VYSOKÁ ŠKOLA BÁŇSKÁ – TECHNICKÁ UNIVERZITA OSTRAVA

FAKULTA STAVEBNÍ

Základy stavební mechaniky

Těžiště čar a obrazců

Jiří Brožovský

Kancelář: LP – H 406/3
Telefon: 597 321 321
E-mail: jiri.brozovsky@vsb.cz
WWW: http://fast10.vsb.cz/brozovsky

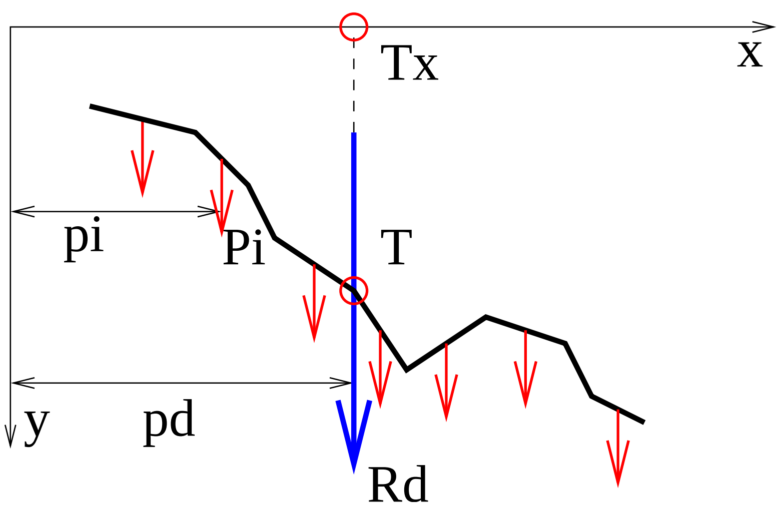
Obsah

1. těžiště rovinných čar

2. těžiště rovinných obrazců

Těžiště (1)

Těžiště objektu: statický střed soustavy rovnoběžných sil, které jsou vyvolány tíhou jednotlivých jednodušších částí tohoto objektu.



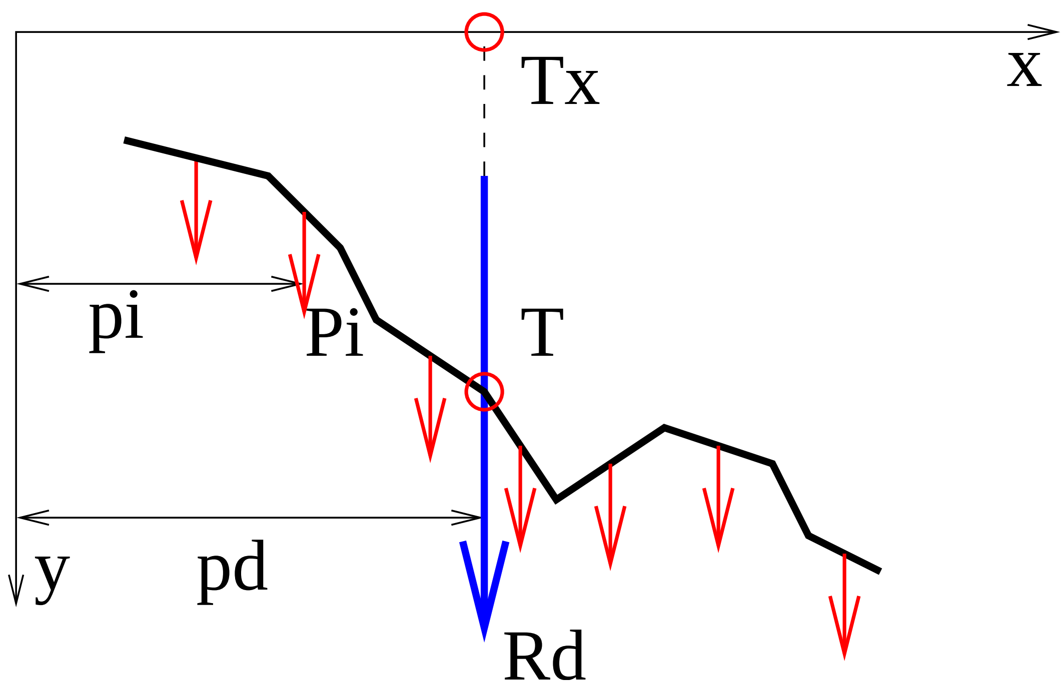
Těžiště (2)

Předpoklad: studované objekty jsou tíhově homogenní (např. deska konstatní tloušťky, prut konstantního průřezu: celý objekt z jednoho materiálu)

Měrná tíha γ: těleso $[\frac{N}{m^3}]$, rovinná deska $[\frac{N}{m^2}]$, čára/prut $[\frac{N}{m}]$.

Těžiště (3)

Výpočet: z Varignonovy věty: $R_d\, p_d = \sum_{i=0}^{n} P_i\, p_i$



Těžiště rovinné čáry (1)

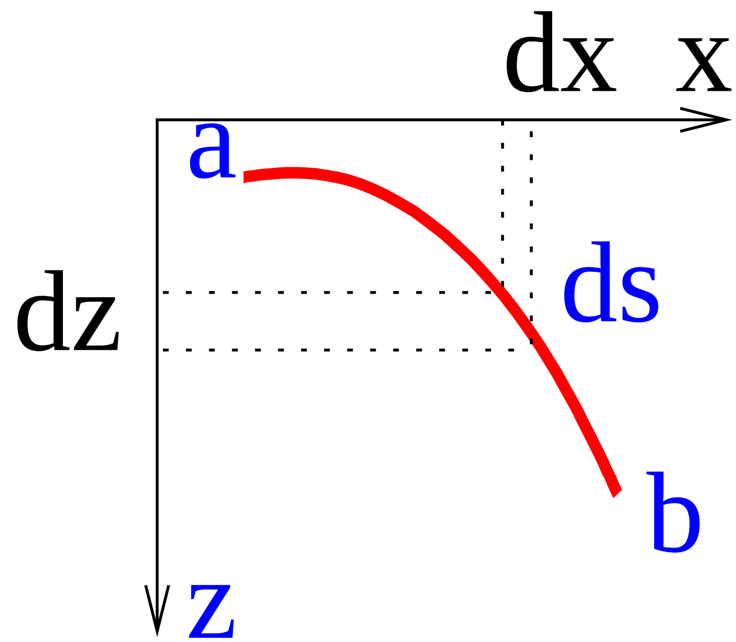
Čára tíhově homogenní – tíha nemá vliv na polohu těžiště (lze uvažovat $\gamma = 1$):

Délka diferenciálního úseku čáry:

$$ds = \sqrt{1 + {\frac{dz}{dx}}^2}\, dx$$

Délka čáry:

$$s = \int_s ds = \int_{x_a}^{x_b} \sqrt{1 + {\frac{dz}{dx}}^2}\, dx$$



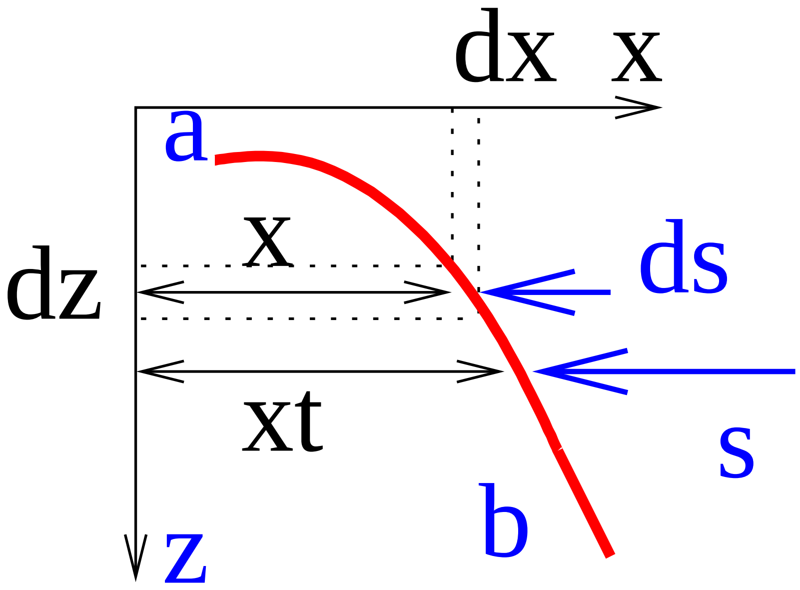
Těžiště rovinné čáry (2)

