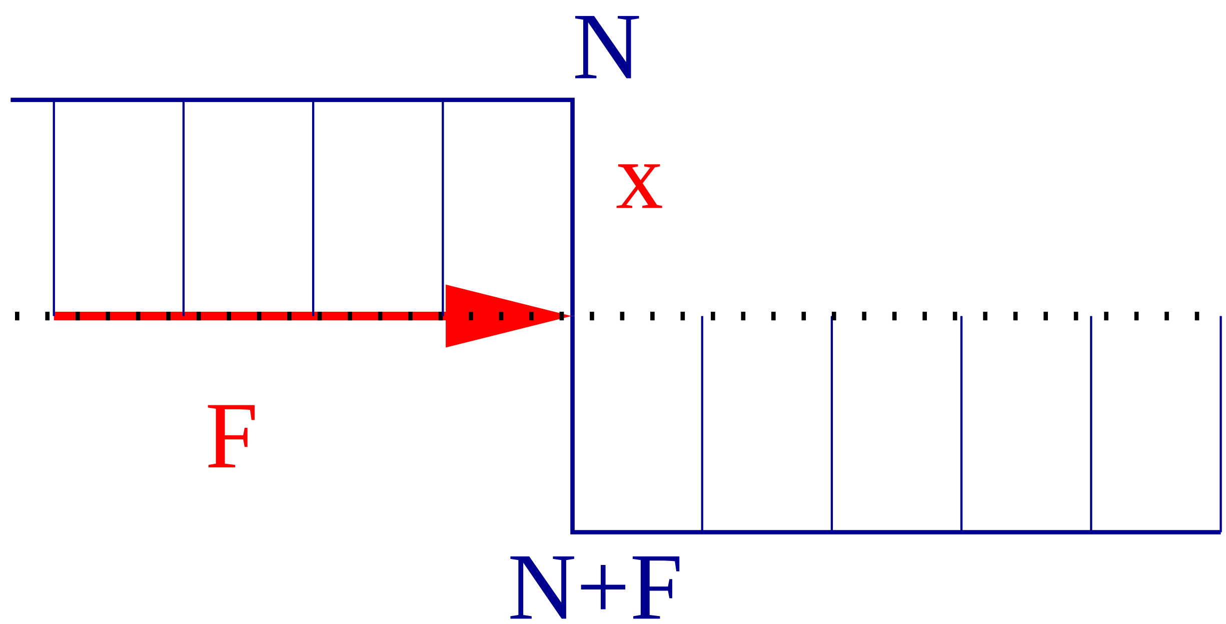
Síla je **kladná** – tahová, působí-li **od** sledovaného průřezu.

Síla je **záporná** – tlaková, působí-li **k** sledovanému průřezu.

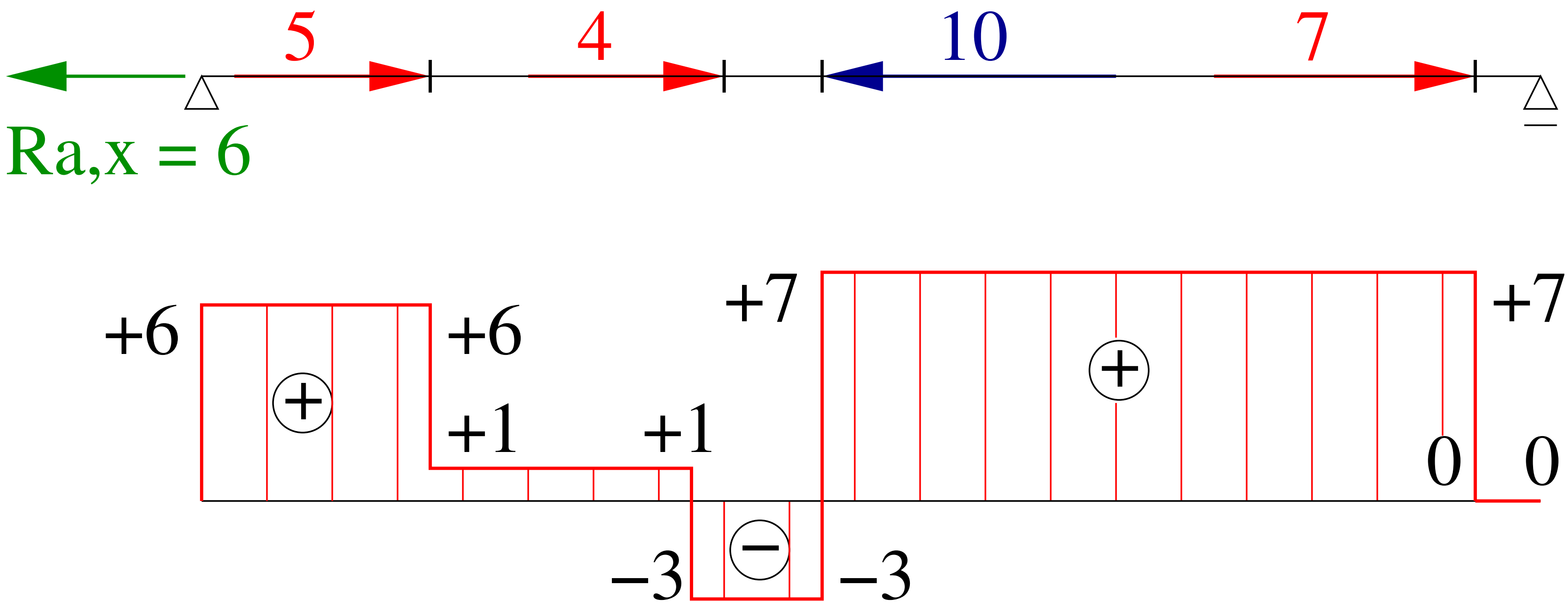


Normálová síla – síla v průřezu

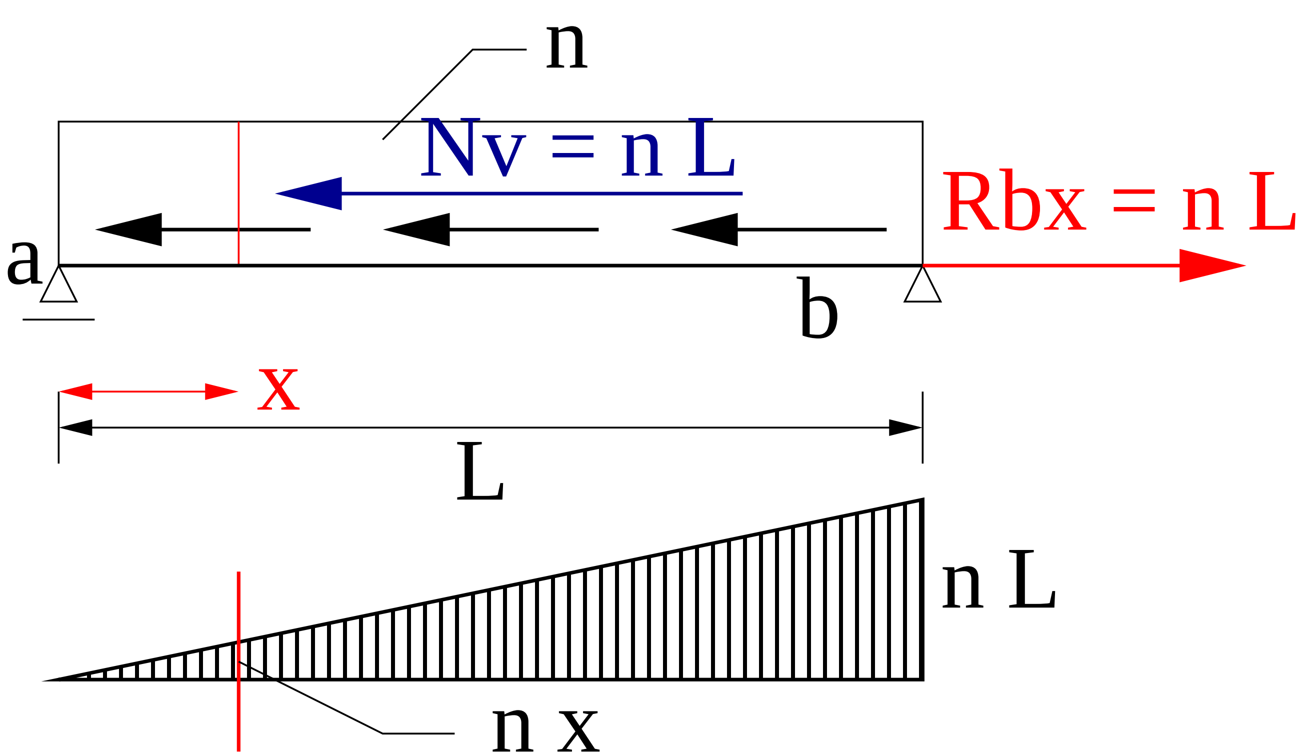
Působí-li zatížení právě ve sledovaném průřezu, pak v něm stanovujeme dvě hodnoty - **před** (N) a **za** (N+F) silou.



Normálová síla – příklad

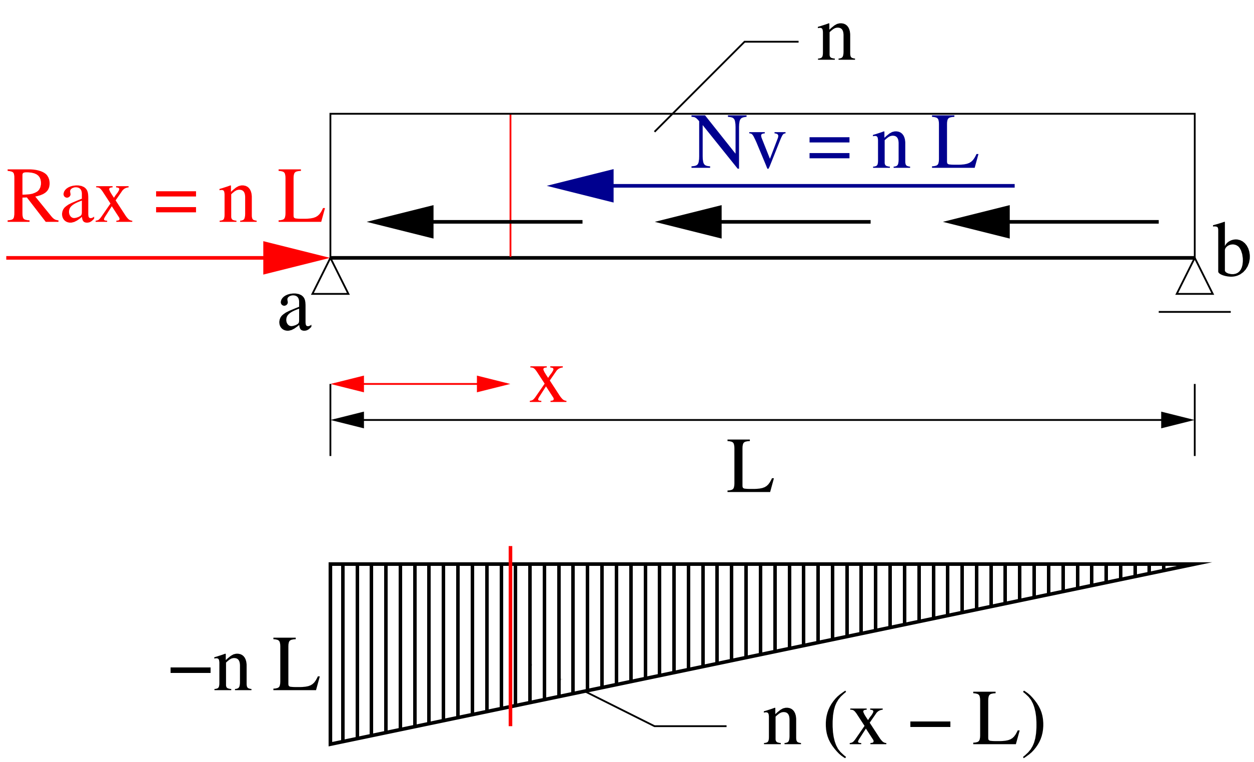


Normálová síla – zatížení (1a)



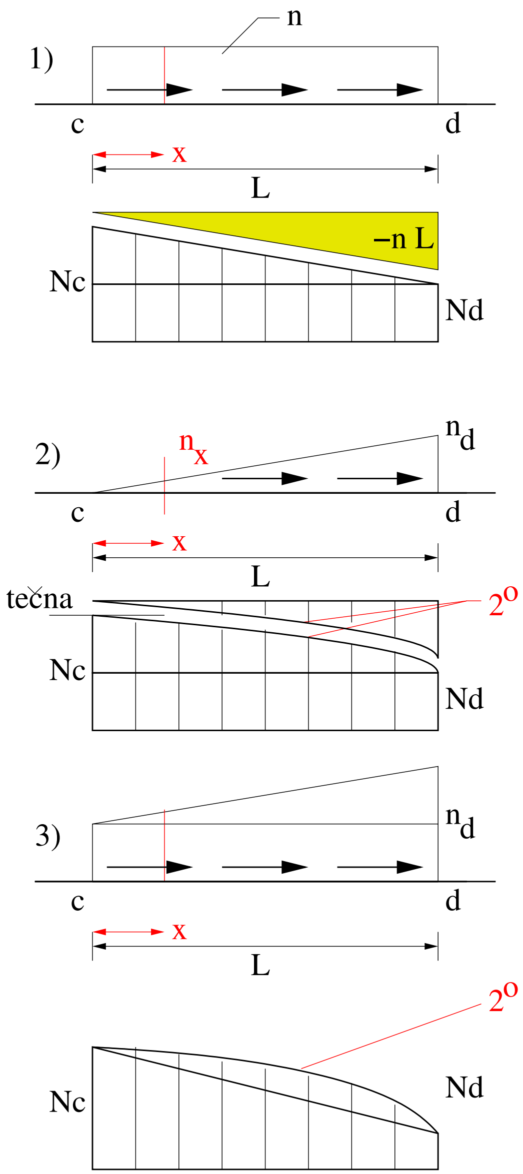
$$N(x) = R(a) + n\,x = 0 + n\,x = n\,x$$

Normálová síla – zatížení (1b)



$$N(x) = -R(a) + n\,x = -n\,L + n\,x = n(x - L)$$

Normálová síla – zatížení (2)



1. Rovnoměrné zatížení:

   n = konst, $N_v = n\ x$,

   $N(x) = N_c - n\ x$

2. Trojúhelníkové zatížení:

   $n_x = n_d \frac{x}{L}$, $N_v = \frac{1}{2}\ x\ n_x$,

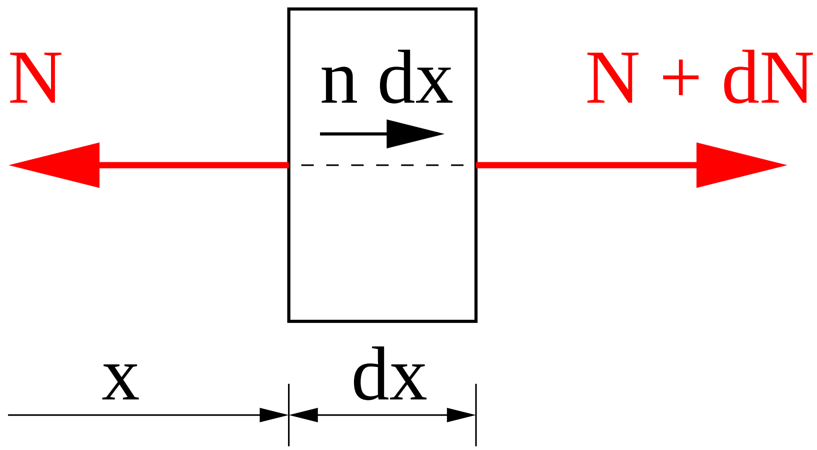
   $N(x) = N_c - \frac{n_d\ x^2}{2\ b}$

3. Lichoběžníkové zatížení:

   součet rovnoměrného a trojúhelníkového:

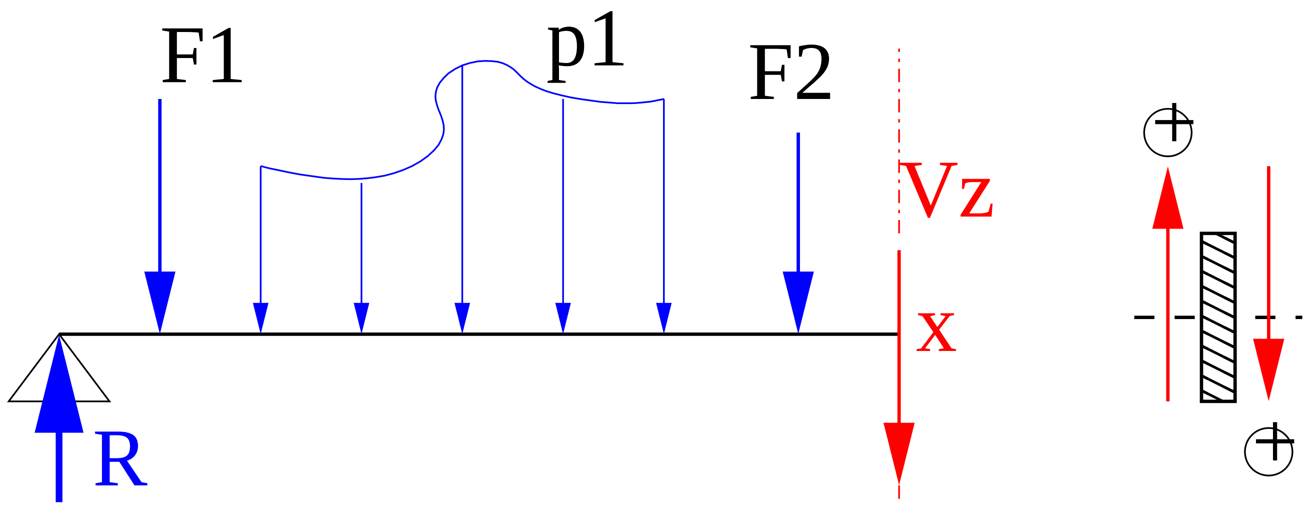
   $N(x) = N_c - \frac{n_d\ x^2}{2\ b} - n\ x$

Diferenciální podmínky rovnováhy pro N



$$\sum F_x = 0 : -N + (N + dN) + n\,dx = 0 \Rightarrow \frac{dN}{dx} = -n$$

Posouvající síla

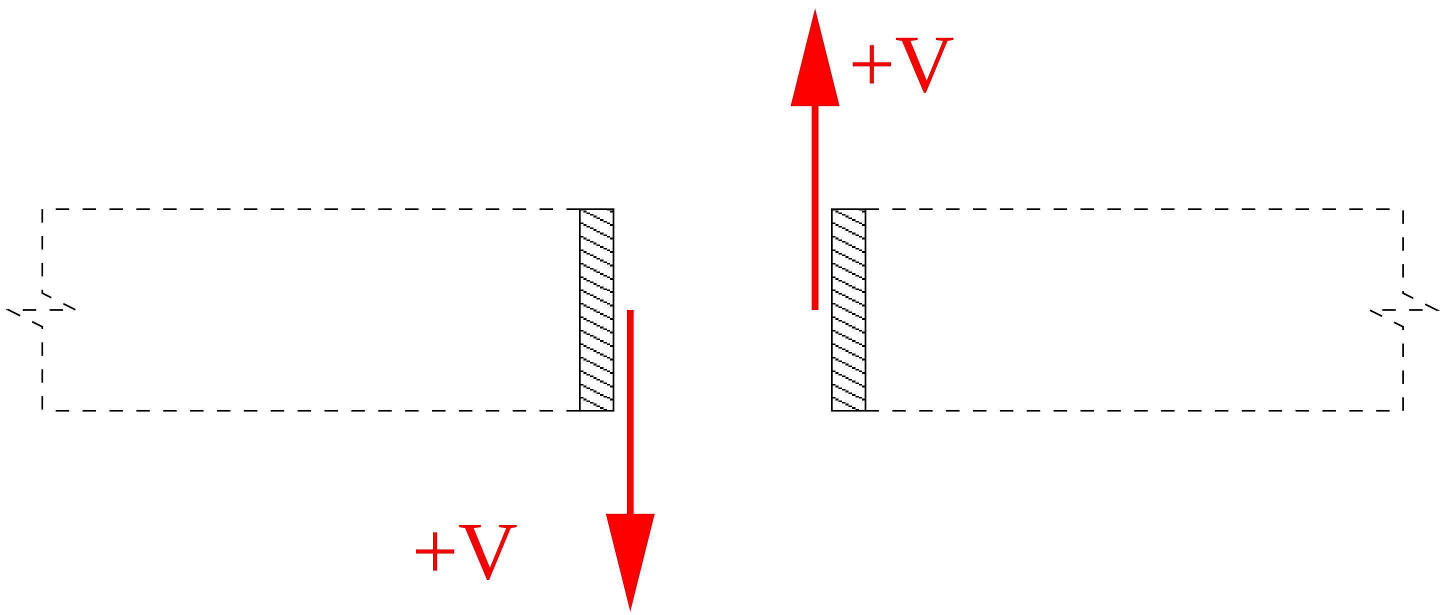


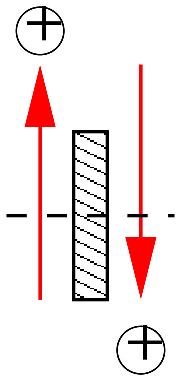
$$V_z(x) = v(x) = \sum F_{i,z}$$

Posouvající síla v průřezu **x** se určí jako výslednice všech příčných sil působících po jedné straně zadaného průřezu (platí pro obě strany průřezu).

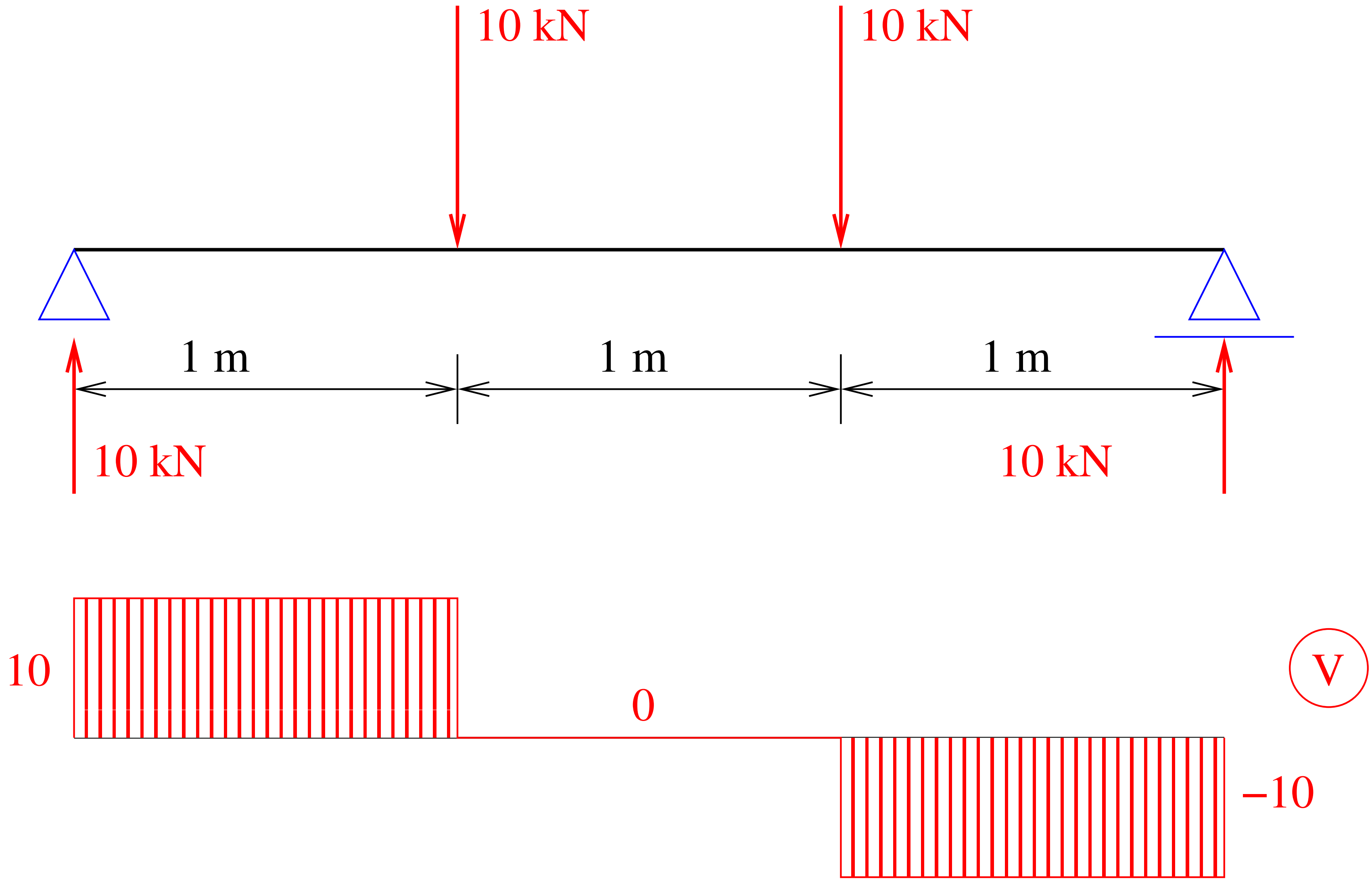
Tedy stejně lze postupovat i zprava – výsledek musí být stejný.

Posouvající síla – konvence

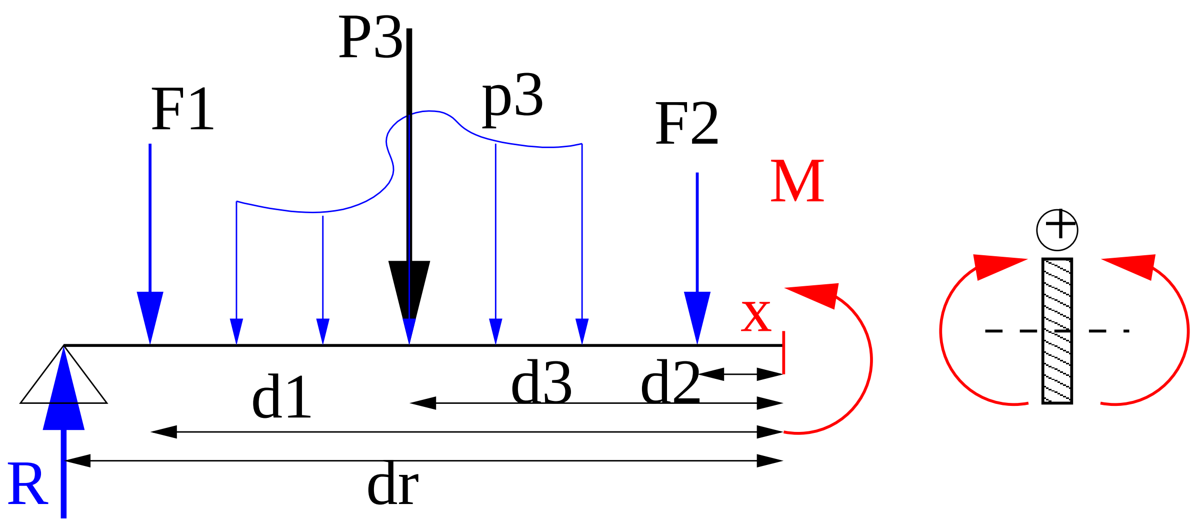




Posouvající síla – příklad



Ohybový moment

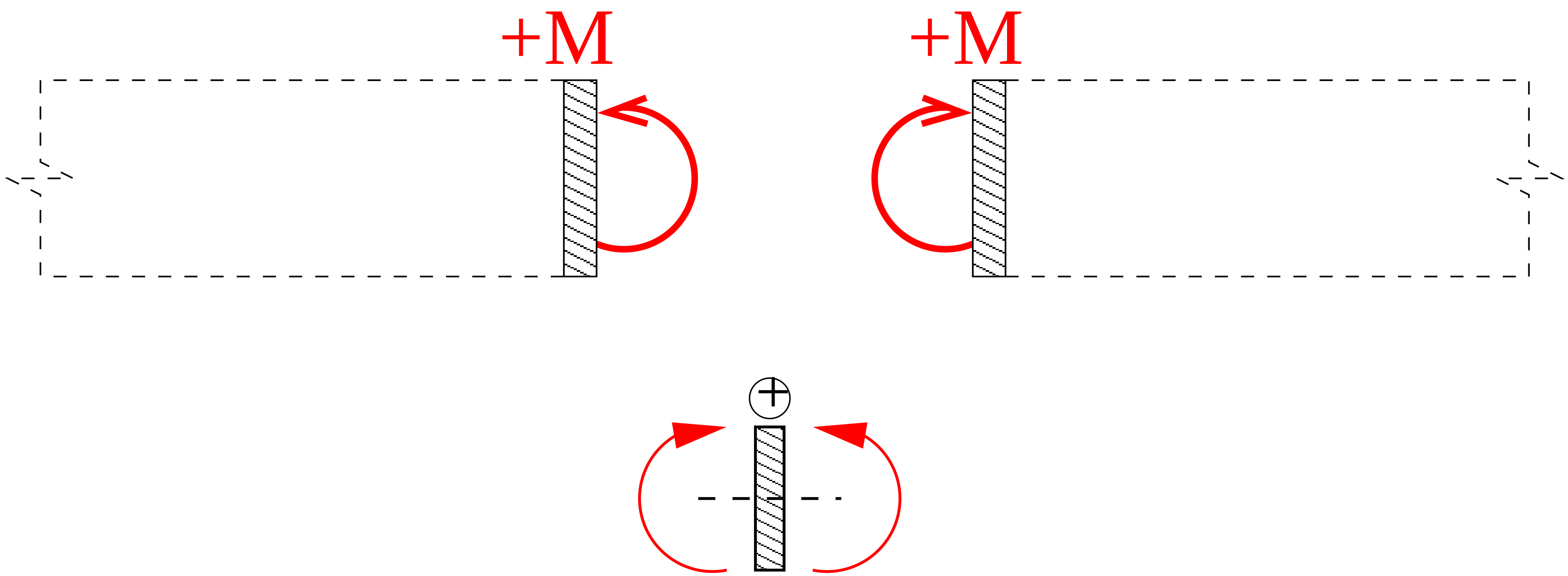


$$M_y(x) = M(x) = \sum F_{i,z}\, d_i$$

Ohybový moment v průřezu **x** se určí jako součet momentů všech příčných sil působících po jedné straně zadaného průřezu (platí pro obě strany průřezu).

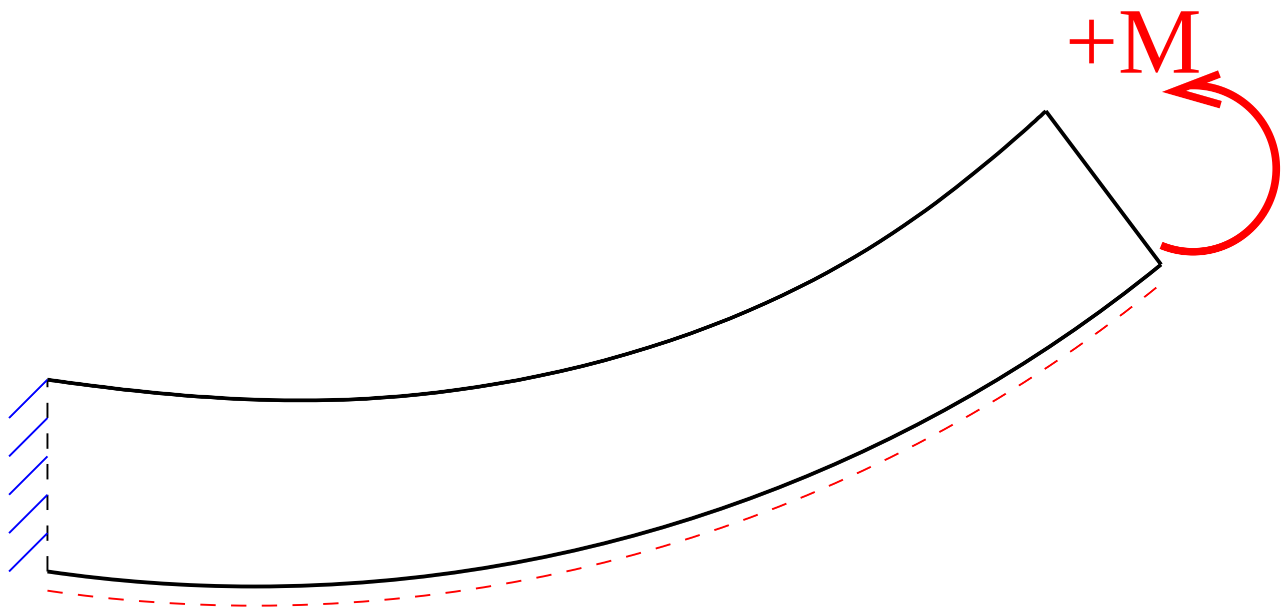
Tedy stejně lze postupovat i zprava – výsledek musí být stejný.

