VYSOKÁ ŠKOLA BÁŇSKÁ – TECHNICKÁ UNIVERZITA OSTRAVA

FAKULTA STAVEBNÍ

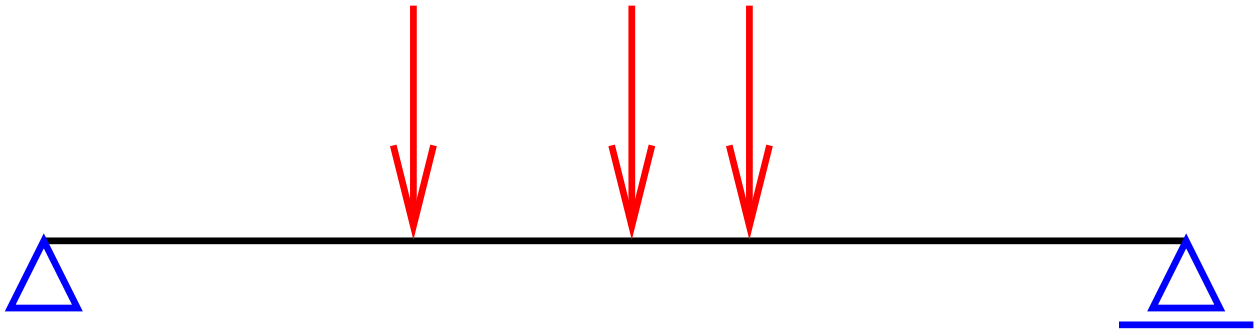
Základy stavební mechaniky

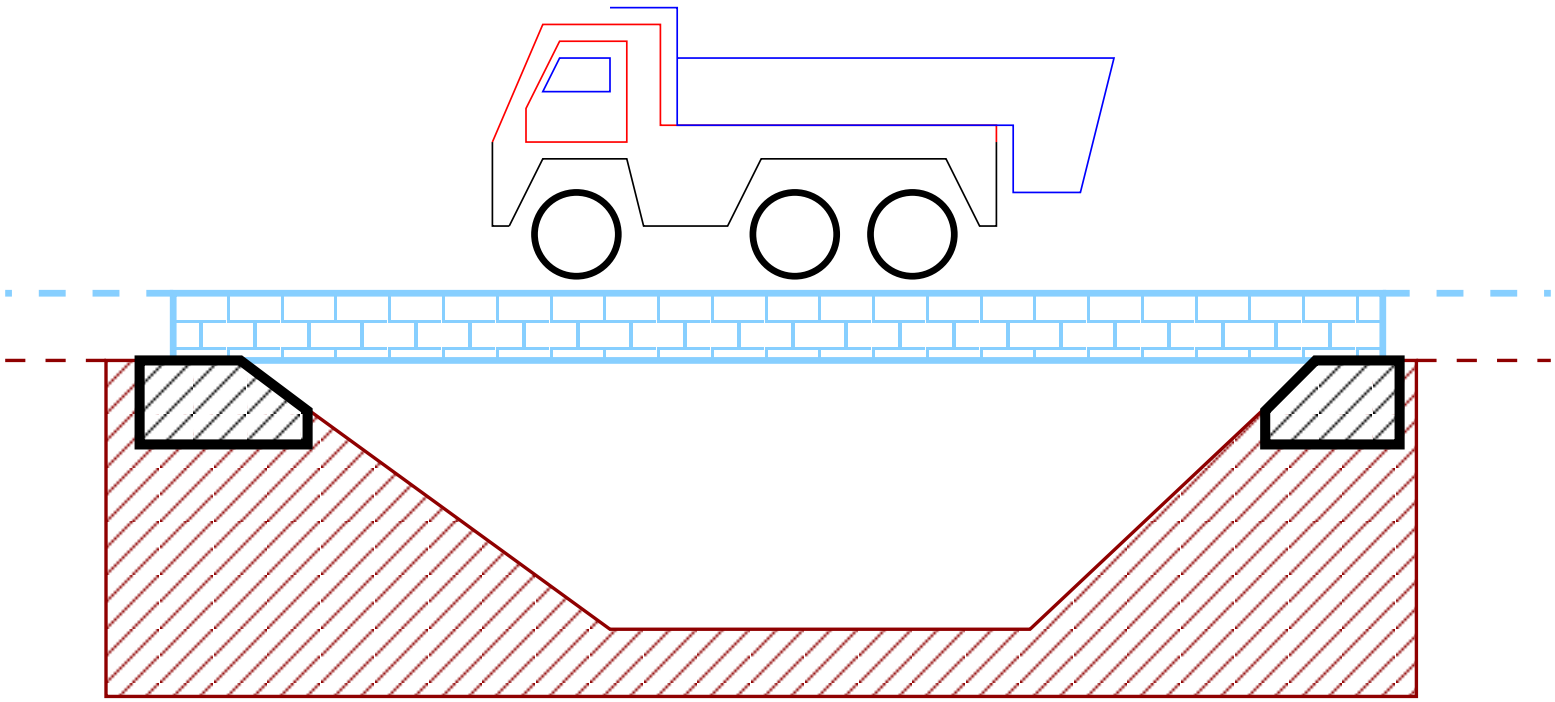
Základy stavební mechaniky pro architekty