Statický moment dílku ds k počátku:

$$dS_z = x\ ds$$

Statický moment čáry k počátku:

$$S_z = \int_s x\ ds = \int_{x_a}^{x_b} x \sqrt{1 + \frac{dz}{dx}^2}\, dx$$



Varignonova věta: $x_t\ s = S_z$

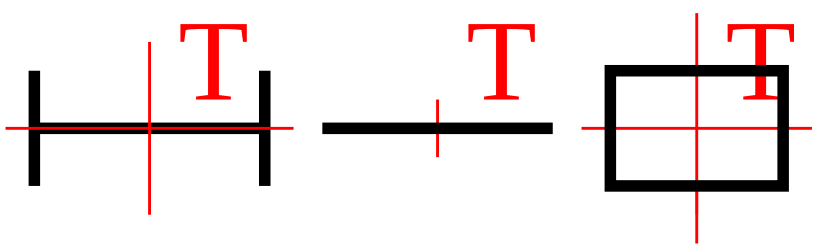
Tedy:

$$x_t = \frac{S_z}{s}, \qquad z_t = \frac{S_x}{s}$$

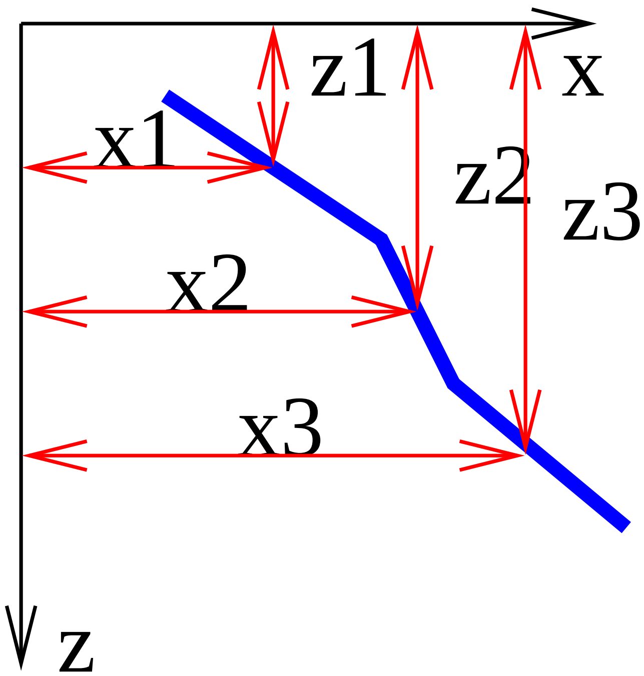
Těžiště rovinné čáry (3)

Těžiště vždy leží na ose symetrie (je-li nějaká)!

Čára s 2 nebo více osami symetrie má těžiště vždy v jejich průsečíku.



Těžiště složené rovinné čáry



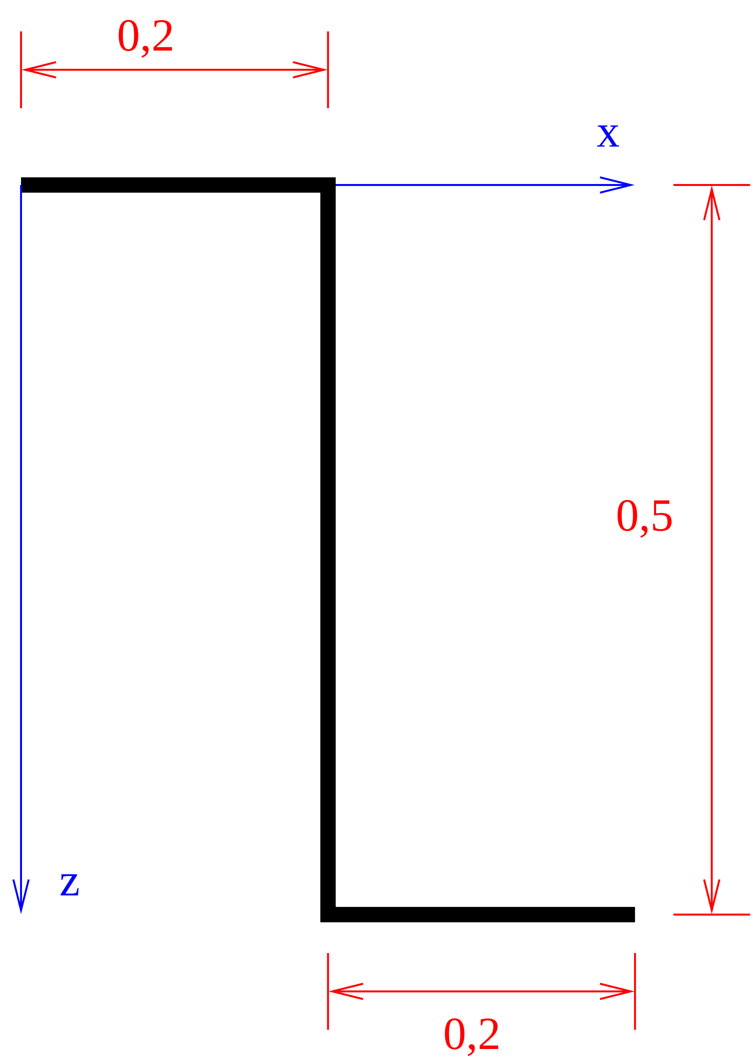
$$x_t = \frac{\sum S_z}{\sum s}$$

$$z_t = \frac{\sum S_x}{\sum s}$$

Příklad 1: těžiště rovinné čáry (1)

Zadání: Stanovte souřadnice těžiště zadané čáry (tenkostěnného např. ocelového průřezu).

Předpoklad: Tloušťka čáry je ve všech místech stejná a její materiál je homogenní.



Všechny rozměry jsou uvedeny v metrech [m].

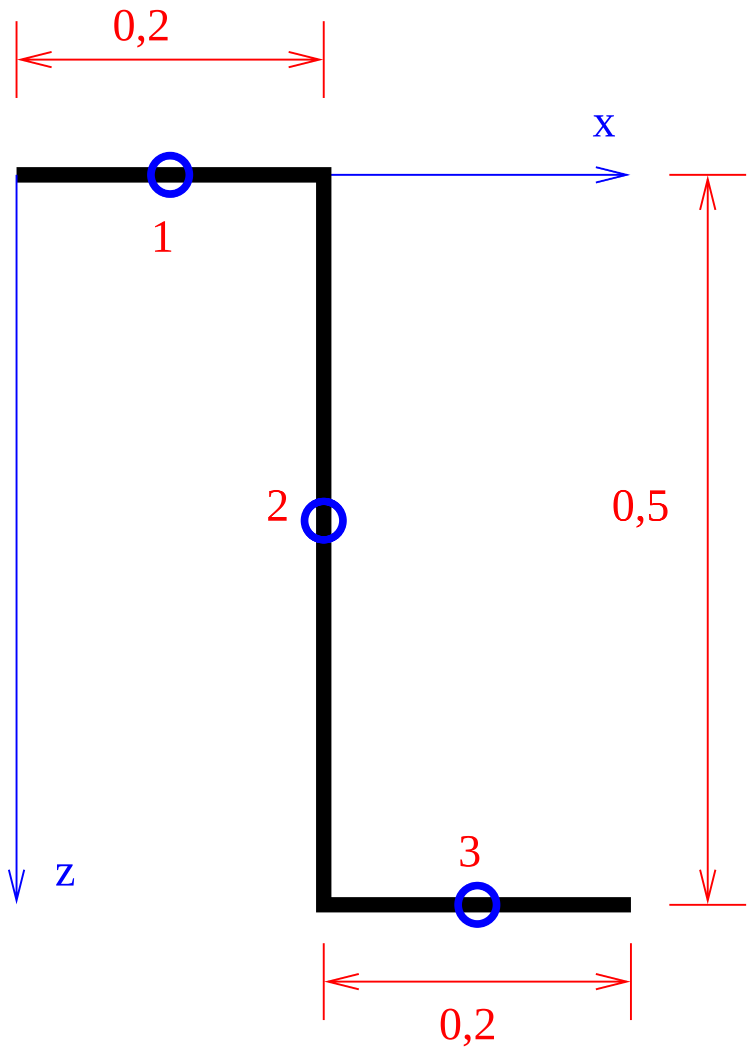
Příklad 1: těžiště rovinné čáry (2)

Čáru rozdělíme na 3 části: 1, 2 a 3 s délkami:

- $s_1 = 0,2m$
- $s_2 = 0,5m$
- $s_3 = 0,2m$

Celková délka čáry:

$$\begin{aligned} s &= \sum s_i = s_1 + s_2 + s_3 \\ &= 0,2 + 0,5 + 0,2 = 0,9m \end{aligned}$$



Těžiště čar předpokládáme vždy v polovině jejich délky (modré kolečko).

