VYSOKÁ ŠKOLA BÁŇSKÁ – TECHNICKÁ UNIVERZITA OSTRAVA

FAKULTA STAVEBNÍ

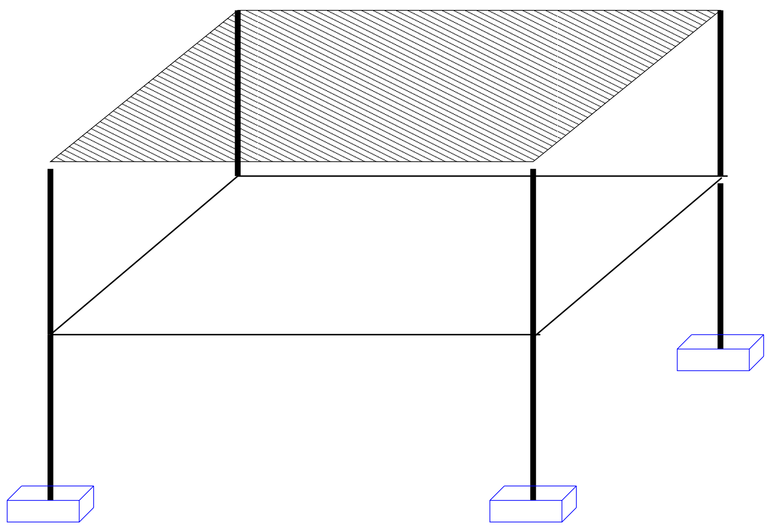
Základy stavební mechaniky

Stupeň statické určitosti, reakce nosníků, vnitřní síly

Jiří Brožovský

Kancelář: LP – H 406/3
Telefon: 597 321 321
E-mail: jiri.brozovsky@vsb.cz

Nosné stavební konstrukce



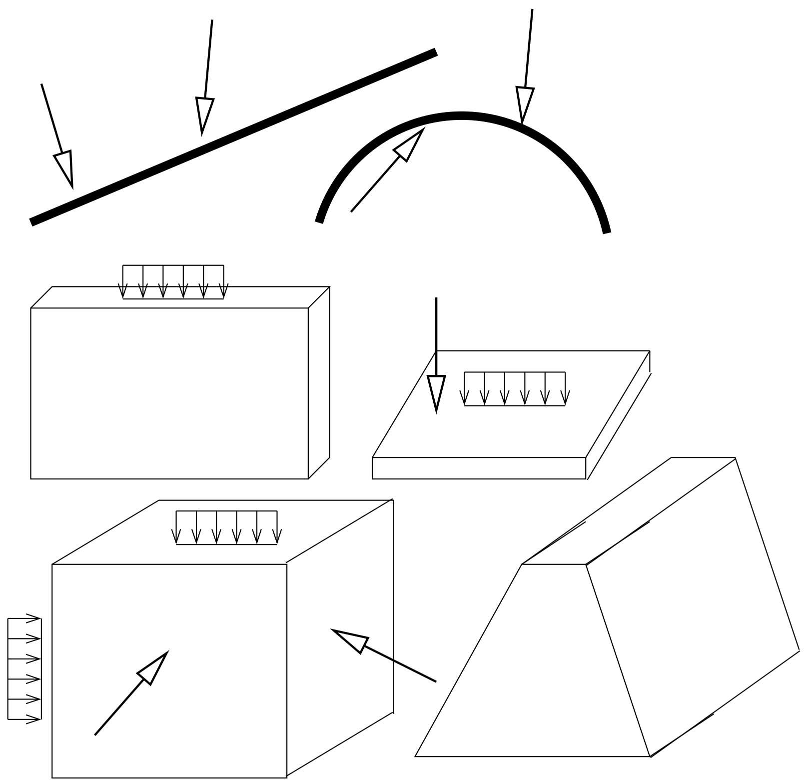
Nosná stavební konstrukce slouží k přenosu **zatížení** do **podloží** (horninového masivu):

- horní stavba,
- základová konstrukce.

Požadavky na konstrukci:

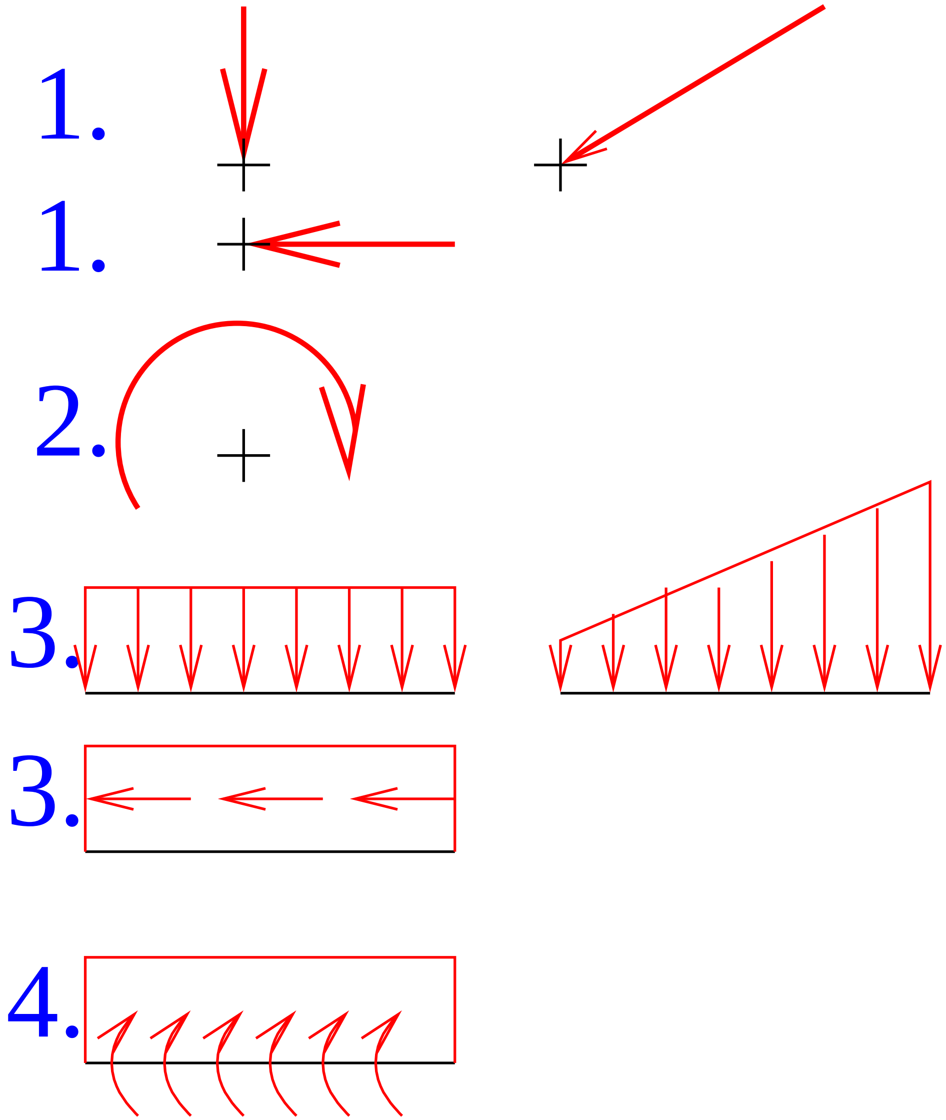
- dostatečná **únosnost**,
- dlouhodobá **použitelnost**.

Typy prvků konstrukcí podle tvaru



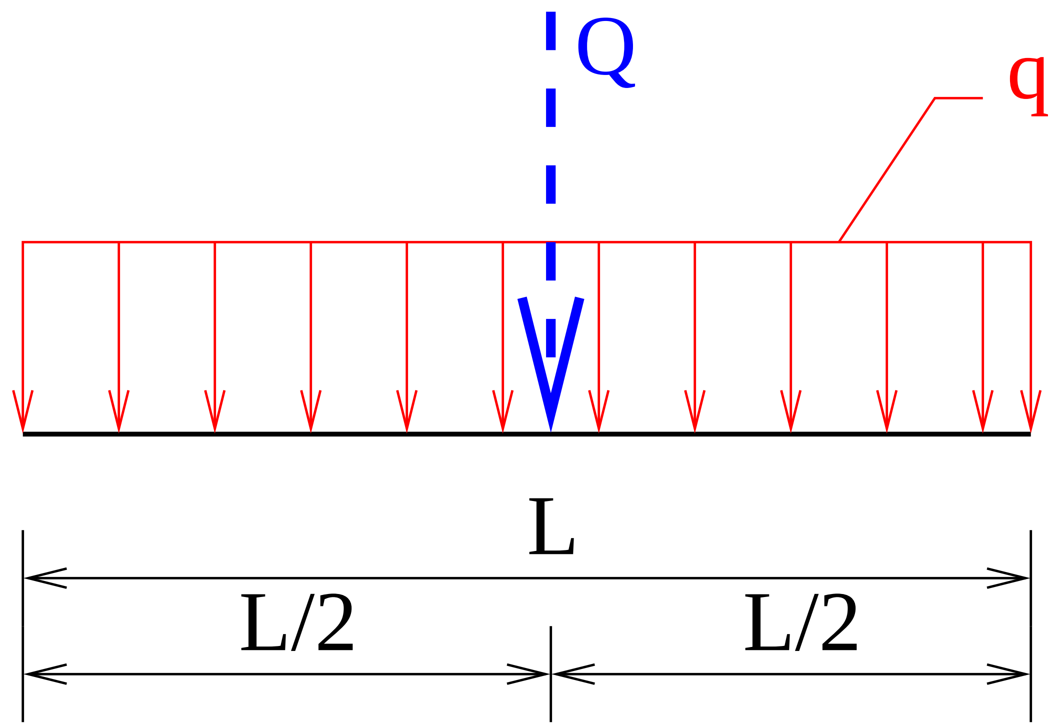
- **prut** - jeden rozměr je výrazně větší než ostatní (idealizace čarou)
- **plošný prvek** (stěna, deska, skořepina) - dva rozměry mnohem větší než třetí (idealizace rovinnou nebo zakřivenou plochou)
- masivní prvek – **těleso** (*idealizace tvaru* není třeba)

Idealizované zatížení



1. bodová síla (osamělá síla)
2. bodový moment (osamělý...)
3. liniové silové zatížení
4. liniové momentové zatížení

Výslednice liniového zatížení (1)

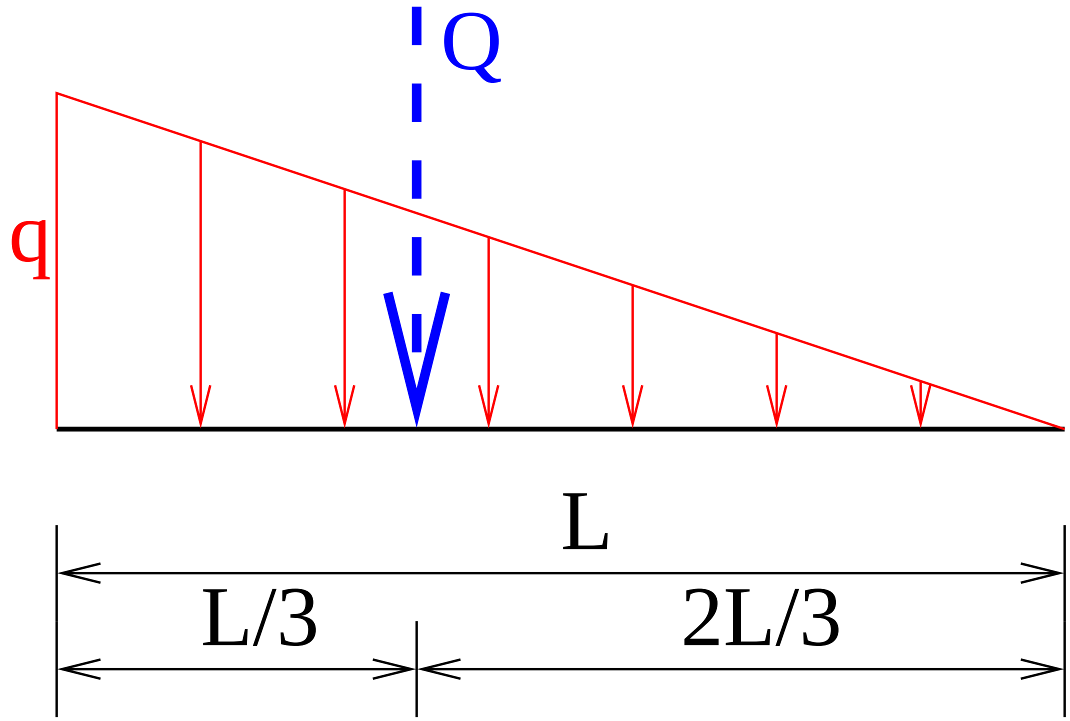


Rozměry veličin: $Q \; [N]$, $q \; [N/m]$, $L \; [m]$;

$$Q = L \times q$$

Pozn.: výslednice působí v těžišti zatěžovacího obrazce (zde ,,uprostřed“).

Výslednice liniového zatížení (2)

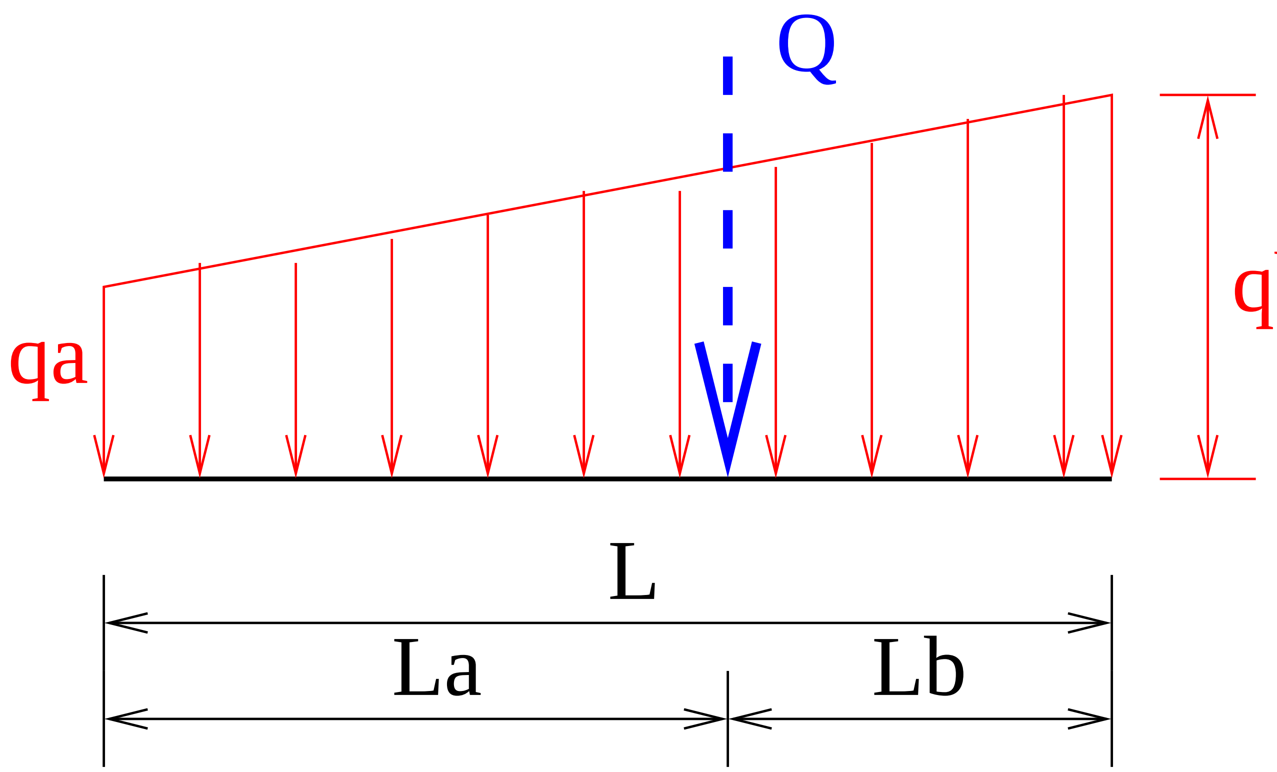


Rozměry veličin: $Q\ \ [N]$, $q\ \ [N/m]$, $L\ \ [m]$;

$$Q = \frac{1}{2}\, L \times q$$

Pozn.: výslednice působí v těžišti zatěžovacího obrazce.