Jiří Brožovský

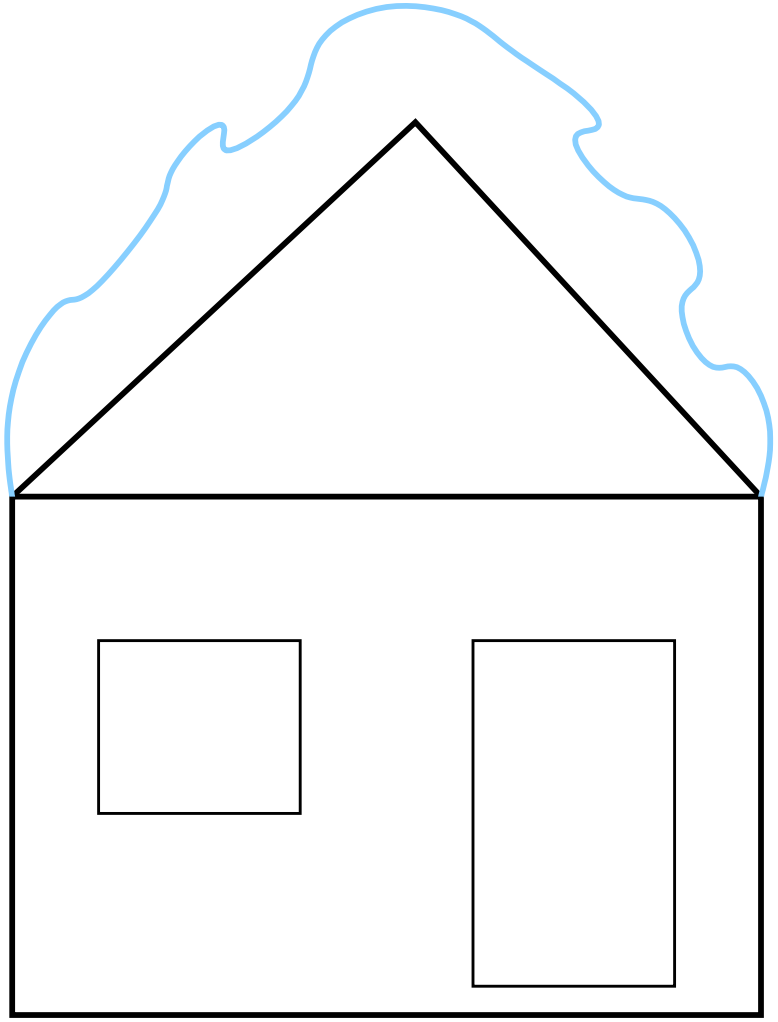
Kancelář: LP – H 406/3
E-mail: jiri.brozovsky@vsb.cz