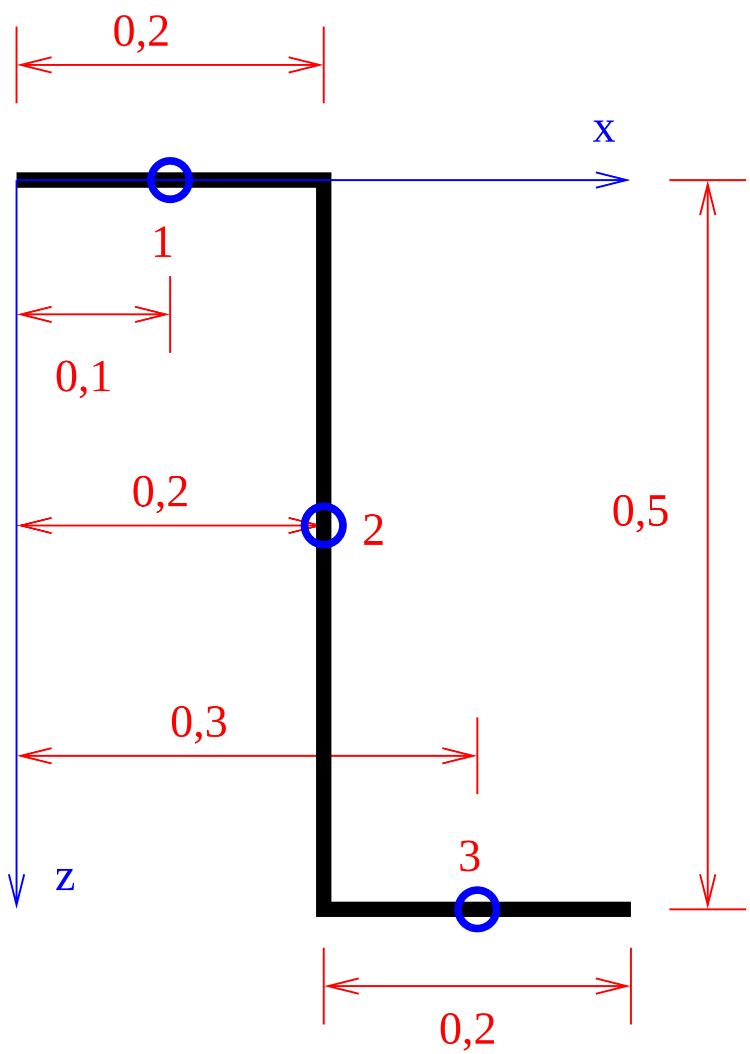
Příklad 1: těžiště rovinné čáry (3)

Vzdálenosti těžišť čar od osy **Z**:

- $x_1 = \frac{0{,}2}{2} = 0,1m$
- $x_2 = 0,2m$
- $x_3 = 0,2 + \frac{0{,}2}{2} = 0,3m$

Statické momenty čar k ose **Z**:

- $S_{z,1} = s_1 \times x_1 = 0,2 \times 0,1 = 0,02\ m^2$
- $S_{z,2} = s_2 \times x_2 = 0,5 \times 0,2 = 0,10\ m^2$
- $S_{z,3} = s_3 \times x_3 = 0,2 \times 0,3 = 0,06\ m^2$

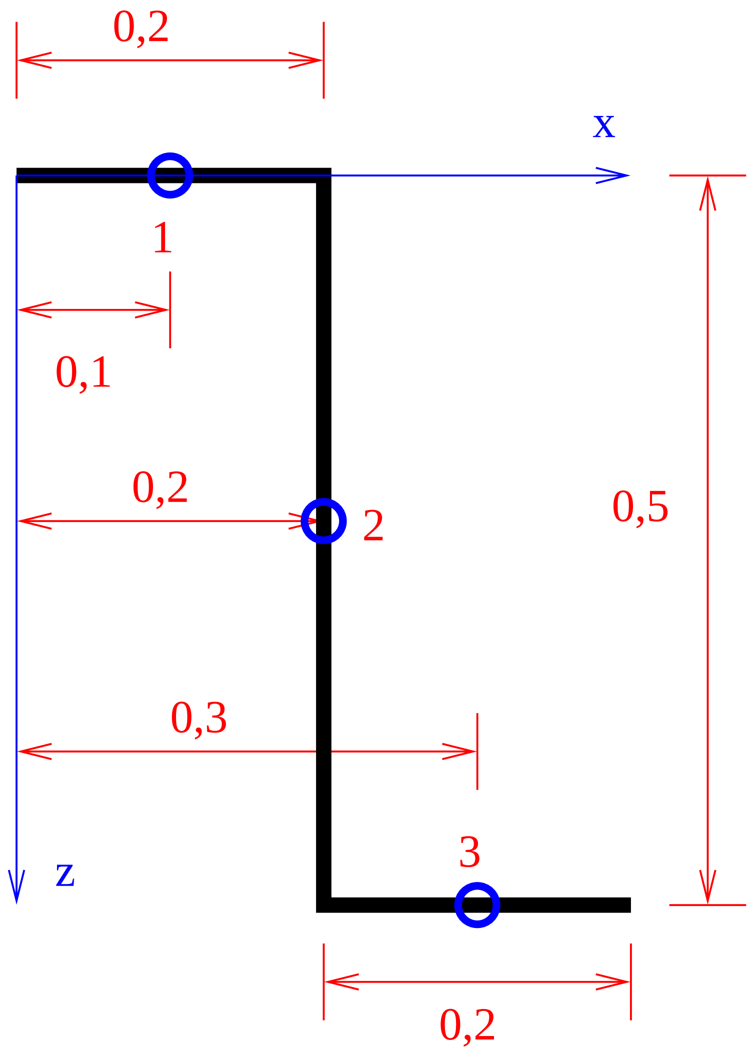


Příklad 1: těžiště rovinné čáry (4)

Vzdálenost těžiště celé čáry od osy **Z**:

$$
\begin{aligned}
x_t &= \frac{\sum S_{z,i}}{s} \\
&= \frac{S_{z,1} + S_{z,2} + S_{z,3}}{s} \\
&= \frac{0,02 + 0,10 + 0,06}{0,9} \\
&= 0,2\ m
\end{aligned}
$$

Tedy těžiště je od osy **Z** vzdáleno $0,2\ m$.



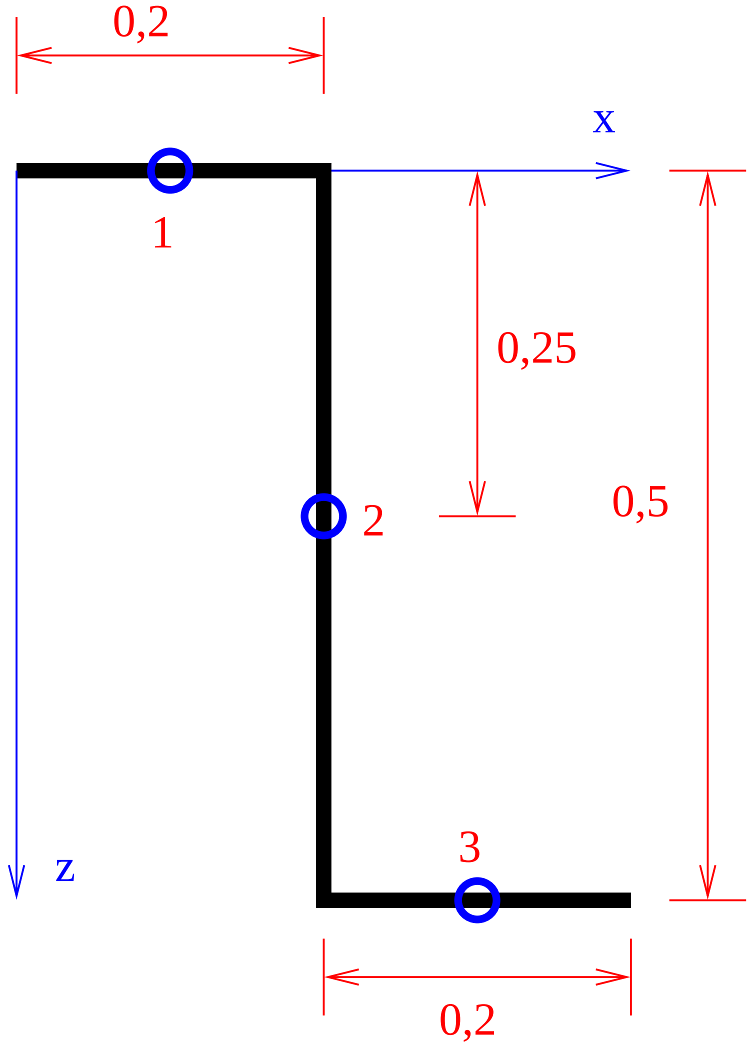
Příklad 1: těžiště rovinné čáry (5)

Vzdálenosti těžišť čar od osy **X**:

- $z_1 = 0,0m$
- $z_2 = \frac{0,5}{2} = 0,25m$
- $z_3 = 0,5 = 0,50m$

Statické momenty čar k ose **X**:

- $S_{x,1} = s_1 \times z_1 = 0,2 \times 0,0 = 0,0\ m^2$
- $S_{x,2} = s_2 \times z_2 = 0,5 \times 0,25 = 0,125\ m^2$
- $S_{x,3} = s_3 \times z_3 = 0,2 \times 0,50 = 0,10\ m^2$