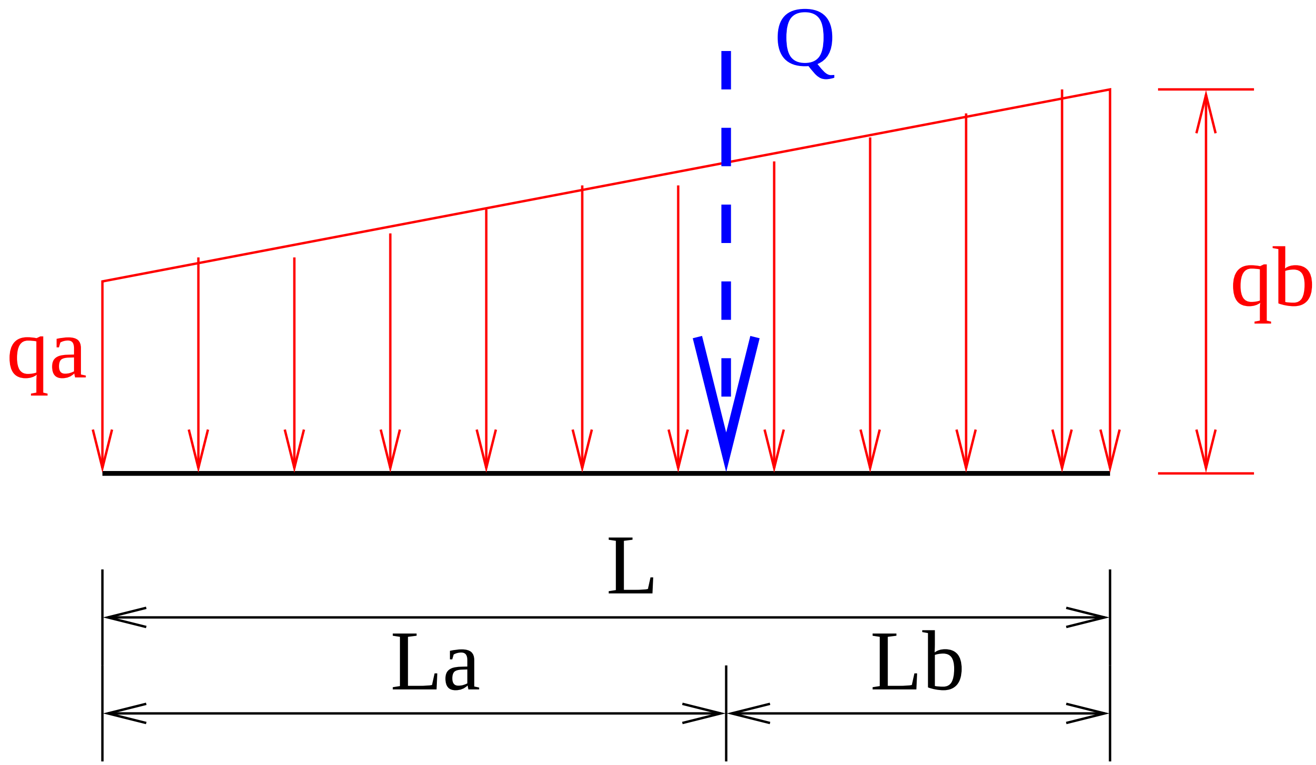
Výslednice liniového zatížení (3a)



$$Q = L \times \frac{qa + qb}{2}$$

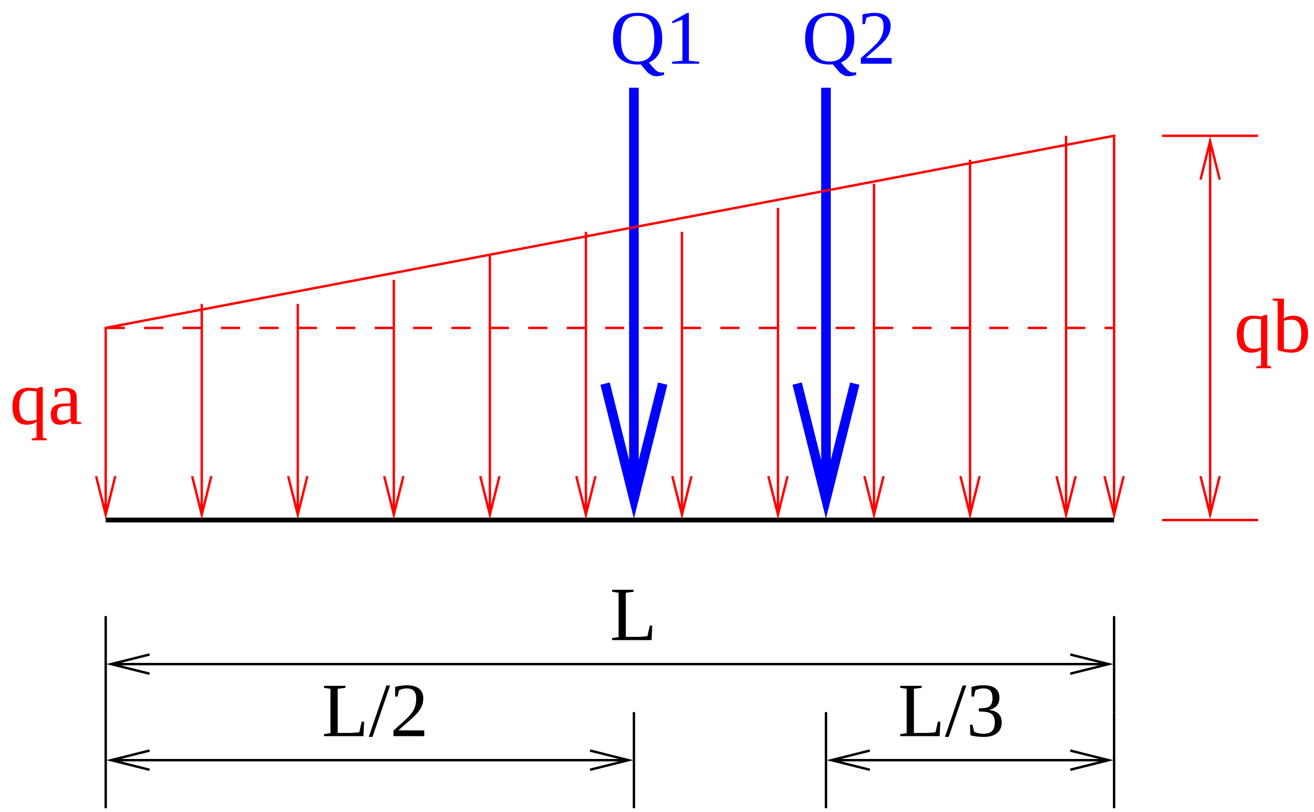
Pozn.: výslednice působí v těžišti zatěžovacího obrazce.

Výslednice liniového zatížení (3b)



$$La = \frac{L \times qa \times \frac{L}{2} + \frac{1}{2}\,L \times (qb - qa) \times \frac{2}{3}\,L}{L \times qa \times +\frac{1}{2}\,L \times (qb - qa)} = \frac{L}{3}\left(1 + \frac{qb}{qa + qb}\right)$$

Výslednice liniového zatížení (3c)



$$Q_1 = L \times qa, \qquad Q_2 = \frac{1}{2} L \times (qb - qa)$$

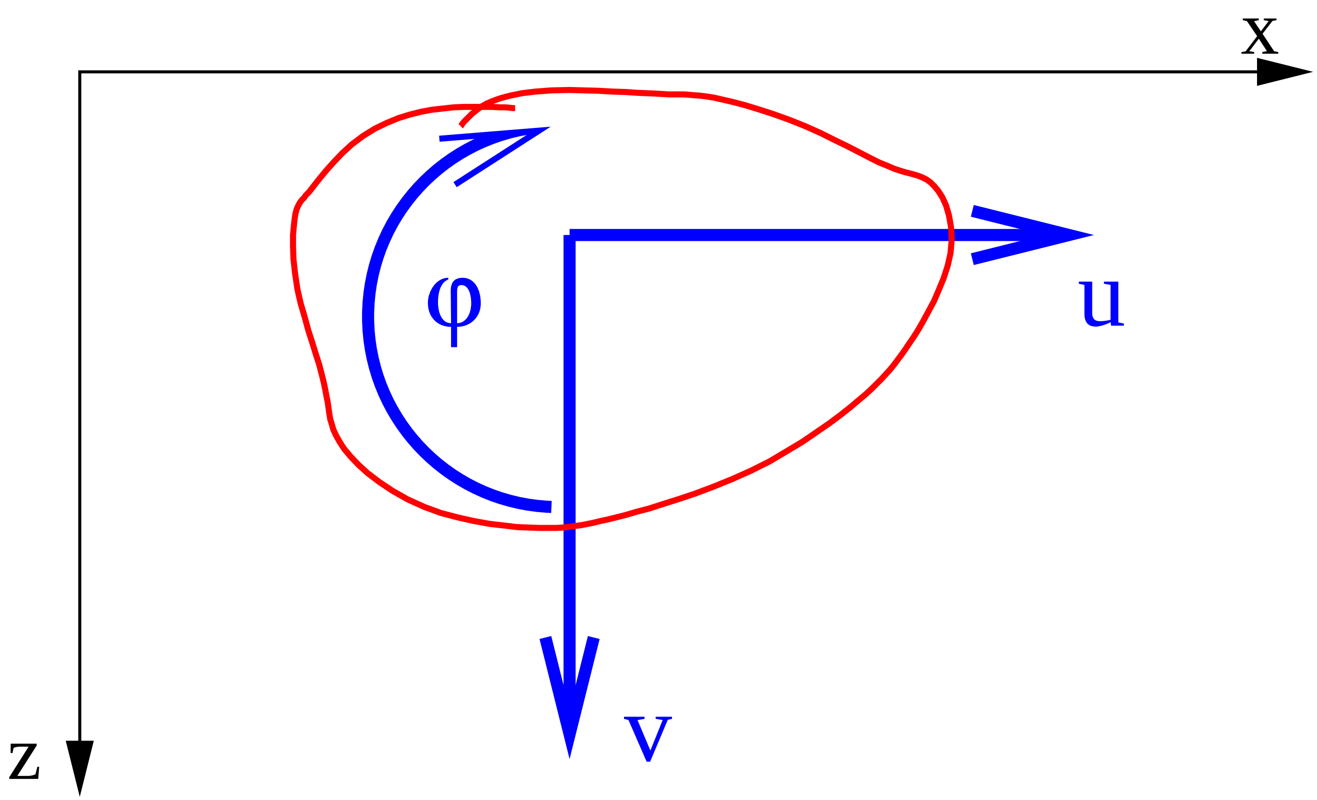
Podepření

Idealizace podepření:

- Vnější vazby – brání **absolutnímu** posunu nebo pootočení tělesa (připojením k dokonale tuhé **podporové konstrukci**)

- Vnitřní vazby brání **vzájemnému posunutí** nebo pootočení těles.

Možnosti pohybu tělesa v rovině

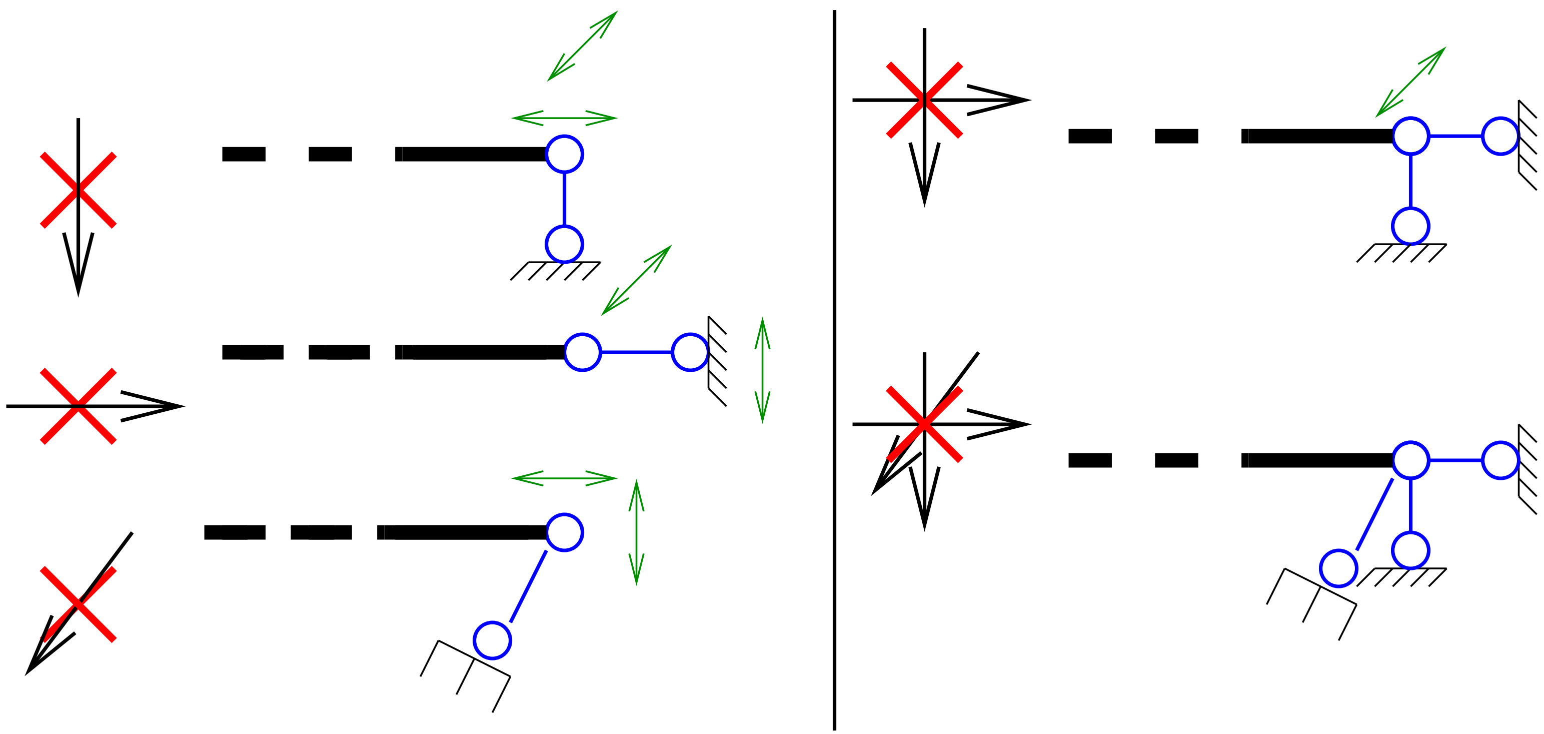


Celkem **3**: posunutí **u**, **v**, pootočení φ.

(V prostoru celkem 6).

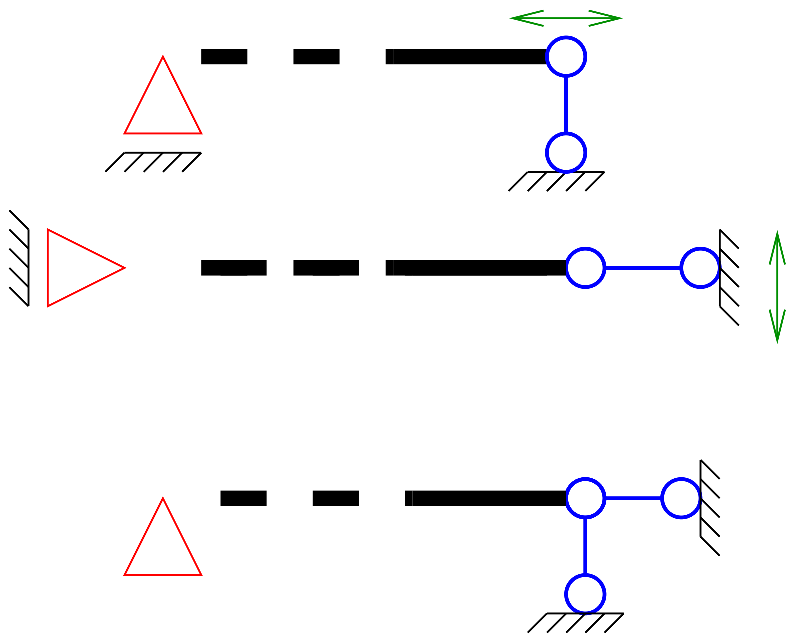
Vnější vazby

Vazba proti **posunu** v daném směru:



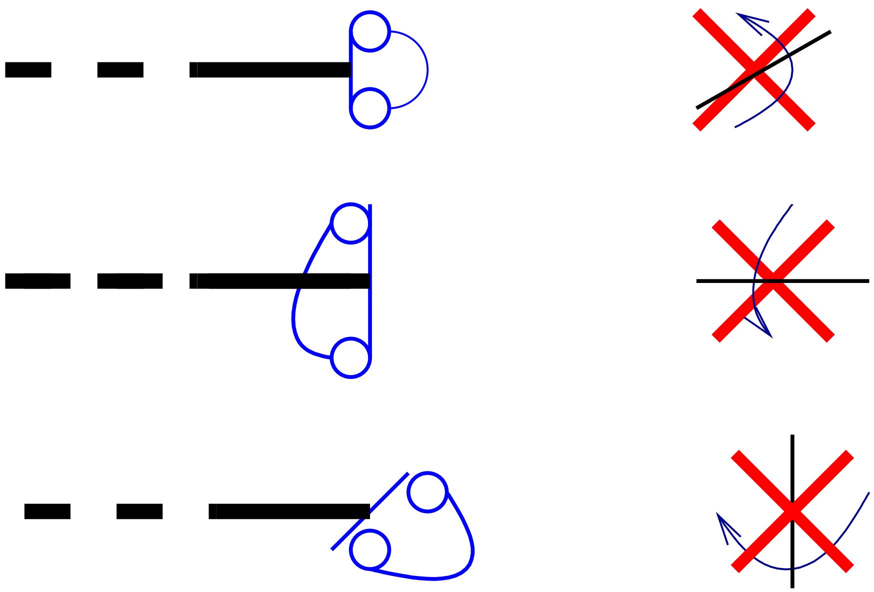
Vnější vazby: alternativní znázornění pro 2D