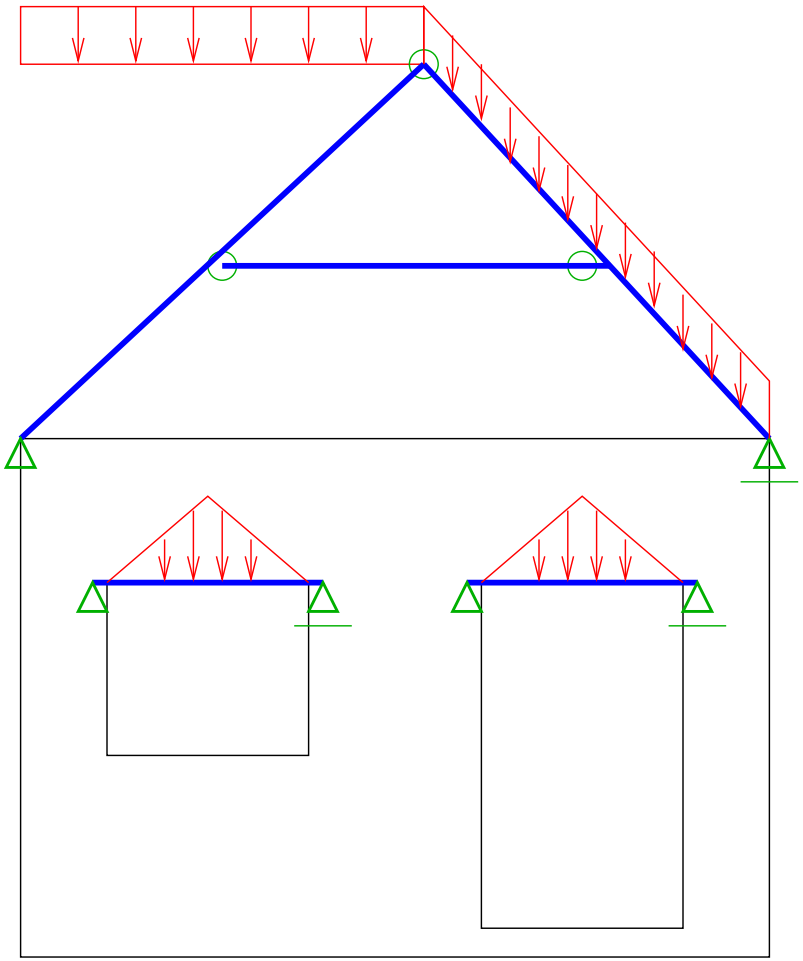
Stavební mechanika? (1)





Stavební mechanika? (2)





Doporučená literatura

1. on-line podklady **v LMS** (přednášky, cvičení):

   `https://lms.vsb.cz`

2. on-line: **přednášky prof. Martina Krejsy**:

   `http://fast10.vsb.cz/krejsa/zaklady_mechaniky.htm`

   `http://fast10.vsb.cz/krejsa/zaklady_mechaniky_arch.htm`

3. učebnice: Jaroslav Kadlčák, Jiří Kytýr: Statika stavebních konstrukcí I., VUTIUM, 1998

Průběh zkoušky

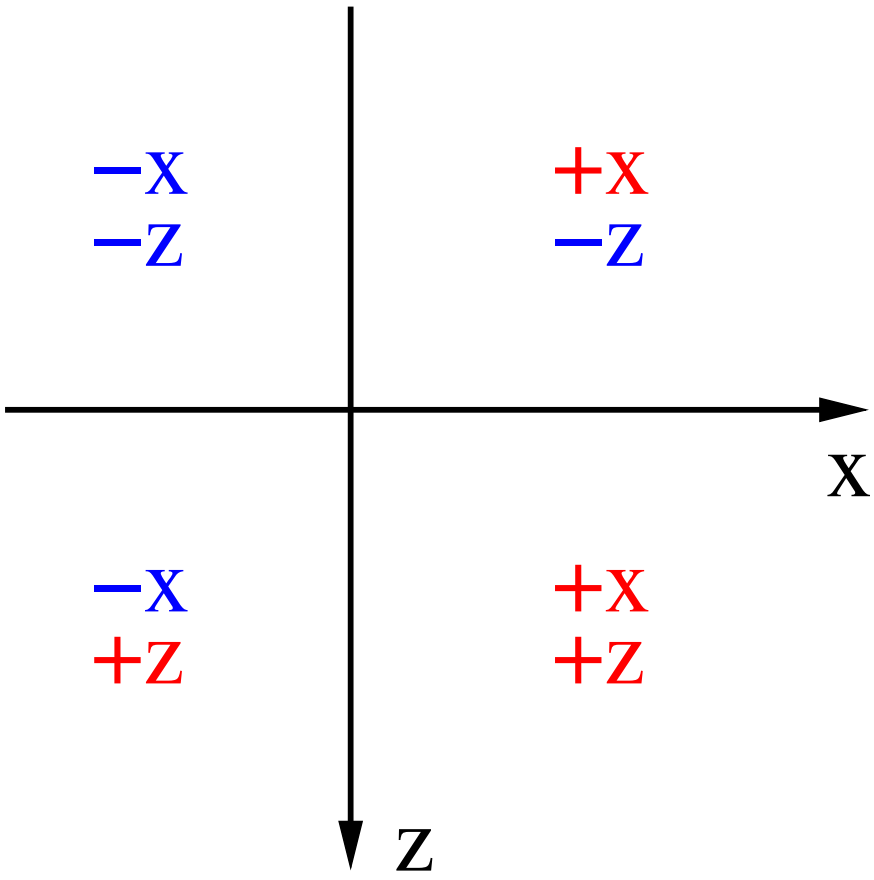
- podmínkou účasti na zkoušce je získaný platný zápočet (zapsaný v EDISONu)
- obsah: příklady na základní úlohy stavební mechaniky (výpočet reakcí a vnitřních sil **libovolných staticky určitých konstrukcí**, statická neurčitost, výpočet polohy těžiště) a zodpovězení teoretických otázek
- bodování jako v ostatních předmětech (minimum na zkoušce je 33 bodů, maximum 65)