Ohybový moment – konvence (1)



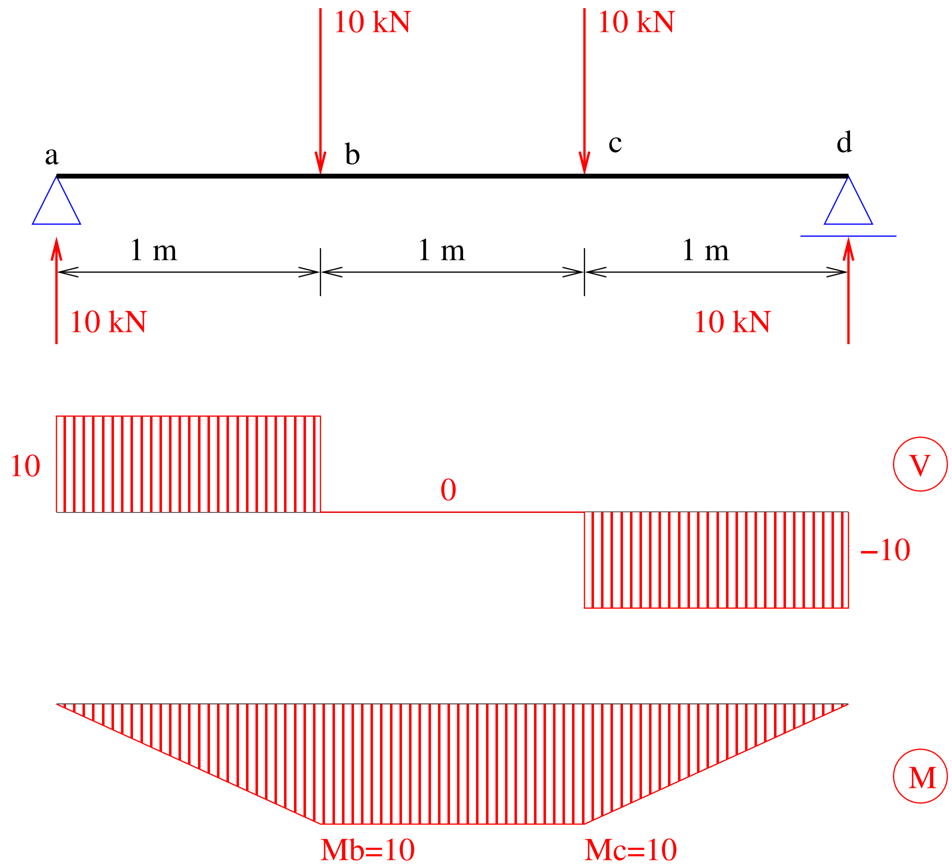
Ohybový moment se považuje za **kladný**, pokud vyvozuje **tah** ve **spodních vláknech** nosníku.

Ohybový moment – konvence (2)



Ohybový moment se považuje za **kladný**, pokud vyvozuje **tah** ve **spodních vláknech** nosníku.

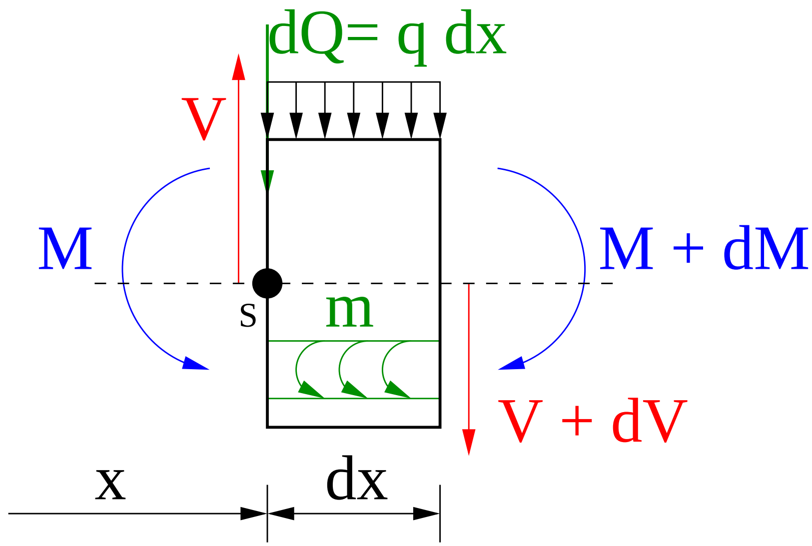
Ohybový moment – příklad



$$M = \sum_{0}^{x} F_i \times d_i \quad [kNm]$$

$$\begin{aligned} M_b &= R_{a,z}\, d_{ab} = 10 \times 1 \\ &= 10\ kNm \\ M_c &= R_{a,z}\, d_{ac} - 10\ d_{bc} \\ &= 10 \times 2 - 10 \times 1 = 10\ kNm \\ M_d &= R_{a,z}\, d_{ad} - 10\ d_{bd} - 10\ d_{cd} \\ &= 10 \times 3 - 10 \times 2 - 10 \times 1 \\ &= 0\ kNm \end{aligned}$$

Diferenciální podmínky rovnováhy pro V a M (k bodu S)



$$\sum F_z = 0 : -V + (V + dV) + q\,dx = 0 \Rightarrow \frac{dV}{dx} = -q$$

$$\sum M_{i.x} = 0 : M - (M + dM) - (V + dV)\,dx + m\,dx = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{dM}{dx} = V - m$$

Poznámka: Výslednice $Q = q\ dx$ je umístěna do počátečního průřezu v souladu se zásadami diferenciálního počtu. Malou hodnotu $(dV\ dx)$ zanedbáme.

Diferenciální podmínky rovnováhy pro V a M (k bodu S)

Schwedlerovy vztahy:

Pro $m = 0$ dostaneme:

$$\frac{dV}{dx} = -q, \quad \Rightarrow \quad V(x) = -\int q(x)\,dx + C_1$$

$$\frac{dM}{dx} = V, \quad \Rightarrow \quad M(x) = \int V(x)\,dx + C_2$$

$$\frac{d^2M}{dx^2} = -q$$

Diferenciální podmínky rovnováhy pro V a M

Extrémy V a M:

Extrém V je v průřezu, kde $q = 0$:

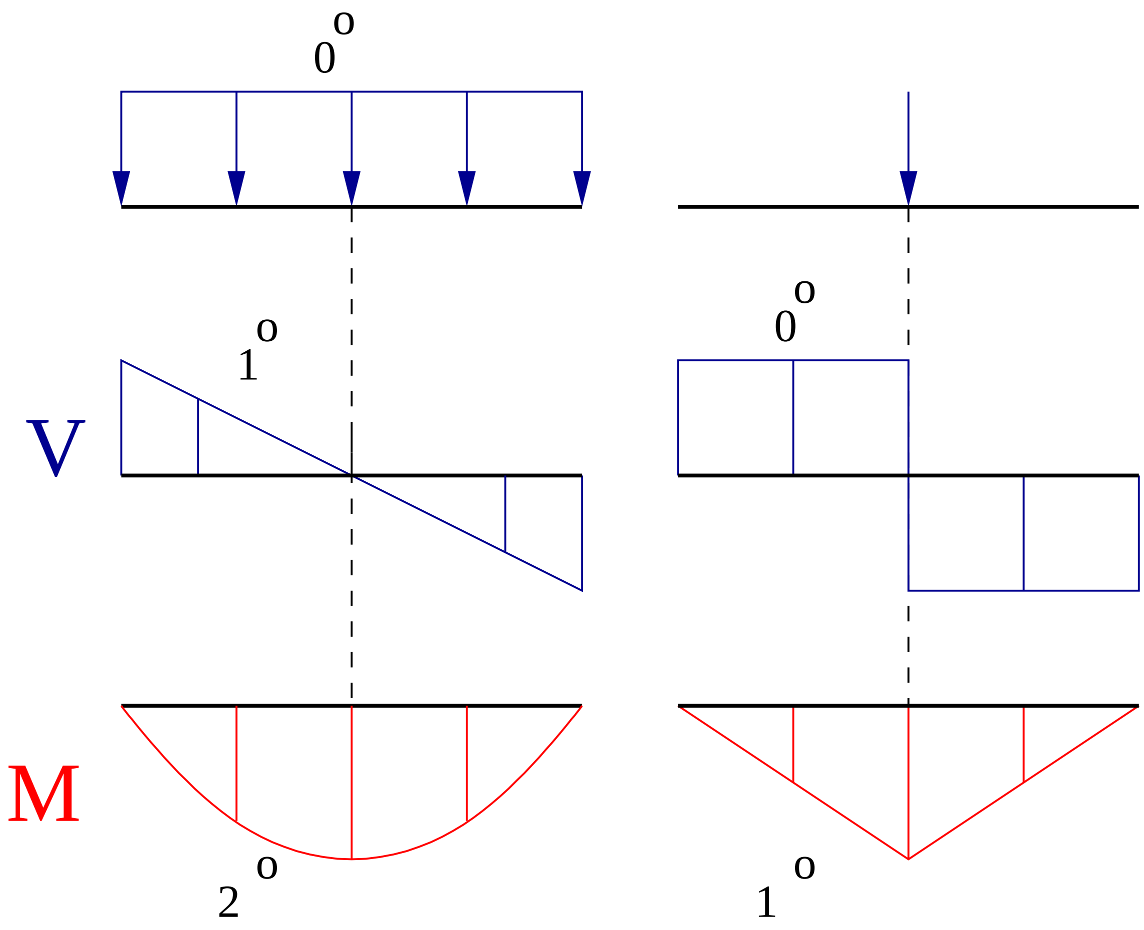
$$\frac{dV}{dx} = -q = 0 \Rightarrow V(x) = -\int q(x)dx + C_1$$

Extrém M je v průřezu, kde $V = 0$ nebo $V = m$ nebo V mění znaménko:

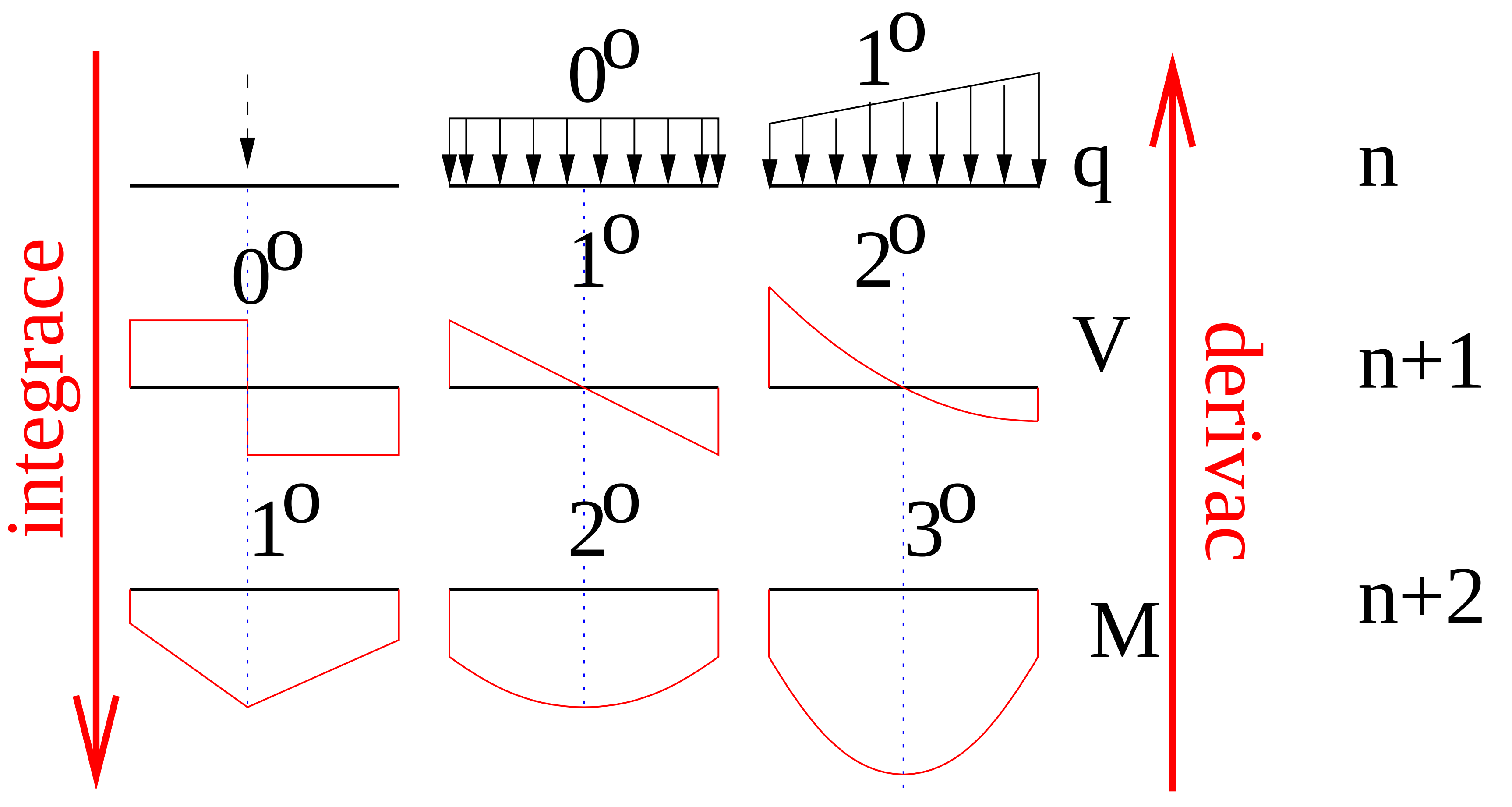
$$\frac{dM}{dx} = V = 0 \Rightarrow \quad M(x) = \int V(x)dx + C_2, m = 0$$

C_1, C_2 určíme z okrajových podmínek: 