Vazba proti **posunu** v daném směru (posuvné a pevné klouby):



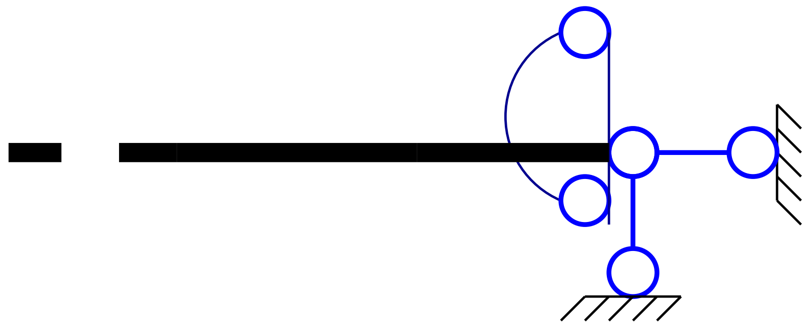
Vnější vazby – pootočení

Vazba proti **pootočení** v daném směru:



Vnější vazby – vetknutí ve 2D

Je zabráněno všem posunům (v rovině 2) a pootočení daného bodu prutu v rovině:

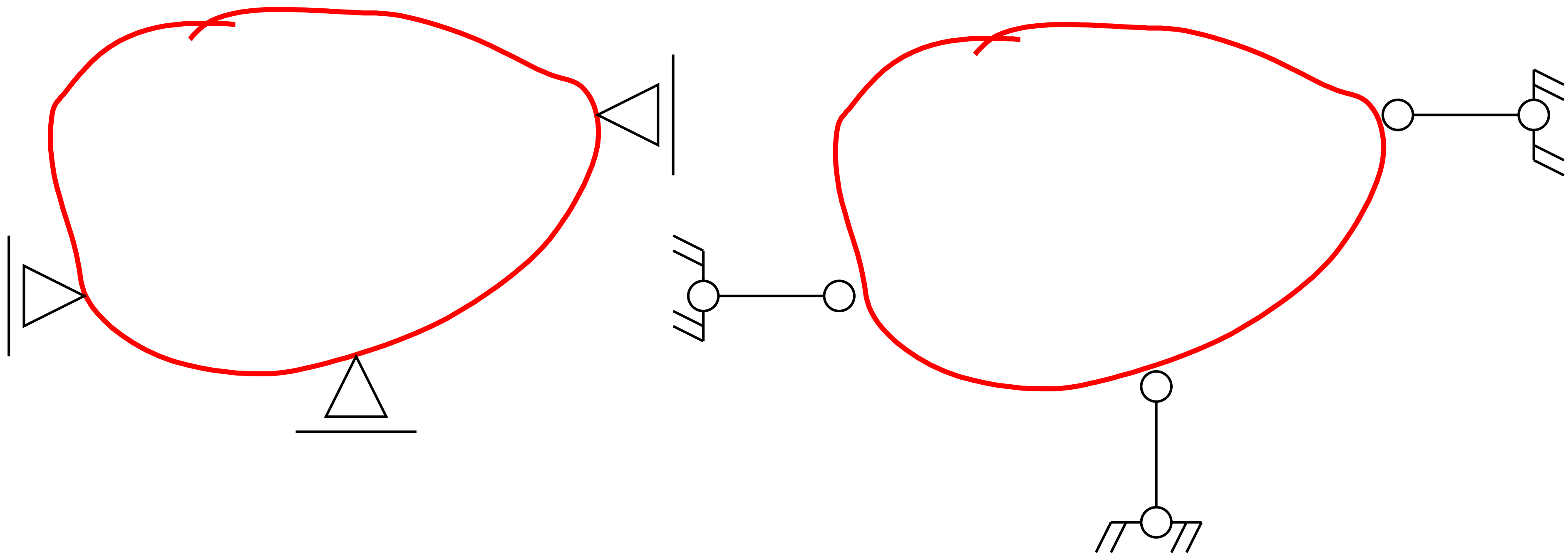


Vazby tělesa (desky) v rovině (1)

Zajištění **nehybnosti tělesa**:

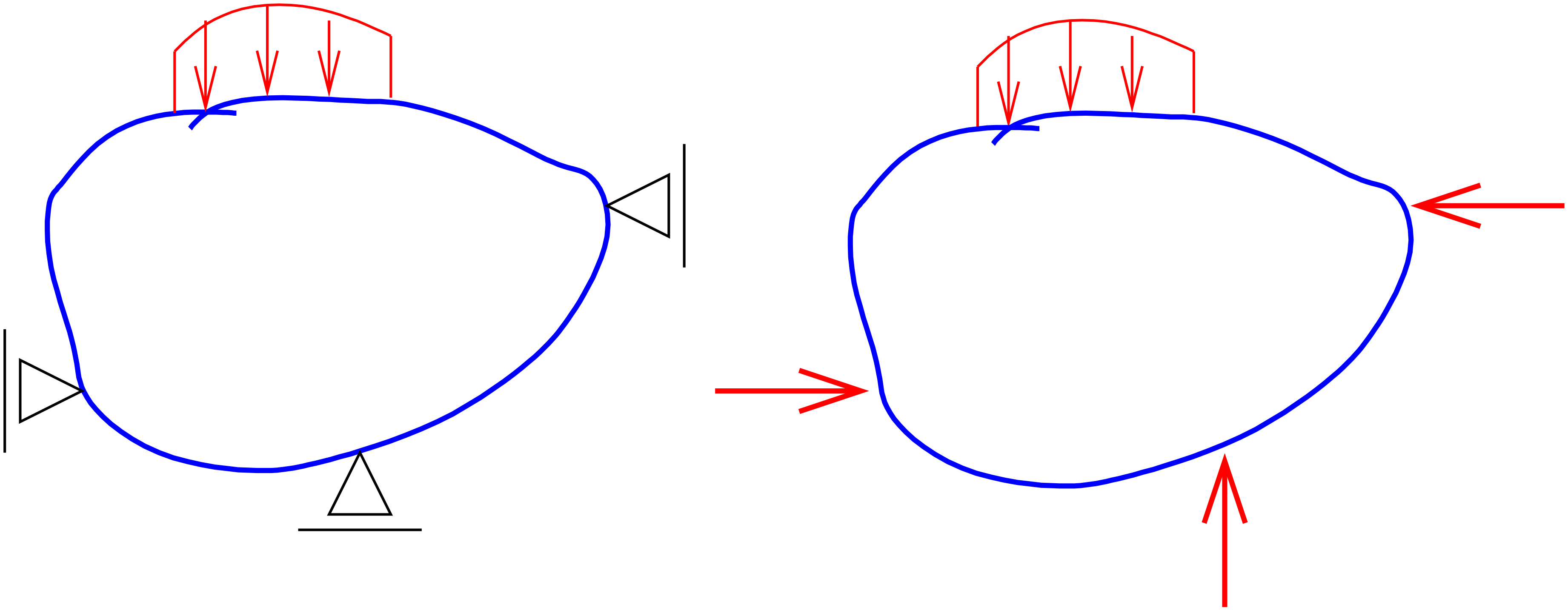
3 možnosti pohybu (stupně volnosti) $\Rightarrow$ **3 vazby**

Například:



Vazby tělesa v rovině (2)

Zatížení tělesa vyvolává **reakce ve vazbách**:

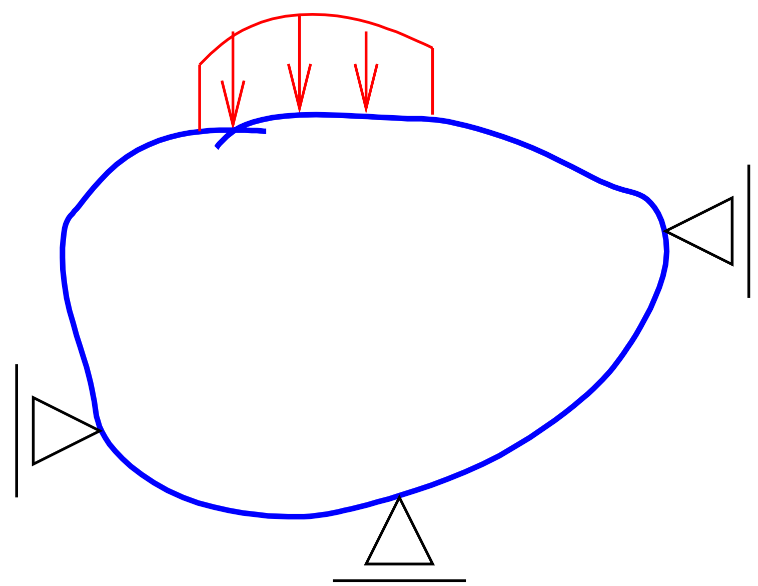


Vazba bránící posunutí ⇒ síla.

Vazba bránící pootočení ⇒ moment.

Vazby (3): kinematická určitost

Je použito **právě tolik** vazeb (3), aby bylo zabráněno pohybu tělesa ⇒ **kinematická určitost**.

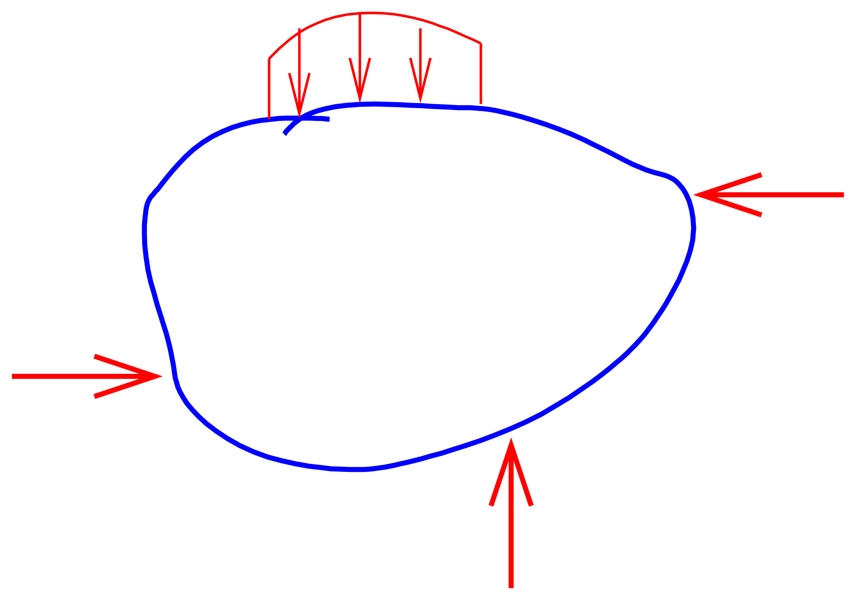


Více vazeb ⇒ kinematická **přeurčitost**.

Méně vazeb ⇒ kinematická **neurčitost** (mechanismus!).

Vazby (4): statická určitost

V úloze je **právě tolik** reakcí ve vazbách, kolik je **podmínek rovnováhy** (3) $\Rightarrow$ **statická určitost**.



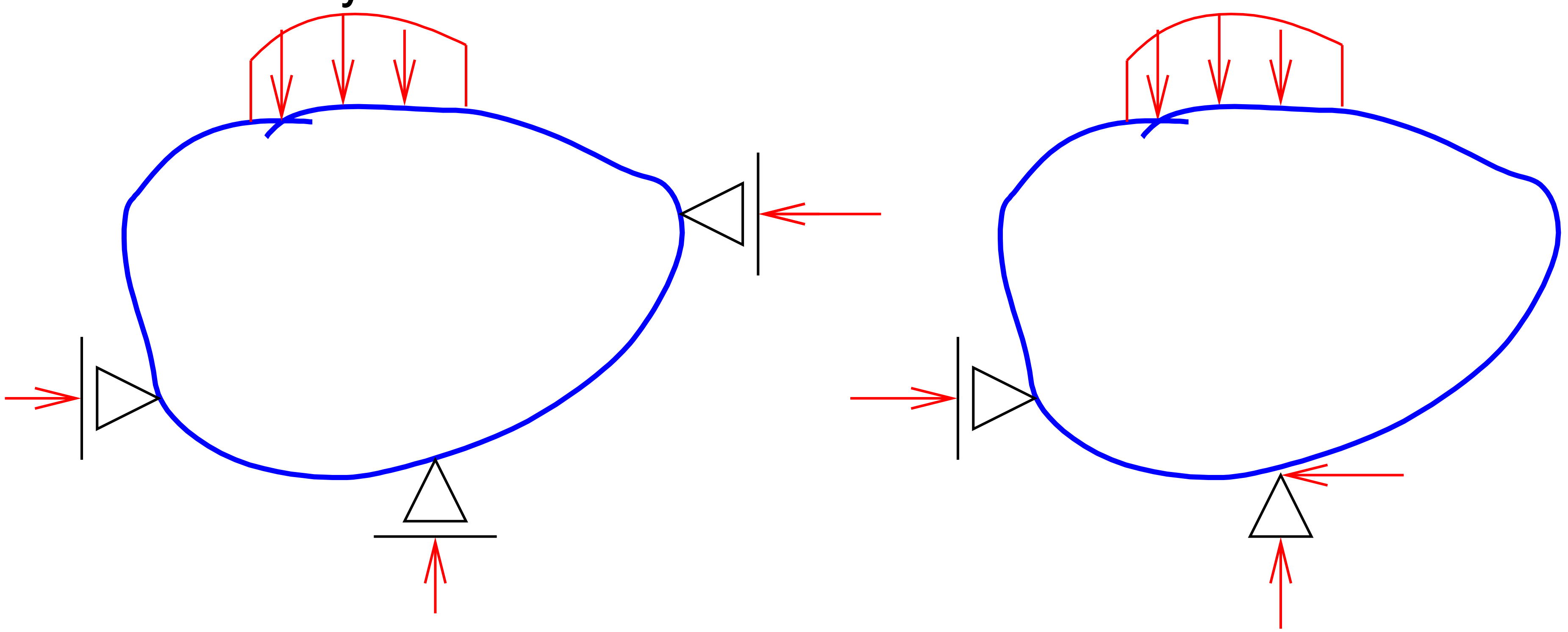
Více vazeb $\Rightarrow$ statická **neurčitost** (viz SSK I, SSK II).

Méně vazeb $\Rightarrow$ statická **přeurčitost** (mechanismus!).

Vazby tělesa v rovině (5)

Úloha:

1. staticky **určitá**
2. kinematicky **určitá**:

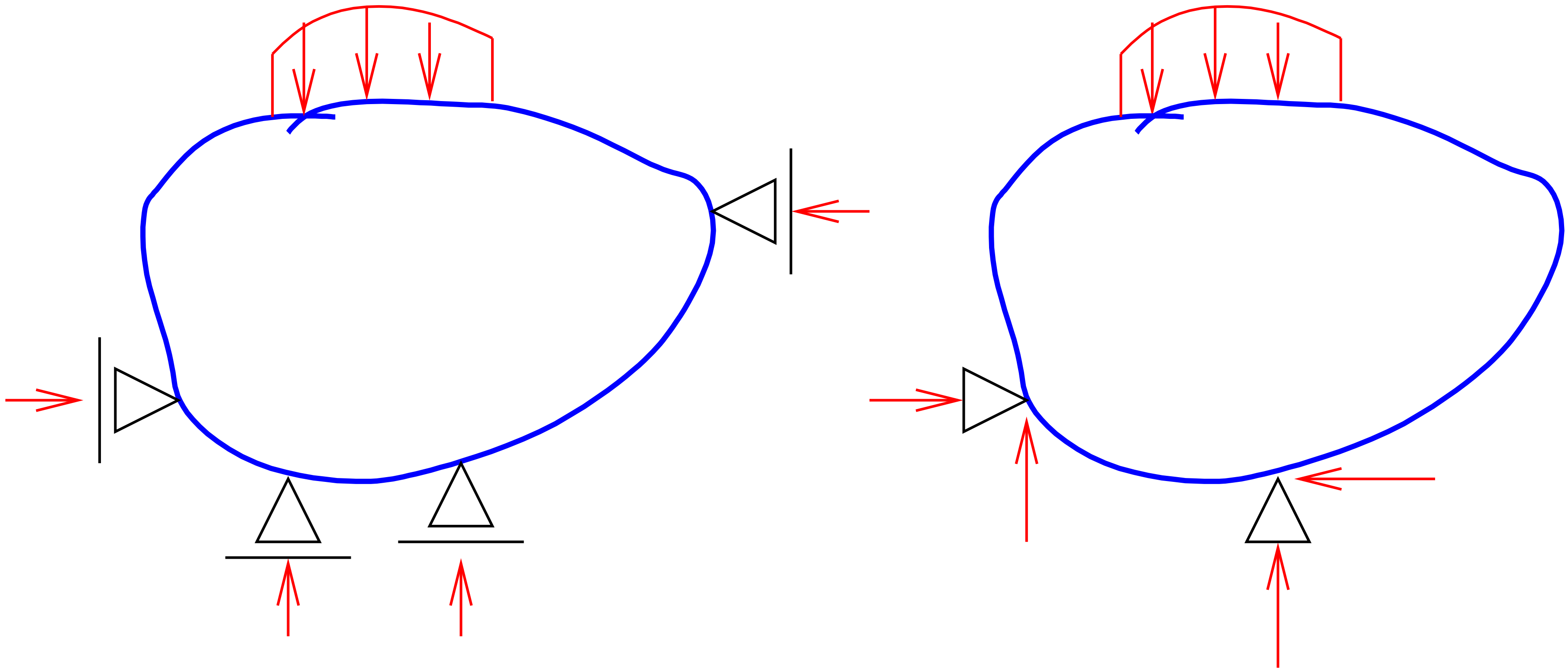


Právě 3 vazby (a 3 složky reakcí).