Náplň předmětu

- Silové soustavy v rovině a prostoru (opakování).
- Reakce stavebních konstrukcí.
- Vnitřní síly nosníků, integrálně–derivační vztahy.
- Přímé, lomené nosníky, oblouky.
- Nosníky s klouby.
- Příhradové nosníky.
- Těžiště průřezu.

Varování: Znalosti uvedených témat v rozsahu učiva střední školy **nestačí** ani k získání zápočtu, natož pak k vykonání zkoušky. Doporučuje se průběžné studium nové látky.

Systém souřadnic v rovině X-Z



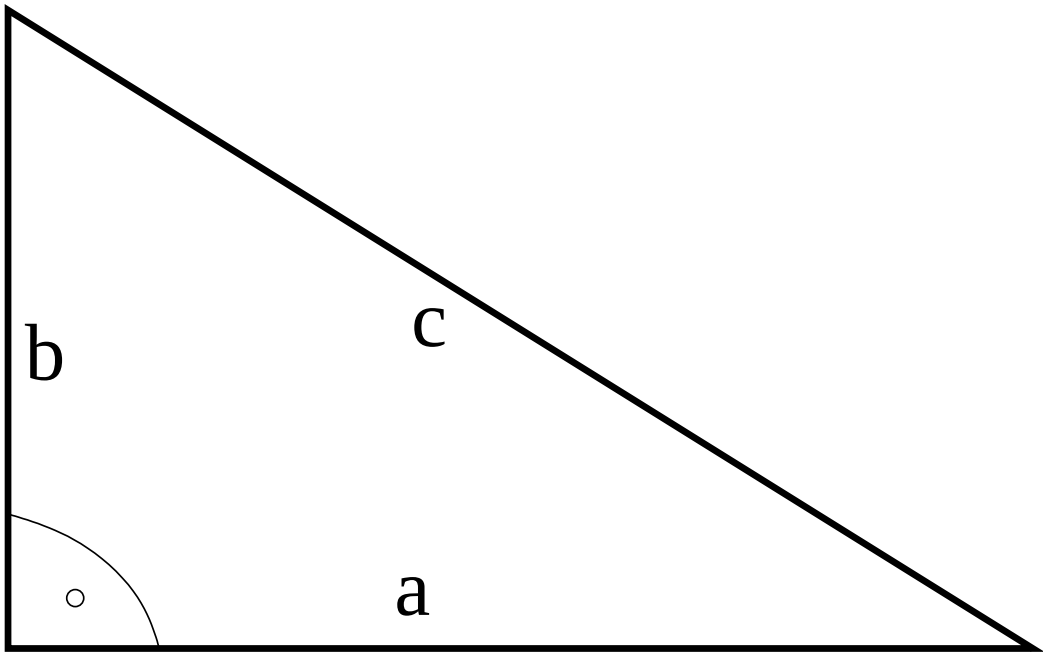
Dále budeme tento systém souřadnic používat.

Opakování pojmů z matematiky

- Pythagorova věta.
- Goniometrické funkce.
- Příklady použití goniometrických funkcí.
- Trojčlenka.

