VYSOKÁ ŠKOLA BÁŇSKÁ – TECHNICKÁ UNIVERZITA OSTRAVA

FAKULTA STAVEBNÍ

Základy stavební mechaniky

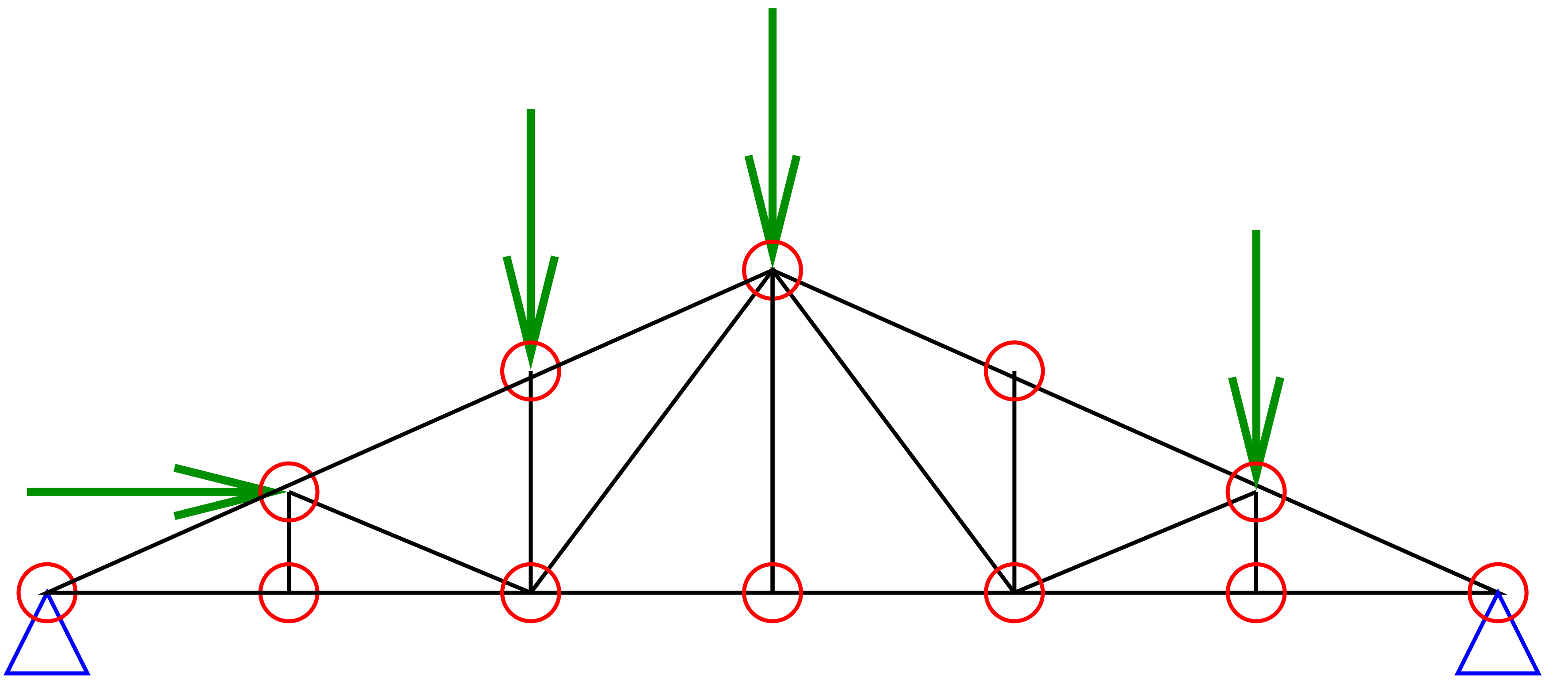
Kloubové prutové soustavy – příhradové konstrukce

Jiří Brožovský

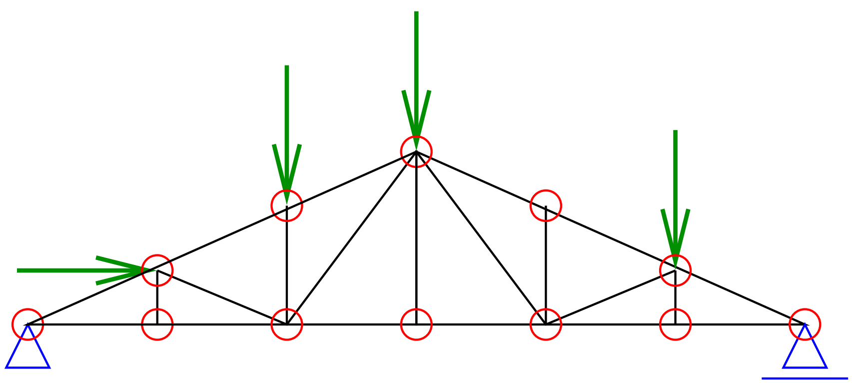
Kancelář: LP – H 406/3
Telefon: 597 321 321
E-mail: jiri.brozovsky@vsb.cz

Příhradová konstrukce (1)

Prutová kloubová soustava = ,,příhradová konstrukce“



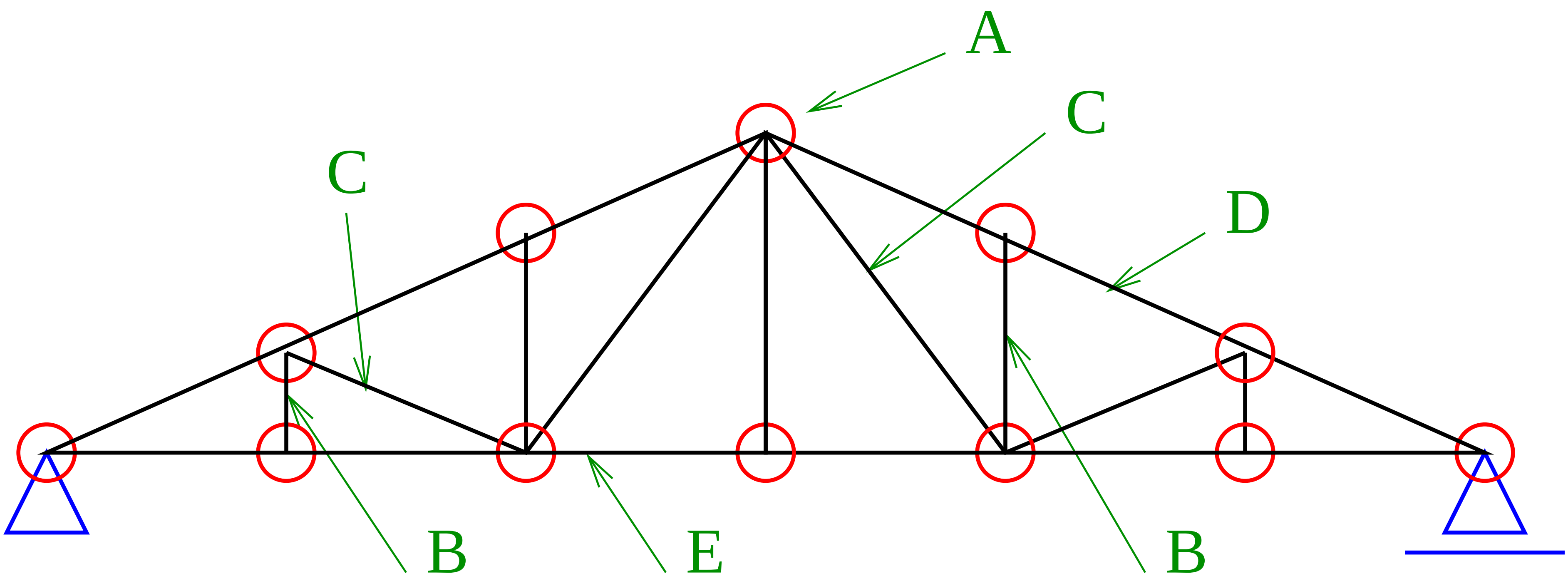
Příhradová konstrukce (2)



1. všechny pruty spojeny ve styčnících **kloubově**
2. zatížení jen ve styčnících
3. v prutech jen osové síly

Výjimky z bodů 2 a 3 existují, budou uvedeny později.

Příhradová konstrukce (3)

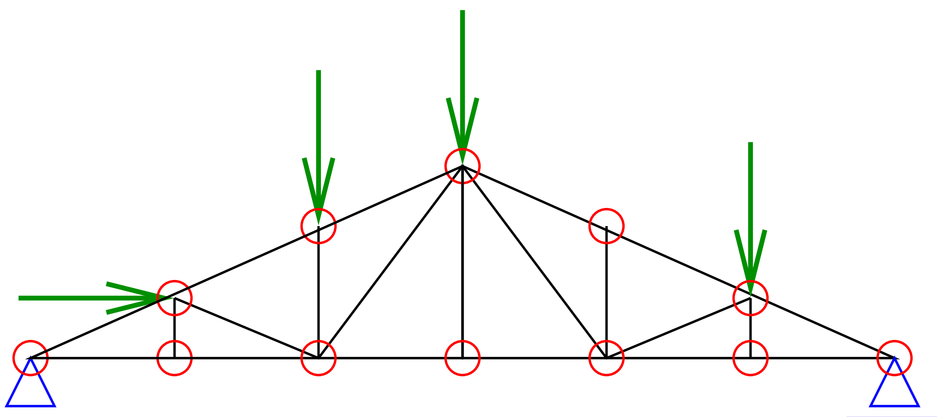


Příhradový vazník – terminologie:

A . . . kloub (styčník), B . . . svislice, C . . . diagonála,

D . . . horní pás, E . . . dolní pás

Příhradová konstrukce (4)



Statická určitost:

$$2 \times b = p + a$$

1. b ...počet styčníků
2. p ...počet prutů
3. a ...počet vnějších vazeb

Zde:

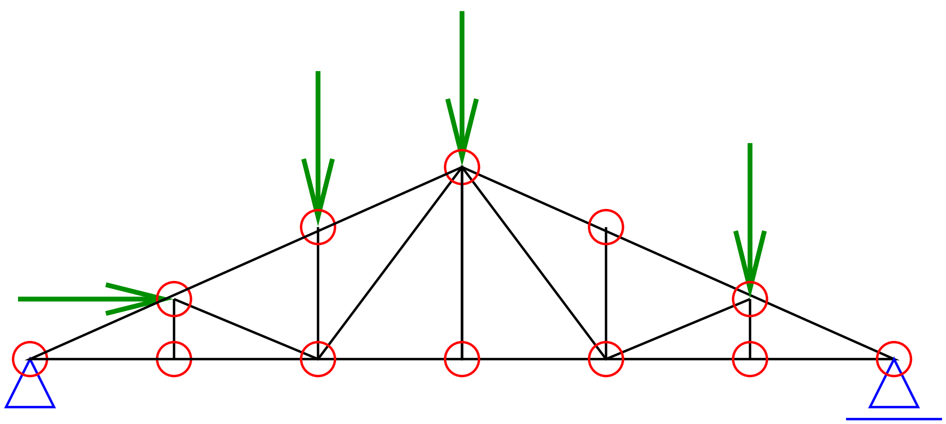
$$2 \times 12 = 21 + 3$$

Staticky neurčitá (kinematicky přeurčitá): $2 \times b < p + a$

Příhradová konstrukce (5)

Samozřejmě platí i vzorec pro statickou určitost používaný dříve:

$$s_n = v - 3 + 3 \times u - k$$



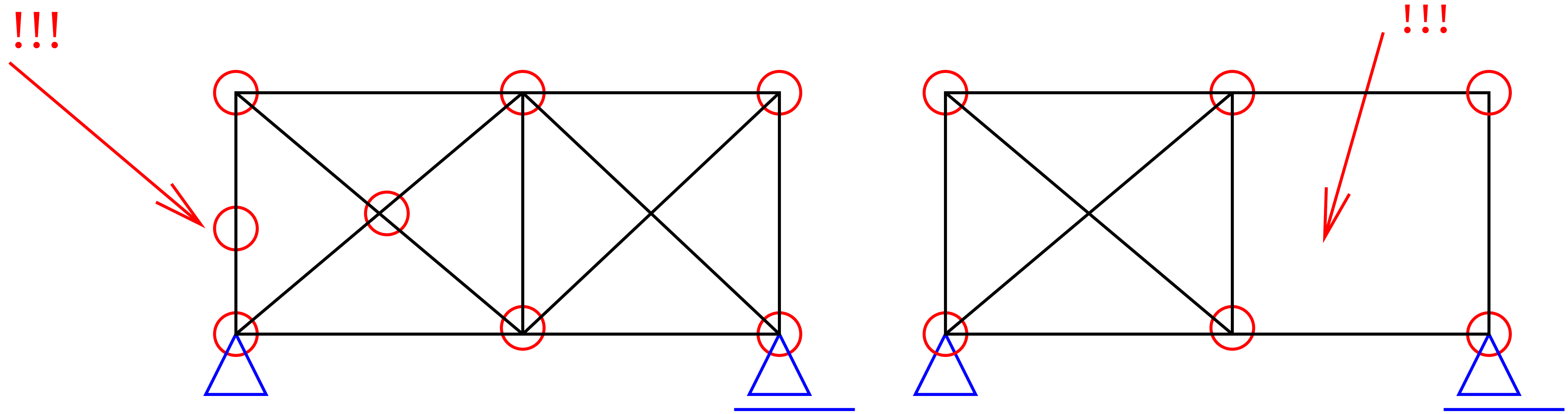
Zde konkrétně:

- složky vazeb: 3
- uzavřené části: 10
- klouby: 30

$$s_n = 3 - 3 + 3 \times 10 - 30 = 0$$

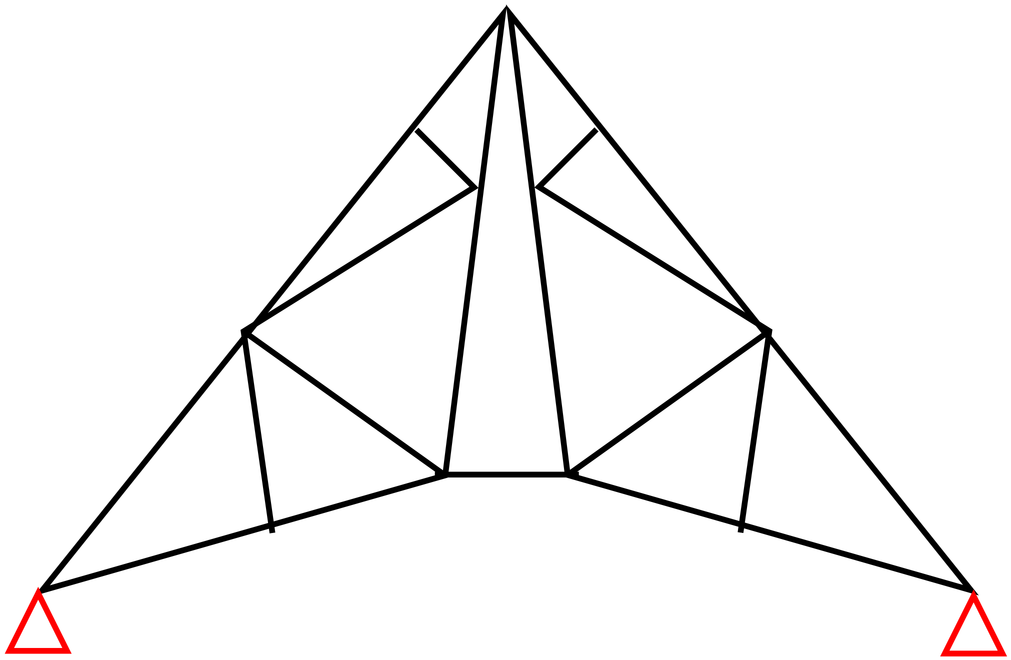
Příhradová konstrukce (6)

Problémy a výjimkové případy:



Příhradová konstrukce (7)

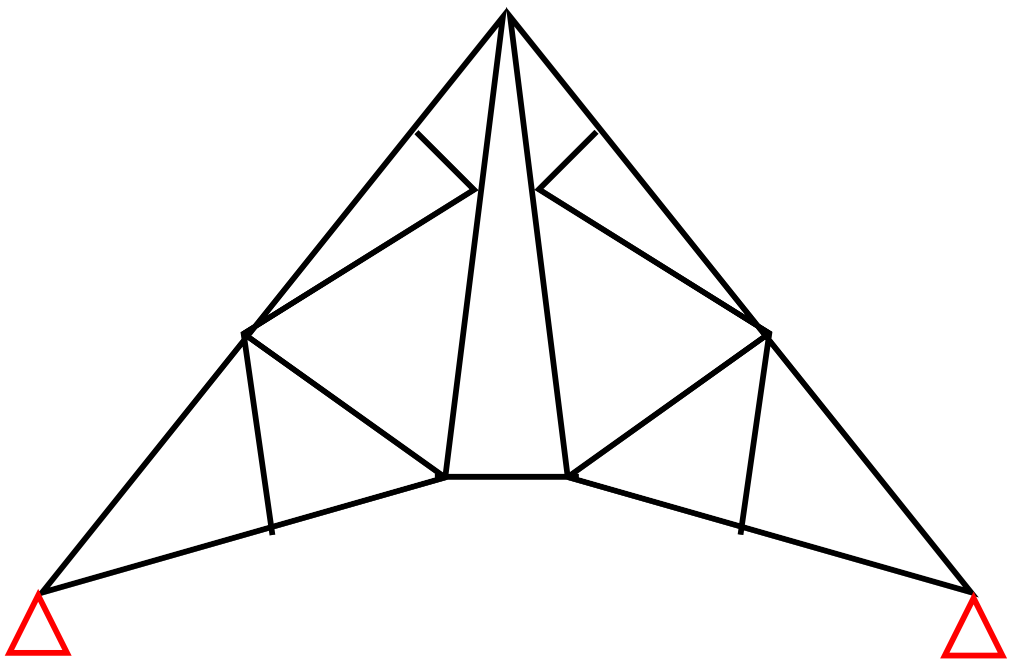
Stanovte, zda je zadaná soustava staticky určitá:



Ve všech styčnících prutů předpokládejte klouby.

Příhradová konstrukce (8)

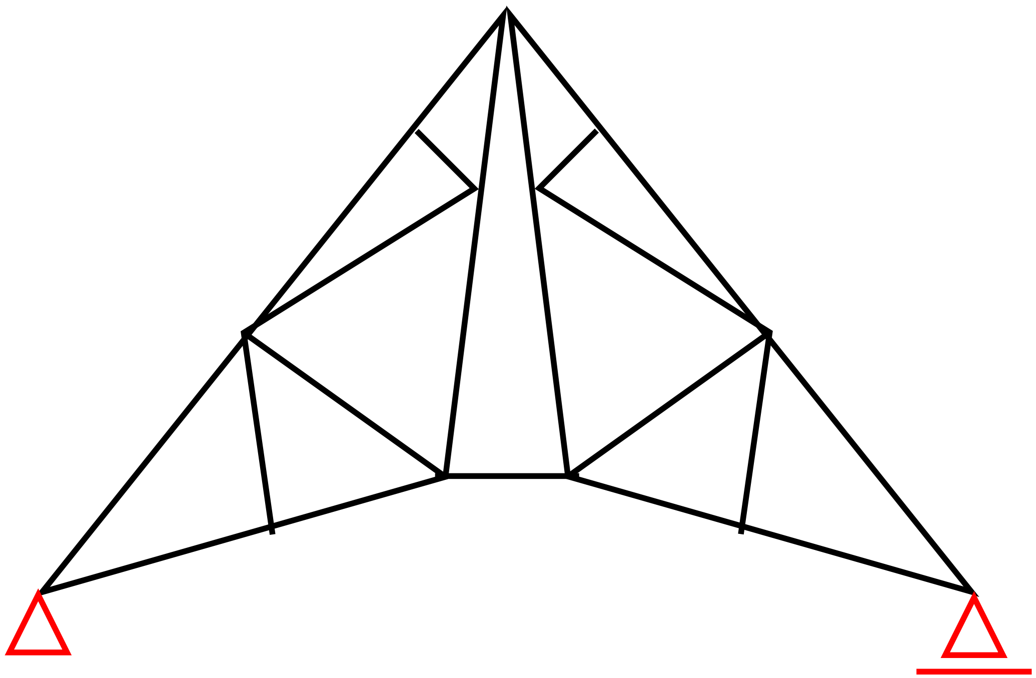
Stanovte, zda je zadaná soustava staticky určitá:



Ve všech styčnících prutů předpokládejte klouby.

Příhradová konstrukce (9)

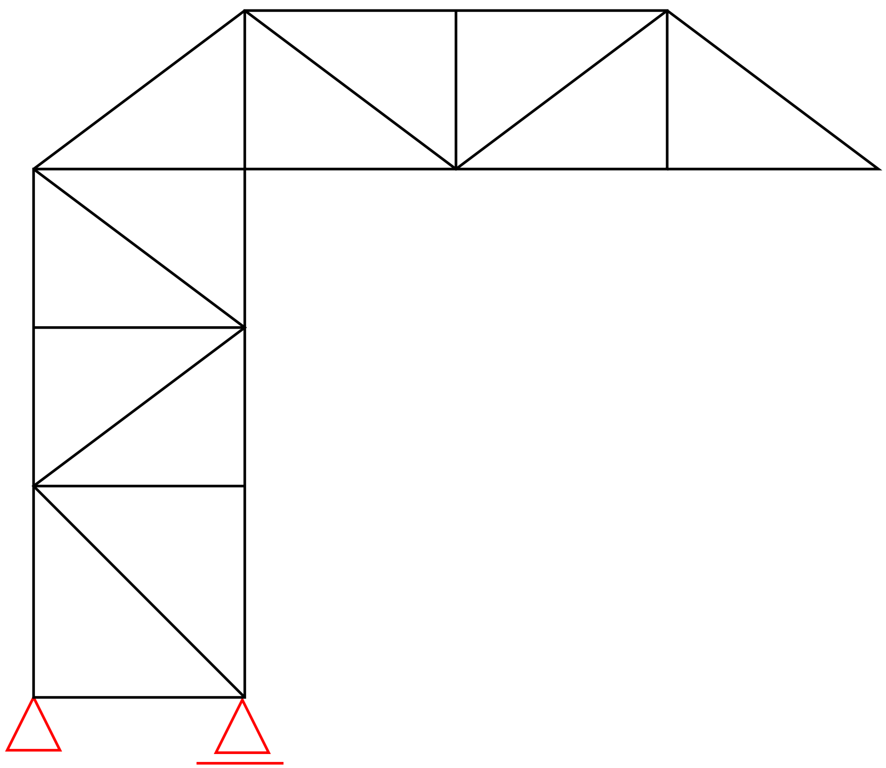
Stanovte, zda je zadaná soustava staticky určitá:



Ve všech styčnících prutů předpokládejte klouby.

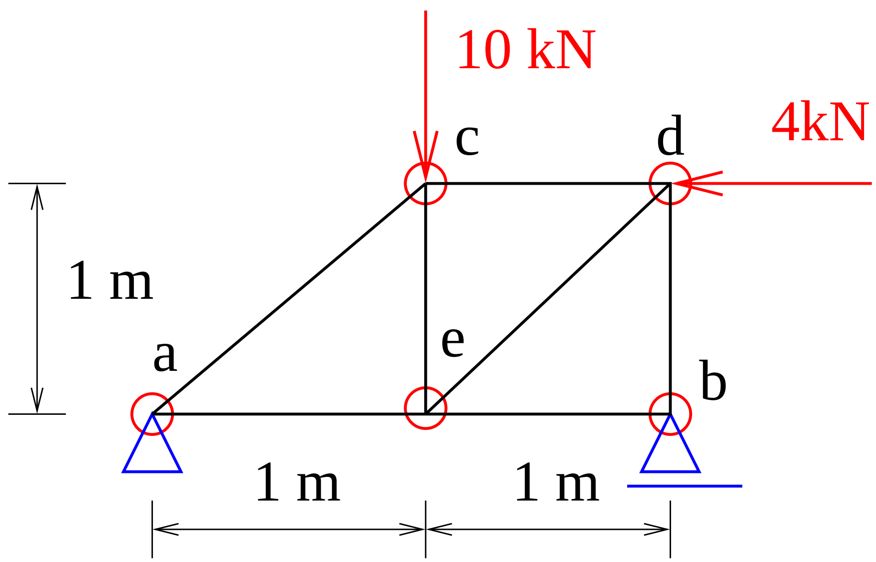
Příhradová konstrukce (10)

Stanovte, zda je zadaná soustava staticky určitá:



Ve všech styčnících prutů předpokládejte klouby.