Vazby tělesa v rovině (6)

Úloha:

1. staticky **neurčitá**
2. kinematicky **přeurčitá**:

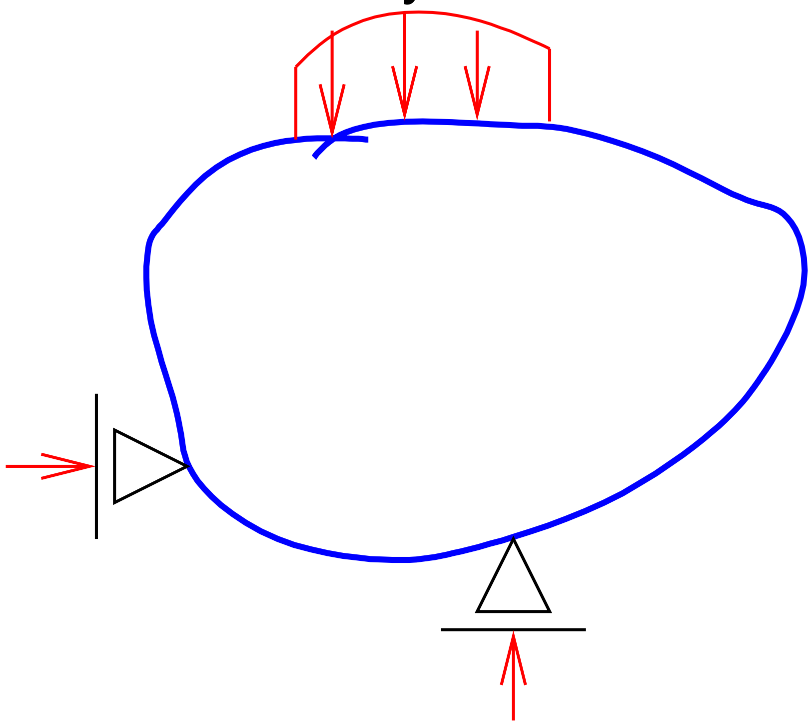


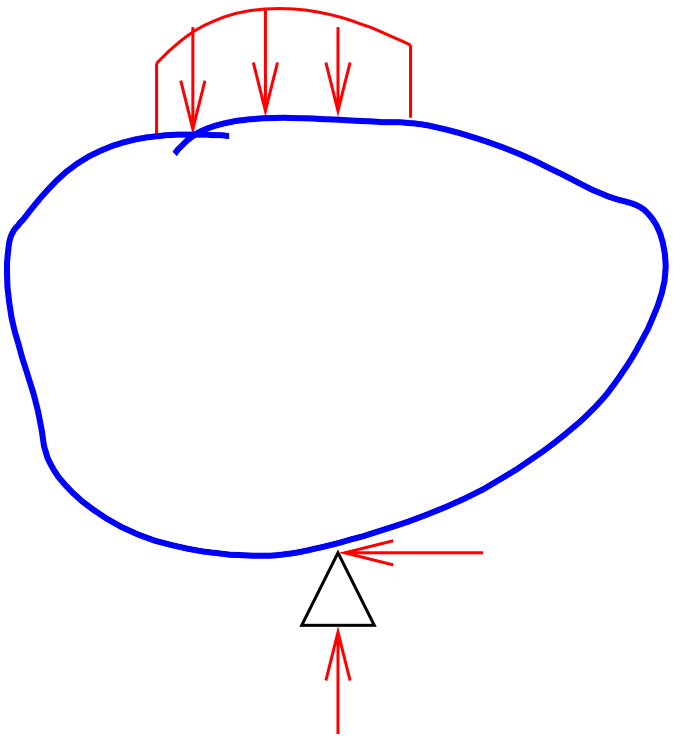
Více než 3 vazby (a 3 reakce).

Vazby tělesa v rovině (7)

Úloha:

1. staticky **přeurčitá**
2. kinematicky **neurčitá**:





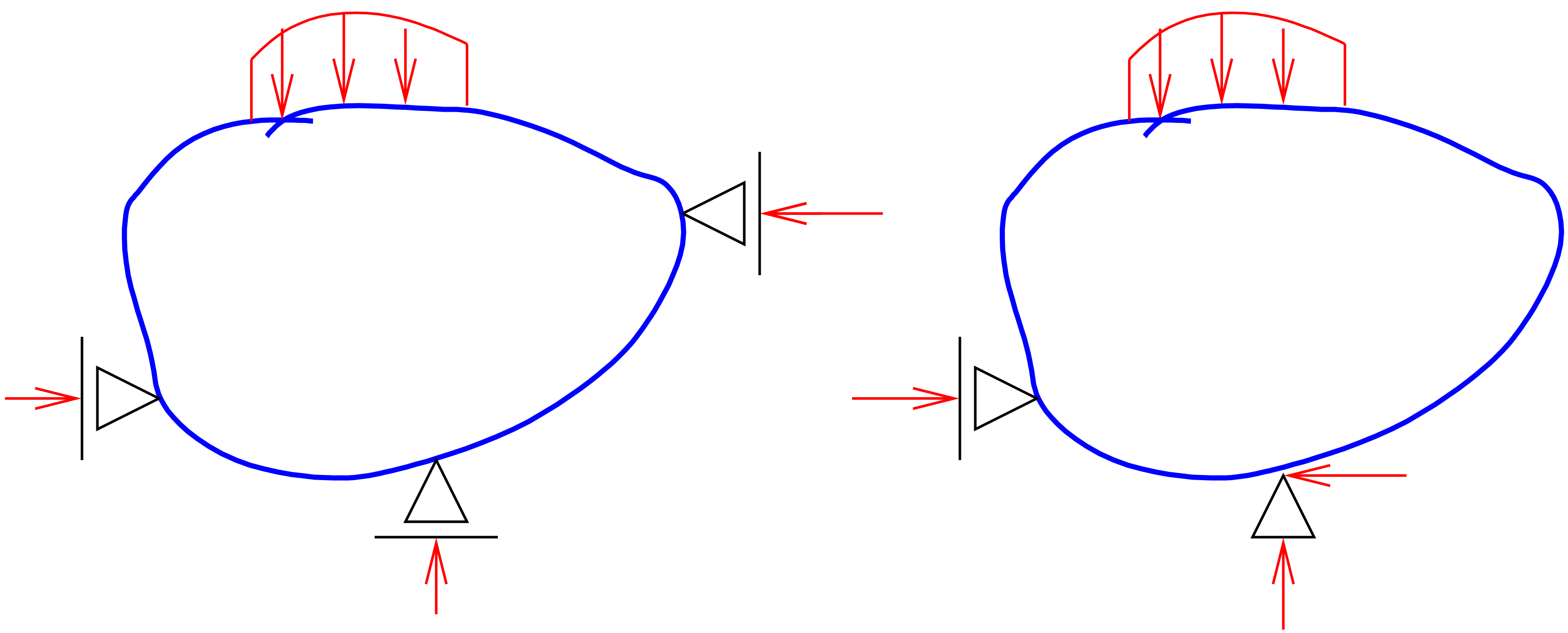
Méně než 3 vazby (a 3 reakce): konstrukce je *mechanismem*.

Stupeň statické neurčitosti (1)

$$S_n = v - 3 + X$$

v ... počet stupňů volnosti odebraný vazbami

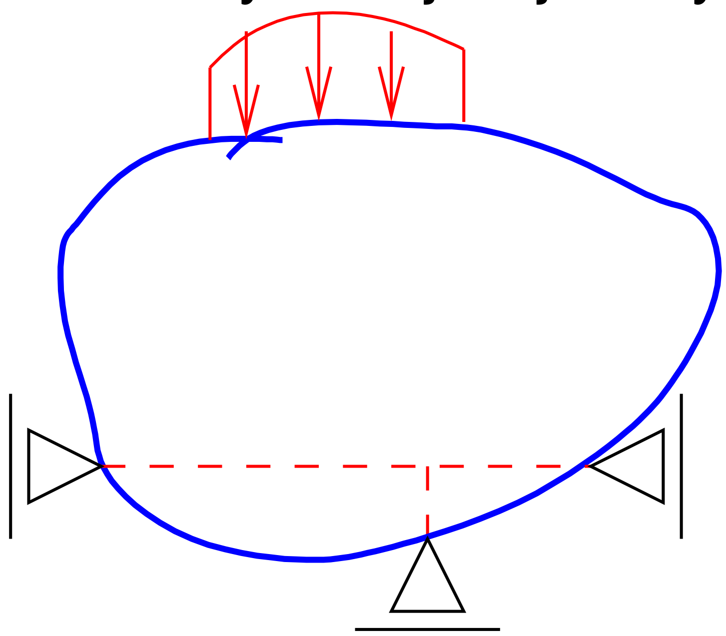
X ... další členy (klouby apod... upřesníme později)

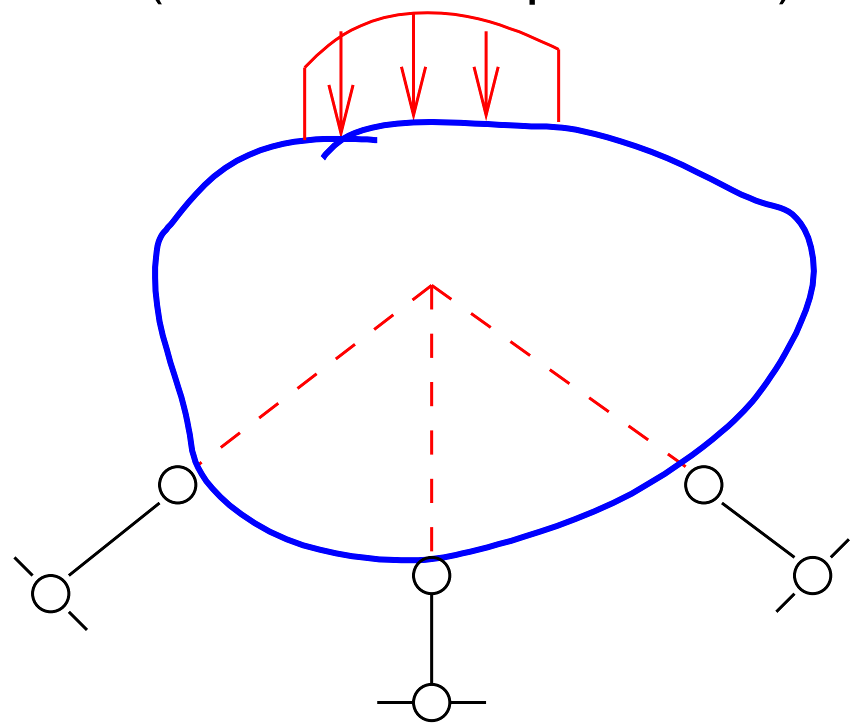


Výjimkové případy vazeb

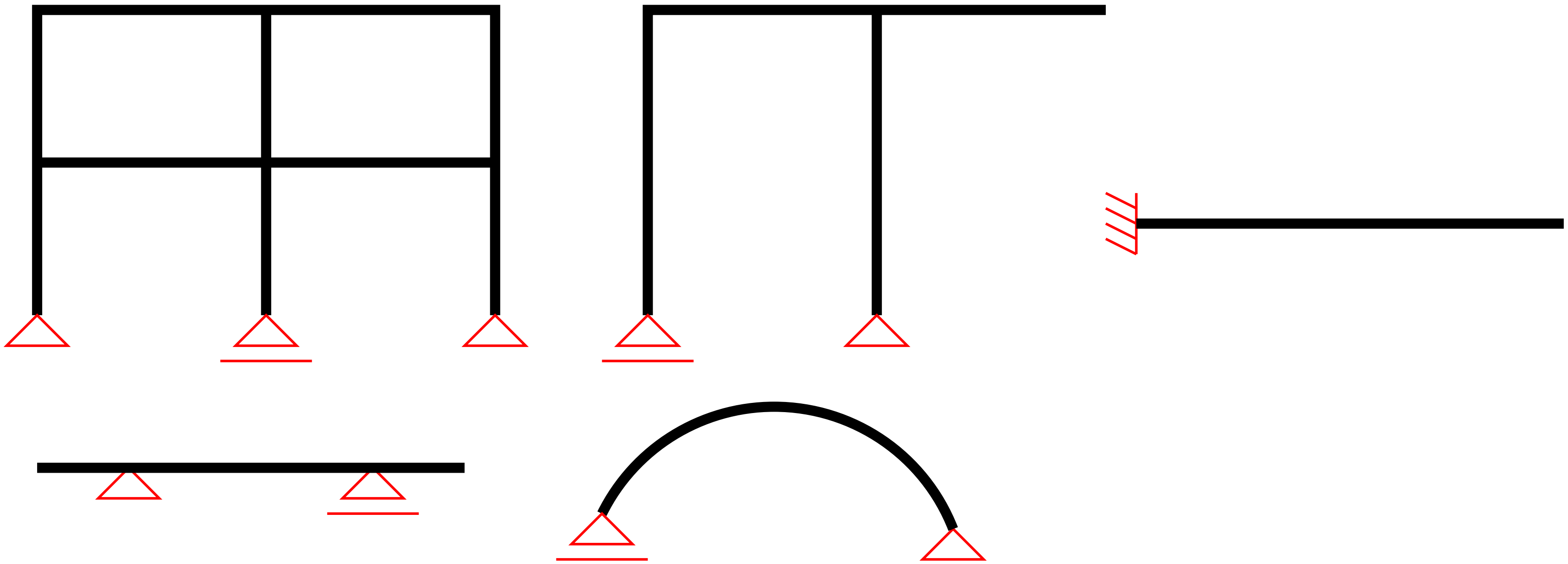
Úloha:

1. konstrukce je staticky určitá nebo neurčitá
2. vazby nezajišťují nehybnost tělesa (nevhodné uspořádání)