Opakování: Pythagorova věta

Platí pouze pro pravoúhlé trojúhelníky!



$$c^2 = a^2 + b^2$$

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$a = \sqrt{c^2 - b^2}$$

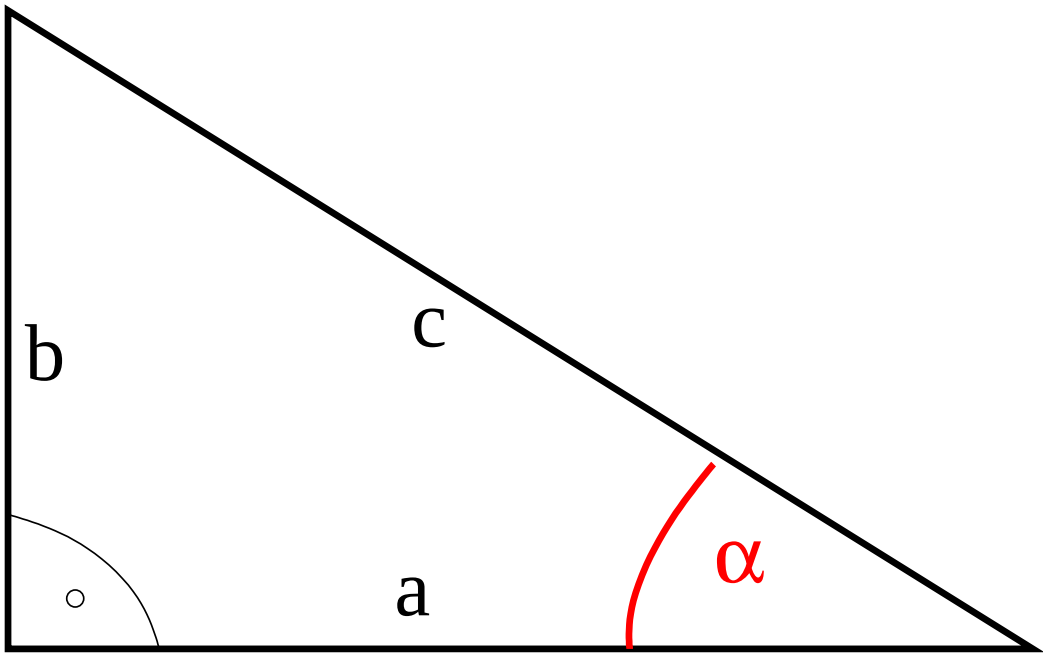
$$b = \sqrt{c^2 - a^2}$$

a, b ... odvěsny,

c ... přepona (naproti pravému úhlu).

Opakování: Goniometrické funkce

Uvedené vztahy platí pouze pro pravoúhlé trojúhelníky!



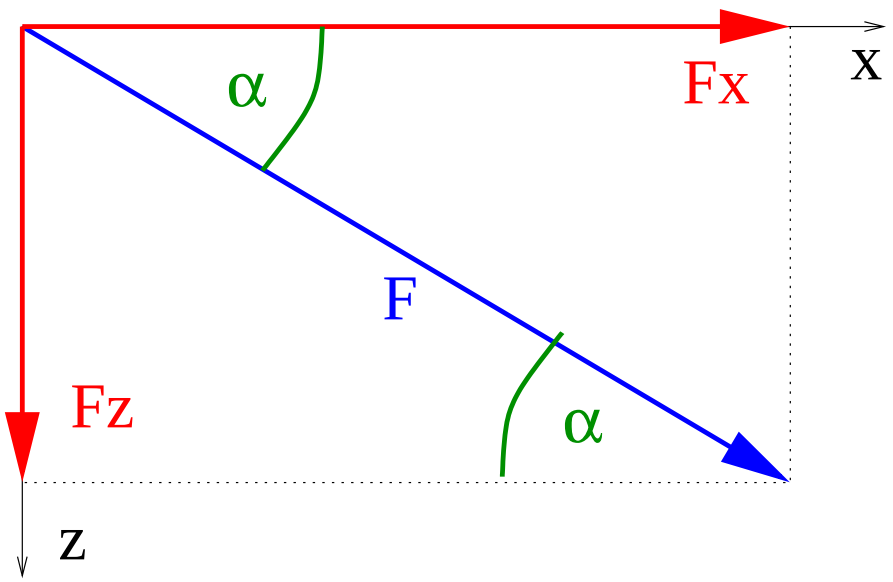
- Sinus α: $\sin\alpha = \frac{b}{c}$
- Kosinus α: $\cos\alpha = \frac{a}{c}$
- Tangens α: $\tan\alpha = \frac{b}{a}$

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

a, b ... odvěsny, c ... přepona (naproti pravému úhlu).