Extrém M

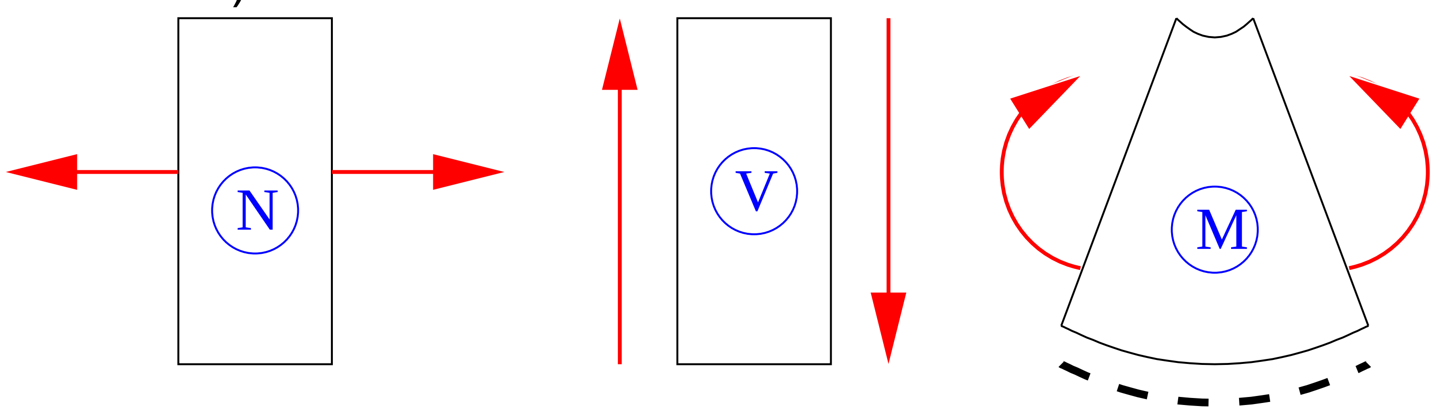


Diferenciální podmínky rovnováhy pro V a M – důsledek

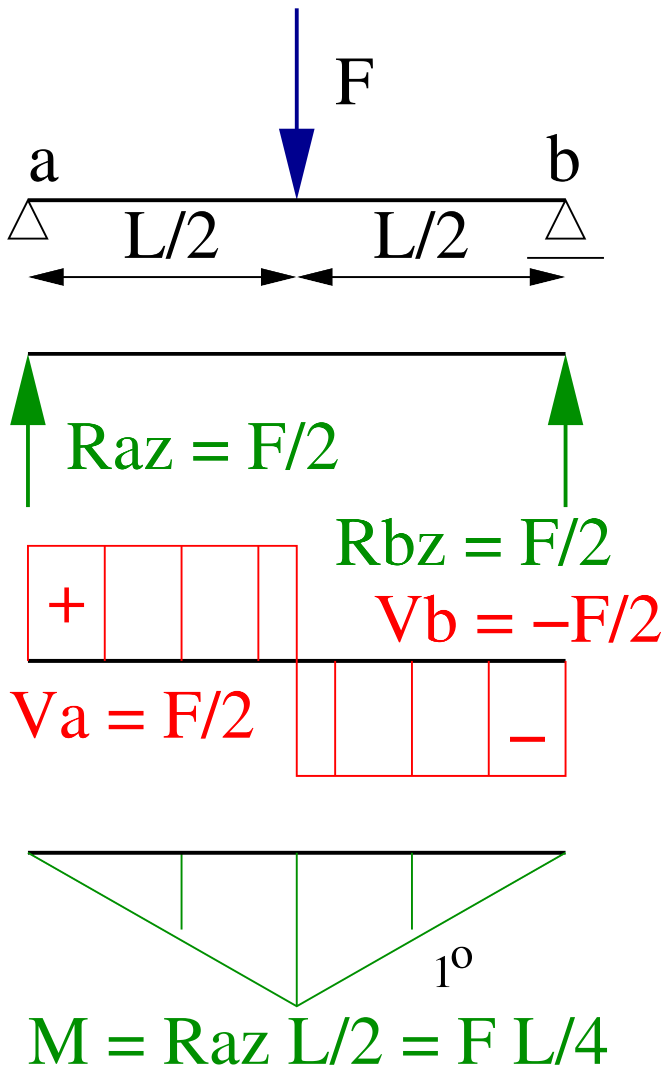


Konvence při vykreslování N, V, M

- kladné normálové síly se vynášejí nahoru, záporné dolů,
- kladné posouvající síly se vynášejí nahoru, záporné dolů
- momenty se vykreslují na stranu tažených vláken (zde podtržená)



Příklad výpočtu M a V (1)



Reakce (z podm. rovnováhy):

$$R_{az} = \frac{F}{2}(\uparrow)$$

$$R_{bz} = \frac{F}{2}(\uparrow)$$

Posouvající síla:

$$V_a = +\frac{F}{2}$$

$$V_b = -\frac{F}{2}$$

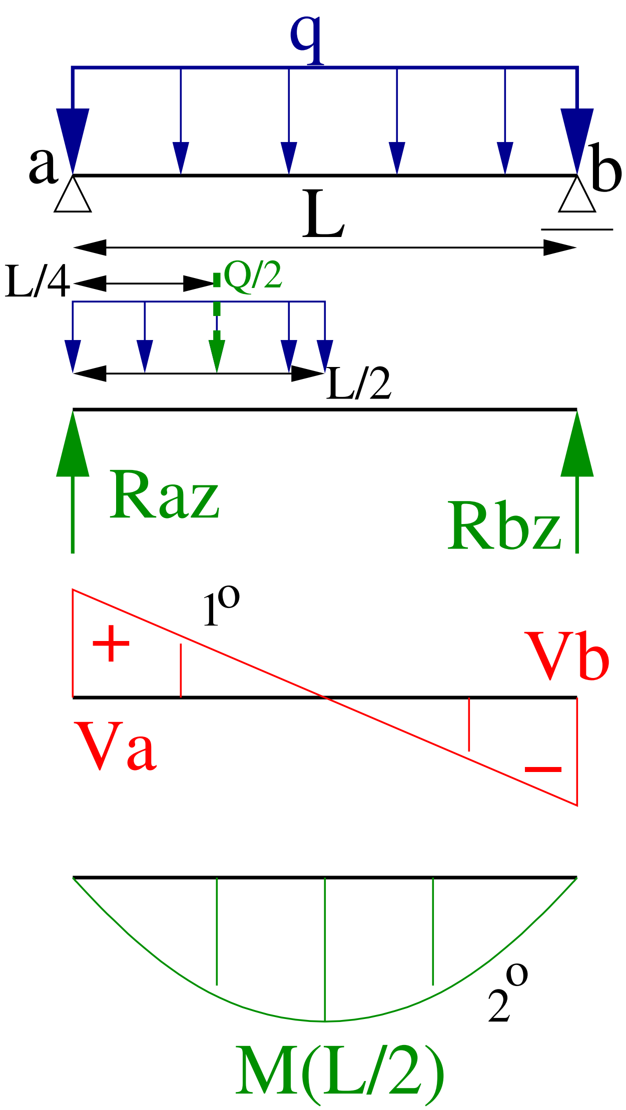
$$V(L/2)^L = +\frac{F}{2}$$

$$V(L/2)^P = -\frac{F}{2}$$

Moment:

$$M(L/2) = R_{az}\,\frac{L}{2} = \frac{F}{4}$$

Příklad výpočtu M a V (2)



Reakce (z podm. rovnováhy):

$$R_{az} = \frac{Q}{2} = \frac{q\,L}{2} (\uparrow)$$

$$R_{bz} = \frac{Q}{2} = \frac{q\,L}{2} (\uparrow)$$

Posouvající síla:

$$V_a = +\frac{q\,L}{2}$$

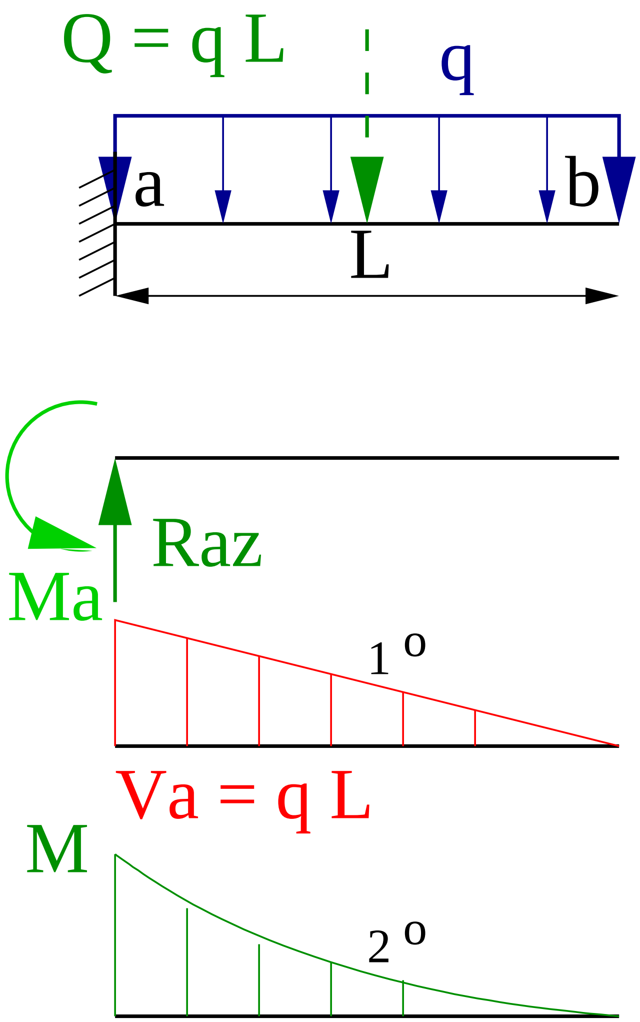
$$V_b = -\frac{q\,L}{2}$$

Moment:

$$M(L/2) = V_a\,\frac{L}{2} - \frac{L}{2}\,q\,\frac{L}{4} =$$

$$= q\,\frac{L^2}{4} - \frac{L^2}{8}\,q = \frac{1}{8} q\,L^2$$

Příklad výpočtu M a V (3)



Reakce (z podm. rovnováhy):

$$R_{az} = Q = q\ L(\uparrow)$$

$$M_a = Q\ L\ \frac{1}{2} = \frac{q\ L^2}{2}$$

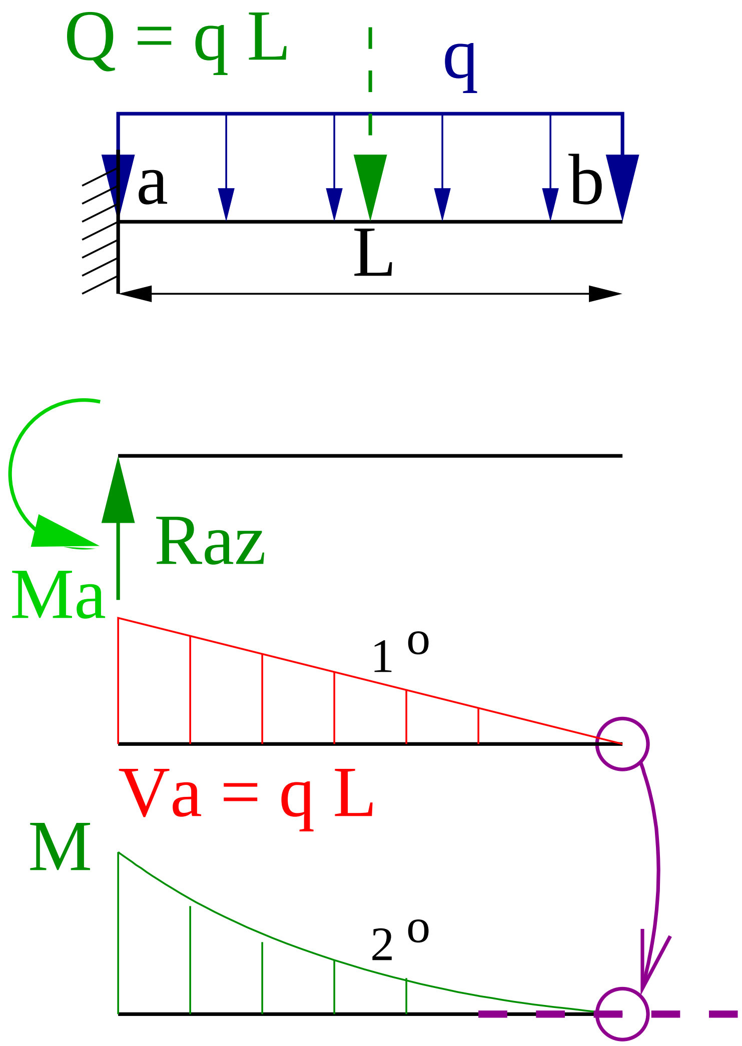
Posouvající síla:

$$V_a = +R_{az} = q\ L$$

Moment:

$$M(x) = -M_a + R_a\ x - q\ x\ \frac{x}{2}$$

Příklad výpočtu M a V (4)



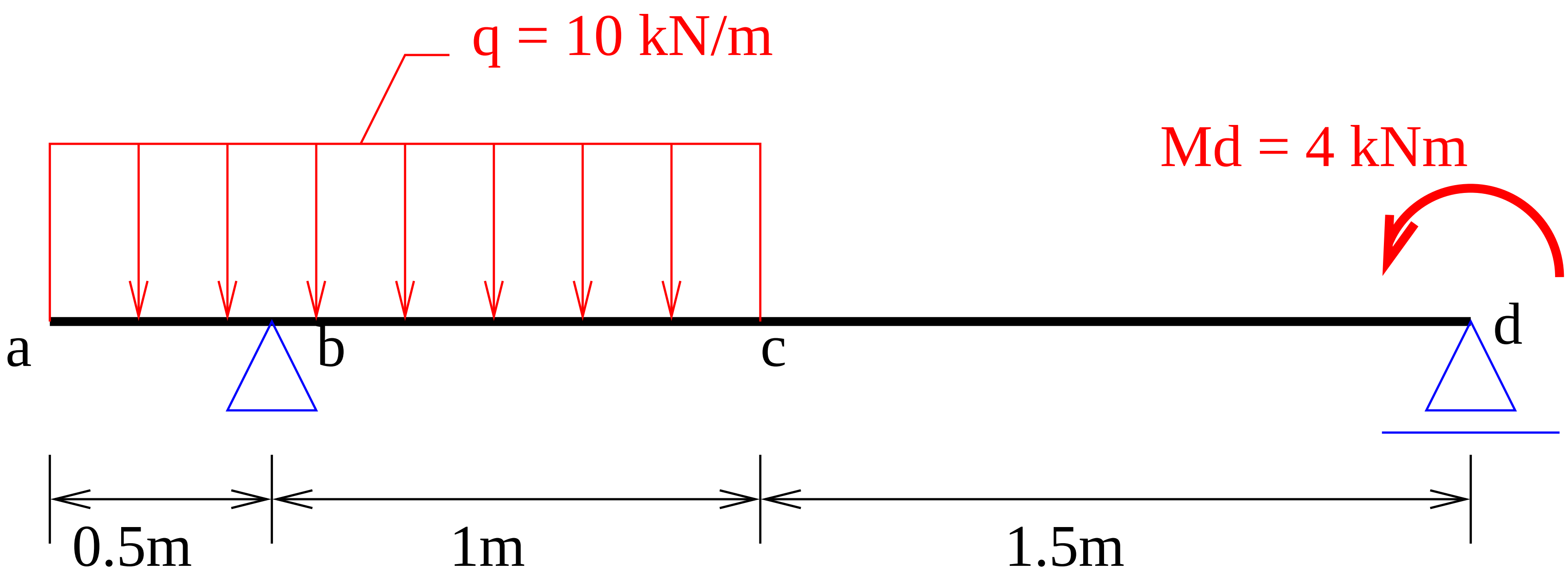
Extrém M:

- v místě **b**: $V_b = 0$
- M zde má vodorovnou tečnu
- i nula je extrém (M_a je záporné)
- ale i M_a je důležité! (největší záporný moment na nosníku)

Příklad 2 (1)

Stanovte vnitřní síly zadaného nosníku s převislým koncem.

Vypočtené hodnoty vykreslete.