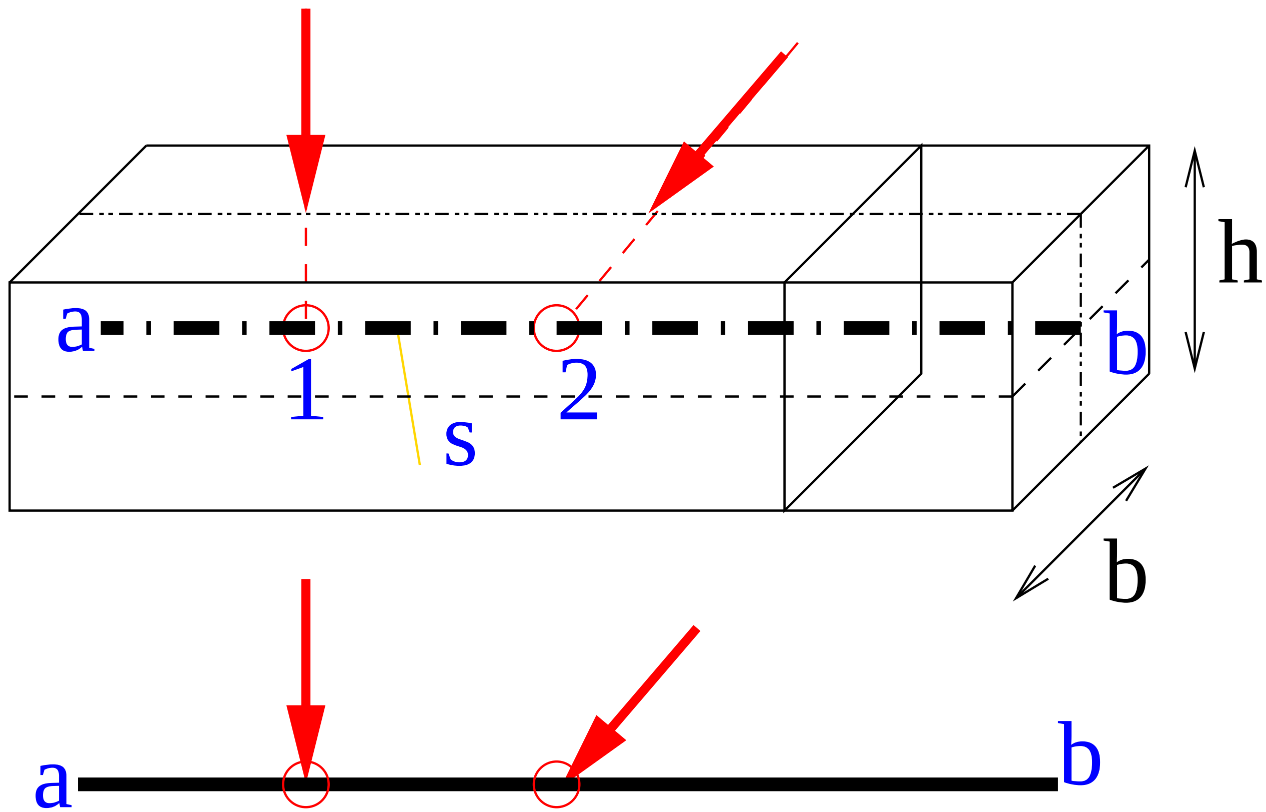


Prutové konstrukce



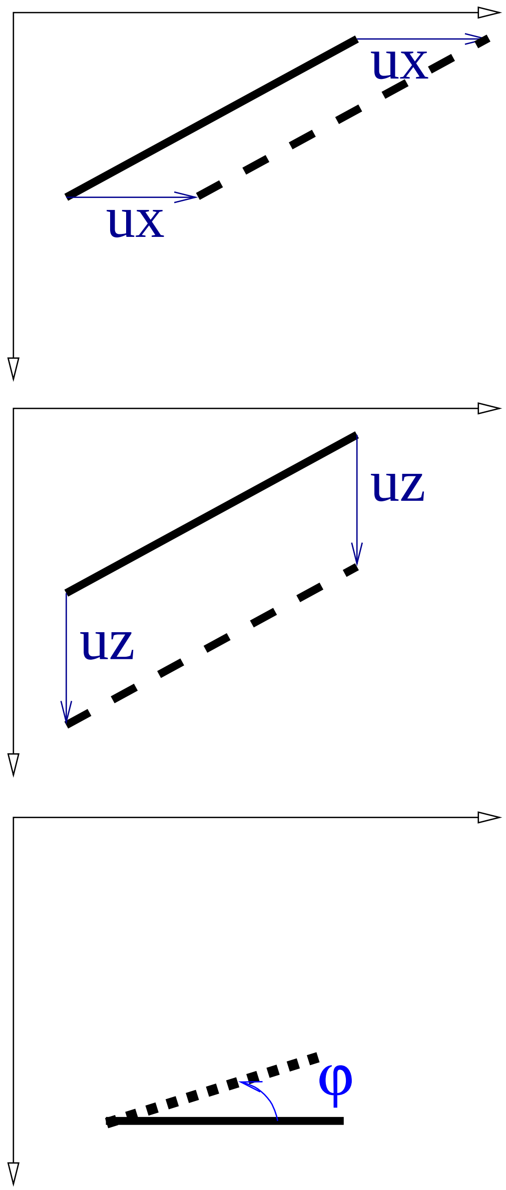
- Nejčastější nosné stavební konstrukce.
- Pro výpočet idealizujeme: řešíme osové jako schéma.
- V tomto semestru: **jen staticky určité**.

Prut – geometrický popis



- s - řídící čára (**střednice**, u přímého prutu také **osa prutu**)
- b, h – šířka a výška **průřezu prutu**
- 1, 2 – **působiště sil**

Pohybové možnosti prutu



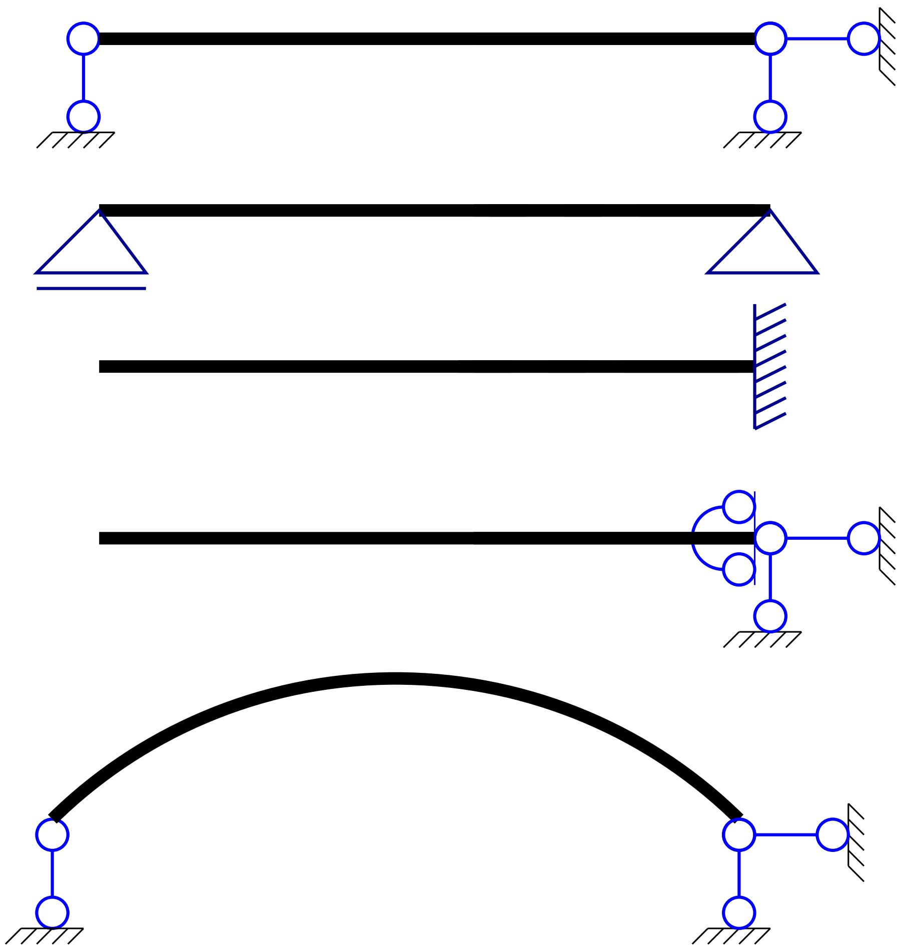
Až do konce semestru budeme pokládat prut za **dokonale tuhé těleso**.

- posun prutu (u)
- pootočení prutu (φ)
- v rovině 3 možnosti (**„stupně volnosti“**):

  u$_x$, u$_z$, φ_y
- v prostoru 6 možností („stupňů volnosti“):

  u$_x$, u$_y$, u$_z$, φ_x, φ_y, φ_z

Kinematicky a staticky určité konstrukce (příklady)



Prut bez zajištěné nehybnosti

Kinematicky **neurčitá** konstrukce:

- v rovině: jsou odebrány méně než 3 stupně volnosti
- v prostoru: je odebráno méně než 6 stupňů volnosti

Výjimkový případ:

- je odebrán potřebný počet stupňů volnosti, ale vazby jsou **nevhodně uspořádány**

Prut bez zajištěné nehybnosti

1.

$N = 3$ ... OK

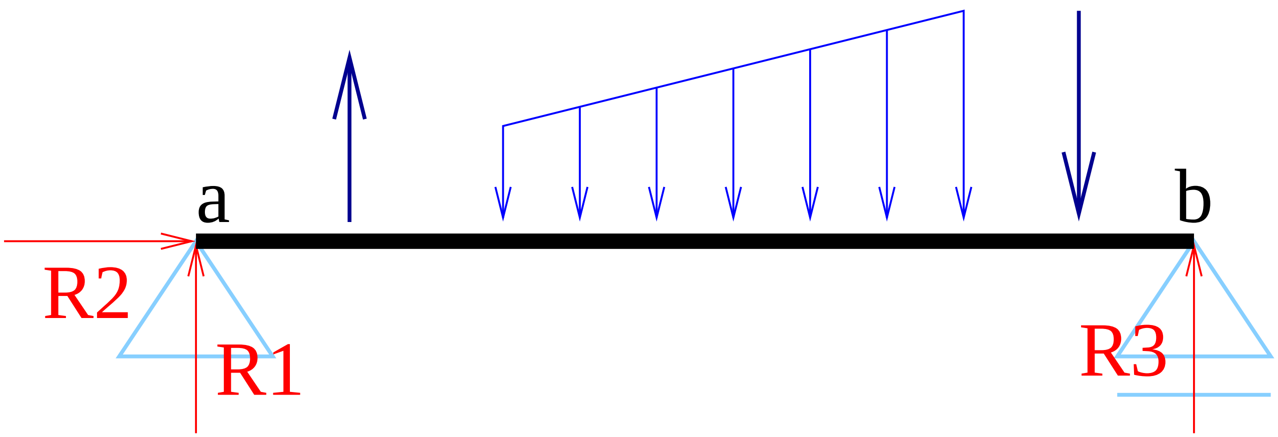
$N = 3$ ... !!!!

2.

1. nehybný prut (kinematicky určitý)

2. výjimkový případ

Podmínky rovnováhy uvolněného prutu v rovině



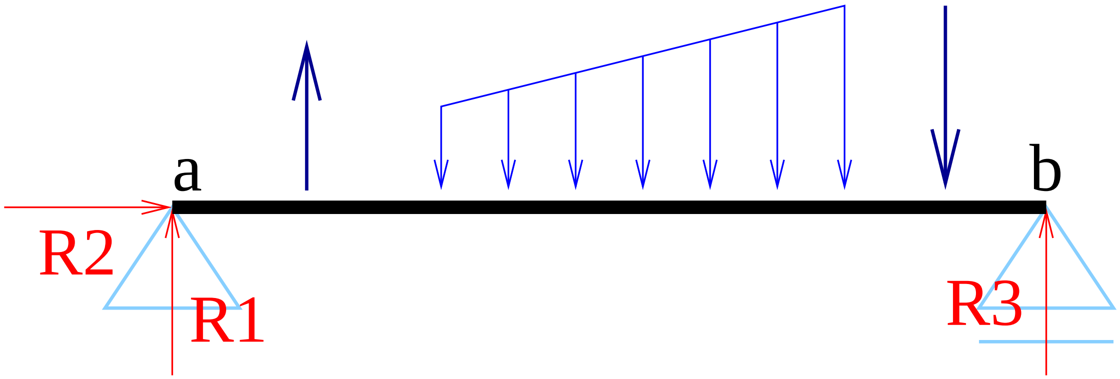
$$\sum_{i=1}^{n} F_{i,x} = 0$$

$$\sum_{j=1}^{m} F_{j,z} = 0$$

$$\sum_{k=1}^{g} M_{k,a} = 0$$

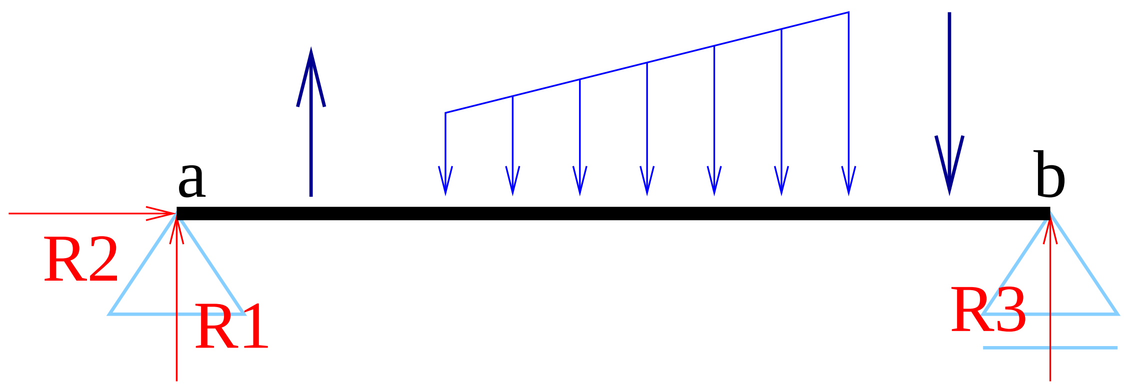
- $n_R = 3$ staticky určitý (kinematicky určitý)
- $n_R > 3$ staticky neučitý (kinematicky **přeurčitý**)
- $n_R < 3$ staticky přeurčitý (kinematicky **neurčitý**!)

Stanovení reakcí nosníku (1)



- z podmínek rovnováhy ($\sum_{i=1}^{n} F_{i,x} = 0$, $\sum_{j=1}^{m} F_{j,z} = 0$, $\sum_{k=1}^{g} M_{k,a} = 0$) vyjádříme neznámé reakce.

Stanovení reakcí nosníku (2)

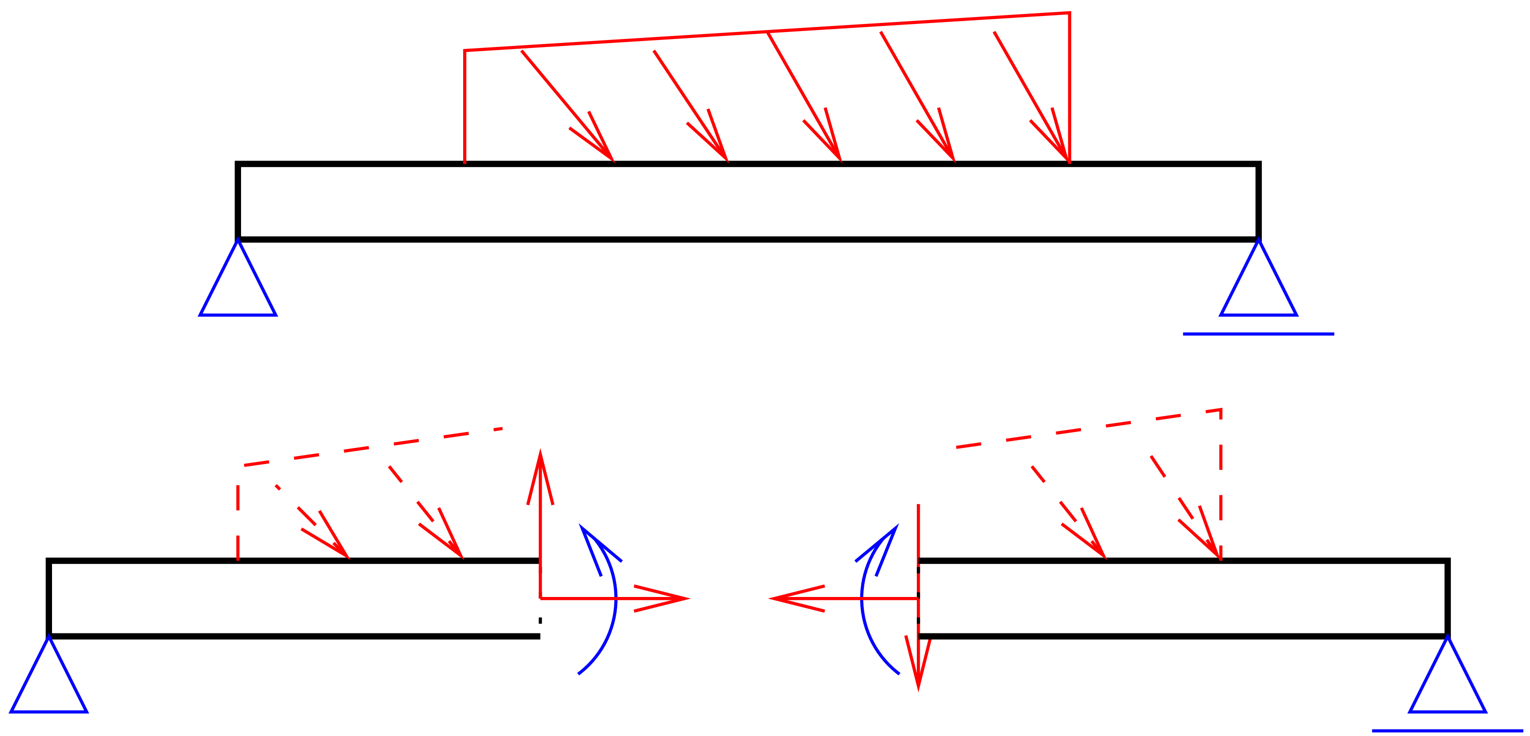


- máme k dispozici vždy tři (3) podmínky rovnováhy, můžeme použít i 2 momentové a 1 silovou, je-li to vhodné.