Aplikace opakování: Rozklad síly na pravoúhlé složky

Využití Pythagorovy věty a goniometrických funkcí.



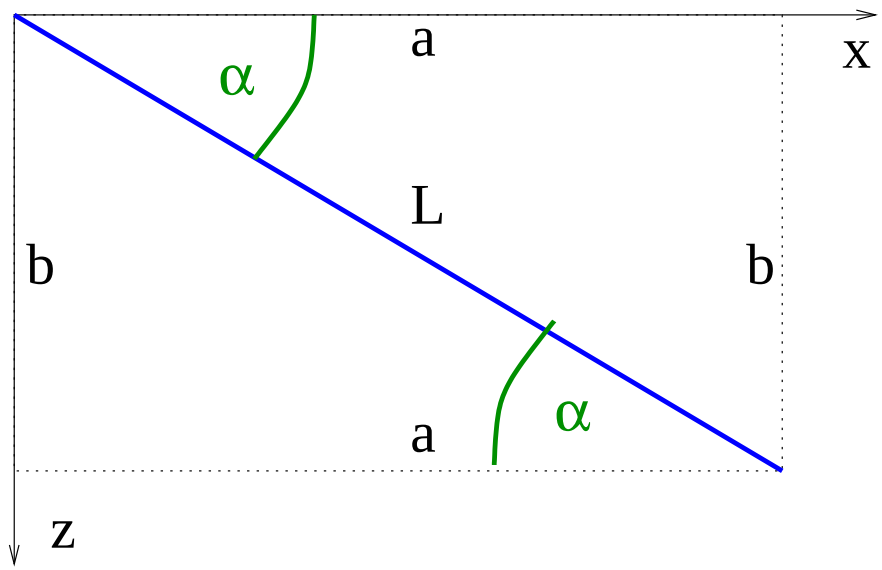
$$F = \sqrt{F_x^2 + F_z^2}$$

$$\cos(\alpha) = \frac{F_x}{F} \Rightarrow F_x = F\cos(\alpha)$$

$$\sin(\alpha) = \frac{F_z}{F} \Rightarrow F_z = F\sin(\alpha)$$

Aplikace opakování: Výpočet délky šikmé úsečky

Využití Pythagorovy věty a goniometrických funkcí.

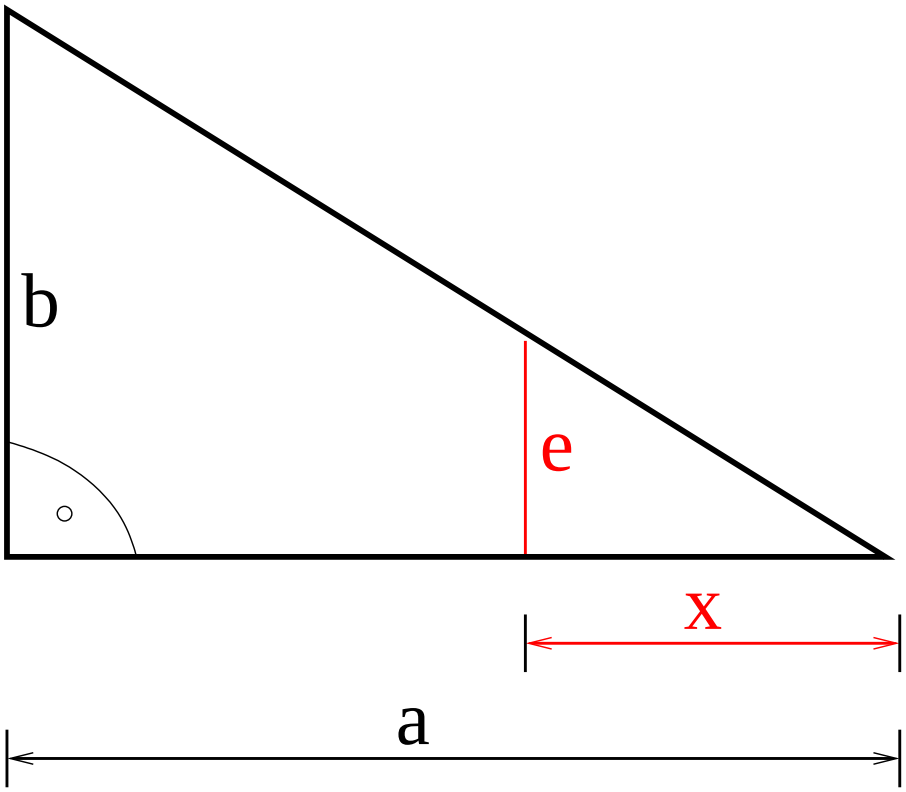


$$L = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\cos(\alpha) = \frac{a}{L} \Rightarrow L = \frac{a}{\cos(\alpha)}$$