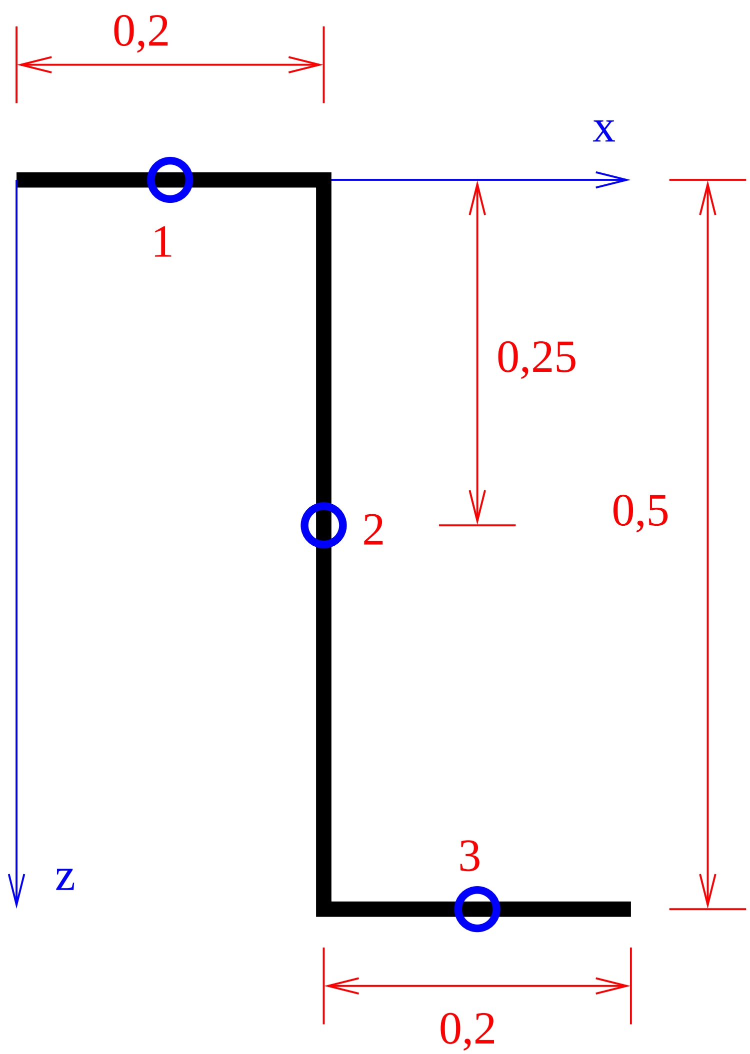


Příklad 1: těžiště rovinné čáry (6)

Vzdálenosti těžiště celé čáry od osy **X**:

$$
\begin{aligned}
z_t &= \frac{\sum S_{x,i}}{s} \\
&= \frac{S_{x,1} + S_{x,2} + S_{x,3}}{s} \\
&= \frac{0,0 + 0,125 + 0,10}{0,9} \\
&= 0,25\,m
\end{aligned}
$$

Tedy těžiště je od osy **X** vzdáleno $0,25\,m$.



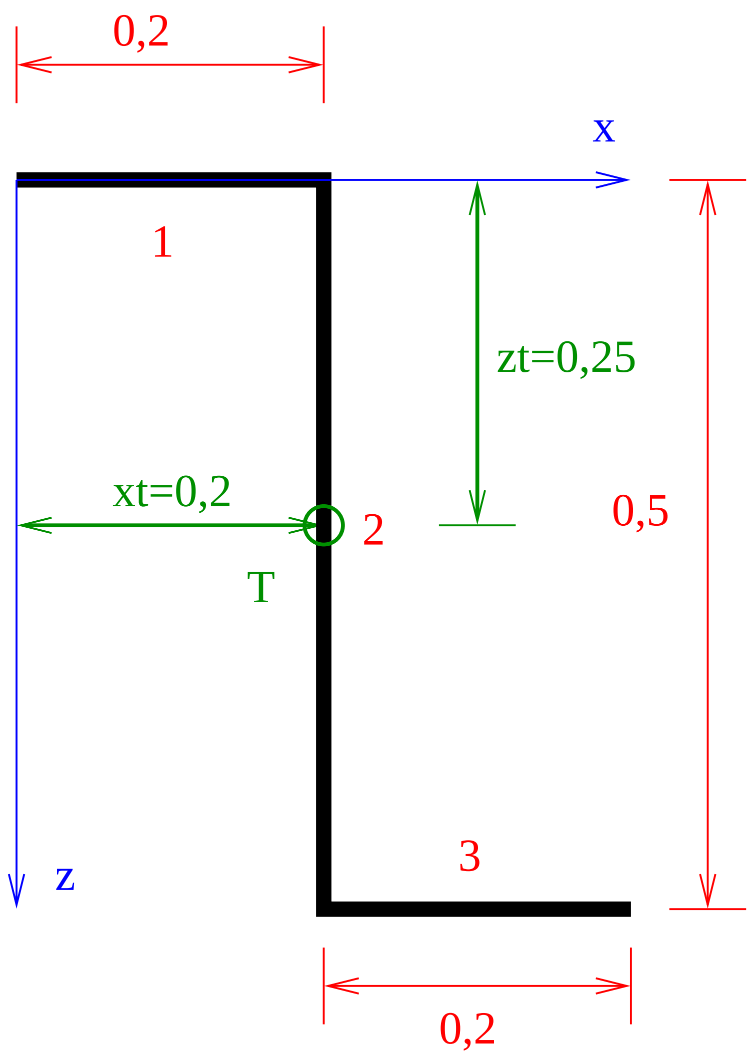
Příklad 1: těžiště rovinné čáry (7)

Vzdálenosti těžiště (**T**) celé čáry od osy **Z**:

$$x_t = 0,2\ m$$

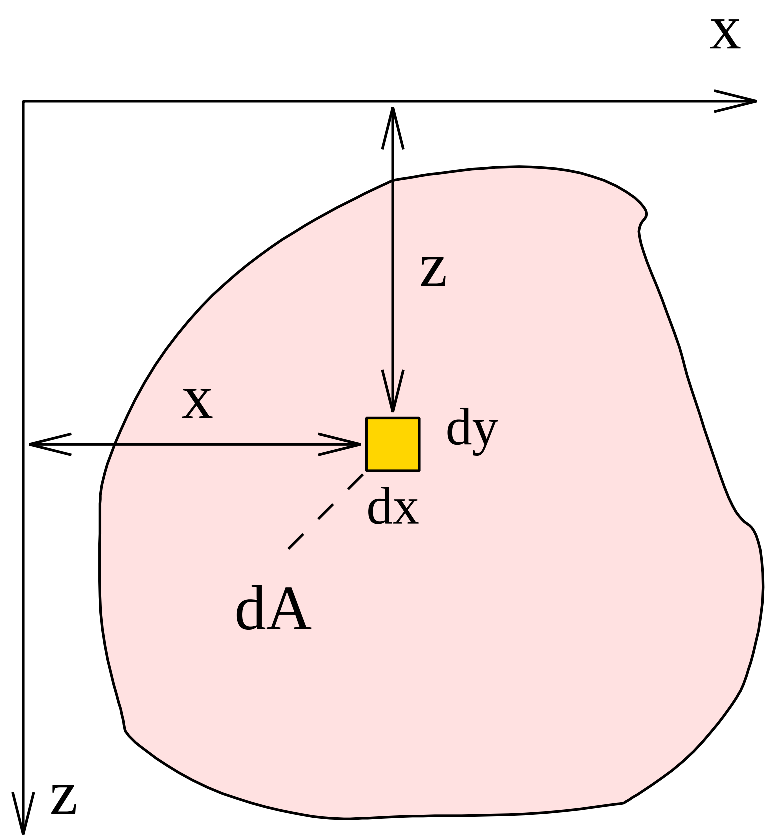
Vzdálenosti těžiště (**T**) celé čáry od osy **X**:

$$z_t = 0,25\ m$$



Těžiště rovinného obrazce (1)

Obrazec tíhově homogenní – tíha nemá vliv na polohu těžiště (lze uvažovat $\gamma = 1$):



Plocha diferenciálního obsahu:

$$dA = dx\, dz$$

Plocha obrazce:

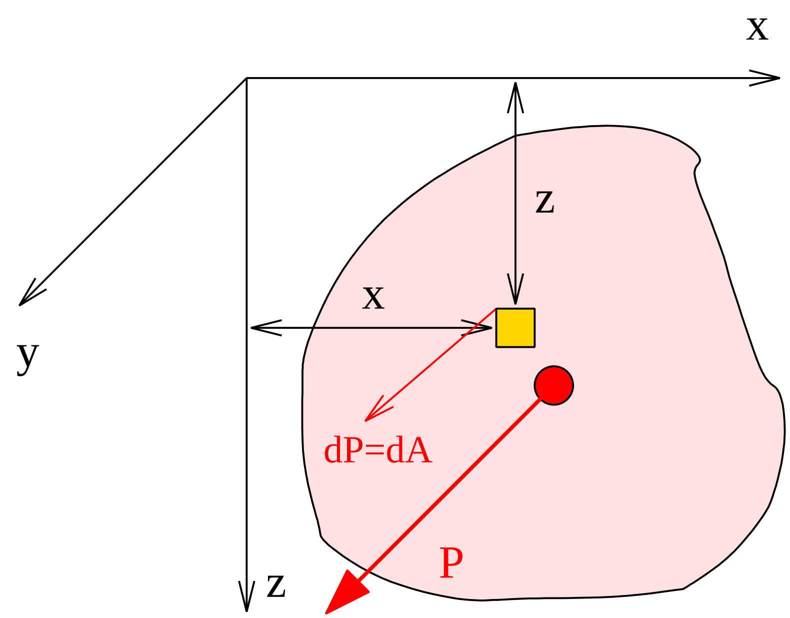
$$A = \int\int_A dA = \int_x \int_y dx\, dz$$

Těžiště rovinného obrazce (2)

Obrazec tíhově homogenní – tíha nemá vliv na polohu těžiště ($\gamma = 1$).