Styčníková metoda (1)



1. Reakce vnějších vazeb
2. V každém styčníku 2 rovnice:

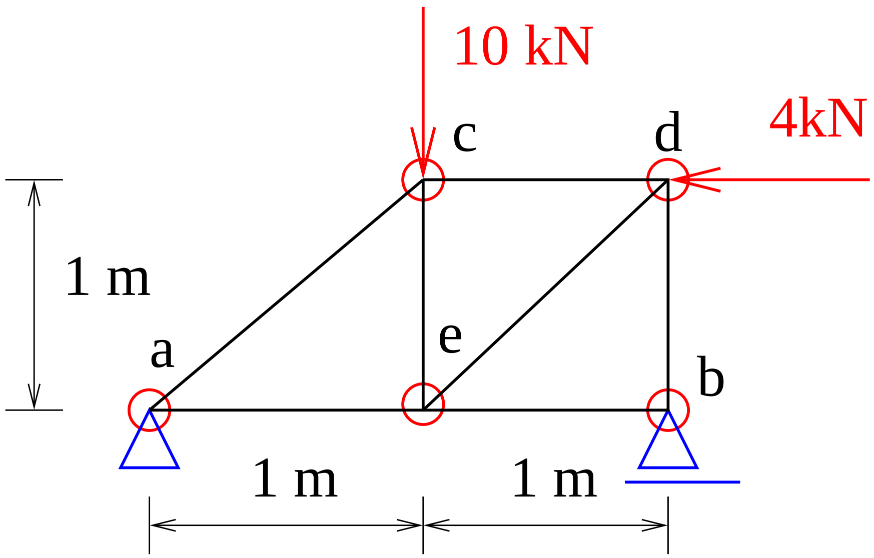
$$\sum F_{i,x} = 0$$

$$\sum F_{i,z} = 0$$

Pro ruční výpočet:

Nejprve řešíme styčníky s nejvýše 2 neznámými silami!

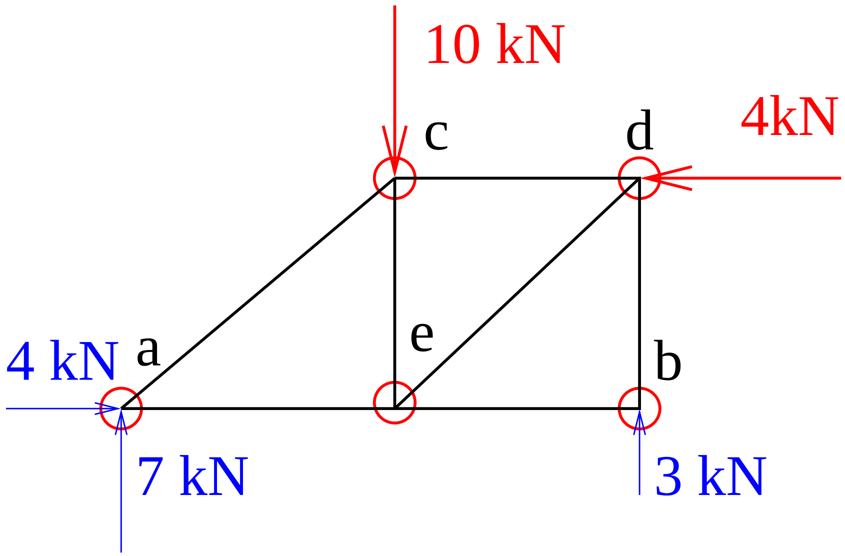
Styčníková metoda (2)



$\sum M_{i,a} = 0$:

$R_{z,b} \times 2 - 10 \times 1 + 4 \times 1 = 0$

$R_{z,b} = 3\ kN$



$\sum M_{i,b} = 0$:

$R_{z,a} \times 2 - 10 \times 1 - 4 \times 1 = 0$

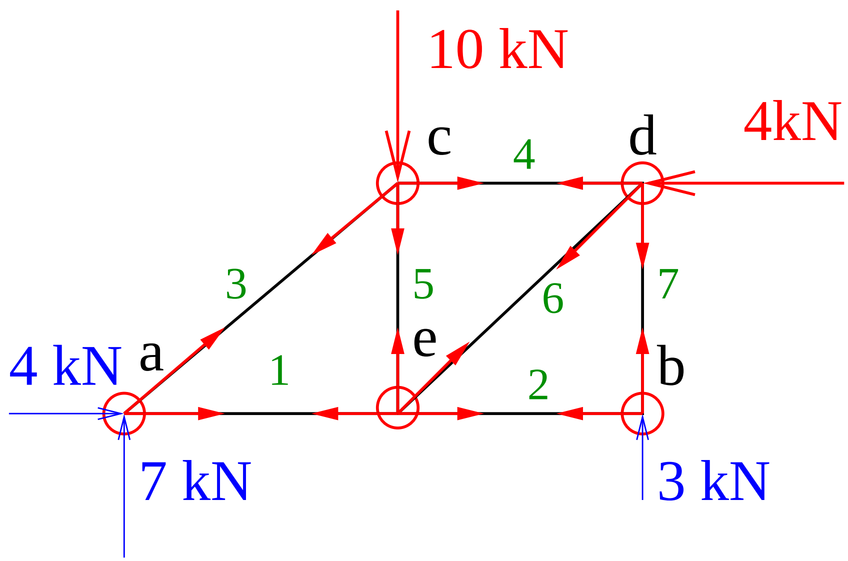
$R_{z,a} = 7\ kN$

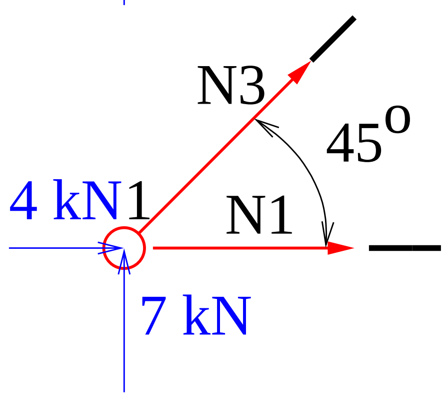
$\sum F_{i,x} = 0$: $R_{x,a} - 4 = 0$

$R_{x,a} = 4\ kN$

Styčníková metoda (3)

Styčník a:





$\sum F_{i,z} = 0$:

$-R_{z,a} - N_3 \times \sin(45^o) = 0$

$-7 - N_3 \times \sin(45^o) = 0$

$N_3 = -9.9\ kN$ (tlak!)

$\sum F_{i,x} = 0$:

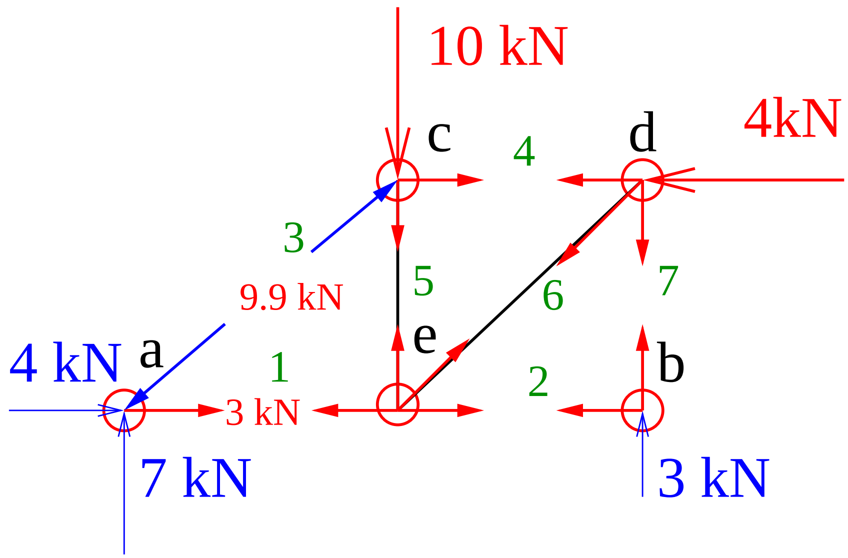
$R_{x,a} + N_3 \times \cos(45^o) + N_1 = 0$

$4 + N_3 \times \cos(45^o) + N_1 = 0$

$N_1 = 3\ kN$ (tah)

Styčníková metoda (4)

Styčník c:



$$\sum F_{i,z} = 0:$$

$$N_5 + N_3 \times \sin(45^o) + 10 = 0$$

$$N_5 - 9.9 \times \sin(45^o) + 10 = 0$$

$$N_5 = -3\ kN \text{ (tlak)}$$

$$\sum F_{i,x} = 0:$$

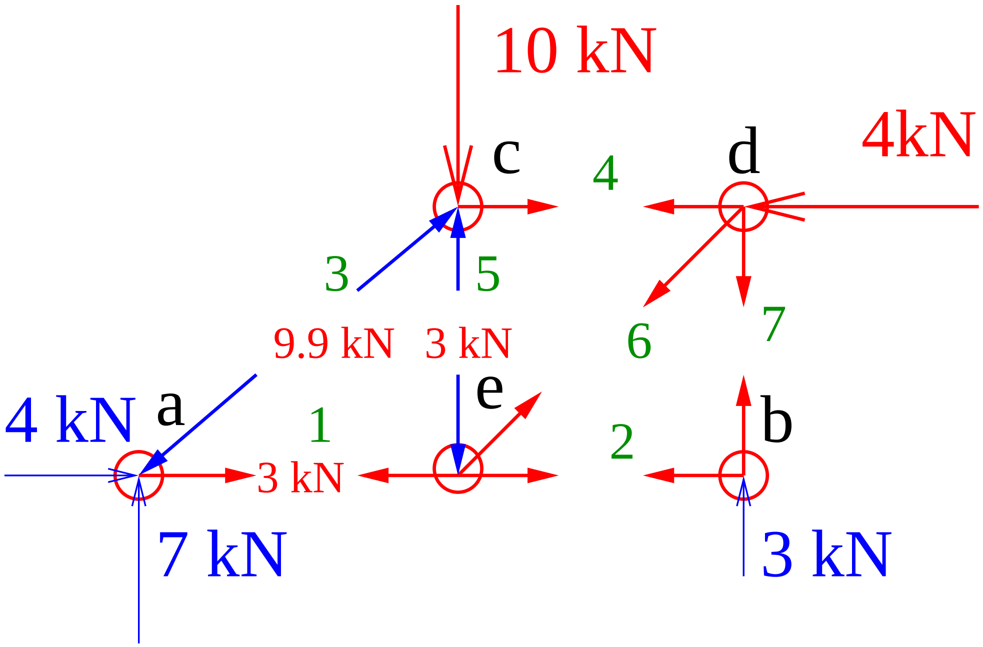
$$N_4 - N_3 \times \cos(45^o) = 0$$

$$N_4 + 9.9 \times \cos(45^o) = 0$$

$$N_4 = -7\ kN \text{ (tlak)}$$

Styčníková metoda (5)

Styčník b:



$$\sum F_{i,z} = 0:$$

$$-R_{z,b} - N_7 = 0$$

$$-3 - N_7 = 0$$

$$N_7 = -3\ kN \text{ (tlak)}$$

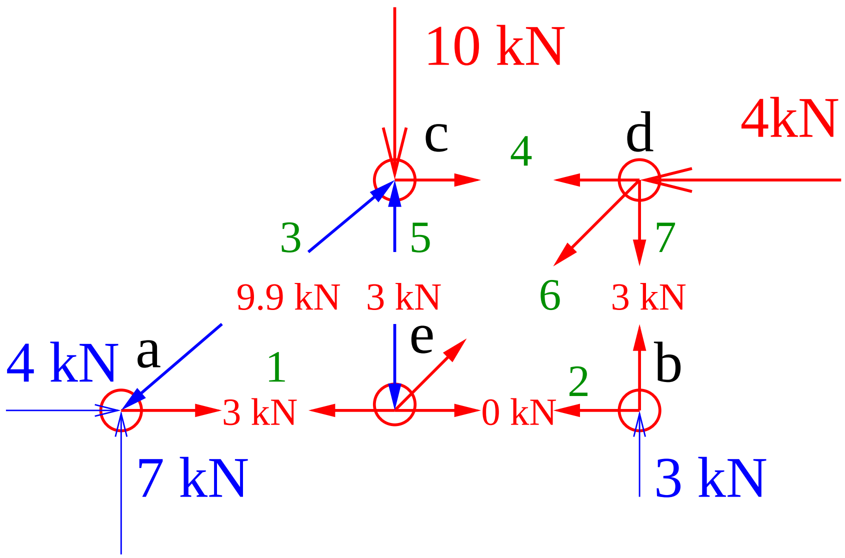
$$\sum F_{i,x} = 0:$$

$$N_2 + 0 = 0$$

$$N_2 = 0\ kN$$

Styčníková metoda (6)

Styčník e:



$\sum F_{i,z} = 0$:

$-N_5 - N_6 \times \sin 45^o = 0$

$3 - N_5 \times \sin 45^o = 0$

$N_5 = 4.24\ kN$ (tah)

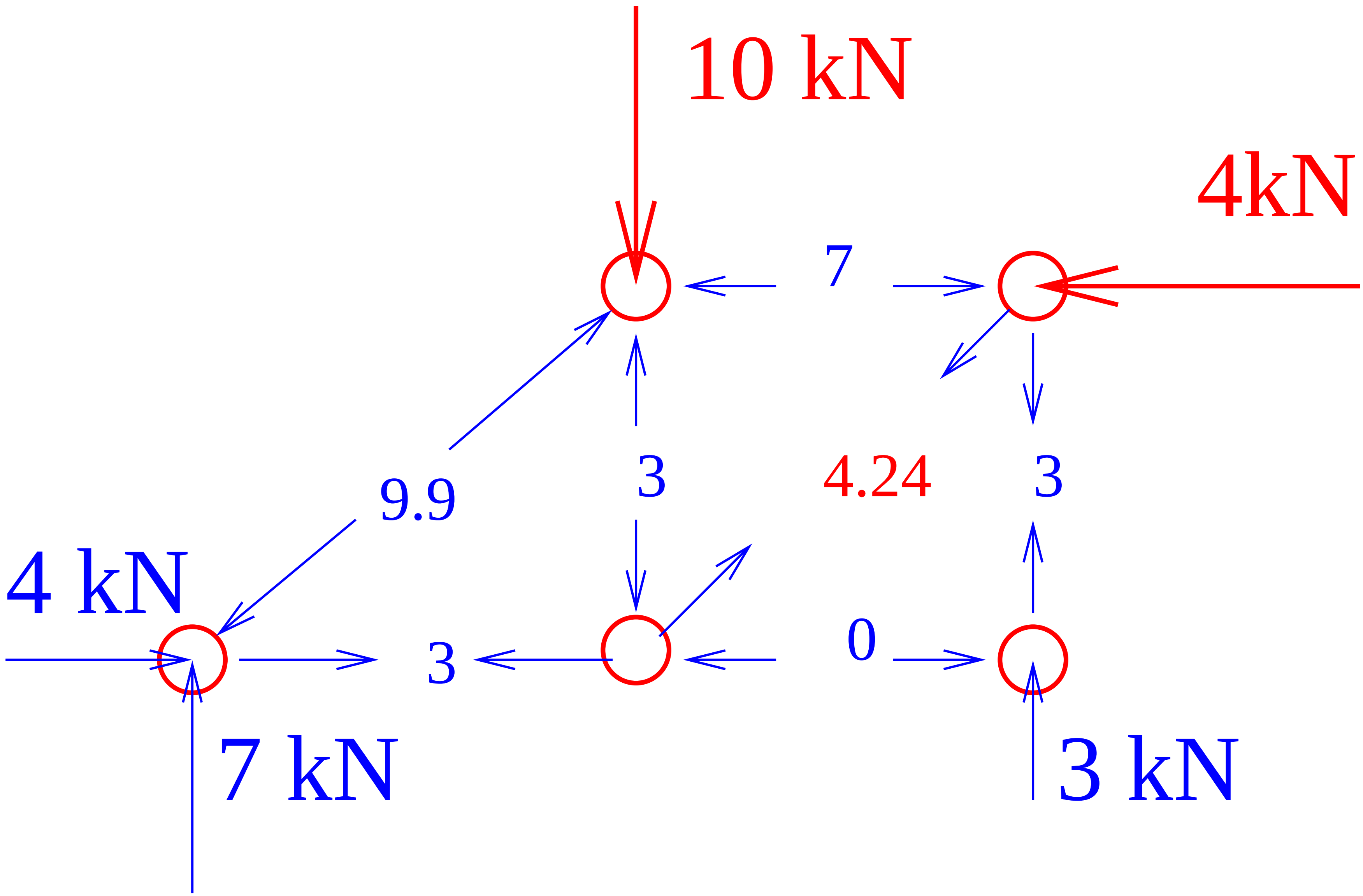
$\sum F_{i,x} = 0$:

$-N_1 + N_2 + N_6 \cos 45^o = 0$

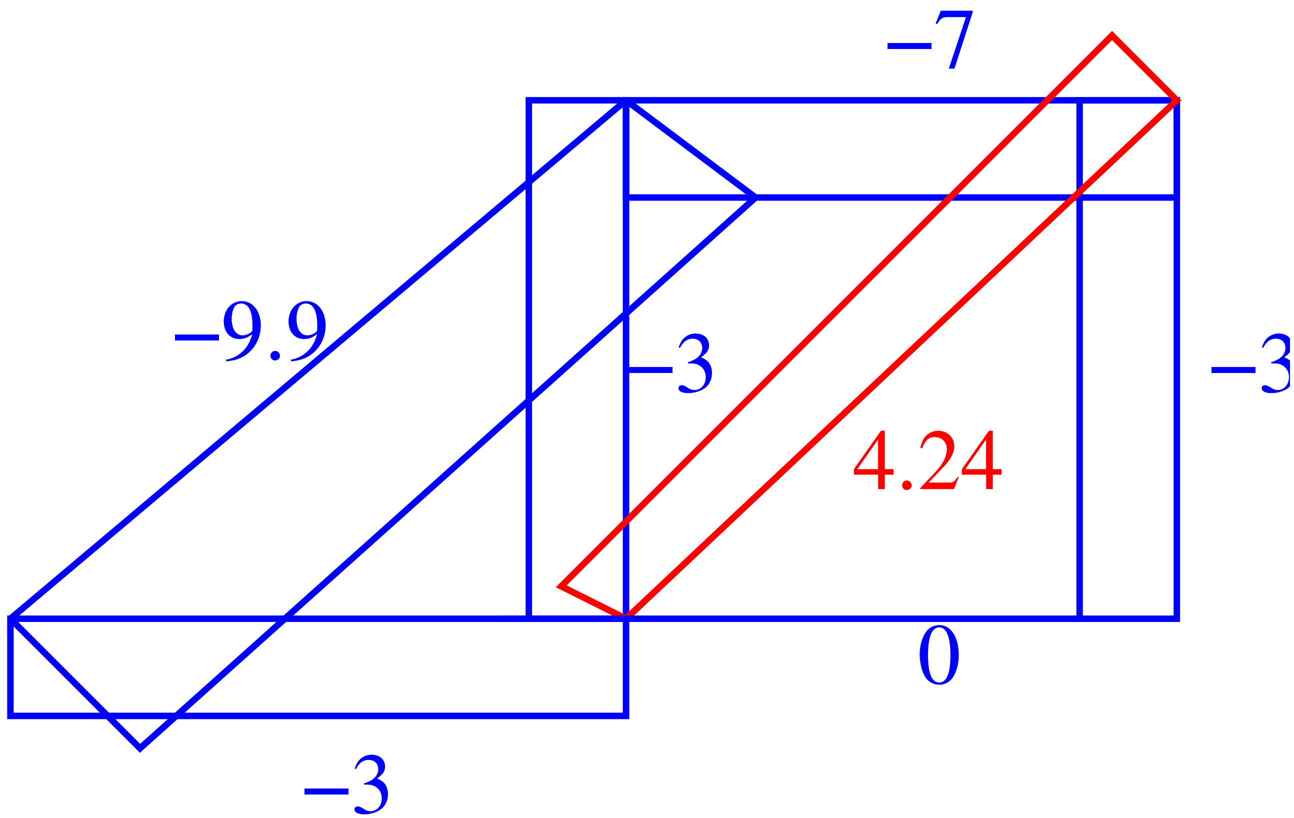
$-3 + 0 + N_6 \cos 45^o = 0$

$N_5 = 4.24\ kN$ (tah)

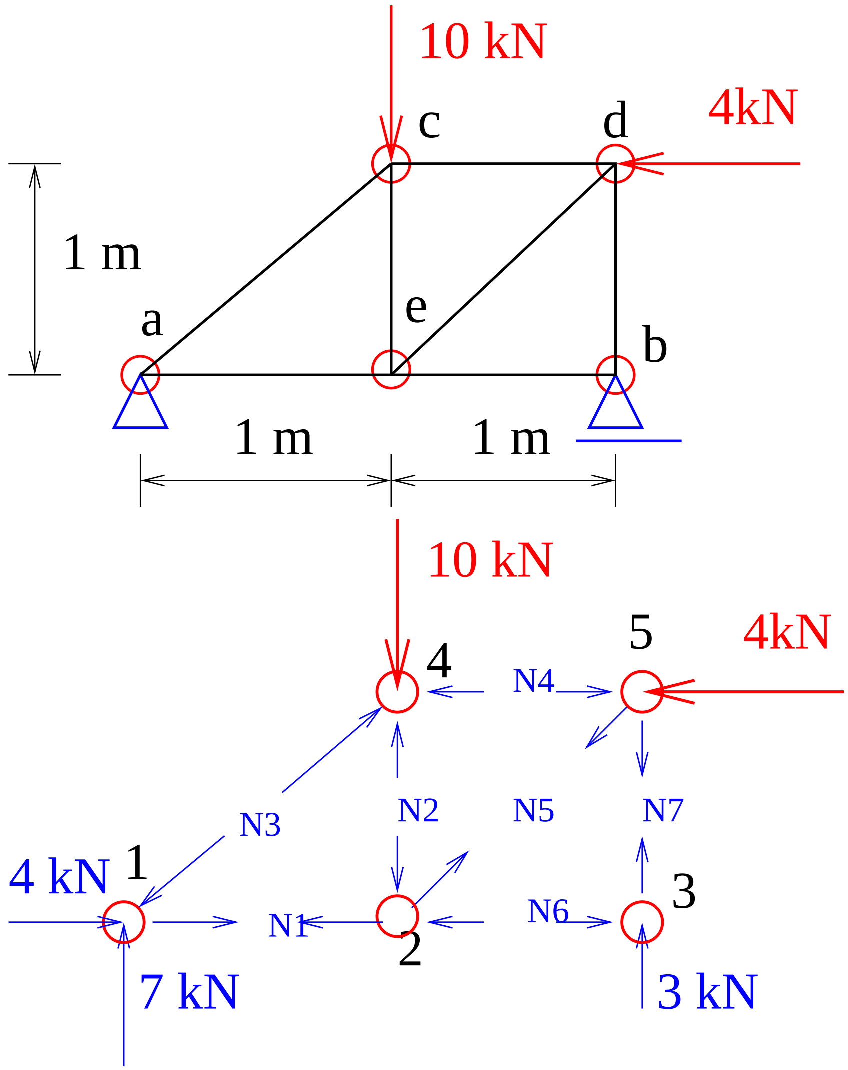
Styčníková metoda (7)



Styčníková metoda (8)

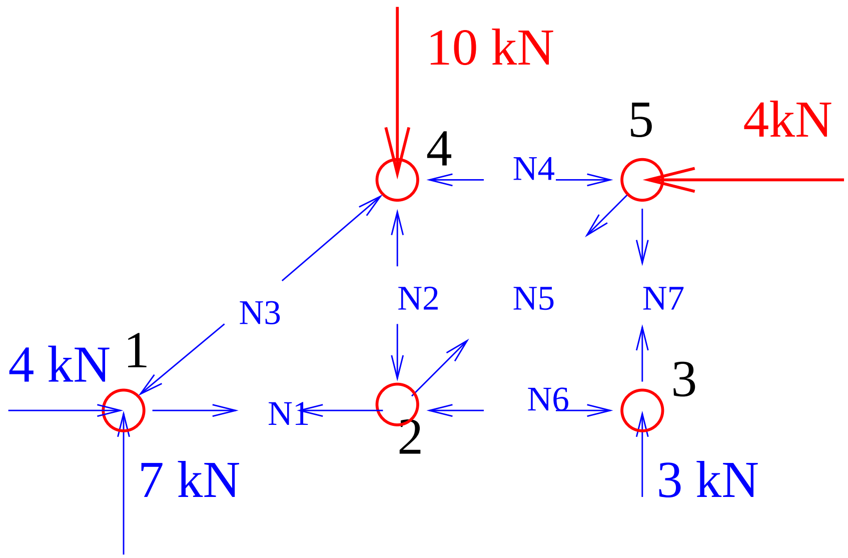


Obecná styčníková metoda (1)



- Vychází ze stejných předpokladů jako předchozí postup.
- Nejprve stanovíme reakce.
- Podmínky rovnováhy napíšeme **pro všechny styčníky**.
- Řešíme výslednou **soustavu rovnic**.