- momentové podmínky píšeme pro působiště reakcí (reakce v tomto místě z rovnice vypadnou)

Vnitřní síly nosníku (1)

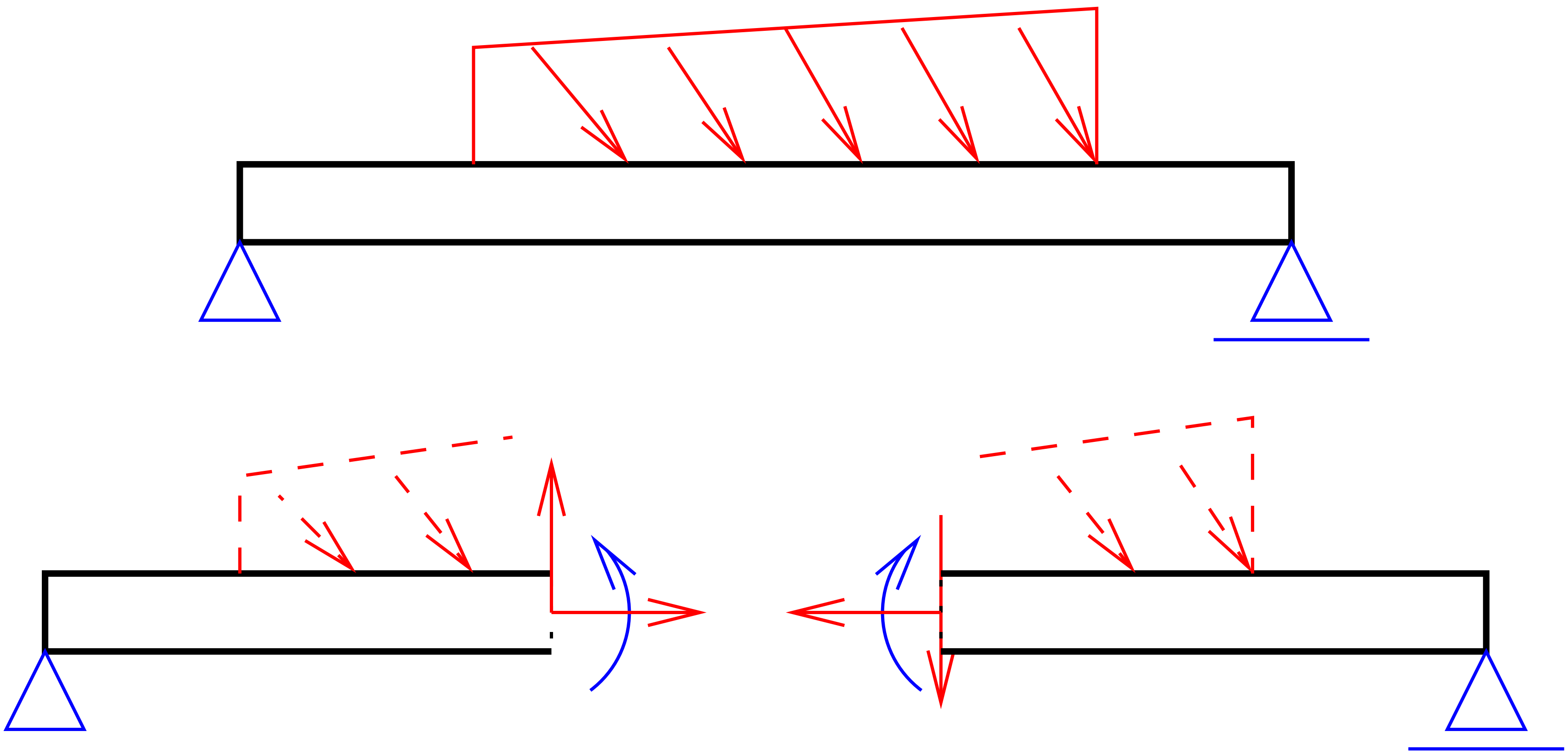
Vnější zatížení vyvolává účinky „uvnitř“ konstrukce (nosníku) – **vnitřní síly**.



Tedy vnitřní síly působí „proti“ účinkům zatížení.

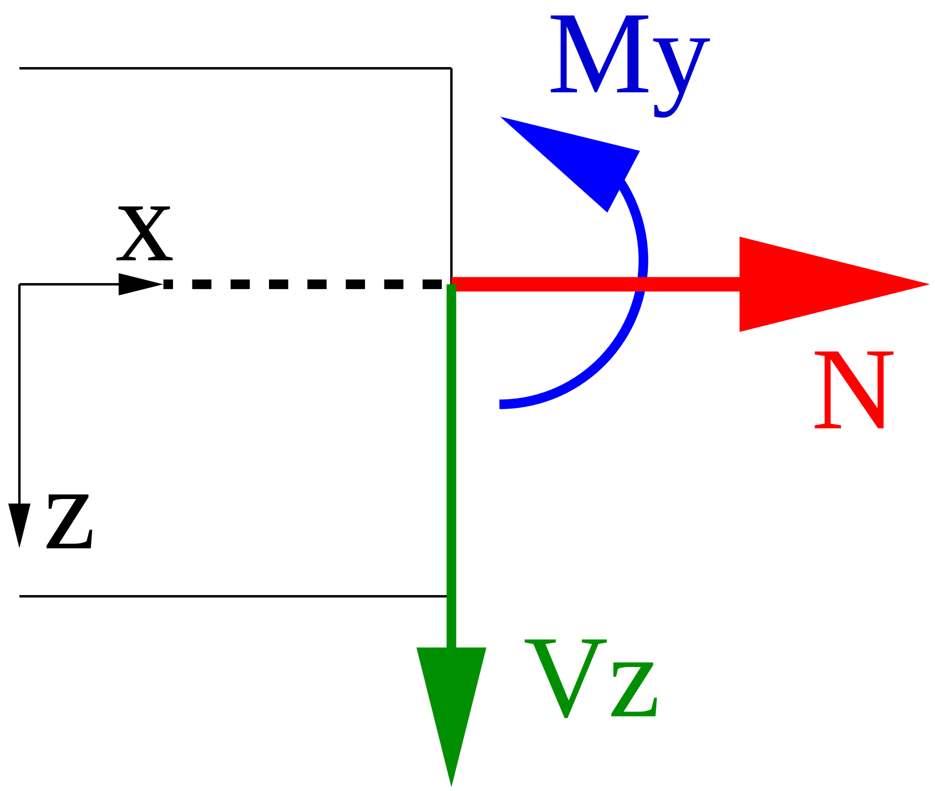
Vnitřní síly nosníku? (2)

Pro představu myšleně „rozřízněme“ nosník:



Síly v „řezu“: viz výslednice rovinné soustavy sil.

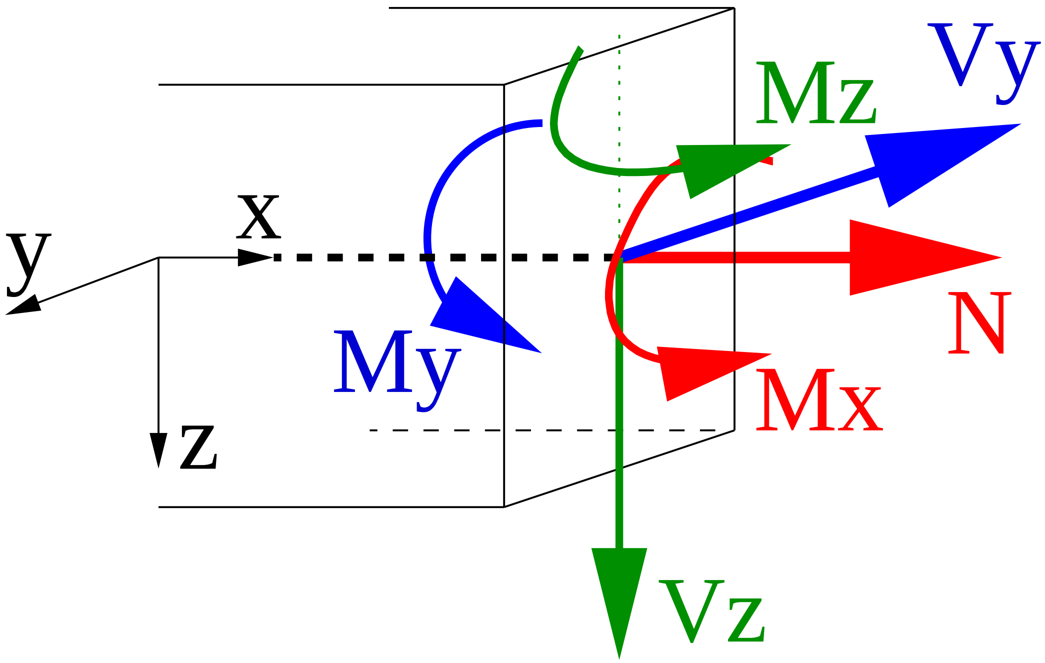
Rovinný nosník (2D, rovina XZ)



- **N** . . . normálová síla
- **V** (Vz) . . . posouvající síla
- **M** (My) . . . ohybový moment

Celkem 2 síly a 1 moment.

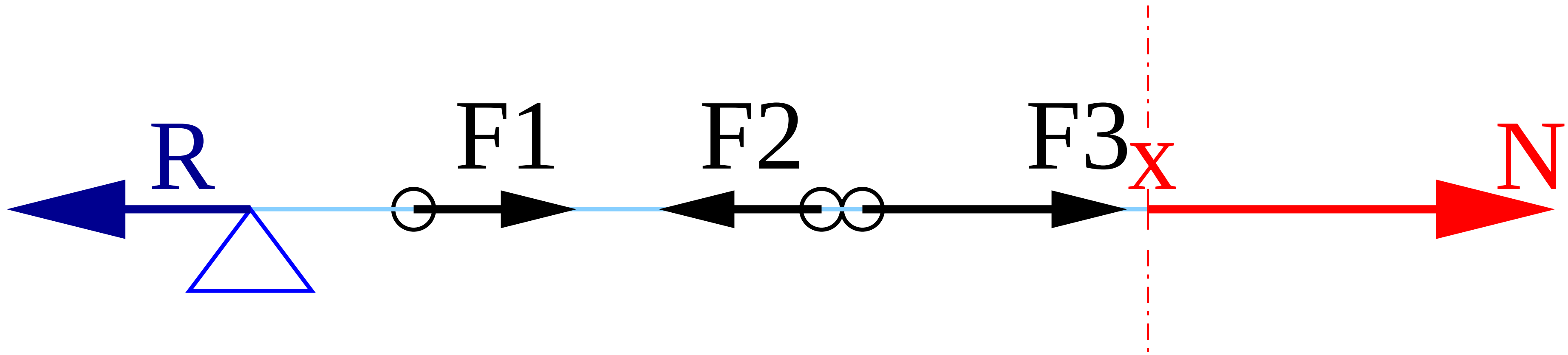
Prostorový nosník (3D)



- N . . . normálová síla
- Vy, Vz . . . posouvající síly
- Mx . . . krouticí moment
- My, Mz . . . ohybové momenty

Celkem 3 síly a 3 momenty (**6** vnitřních sil).

Normálová síla (osová úloha)



$$N = \sum F_{i,x}$$

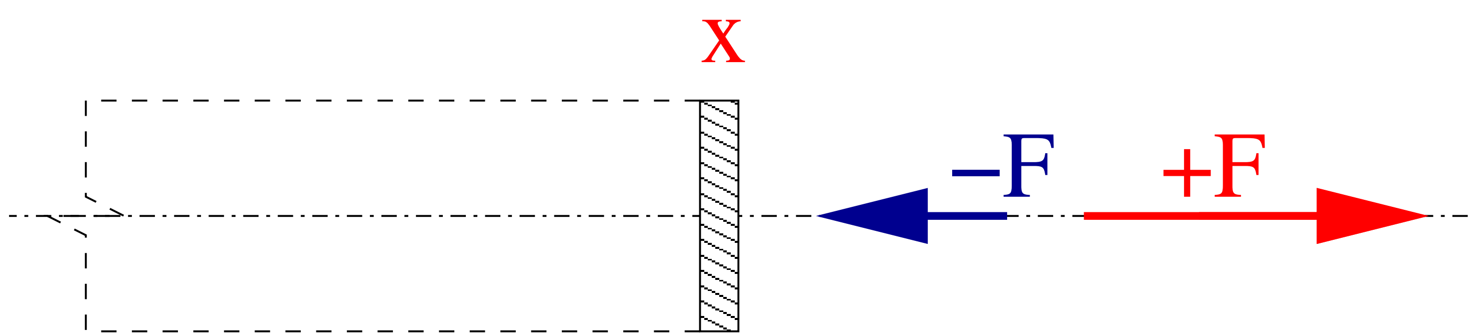
Normálová síla v průřezu **x** se určí jako výslednice všech osových sil působících po jedné straně zadaného průřezu (platí pro obě strany průřezu).

Tedy stejně lze postupovat i zprava – výsledek musí být stejný.

Normálová síla – znaménka

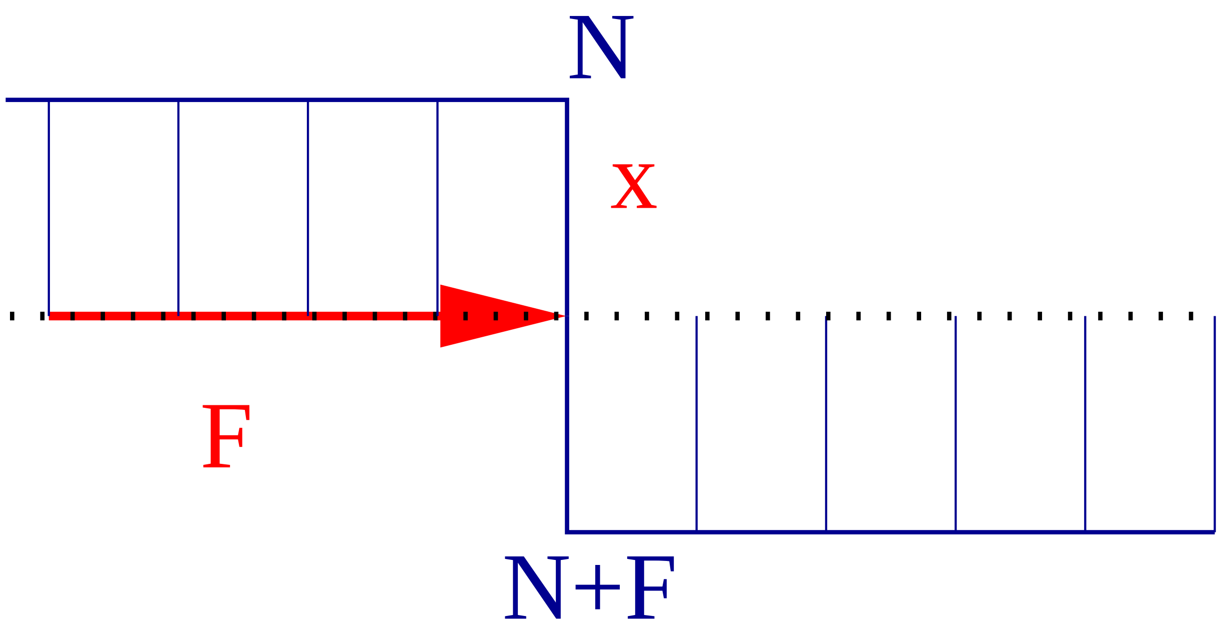
Síla je **kladná** – tahová, působí-li **od** sledovaného průřezu.

Síla je **záporná** – tlaková, působí-li **k** sledovanému průřezu.

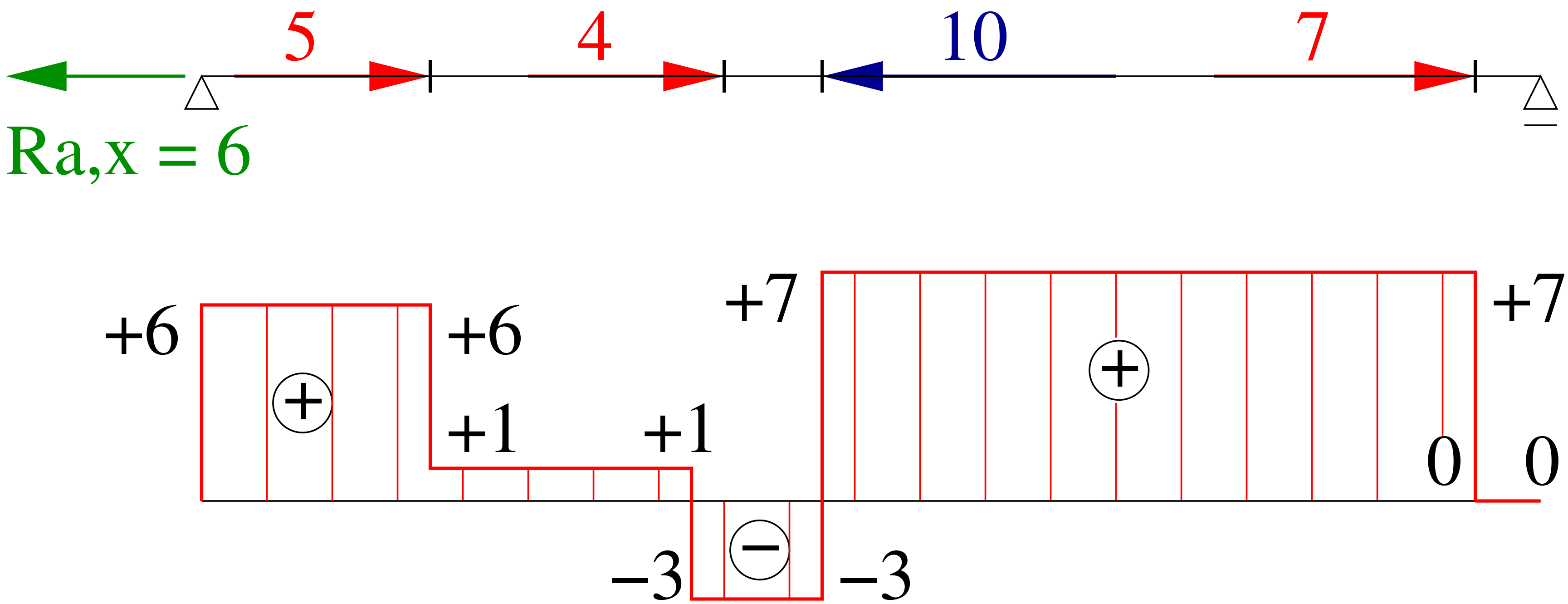


Normálová síla – síla v průřezu

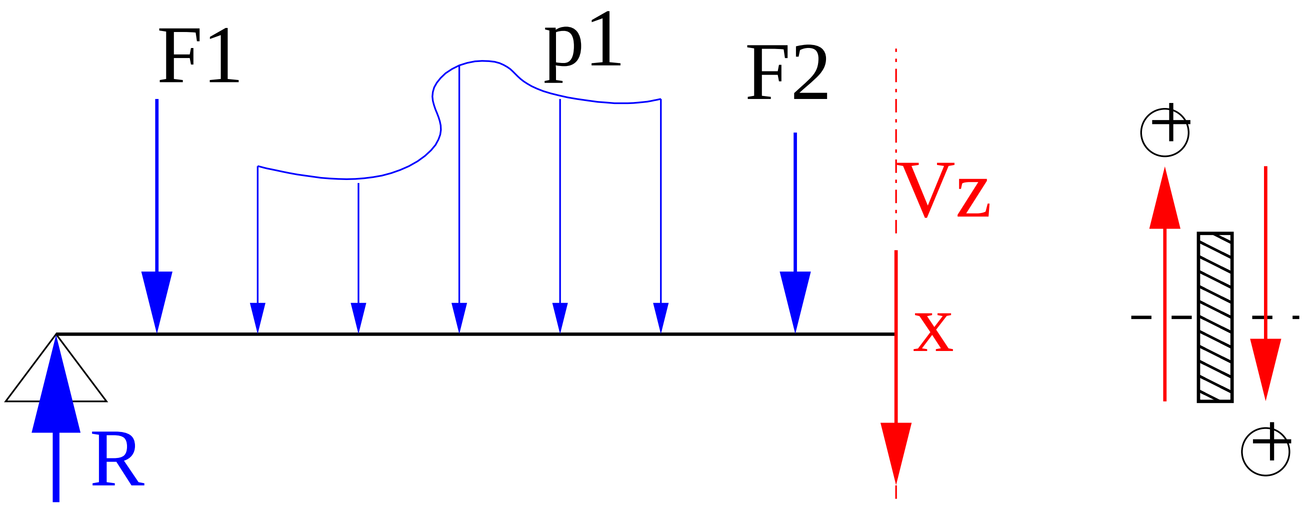
Působí-li zatížení právě ve sledovaném průřezu, pak v něm stanovujeme dvě hodnoty - **před** (N) a **za** (N+F) silou.