Tíha elementární plošky:

$$dP = dx\; dz\; \gamma = dA$$



Statický moment k ose x:

$$S_x = \int\int_A z\; dA = \int\int_A z\; dx\; dz$$

Statický moment k ose z:

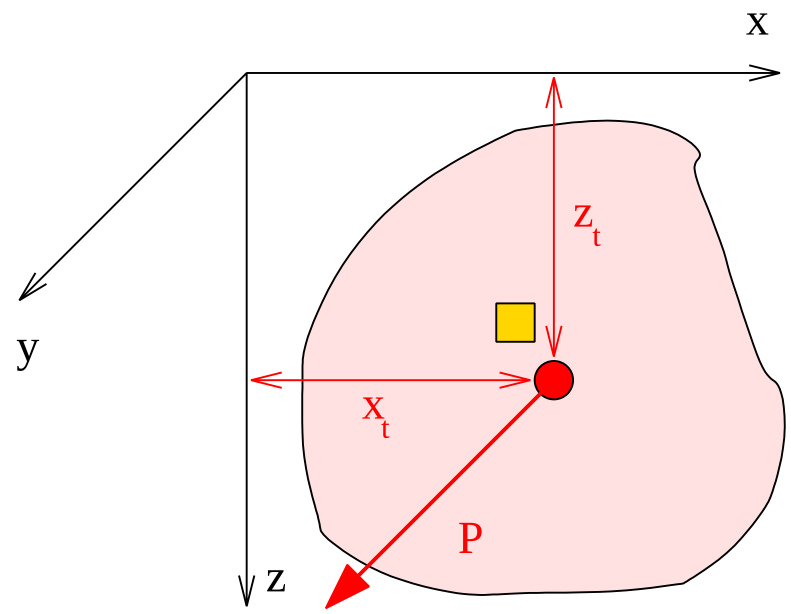
$$S_z = \int\int_A x\; dA = \int\int_A x\; dx\; dz$$

Těžiště rovinného obrazce (3)

Vztahy mezi statickým momentem a plochou:

$$S_z = A\, x_t$$

$$S_x = A\, z_t$$



Souřadnice těžiště obrazce:

$$x_t = \frac{S_z}{A}$$

$$z_t = \frac{S_x}{A}$$

Těžiště obdélníku (1)

Plocha:

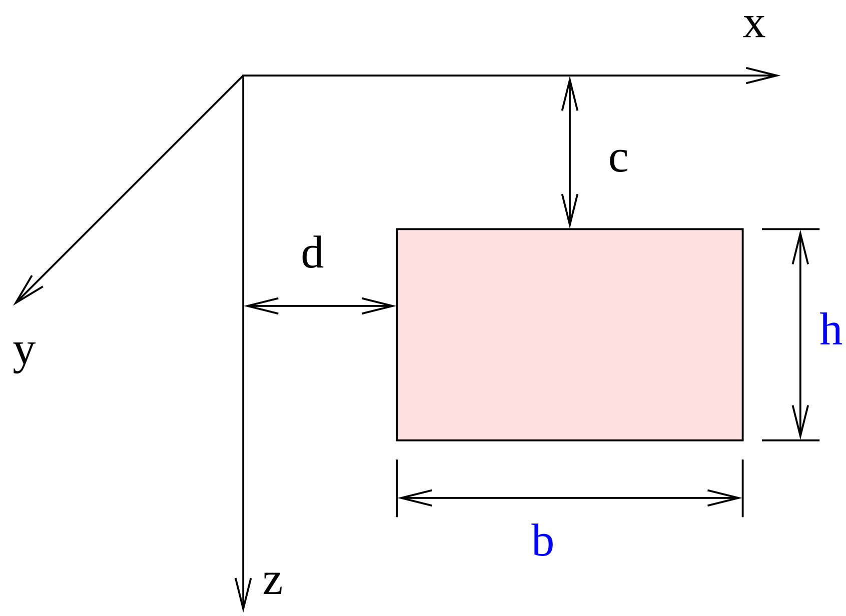
$$A = \int_d^{d+b} \int_c^{c+h} dx\, dz = b\, h$$

Statické momenty:

$$S_z = \int \int_A x\, dx\, dz = (d + \frac{b}{2})\, b\, h$$

Statický moment k ose z:

$$S_x = \int \int_A z\, dx\, dz = (c + \frac{h}{2})\, b\, h$$

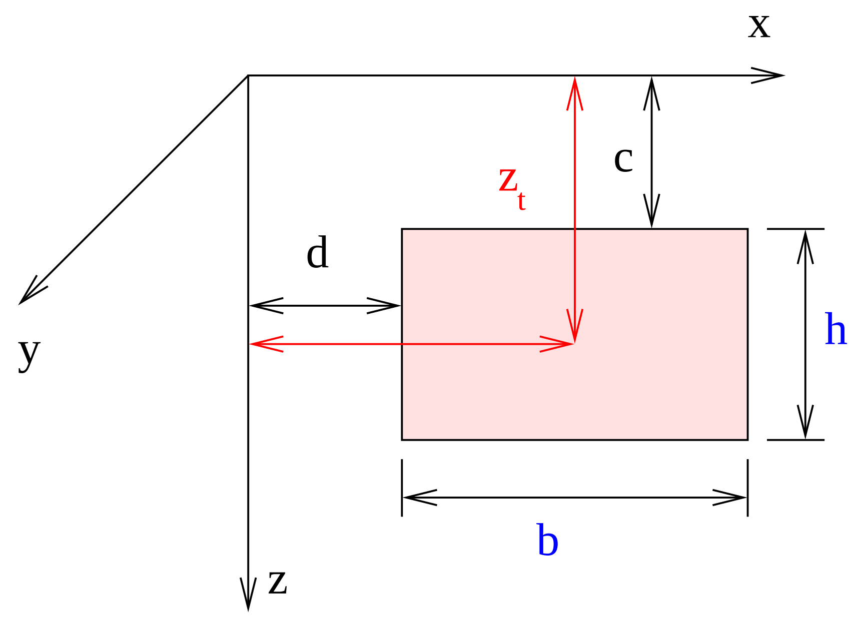


Těžiště obdélníku (2)

Souřadnice těžiště:

$$x_t = \frac{S_z}{A} = \frac{(c + \frac{h}{2})\; b\; h}{b\; h} = c + \frac{h}{2}$$

$$z_t = \frac{S_x}{A} = \frac{(d + \frac{b}{2})\; b\; h}{b\; h} = d + \frac{b}{2}$$



Těžiště složeného obrazce (1)

Plocha:

$$A = \sum_{i=1}^{n} A_i$$

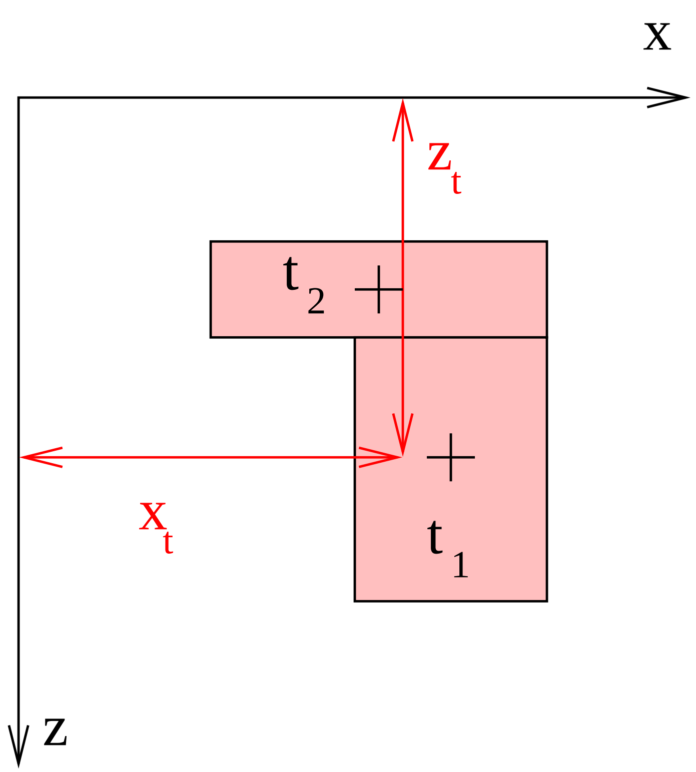
Statické momenty:

$$S_x = \sum_{i=1}^{n} S_{x,i}$$

$$S_z = \sum_{i=1}^{n} S_{z,i}$$

Souřadnice těžiště obrazce:

$$x_t = \frac{S_z}{A}, \quad z_t = \frac{S_x}{A}$$



Těžiště složeného obrazce (2)