Obecná styčníková metoda (2)



Styčník 1:

$\sum F_{i,z} = 0$:

$R_{z,1} - N_3 \times \sin(45^o) = 0$

$7 - N_3 \times \sin(45^o) = 0$

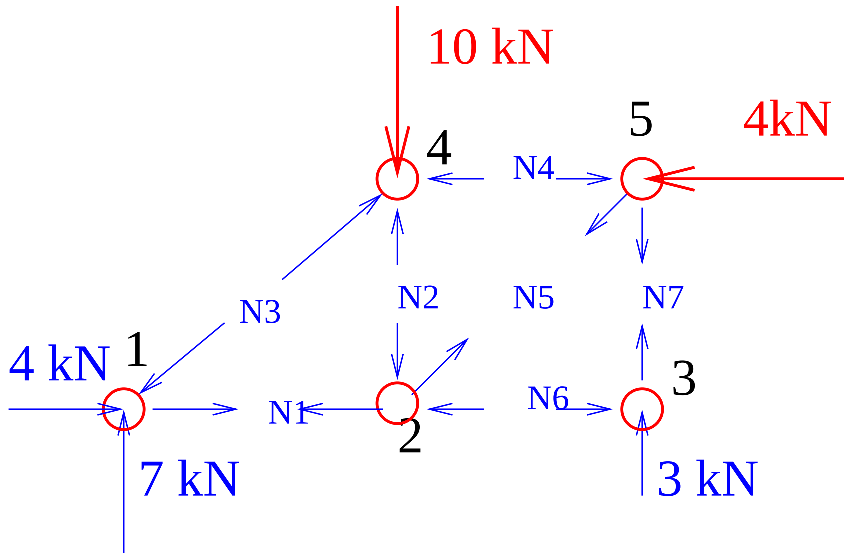
$\sum F_{i,x} = 0$:

$R_{x,1} - N_3 \times \cos(45^o) - N_1 = 0$

$4 - N_3 \times \cos(45^o) + N_1 = 0$

Č.	N_1	N_2	N_3	N_4	N_5	N_6	N_7	P.S.
1	0	0	$\sin 45^0$	0	0	0	0	7
2	-1	0	$\cos 45^o$	0	0	0	0	4

Obecná styčníková metoda (3)



Styčník 2:

$\sum F_{i,z} = 0$:

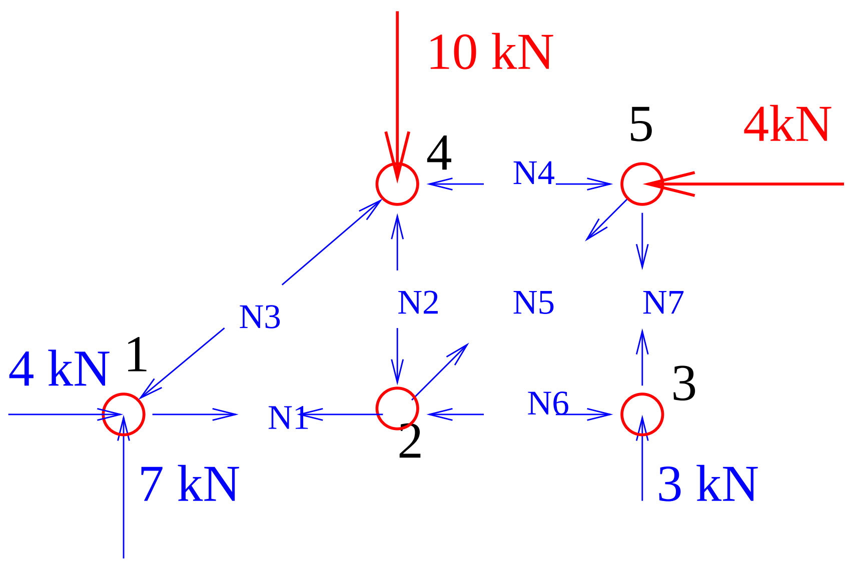
$$N_2 - N_5 \times \sin(45^o) = 0$$

$\sum F_{i,x} = 0$:

$$N_1 - N_5 \times \cos(45^o) + N_6 = 0$$

Č.	N_1	N_2	N_3	N_4	N_5	N_6	N_7	P.S.
3	0	1	0	0	$-\sin 45^o$	0	0	0
4	1	0	0	0	$-\cos 45^o$	1	0	0

Obecná styčníková metoda (4)



Styčník 3:

$\sum F_{i,z} = 0$:

$R_{z,3} + N_7 \times \sin(45^o) = 0$

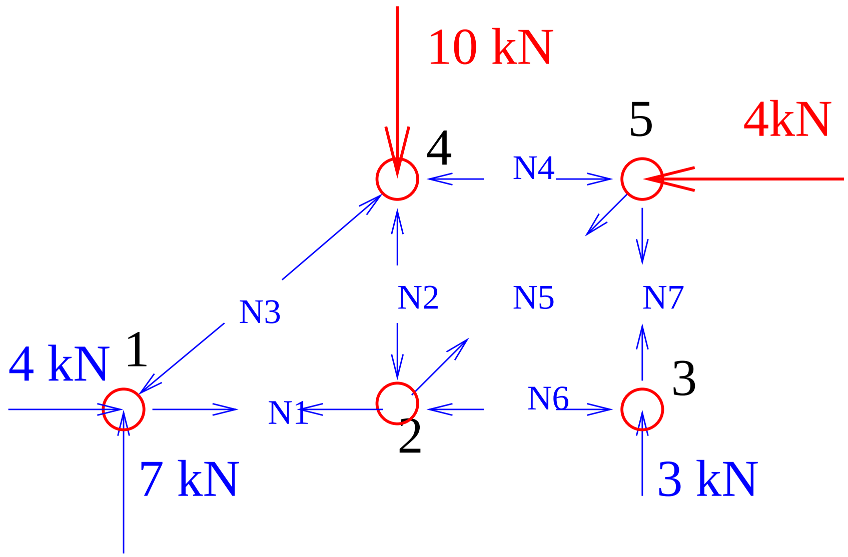
$3 + N_7 \times \sin(45^o) = 0$

$\sum F_{i,x} = 0$:

$N_6 = 0$

Č.	N_1	N_2	N_3	N_4	N_5	N_6	N_7	P.S.
5	0	0	0	0	0	0	1	-3
6	0	0	0	0	0	1	0	0

Obecná styčníková metoda (5)



Styčník 4:

$\sum F_{i,z} = 0$:

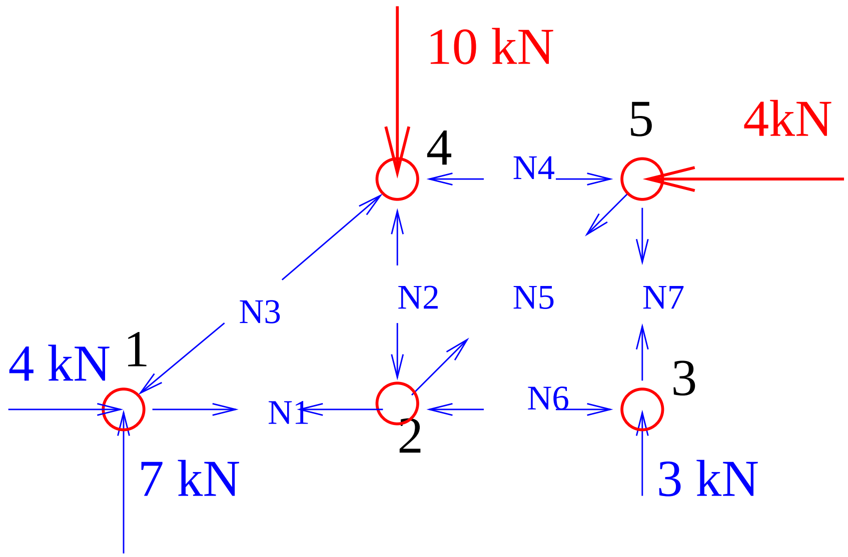
$$N_2 + N_3 \times \sin(45^o) - 10 = 0$$

$\sum F_{i,x} = 0$:

$$N_4 - N_3 \times \cos(45^o) = 0$$

Č.	N_1	N_2	N_3	N_4	N_5	N_6	N_7	P.S.
7	0	1	$\sin 45^o$	0	0	0	0	10
8	0	0	$-\cos 45^o$	1	0	0	0	0

Obecná styčníková metoda (6)



Styčník 5:

$\sum F_{i,z} = 0$:

$$N_7 + N_5 \times \sin(45^o) = 0$$

$\sum F_{i,x} = 0$:

$$N_4 - N_5 \times \cos(45^o) - 4 = 0$$

Č.	N_1	N_2	N_3	N_4	N_5	N_6	N_7	P.S.
9	0	0	0	0	$\sin 45^o$	0	1	0
10	0	0	0	1	$-\cos 45^o$	0	0	4

Obecná styčníková metoda (7)

Č.	N_1	N_2	N_3	N_4	N_5	N_6	N_7	P.S.
1	0	0	$\sin 45^o$	0	0	0	0	7
2	-1	0	$\cos 45^o$	0	0	0	0	4
3	0	1	0	0	$-\sin 45^o$	0	0	0
4	1	0	0	0	$-\cos 45^o$	1	0	0
5	0	0	0	0	0	0	1	-3
6	0	0	0	0	0	1	0	0
7	0	1	$\sin 45^o$	0	0	0	0	10
8	0	0	$-\cos 45^o$	1	0	0	0	0
9	0	0	0	0	$\sin 45^o$	0	1	0
10	0	0	0	1	$-\cos 45^o$	0	0	4

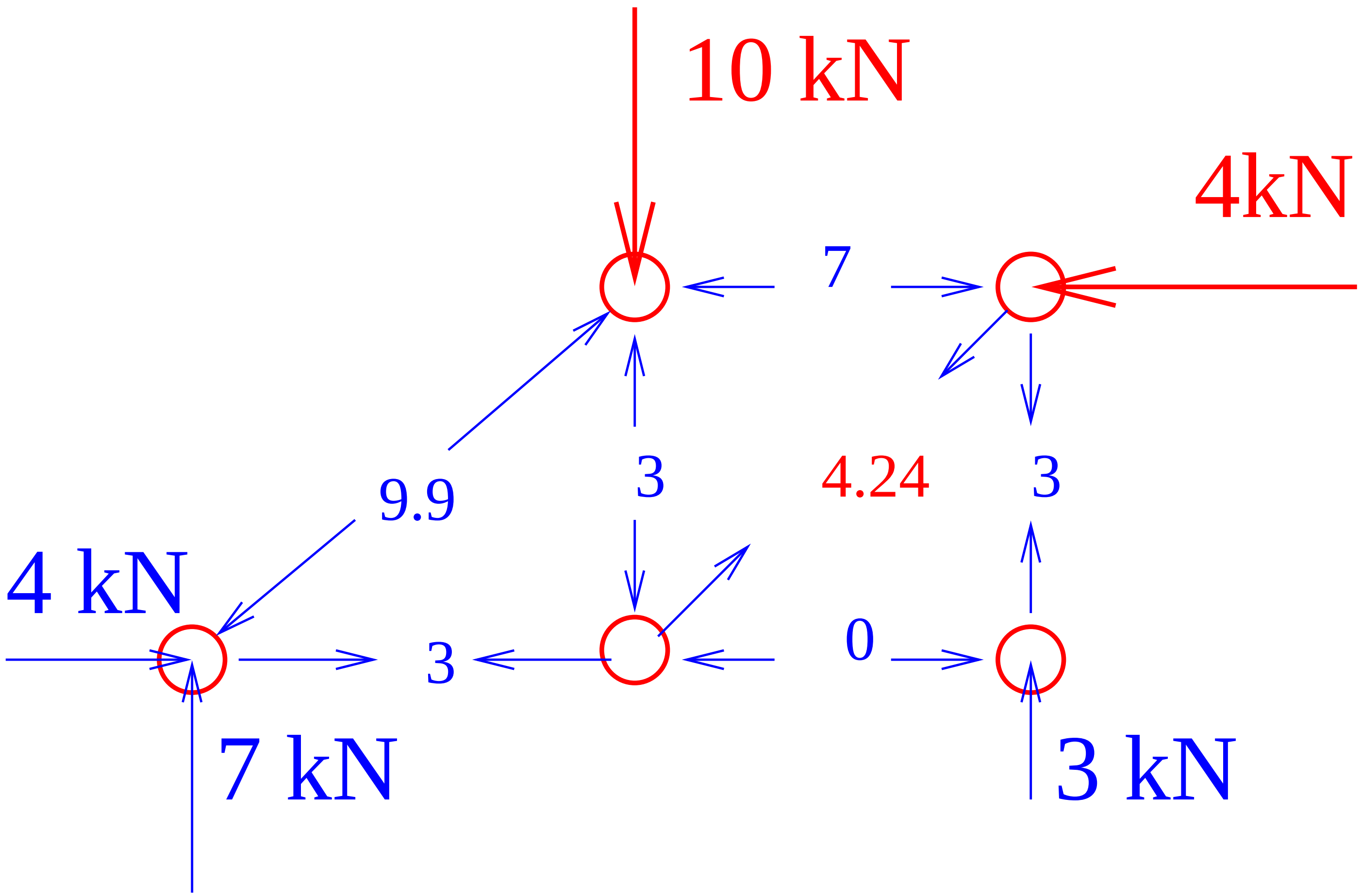
Obecná styčníková metoda (8)