Normálová síla – příklad



Posouvající síla

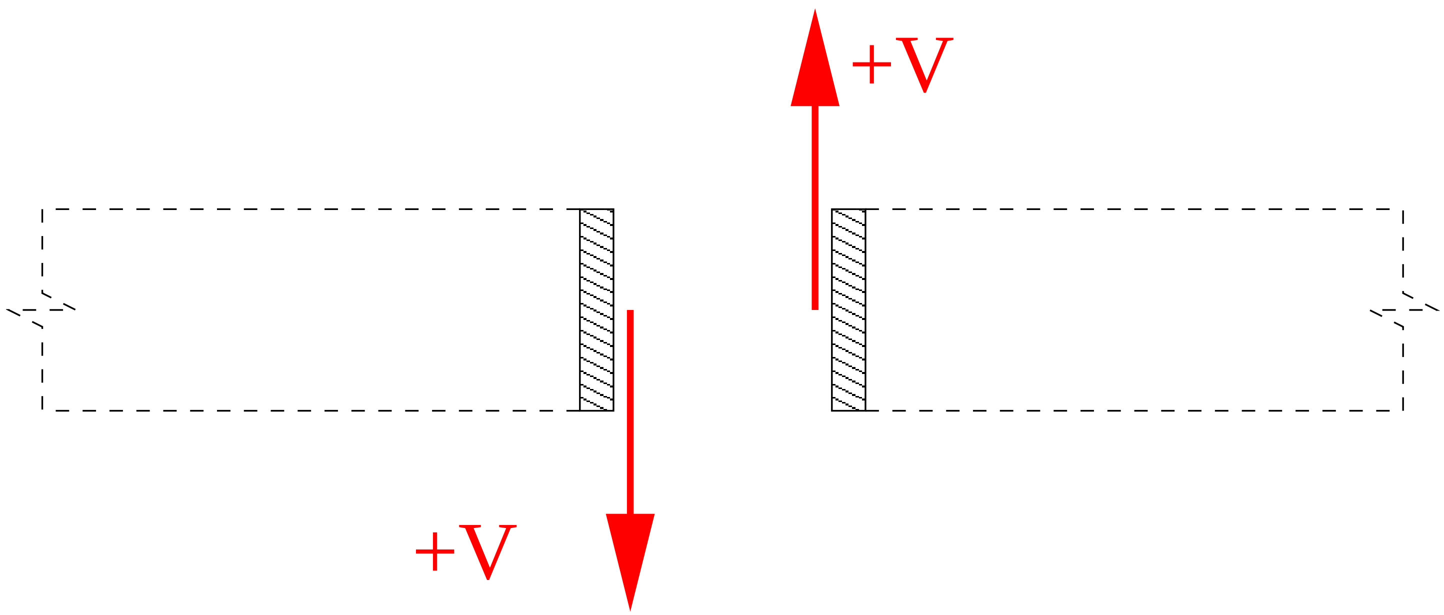


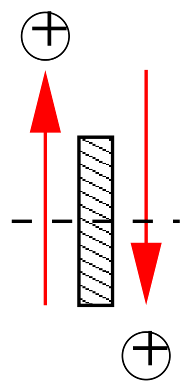
$$V_z(x) = v(x) = \sum F_{i,z}$$

Posouvající síla v průřezu **x** se určí jako výslednice všech příčných sil působících po jedné straně zadaného průřezu (platí pro obě strany průřezu).

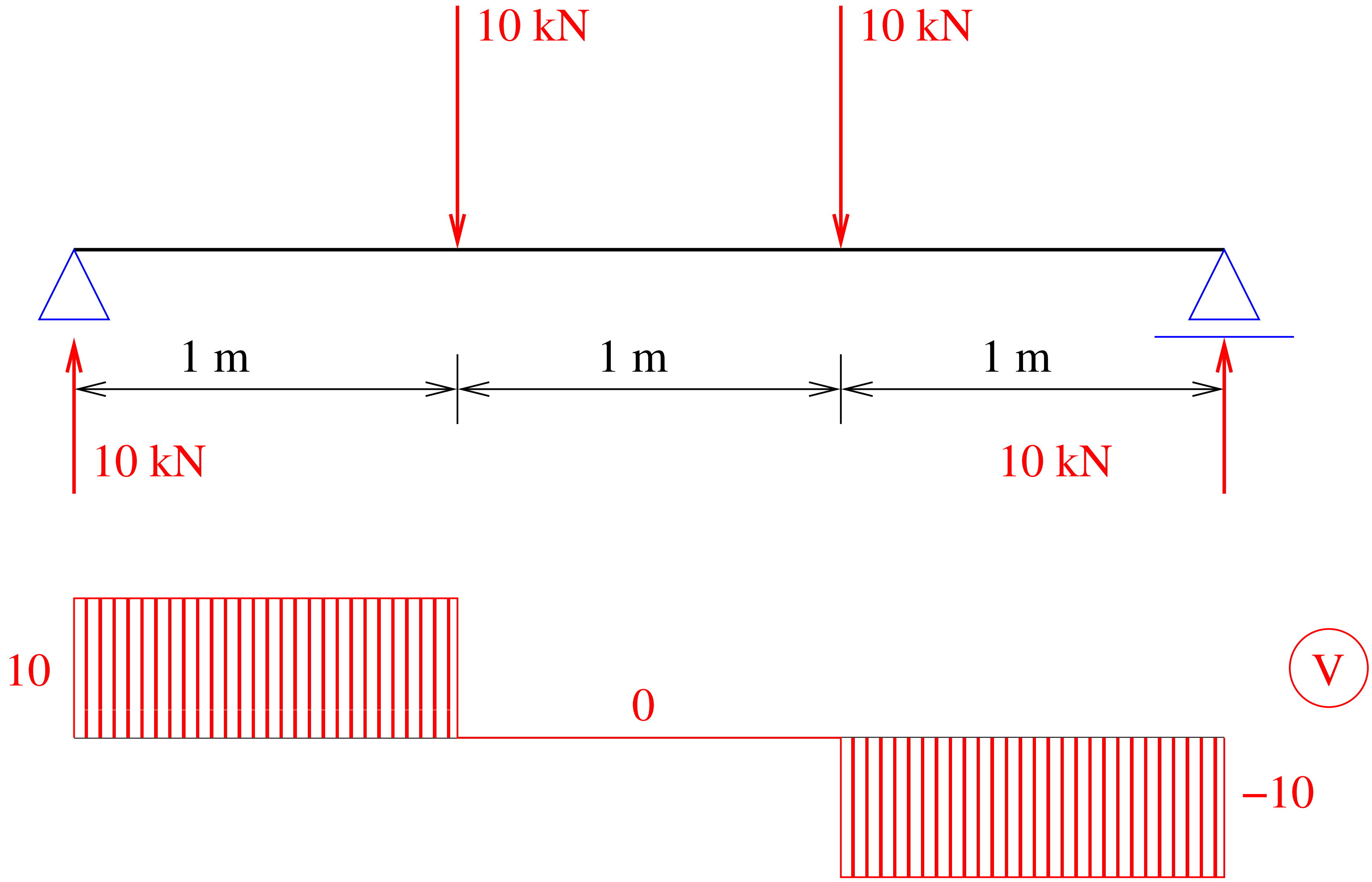
Tedy stejně lze postupovat i zprava – výsledek musí být stejný.

Posouvající síla – konvence

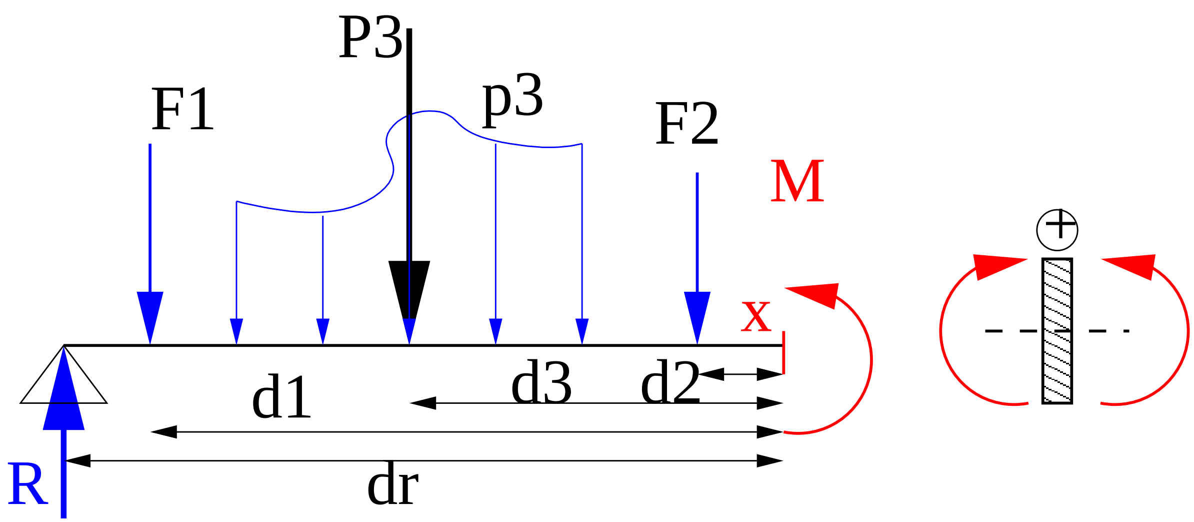




Posouvající síla – příklad



Ohybový moment

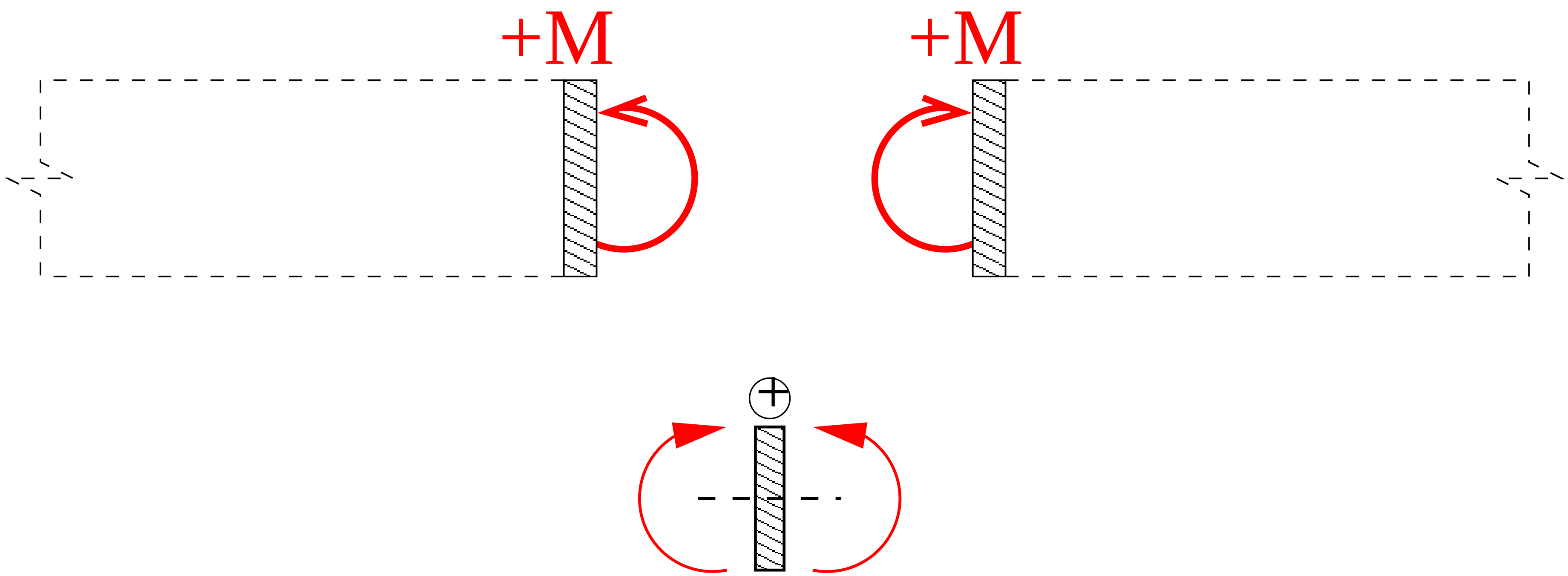


$$M_y(x) = M(x) = \sum F_{i,z}\, d_i$$

Ohybový moment v průřezu **x** se určí jako součet momentů všech příčných sil působících po jedné straně zadaného průřezu (platí pro obě strany průřezu).

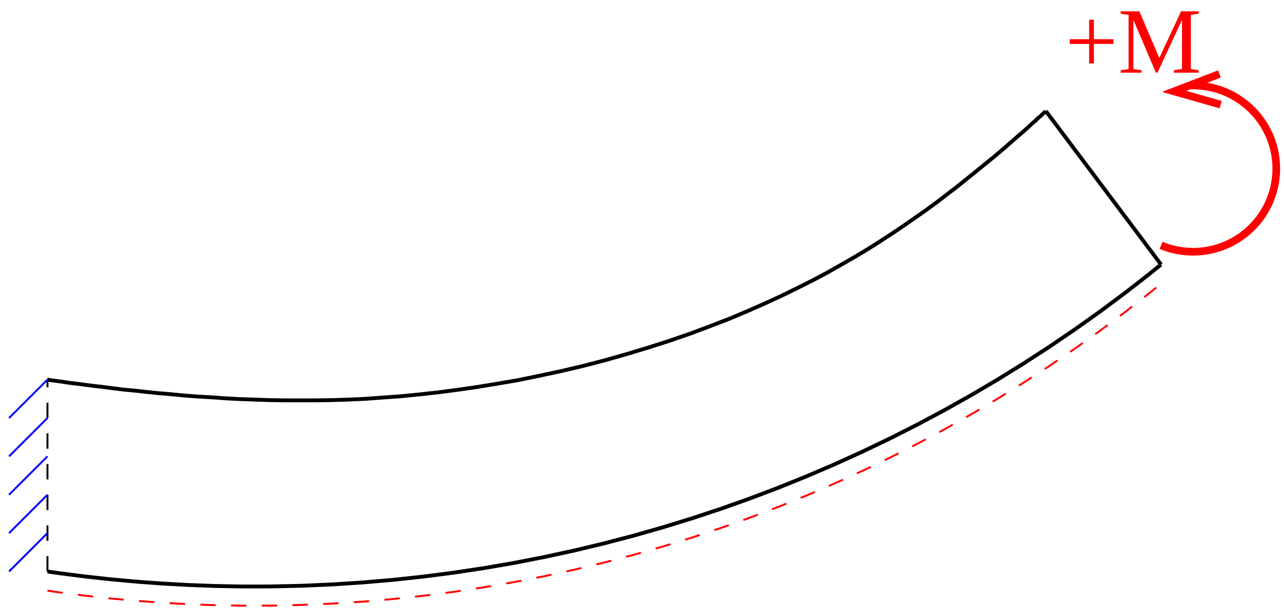
Tedy stejně lze postupovat i zprava – výsledek musí být stejný.