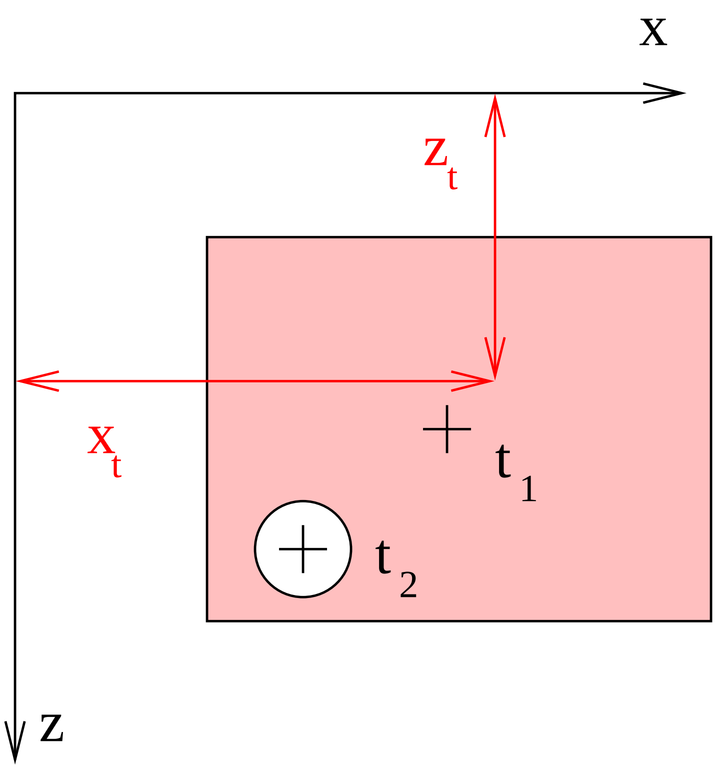
Obrazec s otvorem: plochu otvoru vezmeme ve všech vztazích **záporně ($-A_i$, $-S_{i,x} = -A_i\, y$,..)**:

$$A = \sum_{i=1}^{n} A_i = A_1 - A_2$$

$$S_x = \sum_{i=1}^{n} S_{x,i} = S_{x,1} - S_{x,2}$$

$$S_z = \sum_{i=1}^{n} S_{z,i} = S_{z,1} - S_{z,2}$$

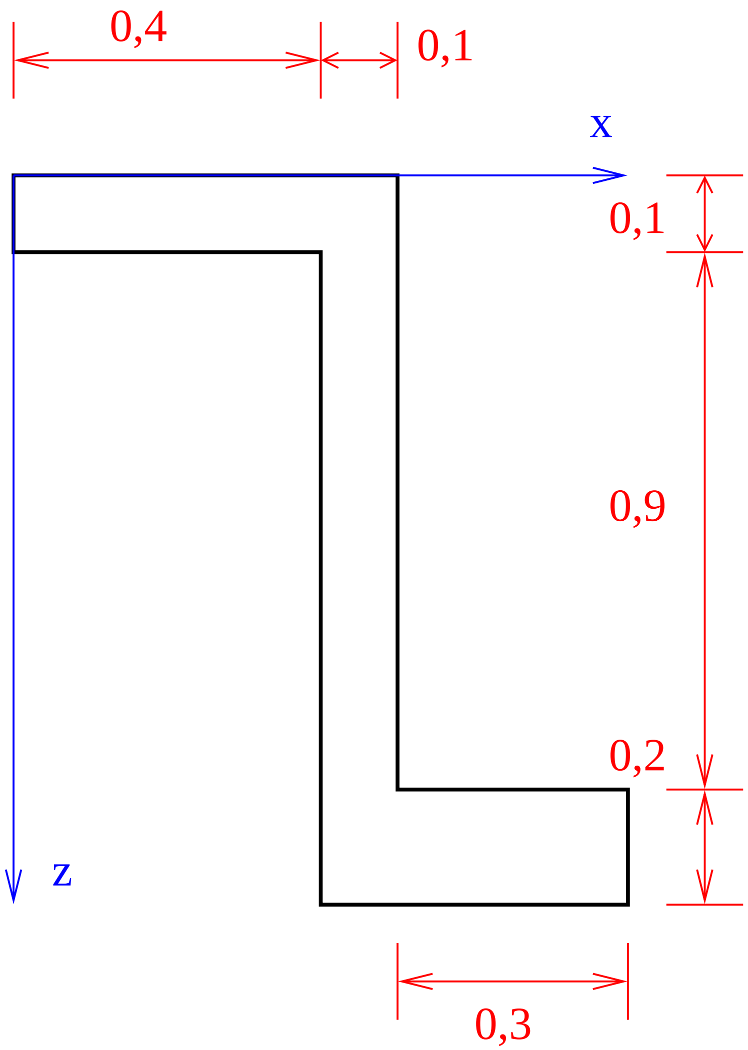
$$x_t = \frac{S_z}{A}, \quad z_t = \frac{S_x}{A}$$



Příklad 2: těžiště obrazce (1)

Zadání: Stanovte souřadnice těžiště zadaného průřezu.

Předpoklad: Materiál obrazce je homogenní.

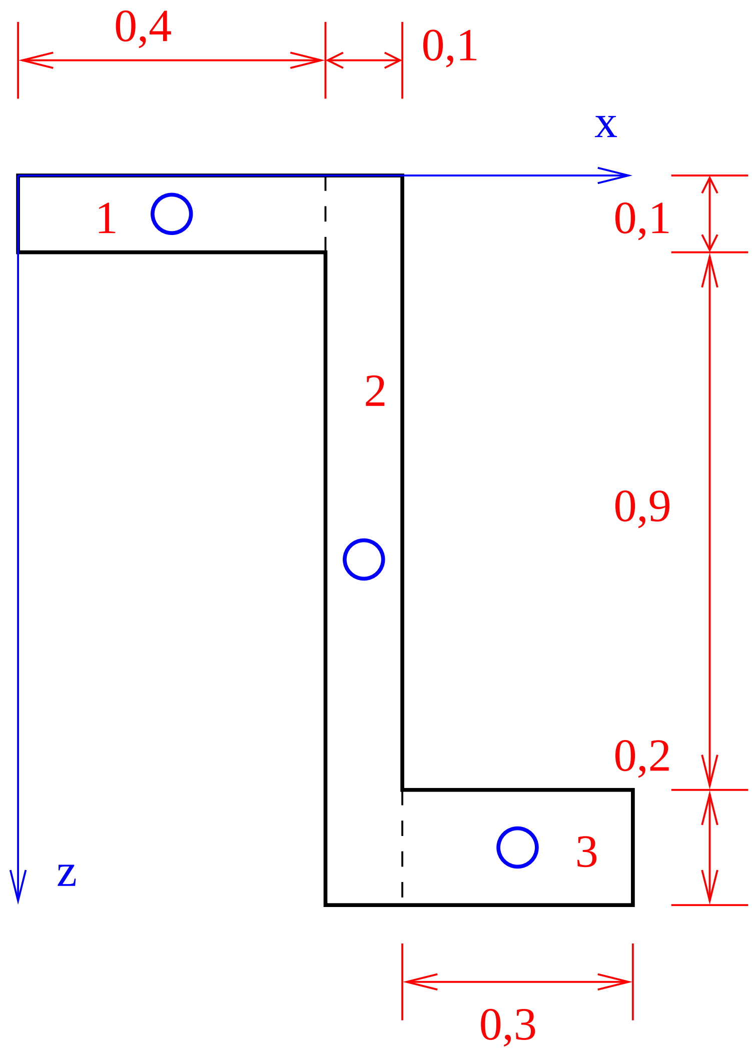


Všechny rozměry jsou uvedeny v metrech [m].

Příklad 2: těžiště obrazce (2)

Obrazec rozdělíme na 3 obdélníky 1, 2, 3 s plochami:

$A_1 = b_1 \times h_1 = 0,4 \times 0,1 = 0,04\, m^2$
$A_2 = b_2 \times h_2 = 0,1 \times 1,2 = 0,12\, m^2$
$A_3 = b_3 \times h_3 = 0,3 \times 0,2 = 0,06\, m^2$



Celková plocha obrazce:

$$\begin{aligned} A &= \sum A_i = A_1 + A_2 + A_3 \\ &= 0,04 + 0,12 + 0,06 = 0,22\, m^2 \end{aligned}$$

Těžiště obdélníků předpokládáme vždy v jejich ,,středech" (modré kolečko).