Řešení: (tabulkový kalkulátor), **Matlab, Octave**:

```
a = [ 0 0 0.707 0 0 0 0; -1 0 0.707 0 0 0 0 ;
0 1 0 0 -0.707 0 0; 1 0 0 0 -0.707 1 0 ;
0 0 0 0 0 0 1 ; 0 0 0 0 0 1 0;
0 1 .707 0 0 0 0; 0 0 -0.707 1 0 0 0 ;
0 0 0 0 0.707 0 1 ; 0 0 0 1 -0.707 0 0 ]
b = [7 4 0 0 -3 0 10 0 0 4]'
c=a\b
```

N_1	N_2	N_3	N_4	N_5	N_6	N_7
3	3	9.9	7	4.24	0	-3

Obecná styčníková metoda (9)



N_1	N_2	N_3	N_4	N_5	N_6	N_7
3	3	9.9	7	4.24	0	-3

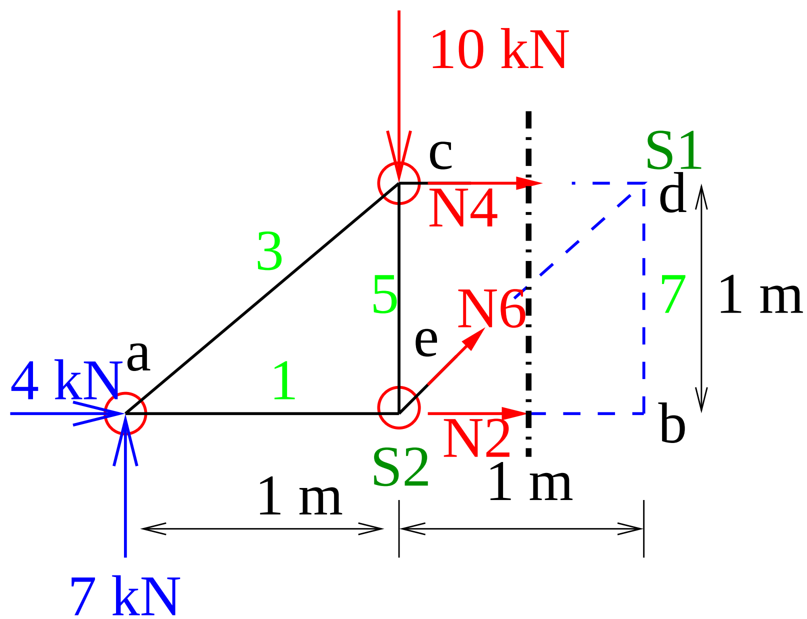
Obecná styčníková metoda (10)

0.00000	0.00000	0.70700	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
-1.00000	0.00000	0.70700	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
0.00000	1.00000	0.00000	0.00000	-0.70700	0.00000	0.00000
1.00000	0.00000	0.00000	0.00000	-0.70700	1.00000	0.00000
0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	1.00000
0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	1.00000	0.00000
0.00000	1.00000	0.70700	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
0.00000	0.00000	-0.70700	1.00000	0.00000	0.00000	0.00000
0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.70700	0.00000	1.00000
0.00000	0.00000	0.00000	1.00000	-0.70700	0.00000	0.00000

Výhody a nevýhody:

- Je možné použít na libovolnou kloubovou prutovou (nemusíme hledat styčníky jen se 2 neznámými silami).
- Je třeba řešit (zpravidla) větší soustavu rovnic $\Rightarrow$ obvykle je potřebné využít kalkulačky nebo počítače (tabulkový kalkulátor, matematický software).

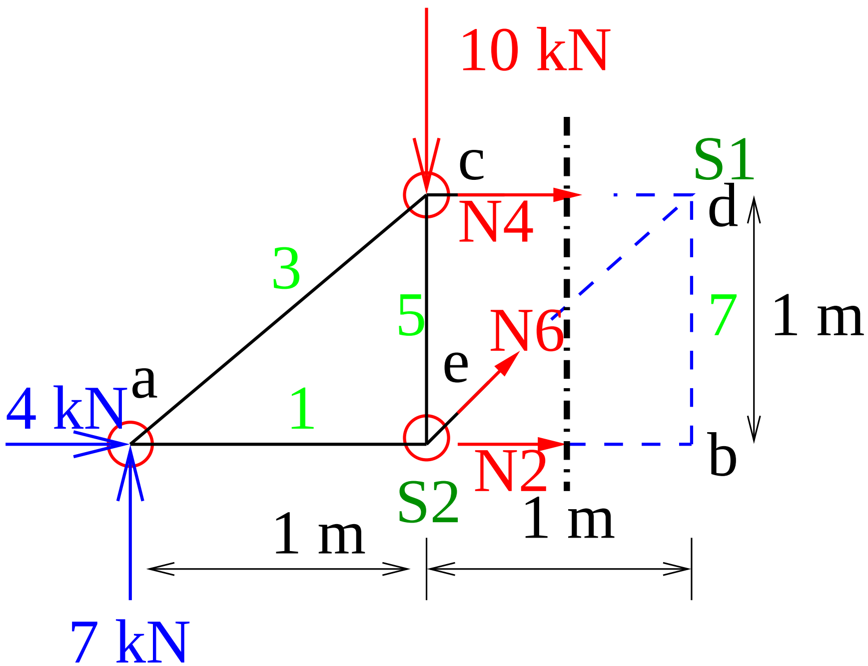
Průsečná metoda (1)



Tzv. **Ritterova úprava:**

- Vedeme řez 3 pruty (ev. více)
- Účinek odříznuté části konstrukce nahradíme příslušnými vnitřními silami
- Všechny rozříznuté pruty **kromě jednoho** musí mít společný průsečík
- K onomu průsečíku sestavíme momentovou podmínku rovnováhy

Průsečná metoda (2)



Momentový střed S1:

$\sum M_{i,S1} = 0$:

$N_2 \times 1 + 4 \times 1 - 7 \times 2 + 10 \times 1 = 0$

$N_2 = 14 - 10 - 4 = 0\ kN$

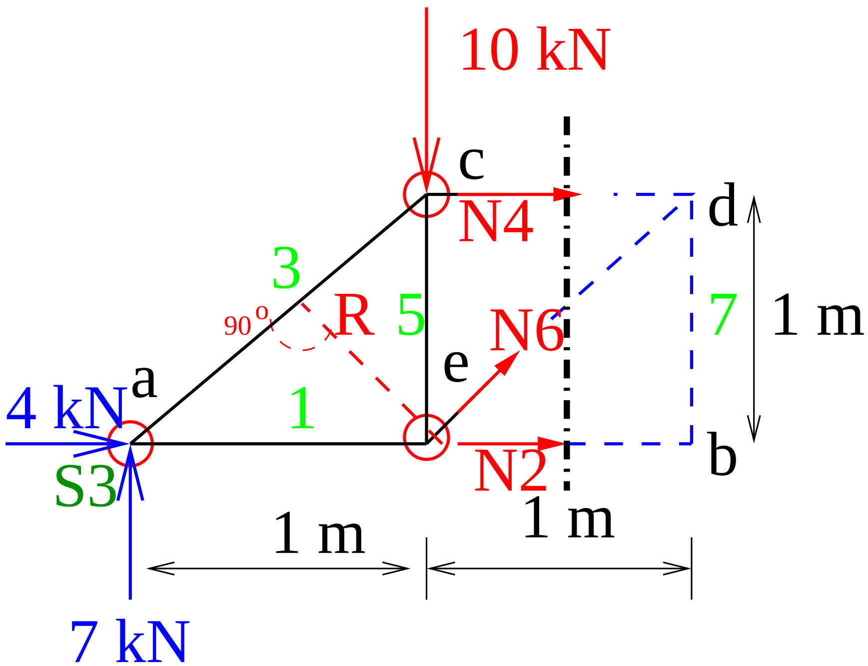
Momentový střed S2:

$\sum M_{i,S2} = 0$:

-$N_4 \times 1 - 7 \times 1 = 0$

$N_4 = -7\ kN$ (tlak)

Průsečná metoda (3)



Co se silou N_6?

Rameno R síly N_6 ke středu S_3:

$$\frac{R}{1} = \sin 45^o \Rightarrow R = 0.707\ m$$

Momentový střed S3:

$$\sum M_{i,S3} = 0:$$

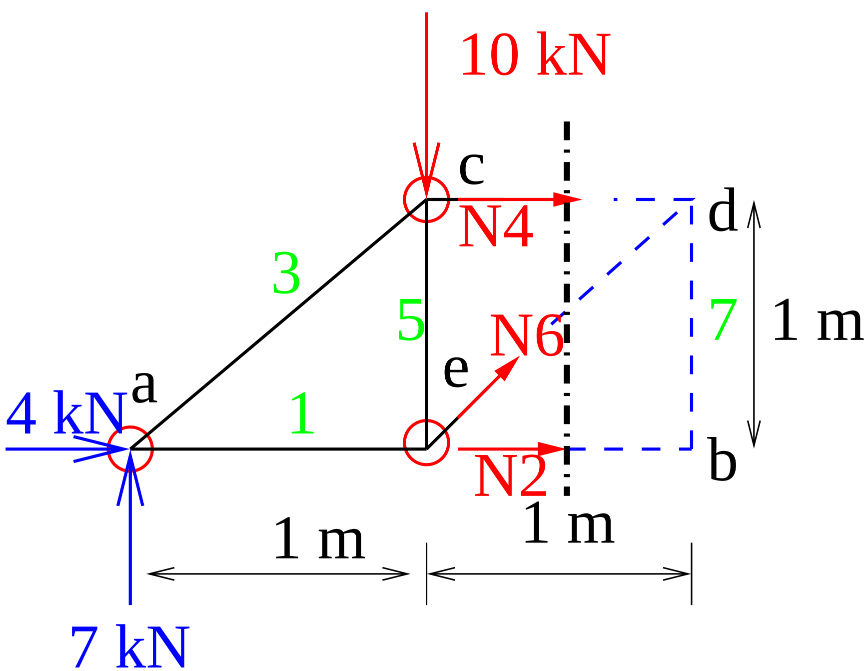
$$N_6 \times R - N_4 \times 1 - 10 \times 1 = 0$$

$$N_6 = 4.24\ kN \text{ (tah)}$$

Zbývající síly lze dopočítat styčníkovou metodou.