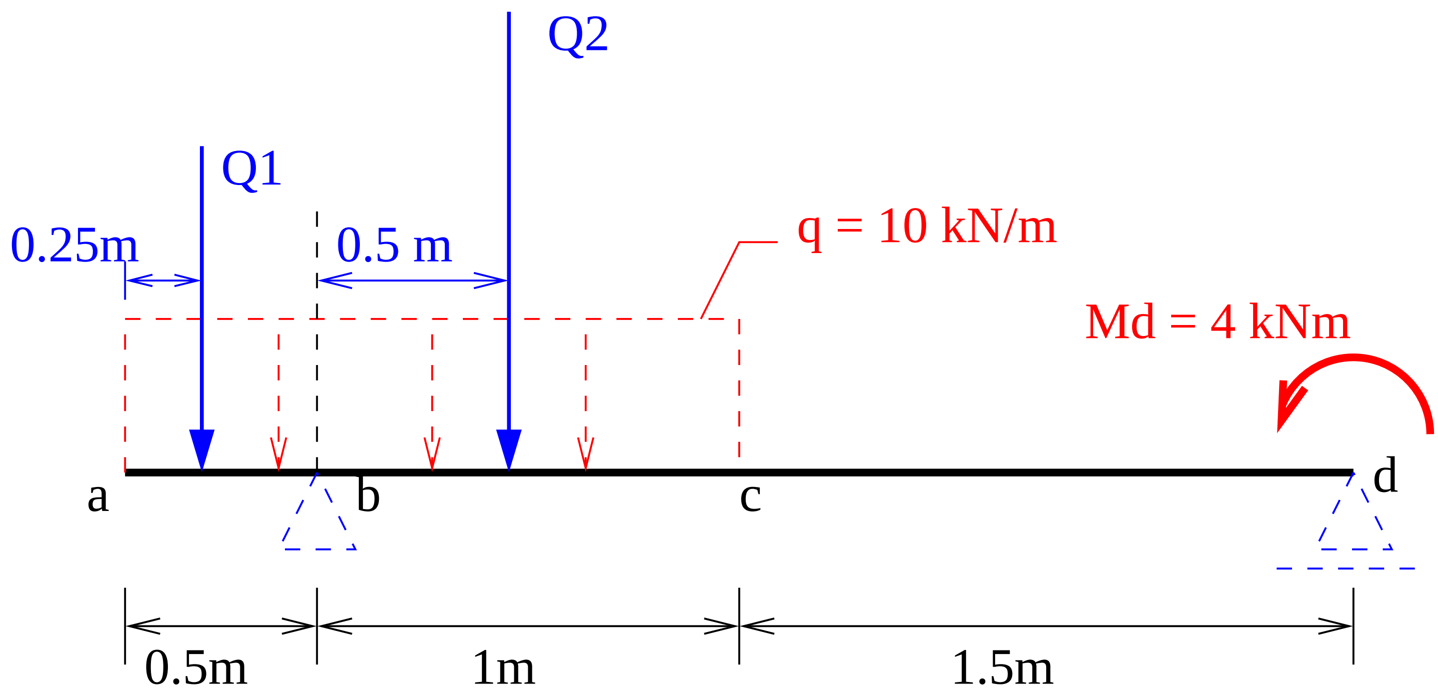


Příklad 2 (2)

Náhradní břemena: výslednice spojitých zatížení

$$Q_1 = d_{ab} \times q = 0.5 \times 10 = 5\ kN$$

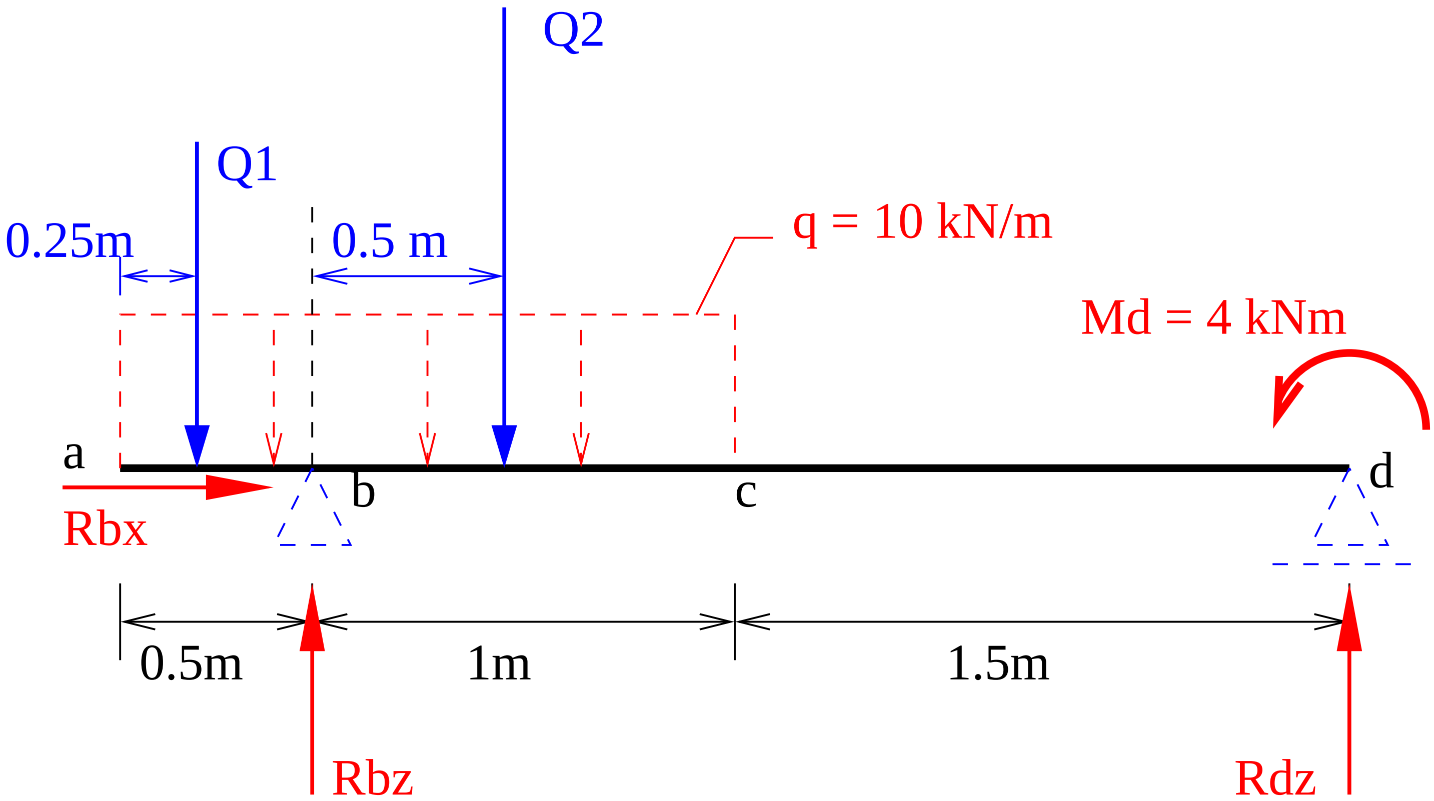
$$Q_2 = d_{bc} \times q = 1.0 \times 10 = 10\ kN$$



Příklad 2 (3)

Reakce

$$\sum F_{i,x} = 0 : R_{bx} = 0\ kN$$

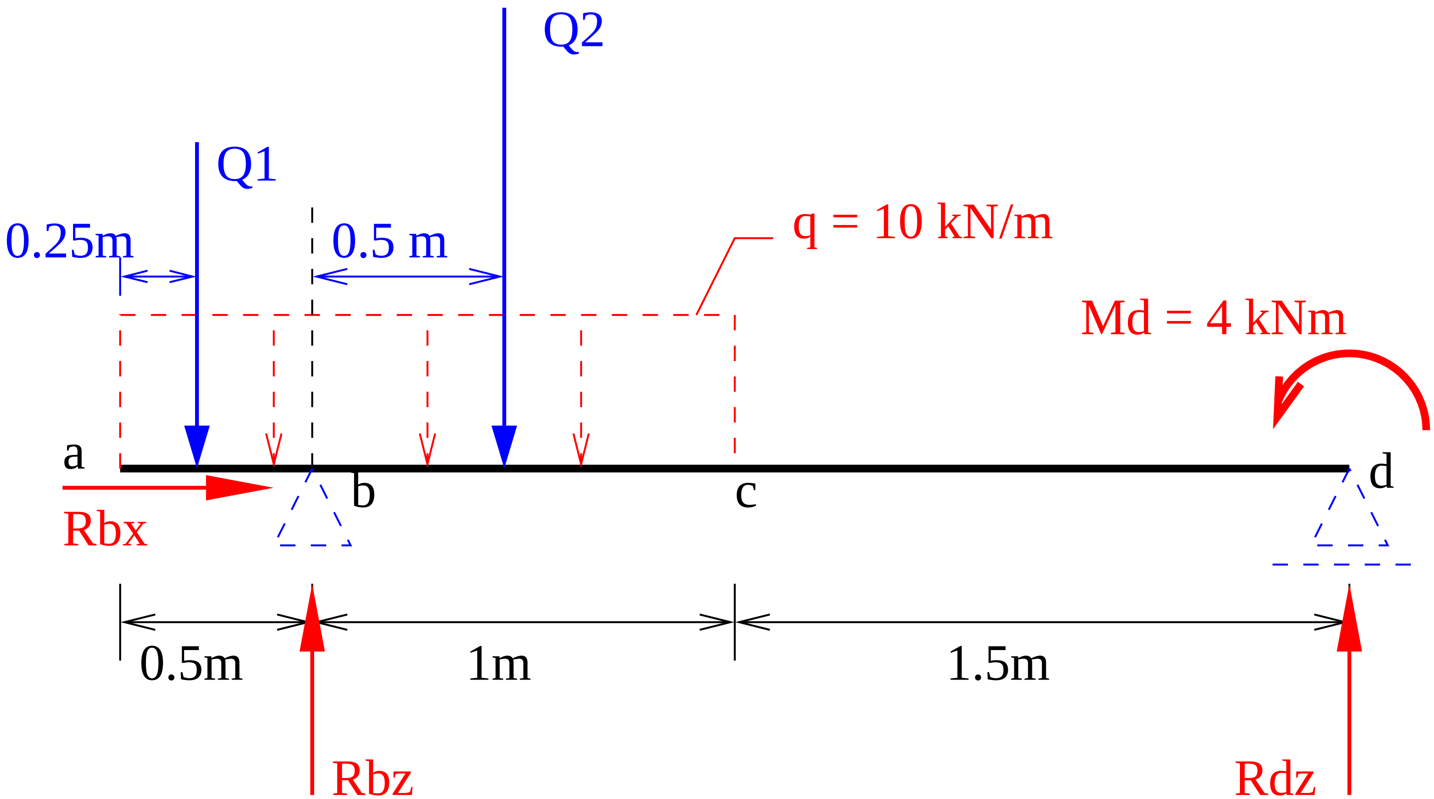


Příklad 2 (4)

$$\sum M_{i,d} = 0: \qquad Q_1 \times 2.75 - R_{bz} \times 2.5 + Q_2 \times 2.0 + M_d = 0$$

$$5 \times 2.75 - R_{bz} \times 2.5 + 10 \times 2.0 + 4 = 0$$

$$R_{bz} = \frac{5 \times 2.75 + 10 \times 2.0 + 4}{2.5} = 15.1\ kN(\uparrow)$$

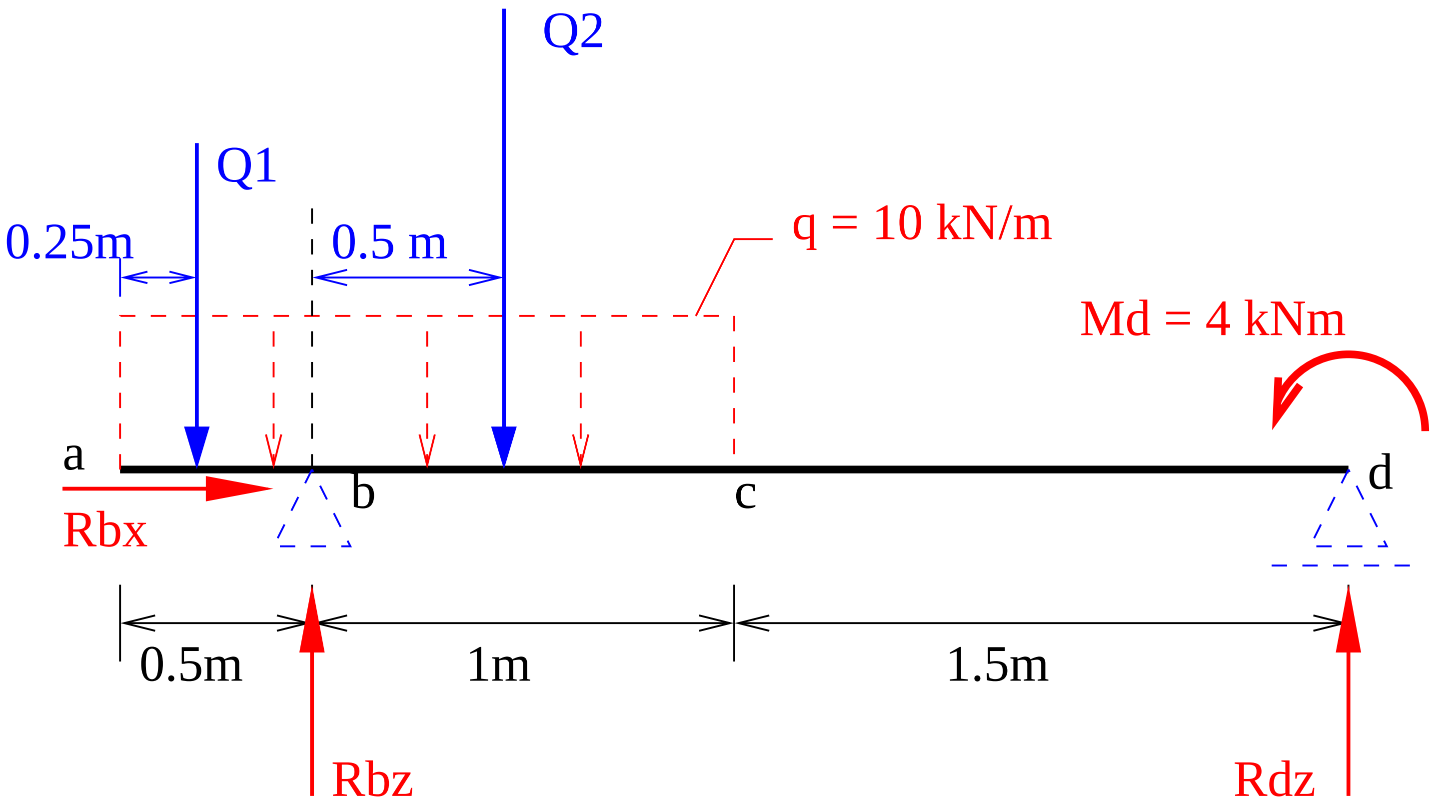


Příklad 2 (5)