Ohybový moment – konvence (1)



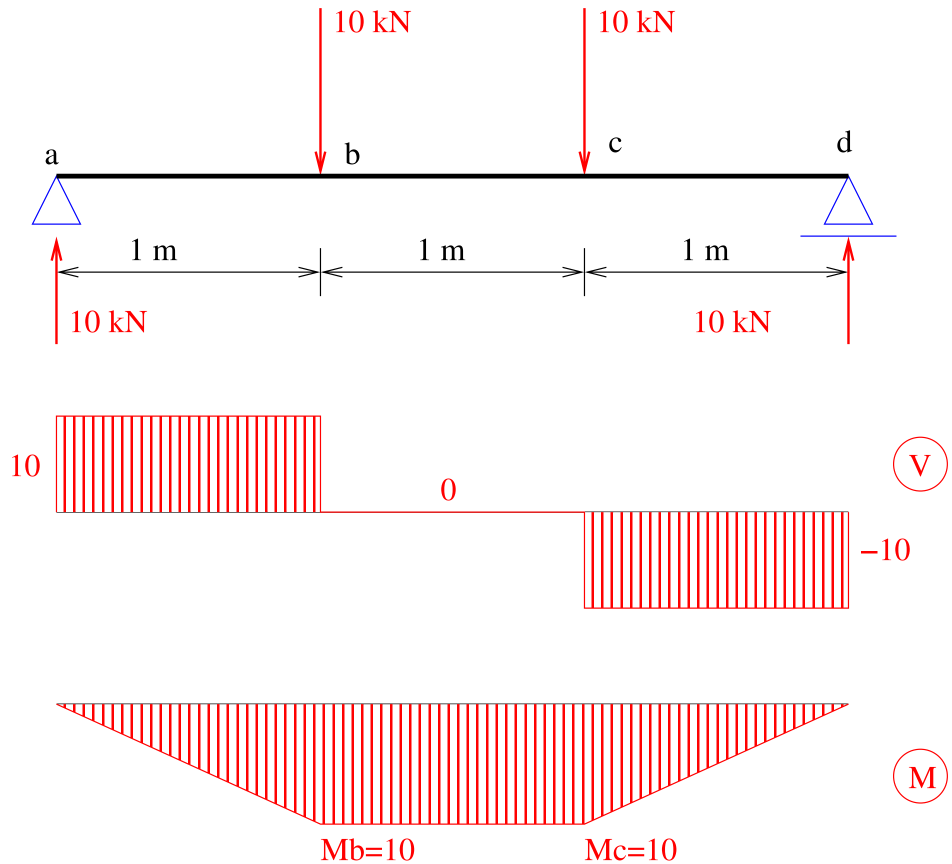
Ohybový moment se považuje za **kladný**, pokud vyvozuje **tah** ve **spodních vláknech** nosníku.

Ohybový moment – konvence (2)



Ohybový moment se považuje za **kladný**, pokud vyvozuje **tah** ve **spodních vláknech** nosníku.

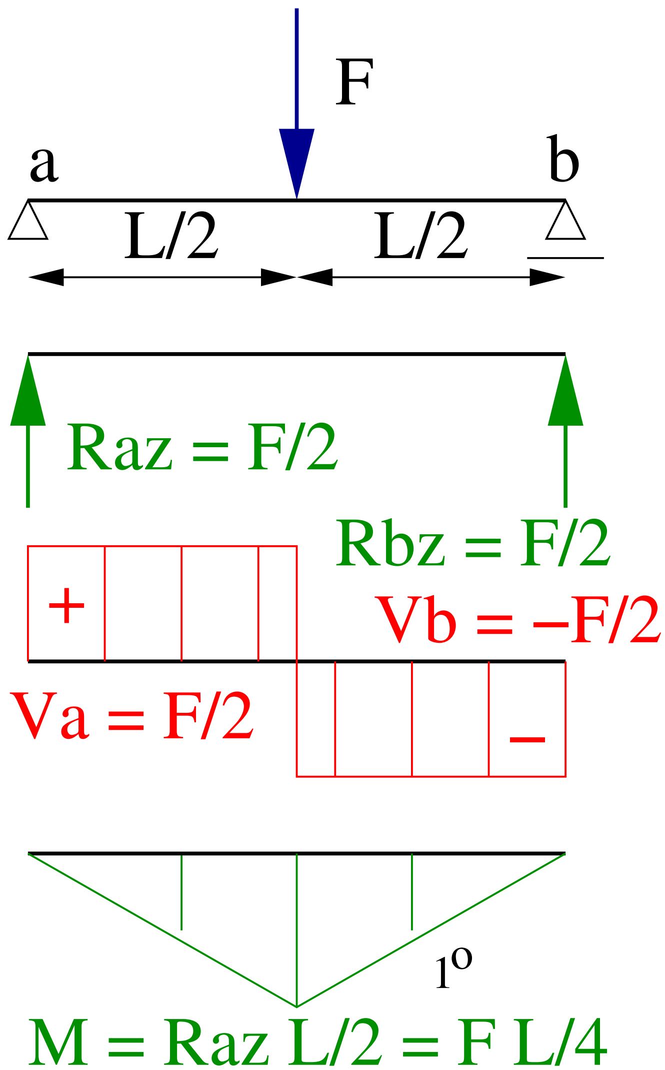
Ohybový moment – příklad



$$M = \sum_{0}^{x} F_i \times d_i \quad [kNm]$$

$$\begin{aligned}
M_b &= R_{a,z}\, d_{ab} = 10 \times 1 \\
&= 10\; kNm \\
M_c &= R_{a,z}\, d_{ac} - 10\, d_{bc} \\
&= 10 \times 2 - 10 \times 1 = 10\; kNm \\
M_d &= R_{a,z}\, d_{ad} - 10\, d_{bd} - 10\, d_{cd} \\
&= 10 \times 3 - 10 \times 2 - 10 \times 1 \\
&= 0\; kNm
\end{aligned}$$

Příklad výpočtu M a V (1)



Reakce (z podm. rovnováhy):

$$R_{az} = \frac{F}{2}(\uparrow)$$

$$R_{bz} = \frac{F}{2}(\uparrow)$$

Posouvající síla:

$$V_a = +\frac{F}{2}$$

$$V_b = -\frac{F}{2}$$

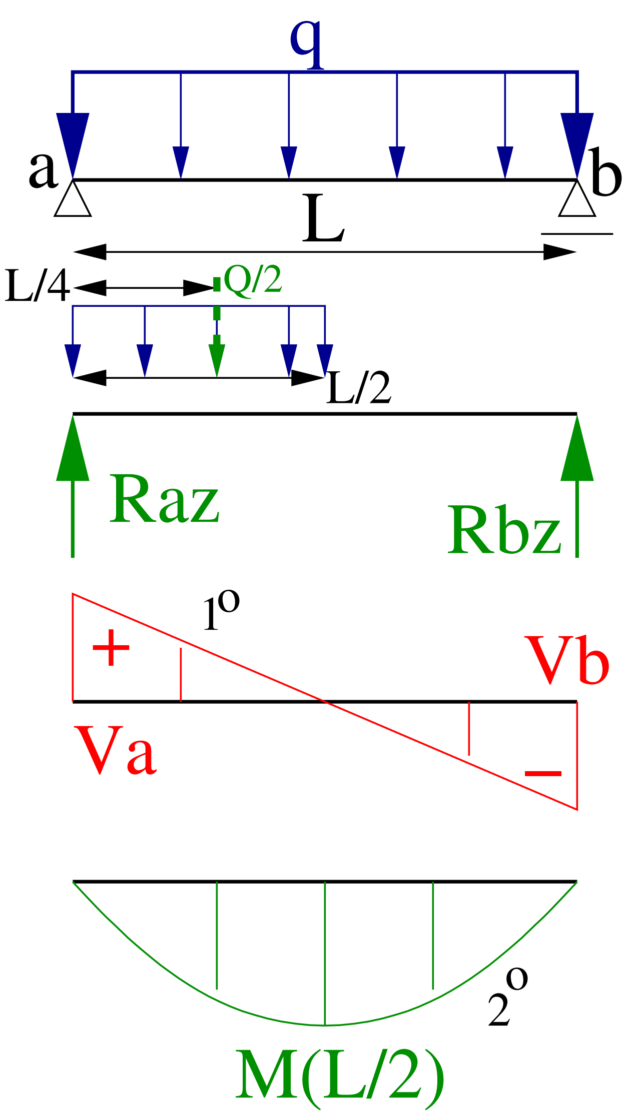
$$V(L/2)^L = +\frac{F}{2}$$

$$V(L/2)^P = -\frac{F}{2}$$

Moment:

$$M(L/2) = R_{az}\,\frac{L}{2} = \frac{F}{4}$$

Příklad výpočtu M a V (2)



Reakce (z podm. rovnováhy):

$$R_{az} = \frac{Q}{2} = \frac{q\ L}{2} (\uparrow)$$

$$R_{bz} = \frac{Q}{2} = \frac{q\ L}{2} (\uparrow)$$

Posouvající síla:

$$V_a = +\frac{q\ L}{2}$$

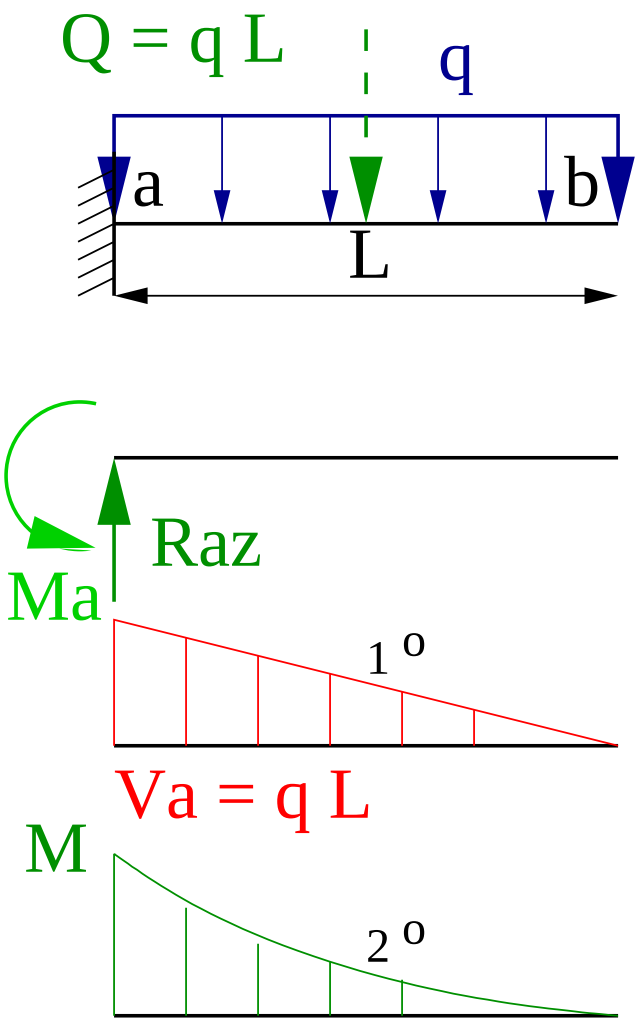
$$V_b = -\frac{q\ L}{2}$$

Moment:

$$M(L/2) = R_{az}\,\frac{L}{2} - \frac{L}{2}\,q\,\frac{L}{4} =$$

$$= q\,\frac{L^2}{4} - \frac{L^2}{8}\,q = \frac{1}{8} q\ L^2$$

Příklad výpočtu M a V (3)



Reakce (z podm. rovnováhy):

$$R_{az} = Q = q\ L(\uparrow)$$

$$M_a = Q\ L\ \frac{1}{2} = \frac{q\ L^2}{2}$$

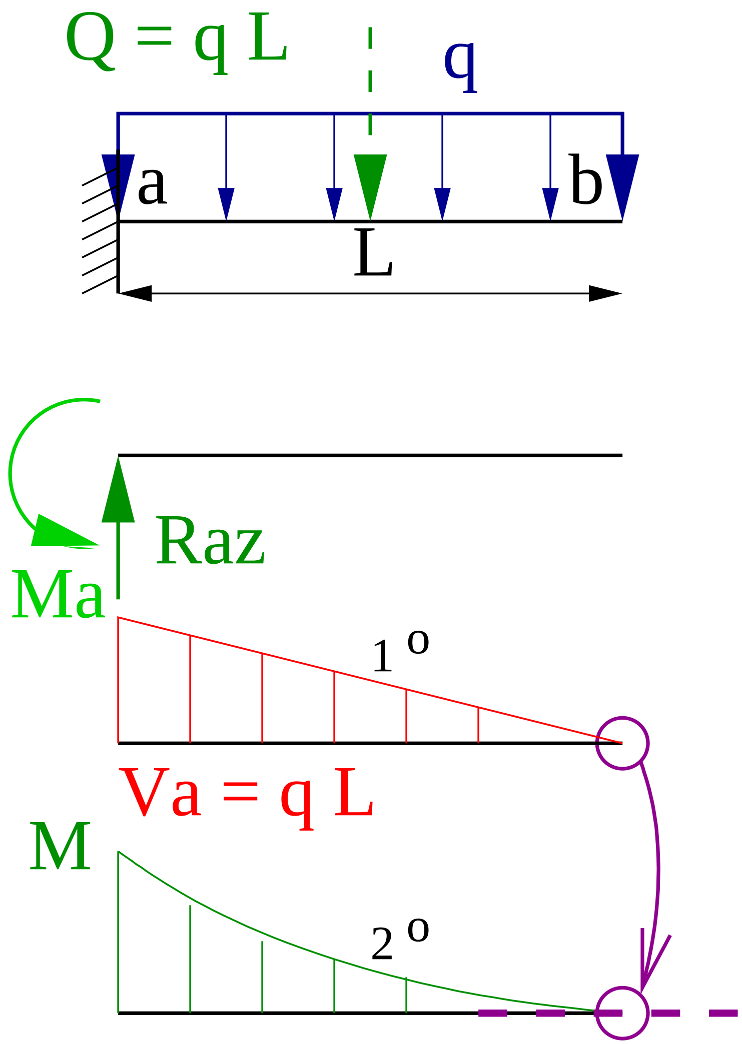
Posouvající síla:

$$V_a = +R_{az} = q\ L$$

Moment:

$$M(x) = -M_a + R_a\ x - q\ x\ \frac{x}{2}$$

Příklad výpočtu M a V (4)

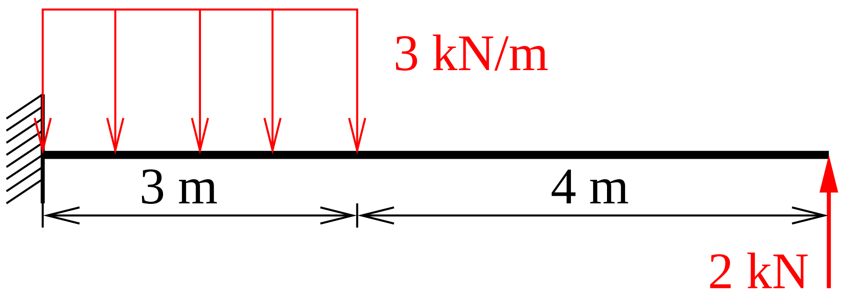


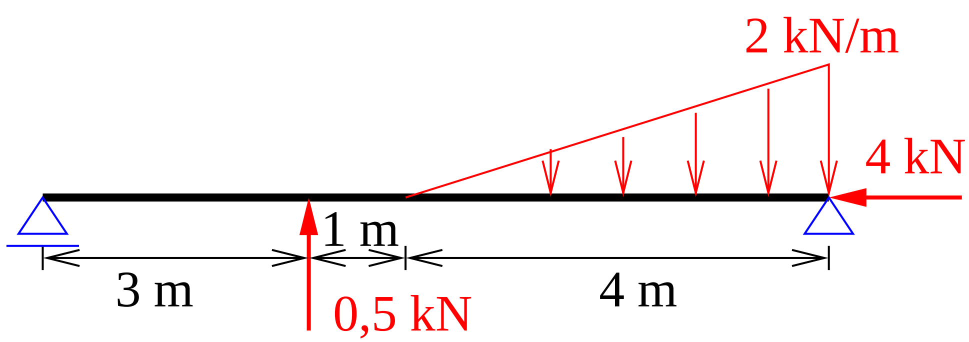
Extrém M:

- v místě **b**: $V_b = 0$
- M zde má vodorovnou tečnu
- i nula je extrém (M_a je záporné, 0 je větší než záporné číslo)
- ale i M_a je důležité! (největší záporný moment na nosníku)

Otázky na doma

Stanovte reakce průběhy vnitřních sil zakreslených nosníků:





Řešení zašlete s předmětem „**ZSM**" do 13.3. na můj e-mail.

Vztah V a M

Jistě jste si všimli, že extrémní (minimální nebo maximální) ohybový moment M nastává v místech, kde je posouvající síla $\mathbf{V}$ rovna **nule**.

Příště si ukážeme, že to není náhoda a vysvětlíme si proč (a vy mi to pak u zkoušky zopakujete...).

Připomeňte si proto, prosím, derivační a integrační počet.