Průsečná metoda (4)

Silou N_6 lze i **jinak**: jen pokud jsou **ostatní síly vzájemně rovnoběžné** (zde N_2 a N_4): *silovou podmínkou* do směru **kolmého** na směr N_2 i N_4.



$$\sum F_{i,z} = 0 :$$

$$-N_6 \sin\alpha + 10 - 7 = 0$$

$$-N_6 \sin 45^o + 10 - 7 = 0$$

$$-N_6 = \frac{7-10}{\sin 45^o}$$

$N_6 = 4.24\ kN$ (tah)

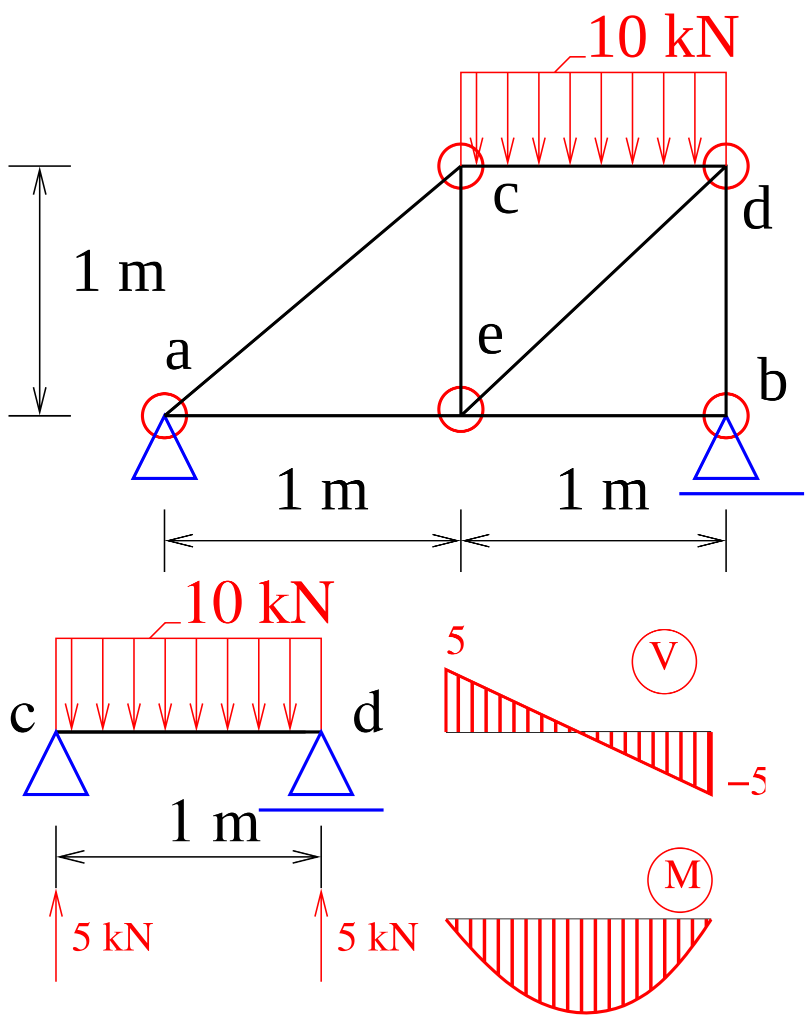
Metody řešení rovinných koubových prutových soustav

Kdy použít kterou metodu?

- Obecná styčníková metoda – vždy (když máme počítač)
- Styčníková metoda – pokud je možné najít styčník s nejvýše dvěmi neznámými silami
- Průsečná metoda – pro výpočet vybraných prutů (nemusíme znát síly v ostatních prutech)

Obvykle kombinujeme průsečnou a styčníkovou metodu.

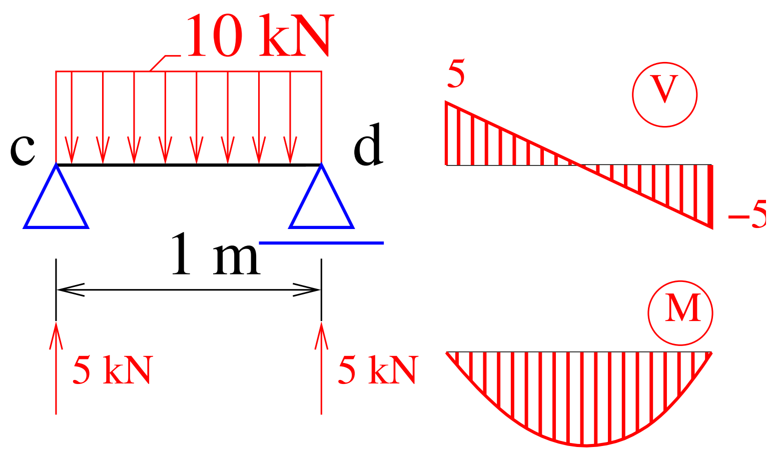
Mimostyčné zatížení (1)

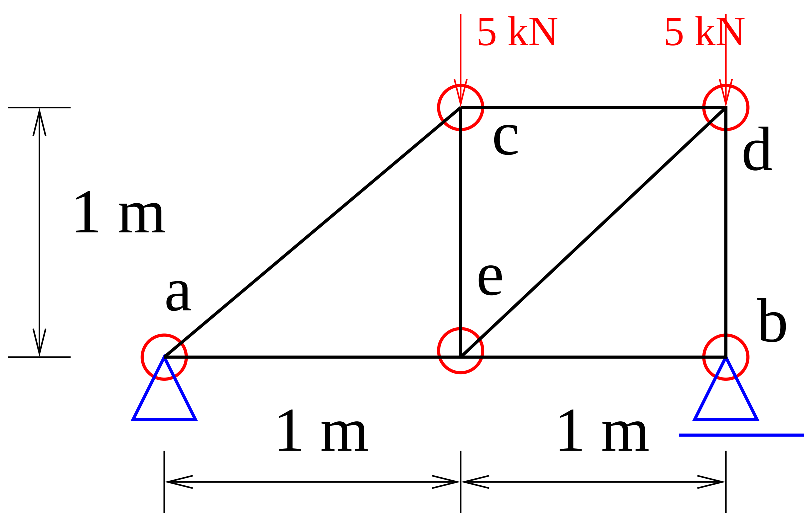


Zatížení prutů mimo styčníky (klouby).

- Vyjmeme prut z kosntrukce.
- Vyřešíme jako prostý nosník.
- Spočtenými reakcemi zatížíme konstrukci.
- Dál počítáme jako vždy.

Mimostyčné zatížení (2)



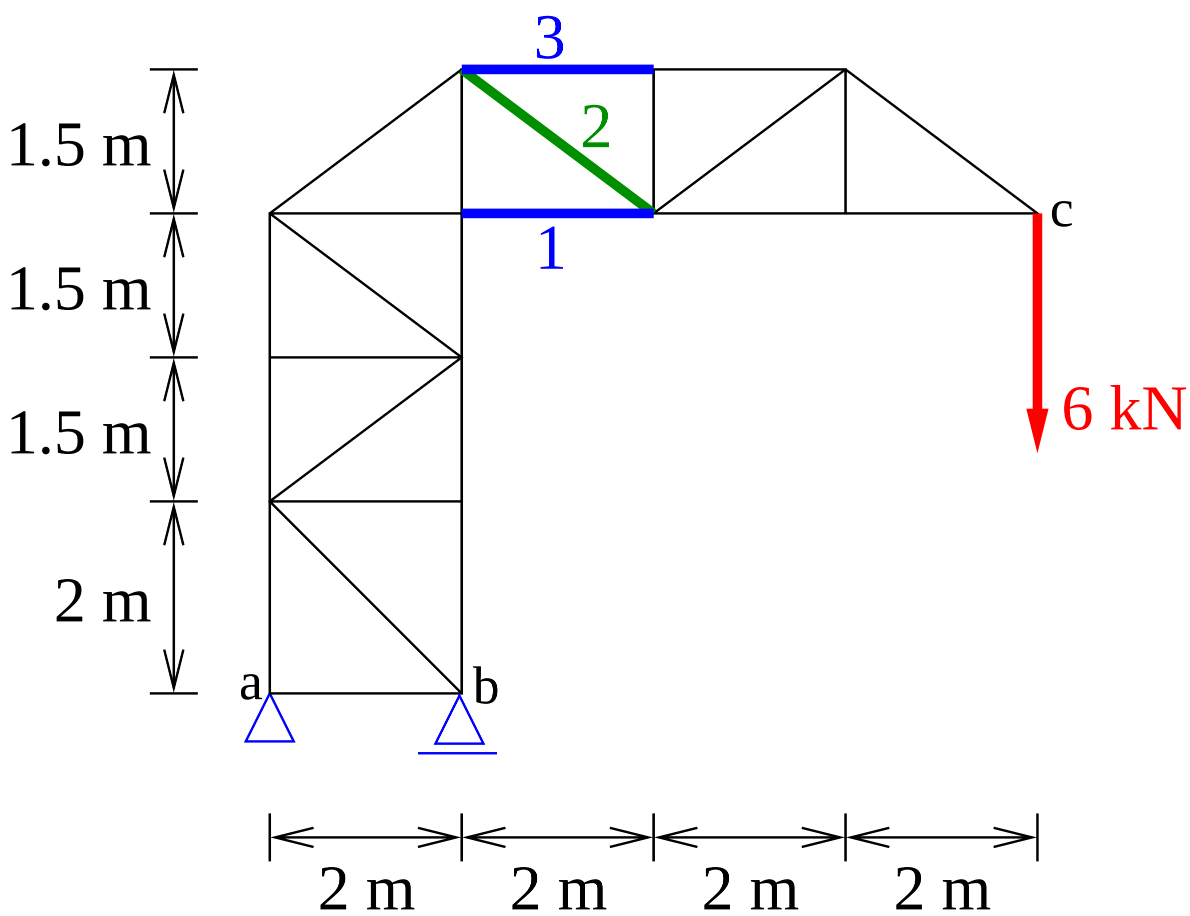


Zatížení prutů mimo styčníky (klouby).

- Vyjmeme prut z konstrukce.
- Vyřešíme jako prostý nosník.
- Spočtenými reakcemi zatížíme konstrukci.
- Dál počítáme jako vždy.

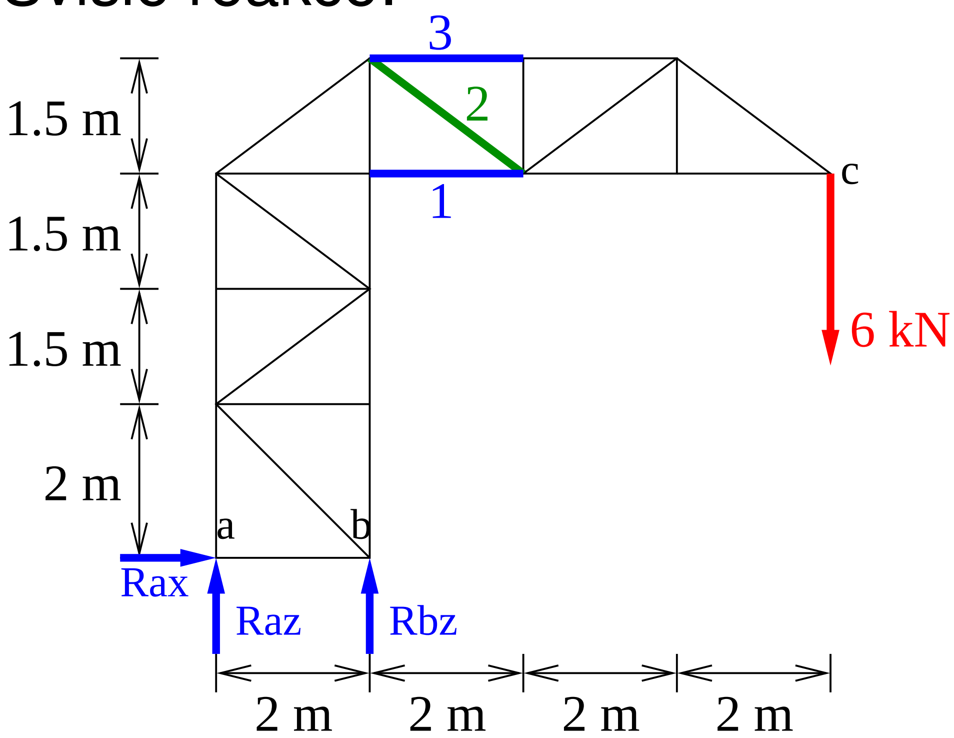
Složitější příklad (1)

Vypočítejte vnitřní síly v označených prutech konstrukce (1,2,3).