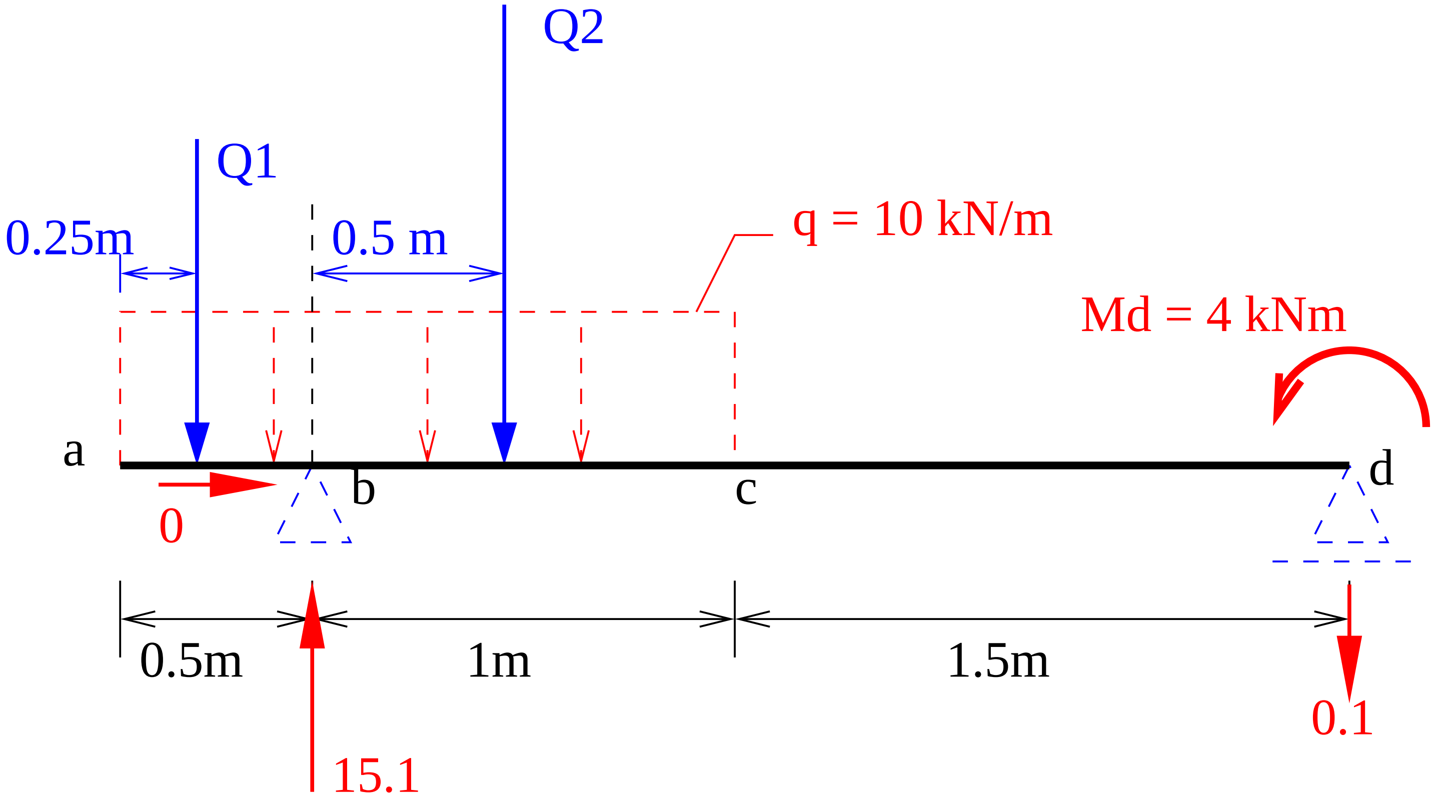
$$\sum M_{i,b} = 0 : \qquad Q_1 \times 0.25 - Q_2 \times 0.5 + M_d + R_{dz} \times 2.5 = 0$$

$$5 \times 0.25 - 10 \times 0.5 + 4 + R_{dz} \times 2.5 = 0$$

$$R_{dz} = -\left(\frac{5 \times 0.25 - 10 \times 0.5 + 4}{2.5}\right) = -0.1\, kN(\downarrow)$$



Příklad 2 (6)



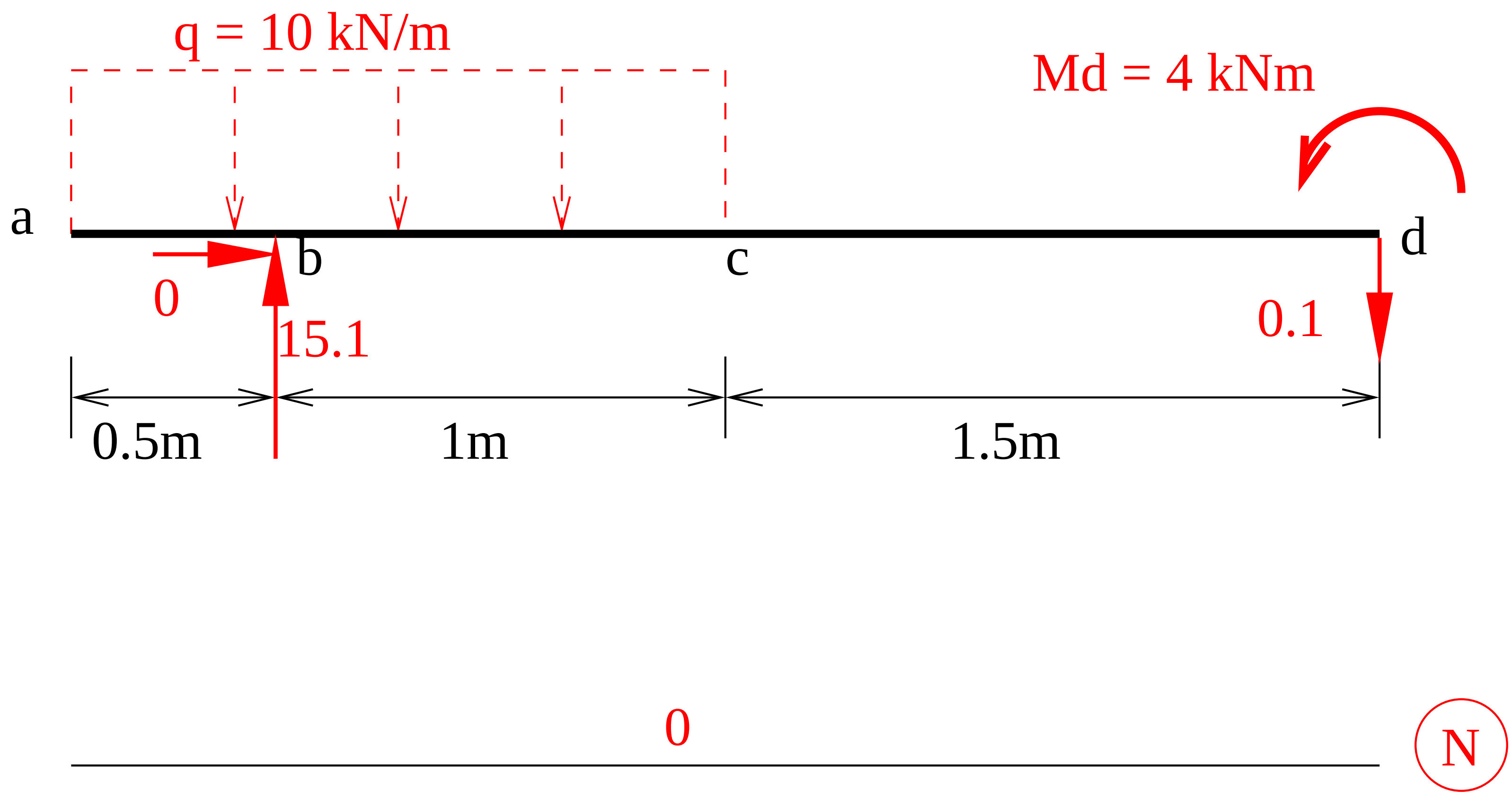
Kontrola:

$$\sum F_{i,z} = 0 : \qquad R_{bz} - R_{dz} - Q_1 - Q_2 = 0$$

$$15.1 - 0.1 - 5 - 10 = 0 \; kN$$

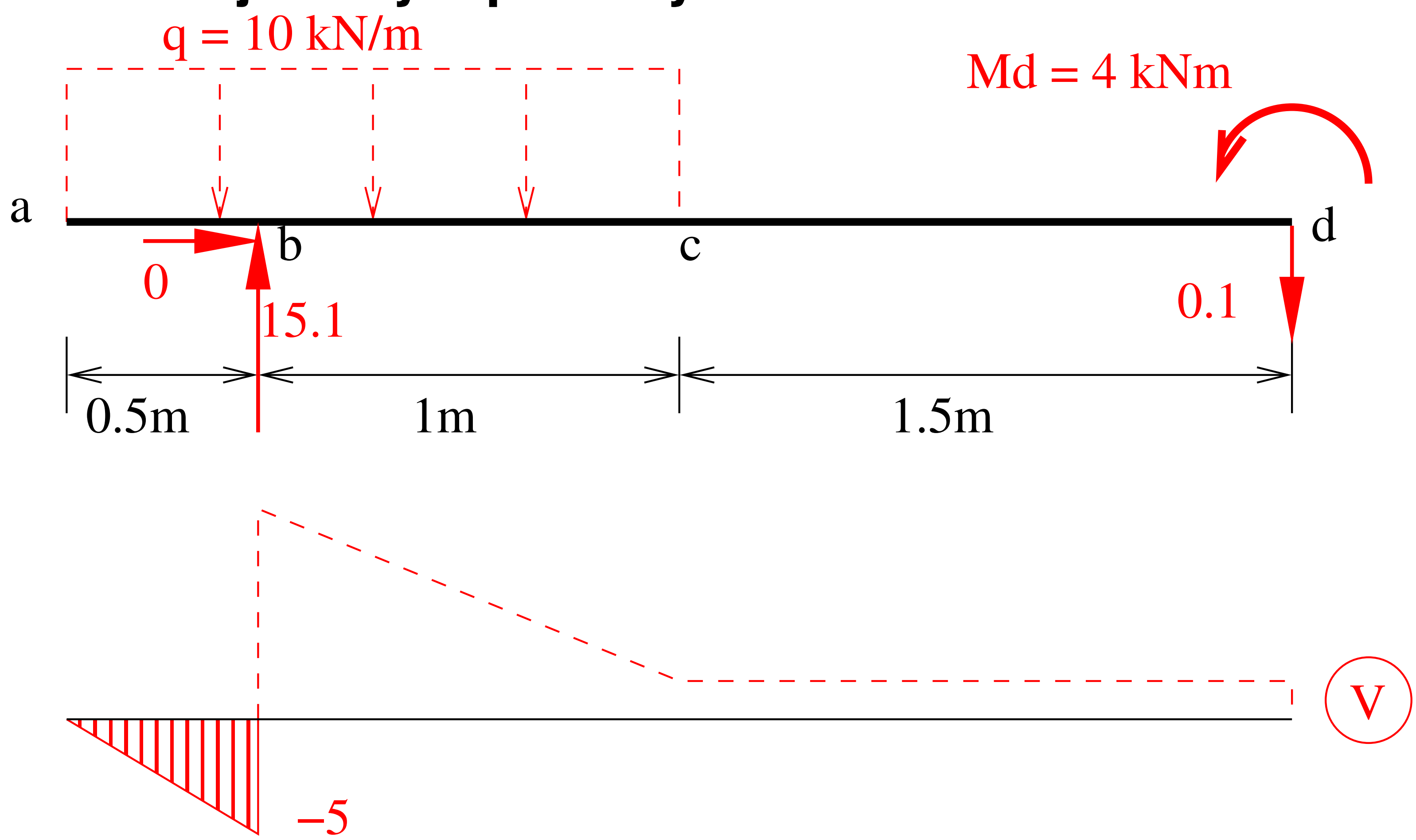
Příklad 2 (7)

Normálové síly:



Příklad 2 (8)

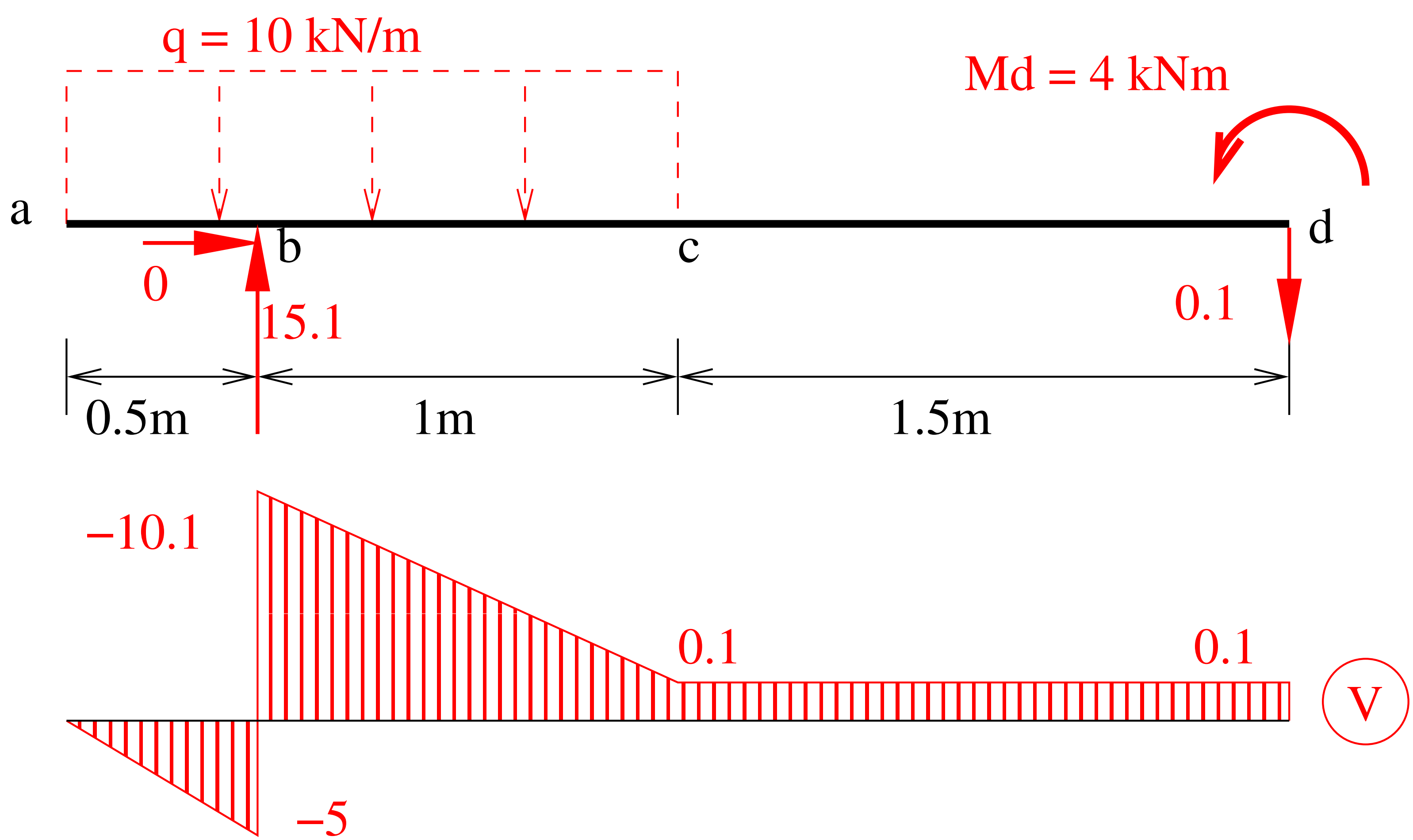
Posouvající síly – převislý konec:



$$V_{ba}^{l} = -q \times d_{ab} = -10 \times 0.5 = -5\ kN$$

Příklad 2 (9)

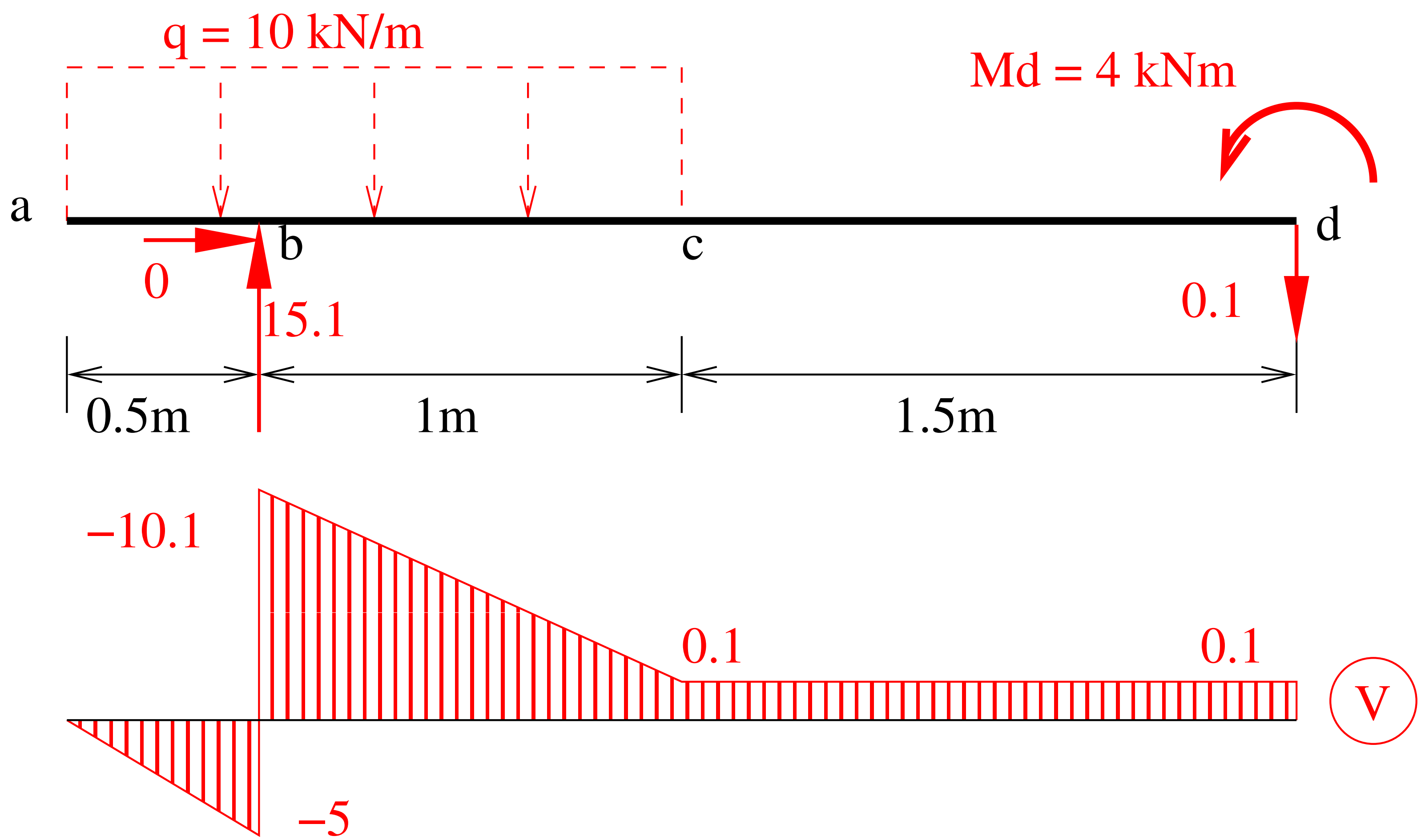
Posouvající síly – celý nosník:



$$V_{bc}^{p} = -q \times d_{ab} - R_{bz} = -10 \times 0.5 + 15.1 = 10.1\ kN$$

Příklad 2 (10)