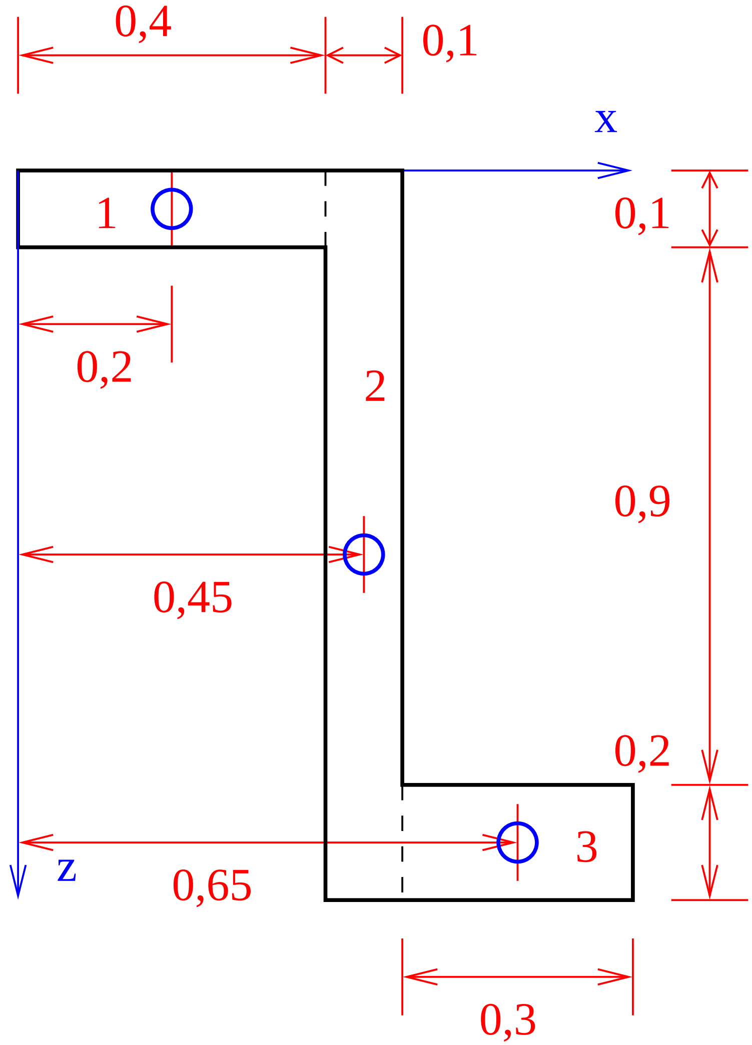
Příklad 2: těžiště obrazce (3)

Vzdálenosti těžišť obdélníků od osy **Z**:

$x_1 = \frac{b_1}{2} = \frac{0{,}4}{2} = 0,2\ m$

$x_2 = b_1 + \frac{b_2}{2} = 0,4 + \frac{0{,}1}{2} = 0,45\ m$

$x_3 = b_1 + h_2 + \frac{b_3}{2} = 0,4 + 0,1 + \frac{0{,}3}{2} = 0,65\ m$



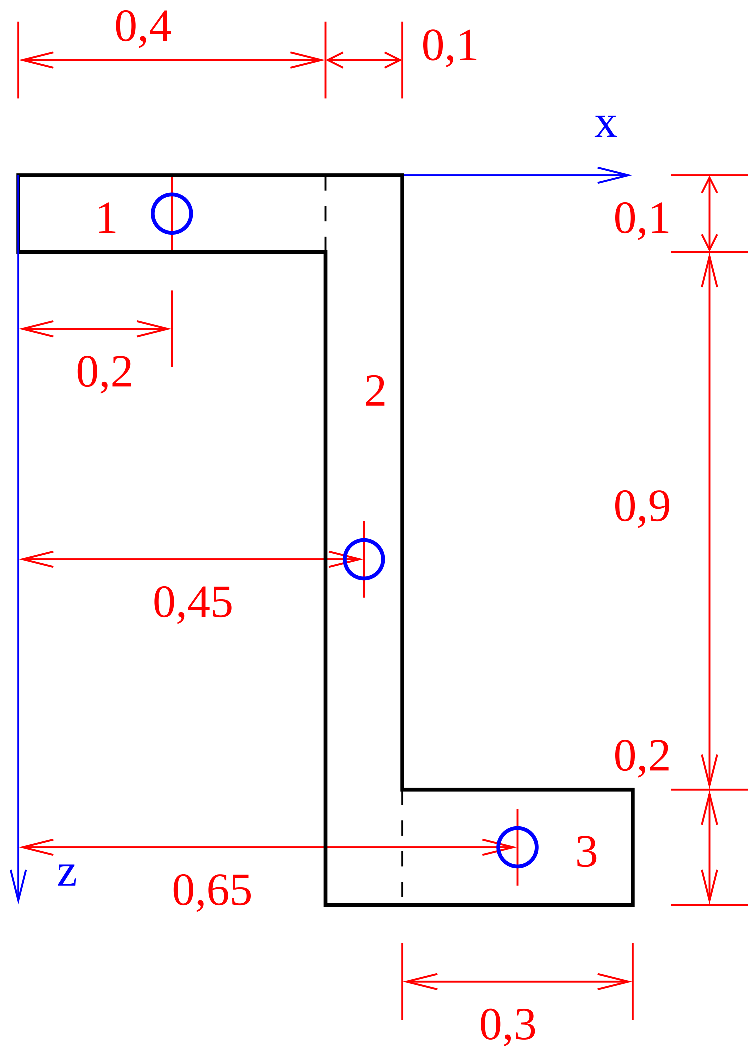
Příklad 2: těžiště obrazce (4)

Statické momenty obdélníků k ose **Z**:

$S_{z,1} = A_1 \times x_1 = 0,04 \times 0,2 = 0,008\, m^2$

$S_{z,2} = A_2 \times x_2 = 0,12 \times 0,45 = 0,054\, m^2$

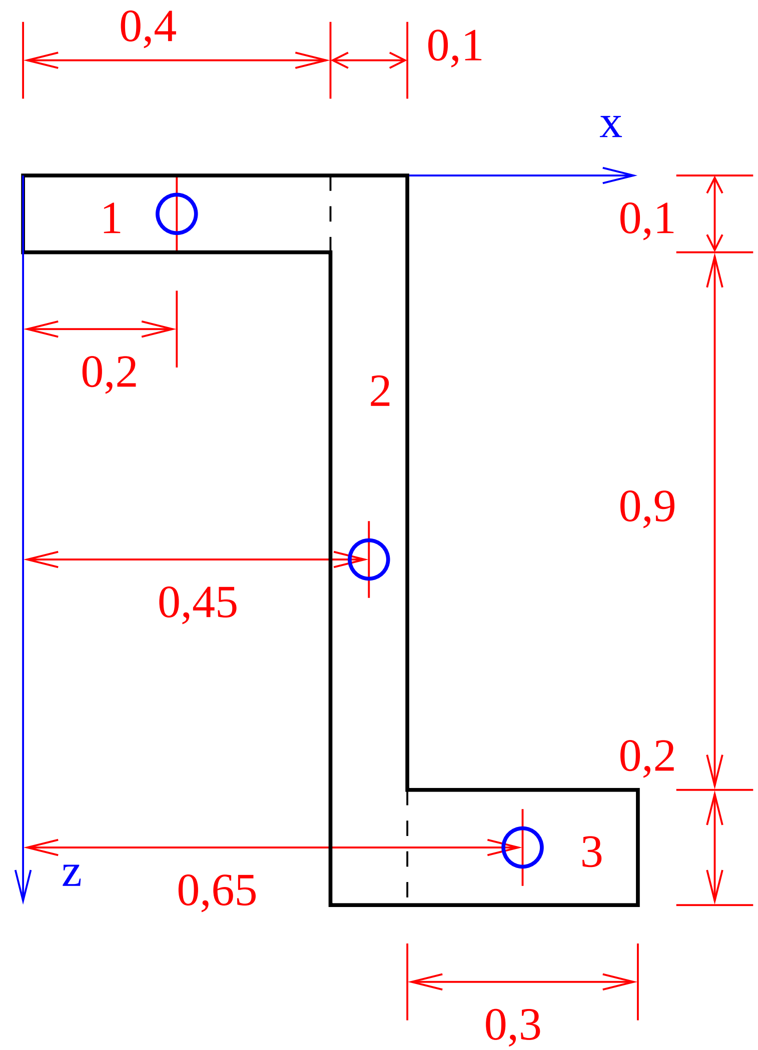
$S_{z,3} = A_3 \times x_3 = 0,06 \times 0,65 = 0,039\, m^2$



Příklad 2: těžiště obrazce (5)

Vzdálenost těžiště celého obrazce od osy **Z**:

$$
\begin{aligned}
x_t &= \frac{\sum S_{z,i}}{A} \\
&= \frac{S_{z,1} + S_{z,2} + S_{z,3}}{A} \\
&= \frac{0,008 + 0,054 + 0,039}{0,22} \\
&= 0,459\ m
\end{aligned}
$$