Složitější příklad (2)

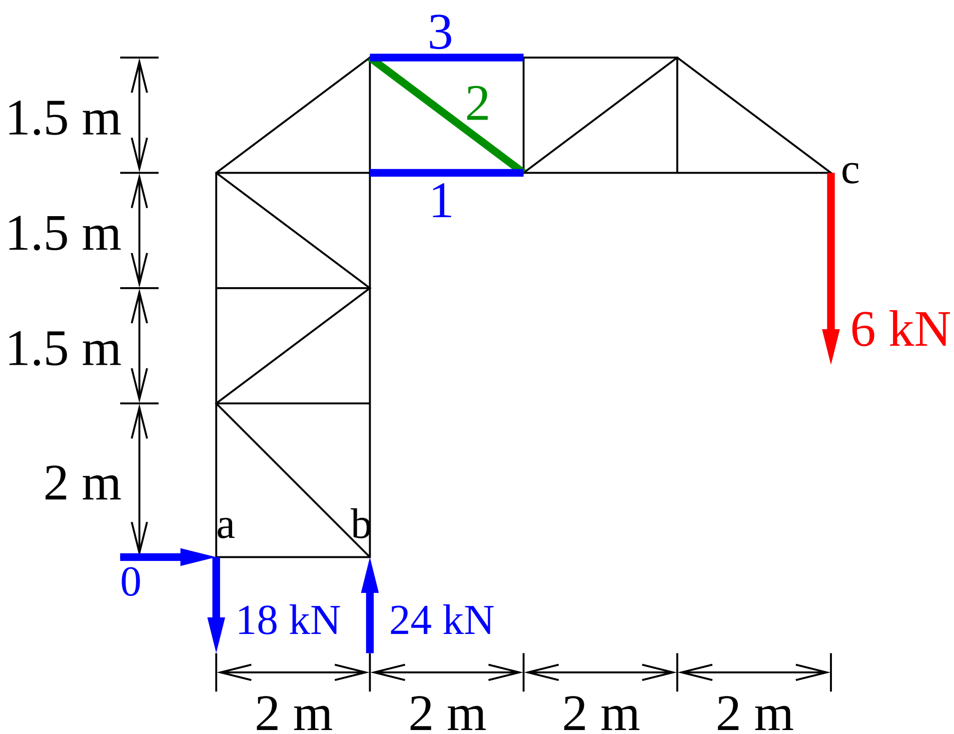
Svislé reakce:



$$\begin{aligned}
\sum M_{i,a} &= 0: \\
R_{bz} &\times 2 - 6 \times 8 = 0 \\
R_{bz} &= \frac{6 \times 8}{2} = 24\ kN\ (\uparrow)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sum M_{i,b} &= 0: \\
-R_{az} &\times 2 + 6 \times 6 = 0 \\
R_{az} &= -\frac{6 \times 6}{2} = -18\ kN \\
R_{az} &= = 18\ kN\ (\downarrow)
\end{aligned}$$

Složitější příklad (3)



Vodorovná reakce:

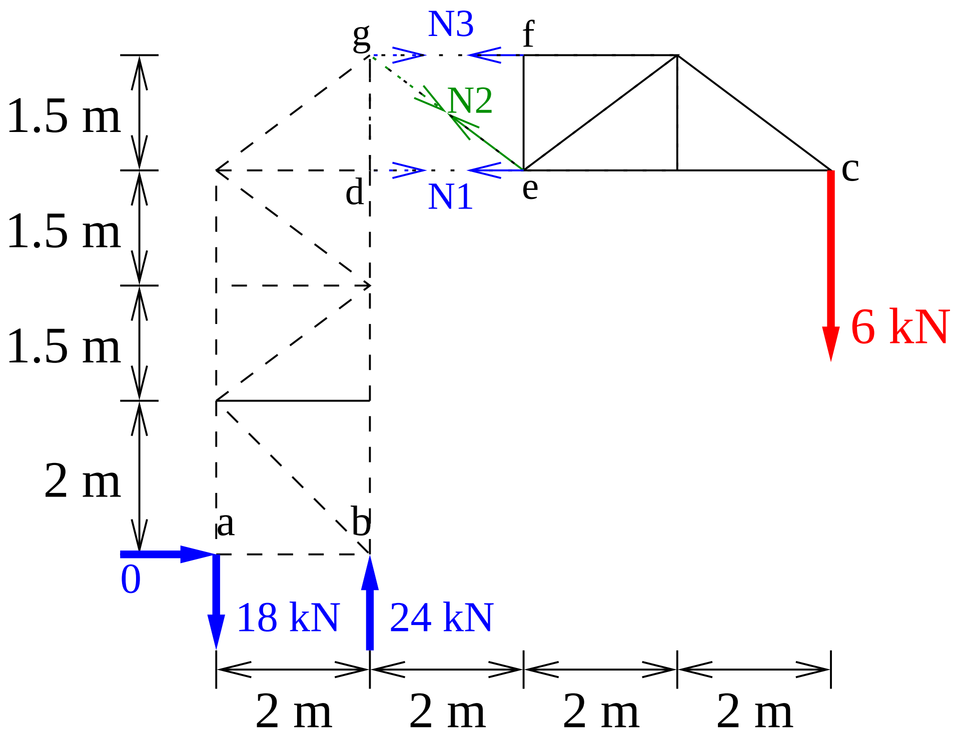
$$\begin{aligned} \sum F_{i,x} &= 0: \\ R_{ax} + 0 &= 0 \\ R_{ax} &= 0\ kN \end{aligned}$$

Kontrola:

$$\begin{aligned} \sum F_{i,y} &= 0: \\ -R_{az} + R_{bz} - 6 &= 0 \\ -18 + 24 - 6 &= 0 \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

Složitější příklad (4)

Výpočet síly N_1 k bodu **g** zprava:

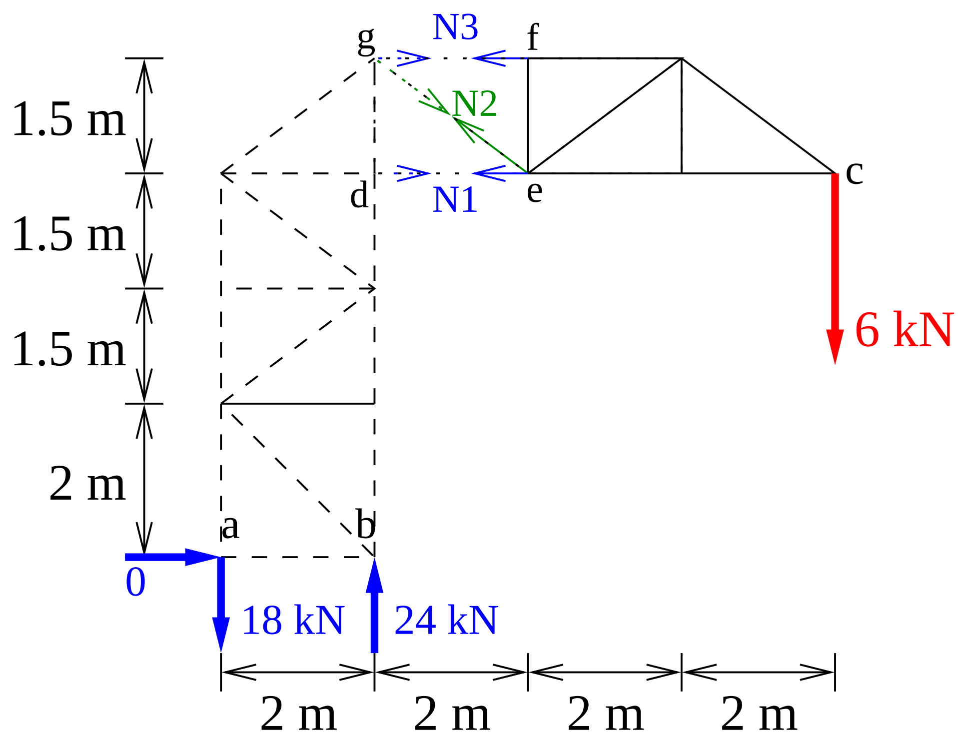


$$\begin{aligned}\sum M_{i,g} &= 0 : \\ -N_1 &\times 1,5 - 6 \times 6 = 0 \\ N_1 &= -\frac{6 \times 6}{1,5} \\ N_1 &= -24\ kN(tlak)\end{aligned}$$

Pozn.: momentovou podmínku můžeme napsat **k libovolnému bodu** v rovině, nemusí jít ani o styčník.

Složitější příklad (5)

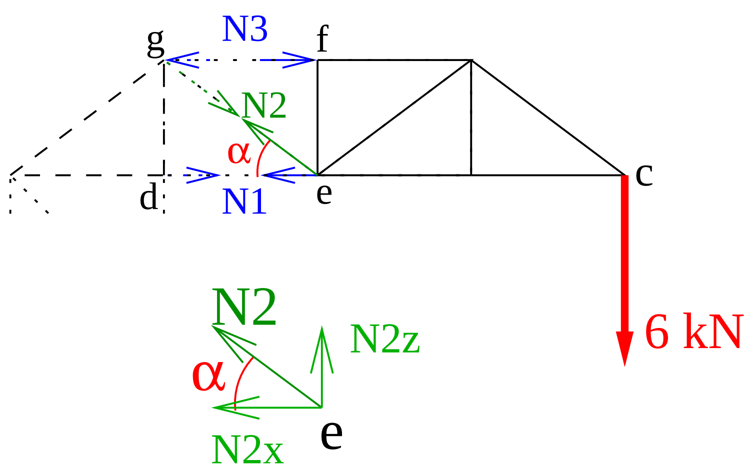
Výpočet síly N_3 k bodu **e** zprava:



$$
\begin{aligned}
\sum M_{i,e} &= 0: \\
N_3 &\times 1,5 - 6 \times 4 = 0 \\
N_3 &= \frac{6 \times 4}{1,5} \\
N_3 &= 16\ kN(tah)
\end{aligned}
$$

Složitější příklad (6)

Výpočet síly N_2 k bodu **f** zprava:



$$L_{ge} = \sqrt{1,5^2 + 2^2} = 2,5\ m$$

$$\cos(\alpha) = \frac{L_{de}}{L_{ge}} = \frac{2}{2,5} = 0,8\ m$$

$$\sum M_{i,f} = 0 :$$

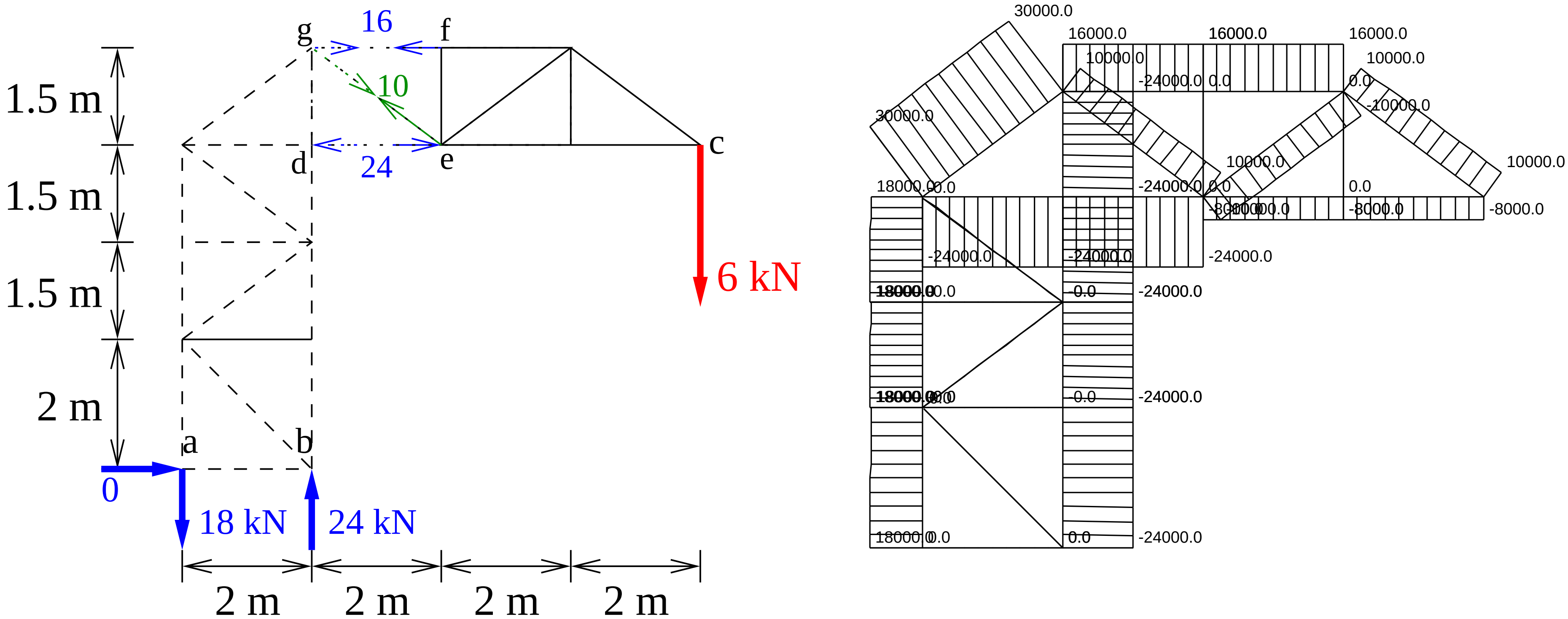
$$-N_{2x} \times 1,5 - N_1 \times 1,5 - 6 \times 4 = 0$$

$$-N_2 \times \cos(\alpha) \times 1,5 - 24 \times 1,5 - 6 \times 4 = 0$$

$$N_2 = \frac{24 \times 1,5 - 6 \times 4}{1,5 \times 0,8}$$

$$N_2 = 10\ kN(tah)$$

Složitější příklad (7)



Dotaz: bylo potřebné pro výpočet sil **v zadaných prutech** počítat reakce?