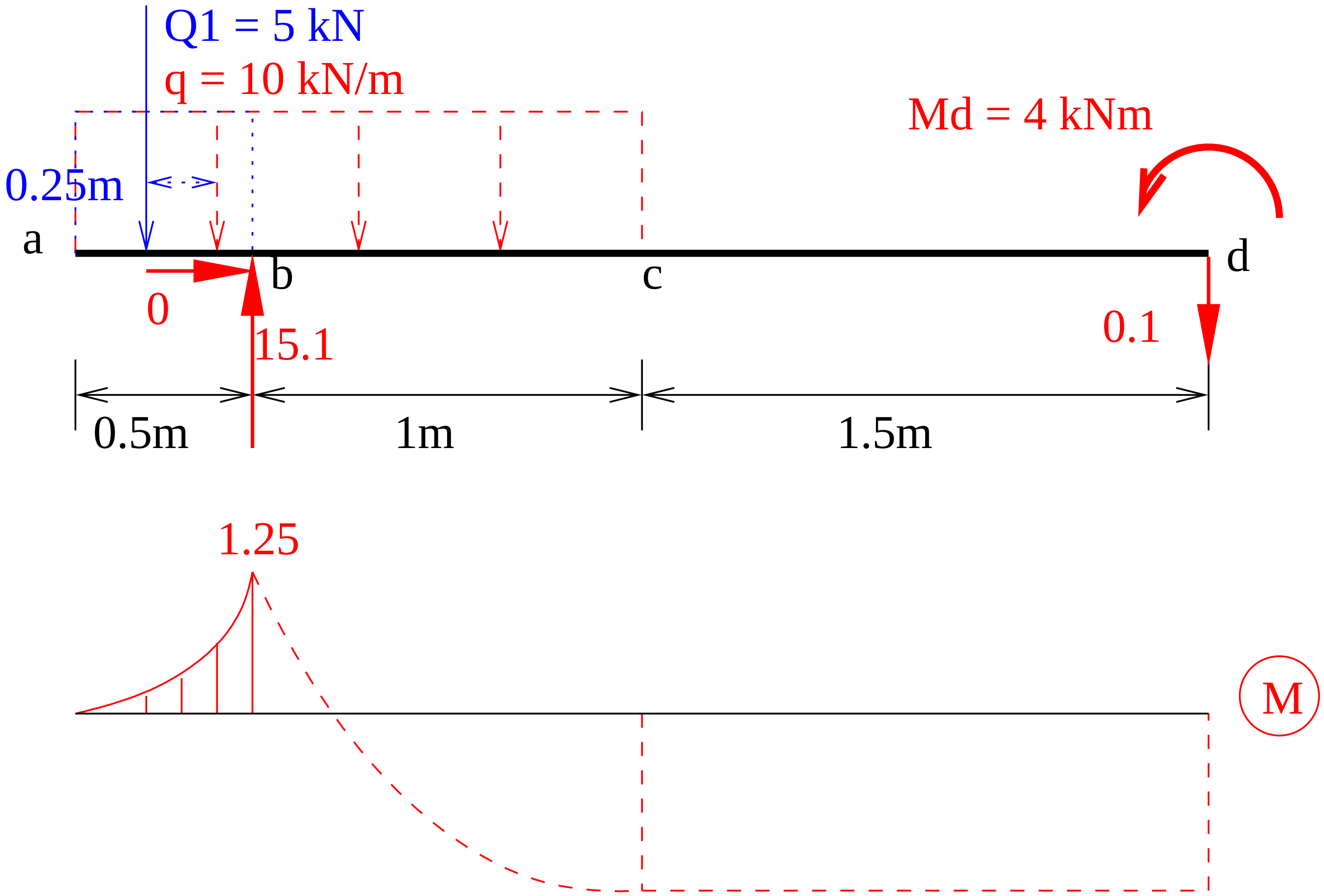
Posouvající síly – celý nosník:



$$V_{cd}^{l} = V_{bc}^{p} - q \times d_{bc} = 10.1 - 10 \times 1.0 = 0.1\ kN$$

Příklad 2 (11)

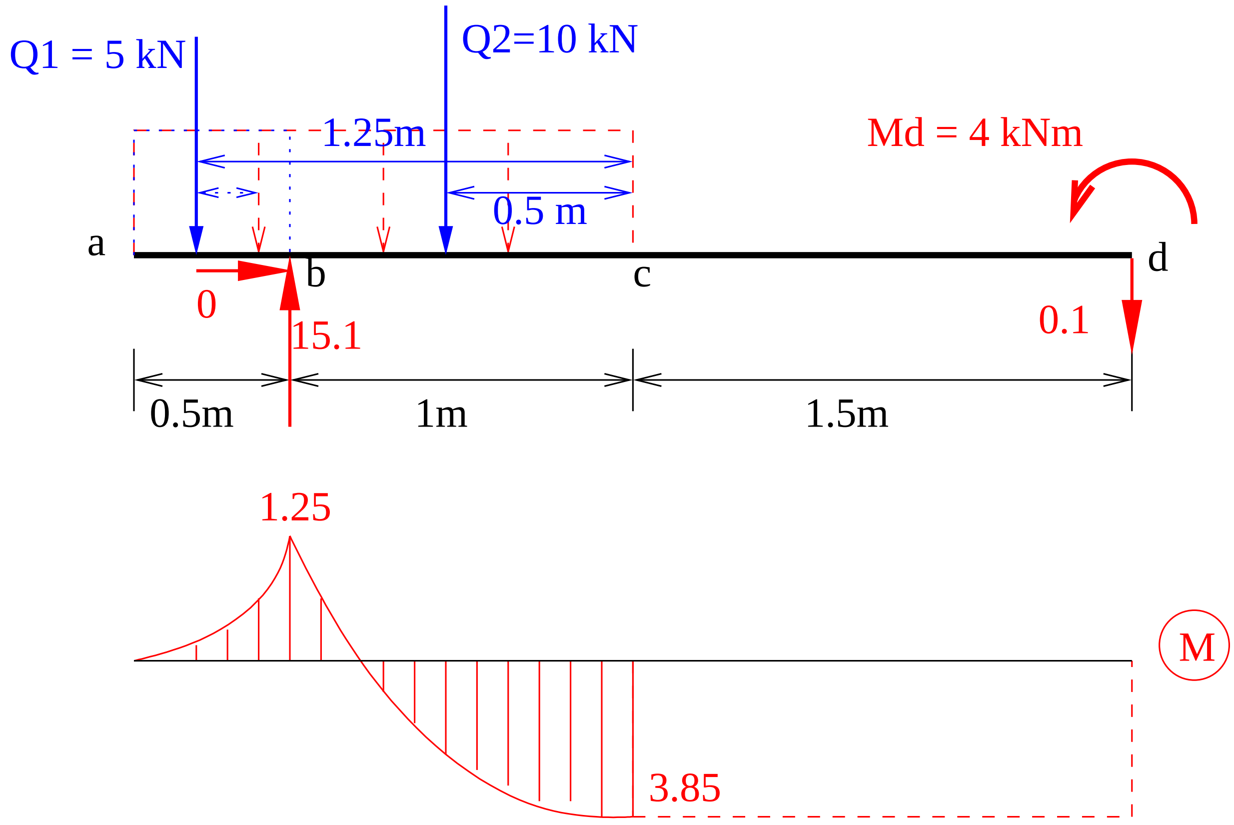
Ohybové momenty – převislý konec:



$$M_b = -Q_1 \times 0.25 = 5 \times 0.25 = 1.25\ kNm$$

Příklad 2 (12)

Ohybové momenty pod spojitým zatížením:

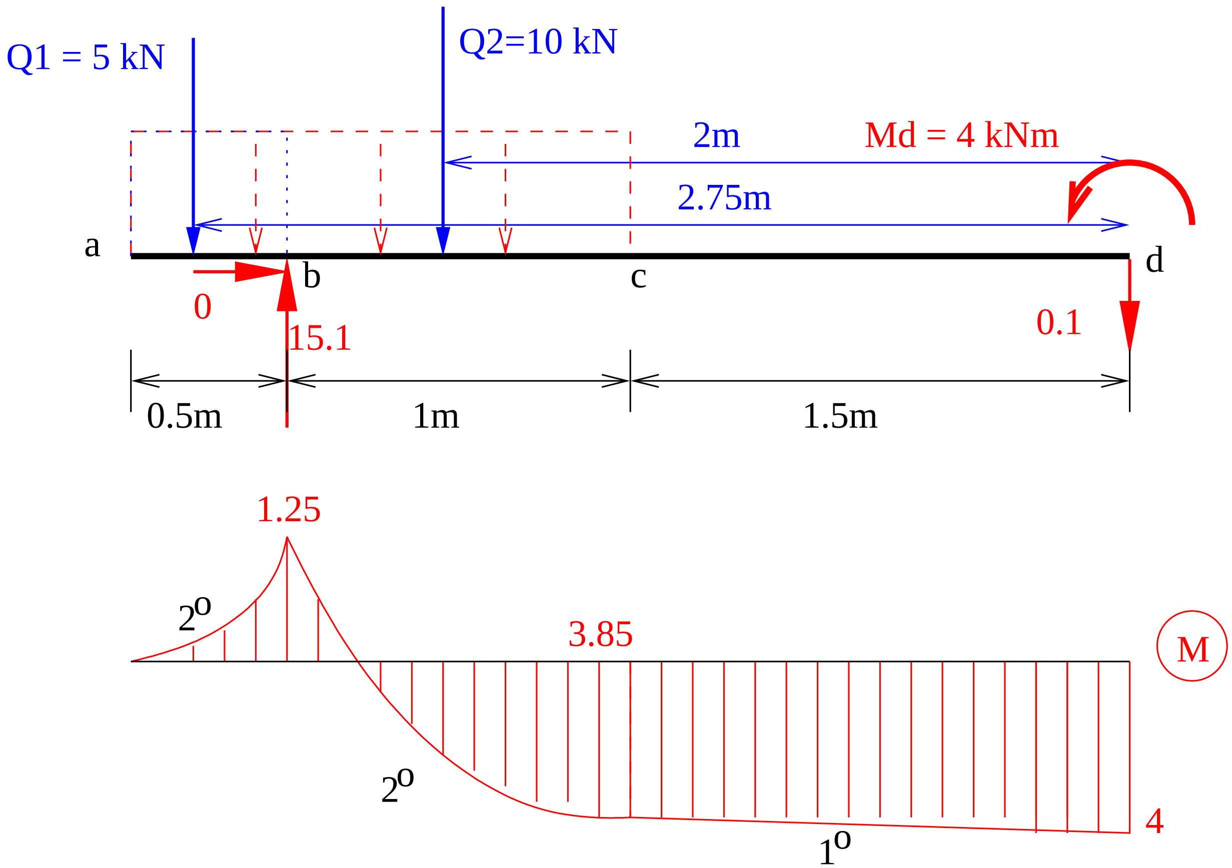


$$M_c^l = -Q_1 \times 1.25 + R_{bz} \times 1 - Q_2 \times 0.5 =$$

$$= -5 \times 1.25 + 15.1 \times 1 - 10 \times 0.5 = \; 3.85 kNm$$

Příklad 2 (13)

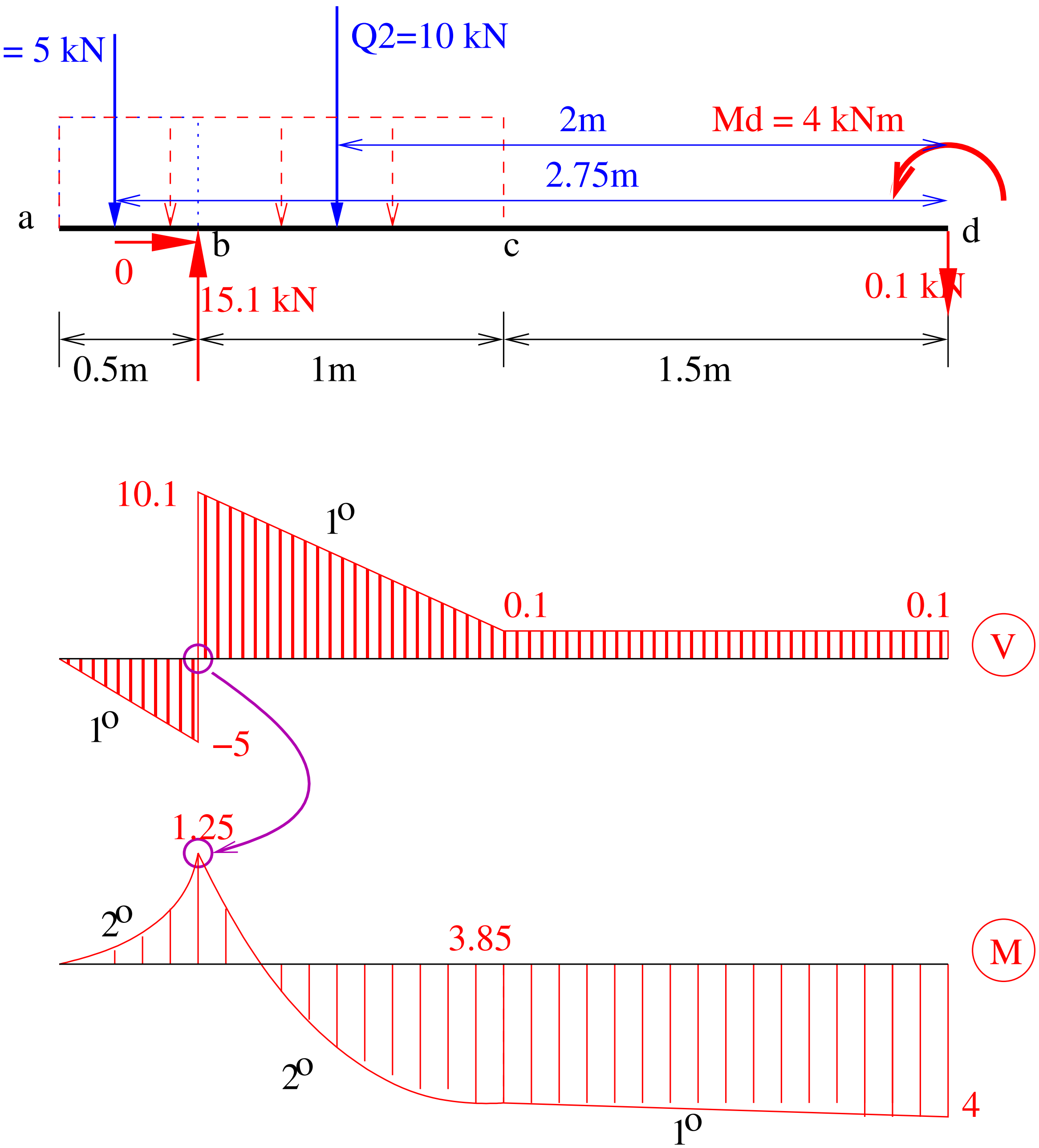
Ohybové momenty pod spojitým zatížením:



$$M_d^l = -Q_1 \times 2.75 + R_{bz} \times 2.5 - Q_2 \times 2 =$$

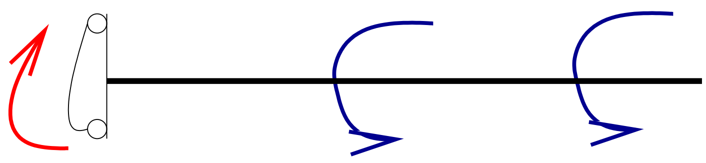
$$= -5 \times 2.75 + 15.1 \times 2.5 - 10 \times 2 = 4.0\ kNm$$