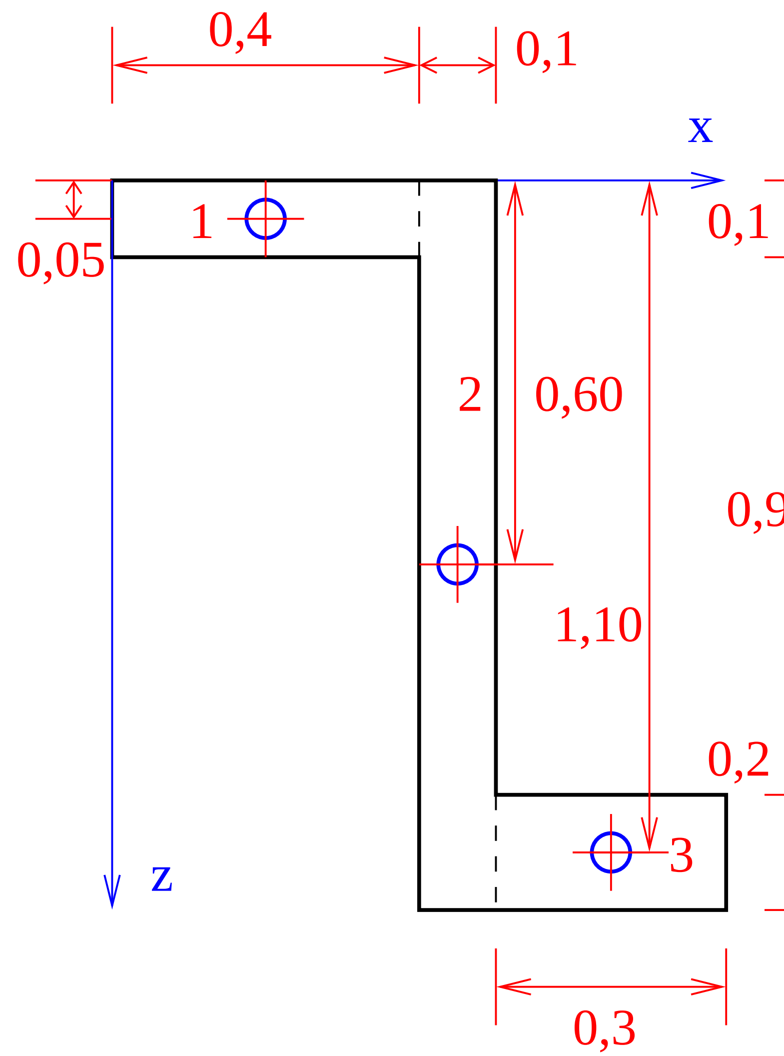


Tedy těžiště je od osy **Z** vzdáleno $0,459\ m$.

Příklad 2: těžiště obrazce (6)

Vzdálenosti těžišť obdélníků od osy **X**:

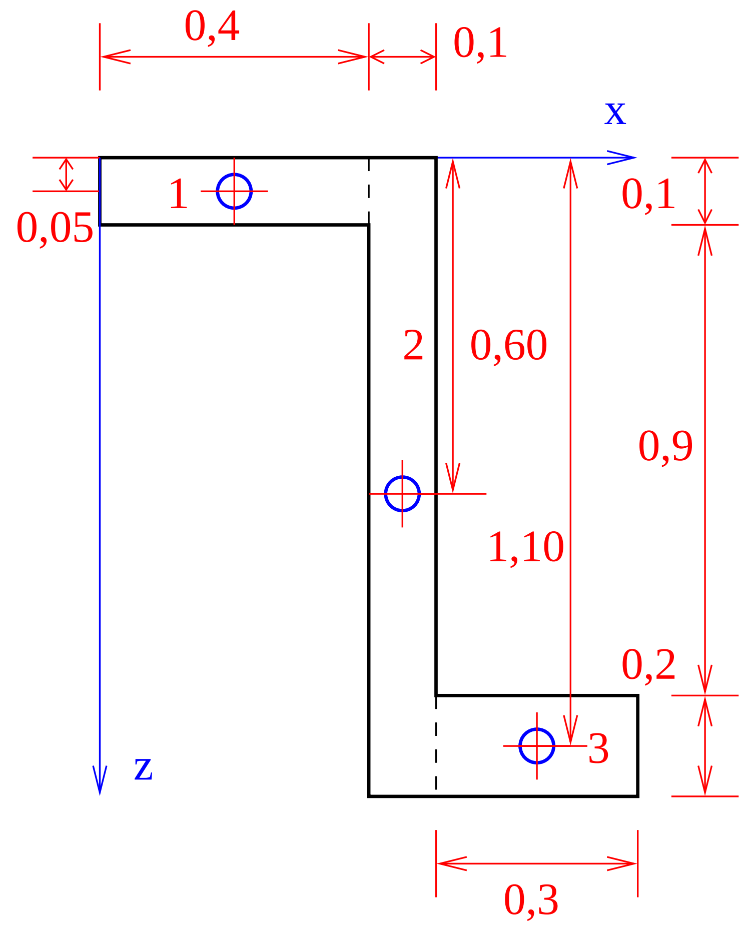
- $z_1 = \frac{h_1}{2} = \frac{0{,}1}{2} = 0,05\ m$
- $z_2 = \frac{h_2}{2} = \frac{1{,}2}{2} = 0,60\ m$
- $z_3 = 1,0 + \frac{h_3}{2} = 1,0 + \frac{0{,}2}{2} = 1,10\ m$



Příklad 2: těžiště obrazce (7)

Statické momenty obdélníků k ose **X**:

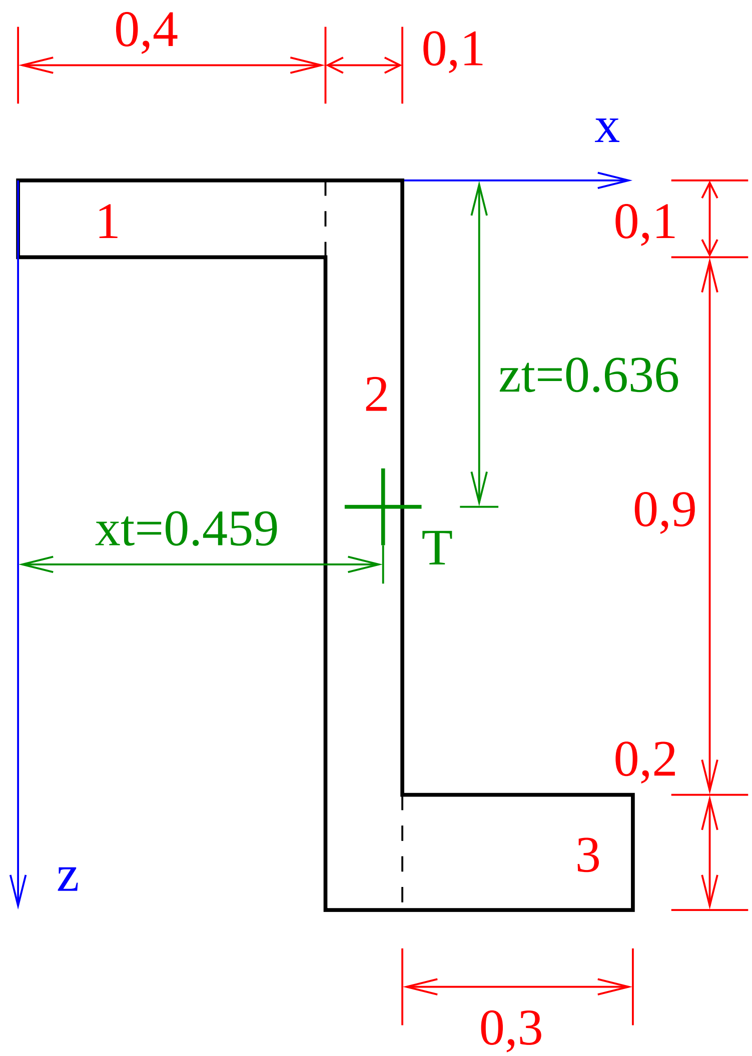
- $S_{z,1} = A_1 \times z_1 = 0,04 \times 0,05 = 0,002\, m^2$
- $S_{z,2} = A_2 \times z_2 = 0,12 \times 0,60 = 0,072\, m^2$
- $S_{z,3} = A_3 \times z_3 = 0,06 \times 1,10 = 0,066\, m^2$



Příklad 2: těžiště obrazce (8)

Vzdálenost těžiště celého obrazce od osy **Z** je $x_t = 0,459\ m$.

Vzdálenost těžiště celého obrazce od osy **X** je $z_t = 0,639\ m$.



Domácí úkol

Stanovte výpočtem polohu těžišť zadaných obrazců. Je-li možné polohu těžiště zkontrolovat pomocí některé poučky uvedené na přednášce, použijte ji!