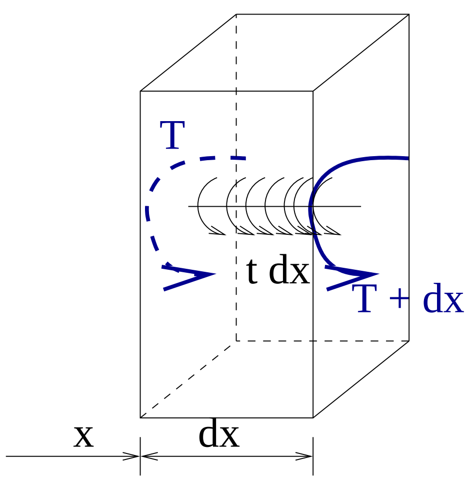
Příklad 2 (14)



Q1 = 5 kN
Q2=10 kN
2m
Md = 4 kNm
2.75m
a
b
c
d
0
15.1 kN
0.1 kN
0.5m
1m
1.5m
10.1
1o
0.1
0.1
V
1o
−5
1.25
2o
3.85
M
2o
4
1o

Kroucení nosníku





- vnitřní síla – krouticí moment **T**
- výpočet reakce z podmínky:

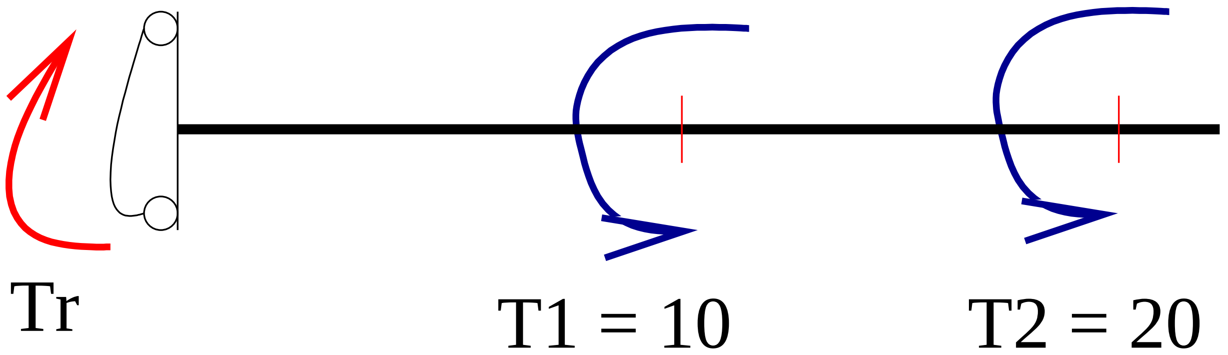
$$\sum_{i=1}^{n} T_i = 0$$

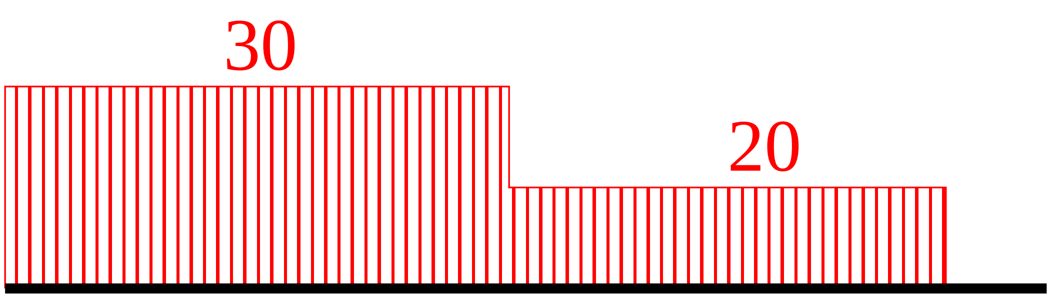
- diferenciální podmínka rovnováhy:

$$-T + (T + dT) + t\ dt = 0$$

$$\frac{dT}{dx} = -t$$

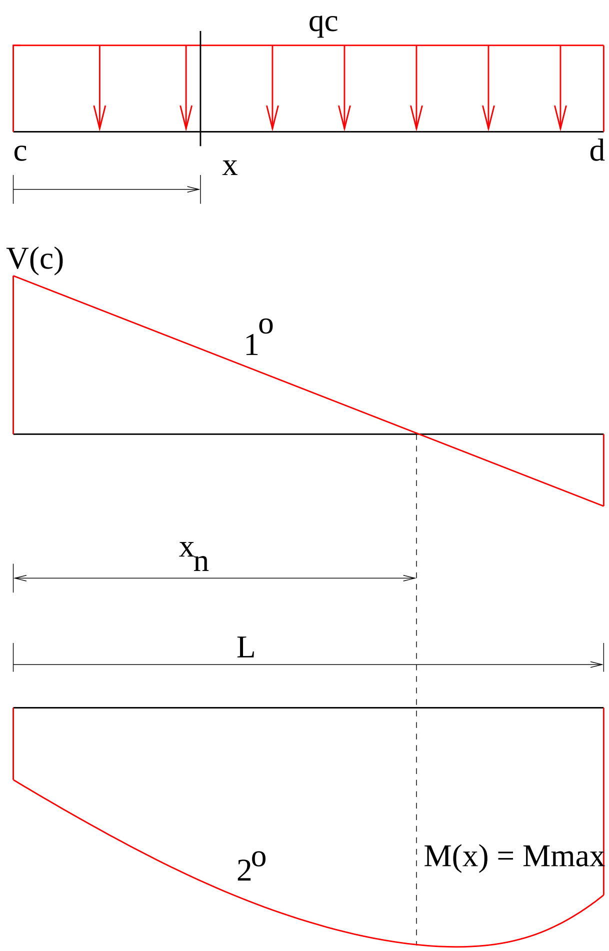
Kroucení nosníku – příklad





$$\sum T = T_r - 10 - 20 = 0 \Rightarrow T_r = 30kN\ m$$

Doplnění:
Poloha maximálního momentu (1)

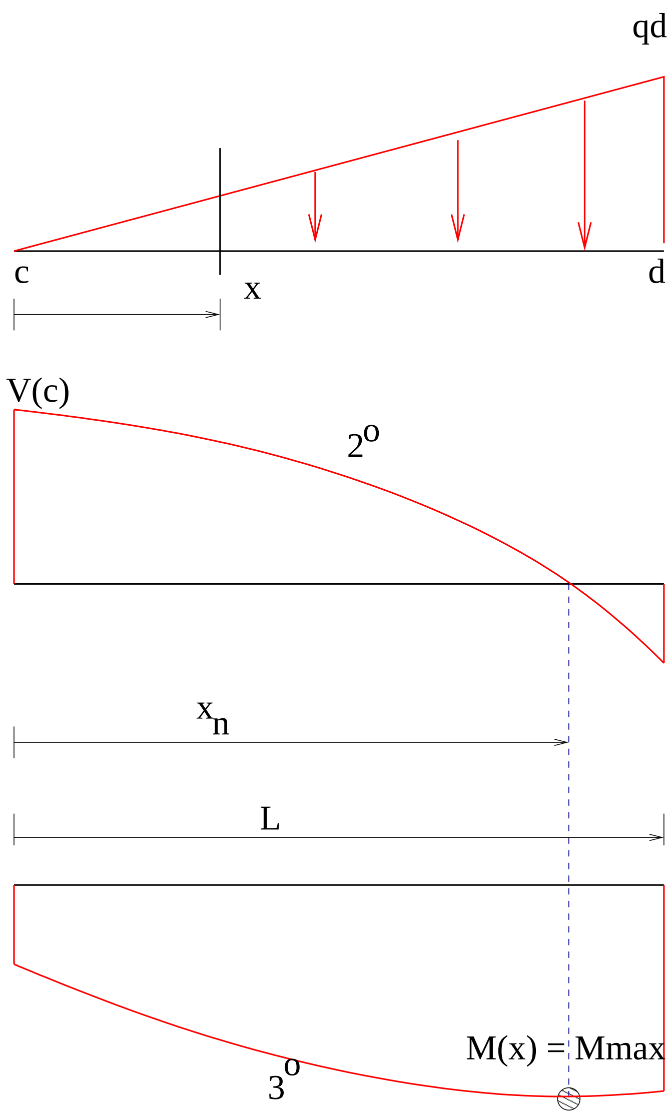


$$V(c) - q_c\, x_n = 0$$

Tedy x_n stanovíme po úpravě:

$$x_n = \frac{V(c)}{q_c}$$

Poloha maximálního momentu (2)



$$V(c) - \frac{1}{2}\, x_n \left(q_d \, \frac{x_n}{L} \right) = 0$$

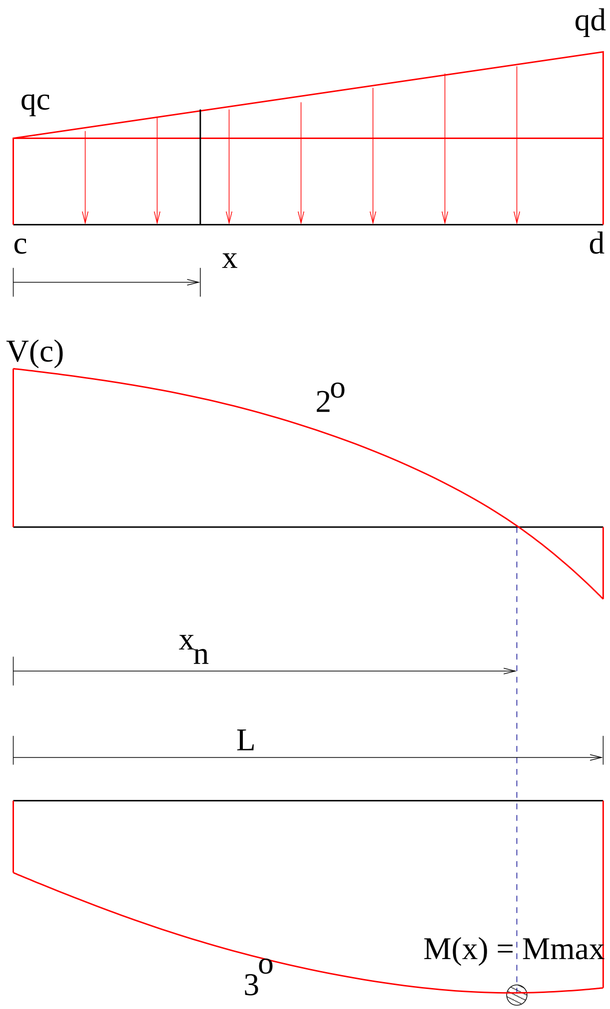
Kvadratická rovnice:

$$\frac{q_d}{2\,L}\, x_n^2 - V(c) = 0$$

Tedy x_n stanovíme:

$$x_n = \sqrt{\frac{2L\, V(c)}{q_d}}$$

Poloha maximálního momentu (3)



$$V(c) - q_c\, x_n - \frac{1}{2}\, x_n (q_d - q_c) \frac{x_n}{L} = 0$$

Kvadratická rovnice:

$$\frac{(q_d - q_c)}{2\, L}\, x_n^2 + q_c\, x_n - V(c) = 0$$

Tedy x_n stanovíme:

$$x_n = \frac{-q_c + \sqrt{q_c^2 + 4\, \frac{q_d - q_c}{2L} V(c)}}{2\, \frac{q_d - q_c}{2L}}$$

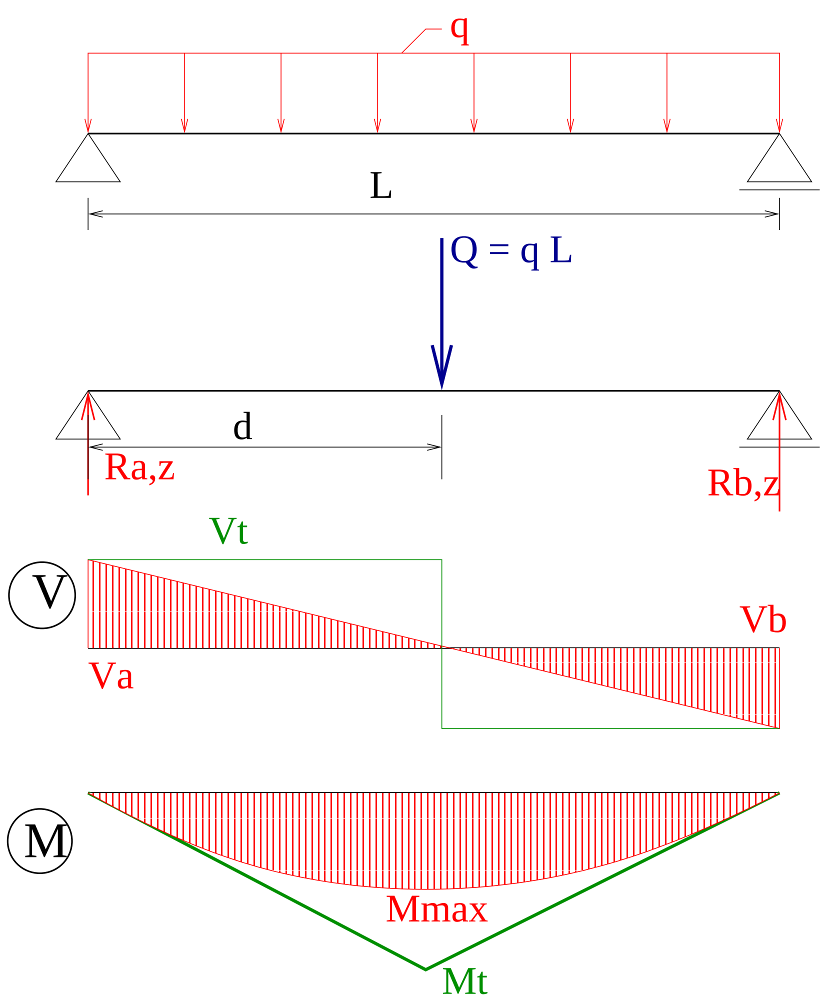
Dopočet tečen obrazců momentů (1)

- pomůcka pro určení tvaru křivek 2^o a 3^o

- Postup:

1. nahradíme všechna spojitá zatížení jejich výslednicemi
2. vypočteme průběhy M od těchto výslednic (a od všech osamělých sil a momentů)
3. získané obrazce $\Rightarrow$ tečnové polygony

Dopočet tečen obrazců momentů (2)



$$
\begin{aligned}
V_a &= R_{a,x} \\
V_t &= R_{a,x} \\
M_{max} &= R_{a,x}\, d - \frac{1}{2}\, q\, d\, \frac{1}{2}\, d \\
M_t &= R_{a,x} \times d
\end{aligned}
$$