$$\sin(\alpha) = \frac{b}{L} \Rightarrow L = \frac{b}{\sin(\alpha)}$$

Opakování: Trojčlenka



$$\frac{a}{b} = \frac{x}{e} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{a}{b} \; e$$

$$\Rightarrow \quad e = \frac{b}{a} \; x$$

Využití: např. podobnost trojúhelníků.

Opakování: Fyzika – mechanika

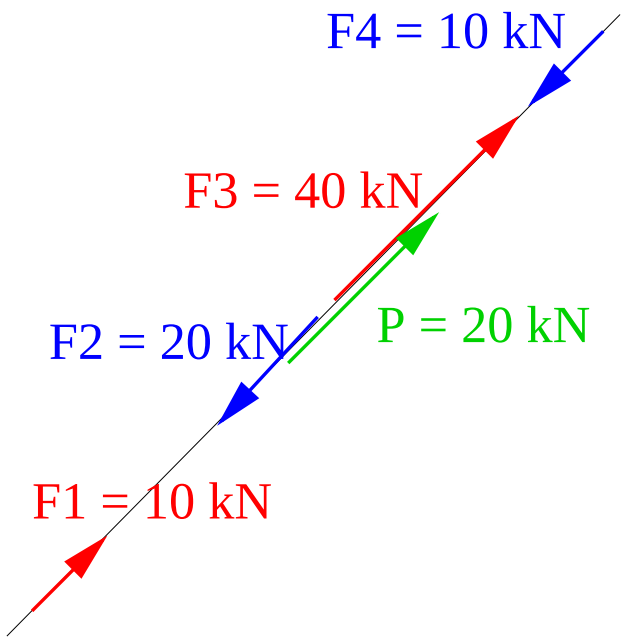
- Základní předpoklady
- Přímková soustava sil
- Rovinný svazek sil
- Statický moment síly k bodu
- Dvojice sil v rovině
- Rovinná soustava rovnoběžných sil
- Obecná soustava sil v rovině

Fyzika – základní předpoklady

- Zkoumáme objekty z **lineárně pružného materiálu** (platí Hookeův zákon: vztah mezi zatížením a deformací je lineární)
- Materiál všech zkoumaných těles je **izotropní** (má ve všech směrech stejné vlastnosti)
- Předpokládáme, že deformace vyvolané zatížením jsou **malé** (vliv deformací na polohu sil můžeme zanedbat)

Tyto předpoklady umožňují, že můžeme účinky různých zatížení (např. sil) na konstrukci sčítat (velké **zjednodušení** výpočtů).

Přímková soustava sil



- Všechny síly leží v jedné přímce
- Na místě působení **v rámci** přímky nezáleží
- Výslednice (síla, kterou lze soustavu sil nahradit a která má stejný účinek) :

$$P = \sum_{i=1}^{n} F_i$$

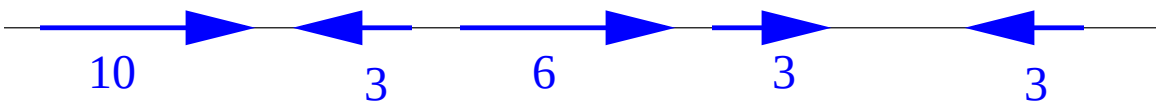
Příklad: $P = \sum_{i=1}^{4} F_i = 10 - 20 + 40 - 10 = 20\ kN$

Přímková soustava sil

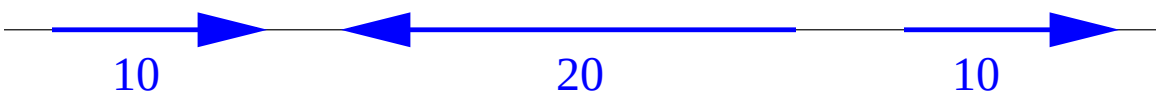
- Stanovte směr a velikost výslednic

- Určete, zda nějaká ze soustav je v rovnováze ($P = 0$)

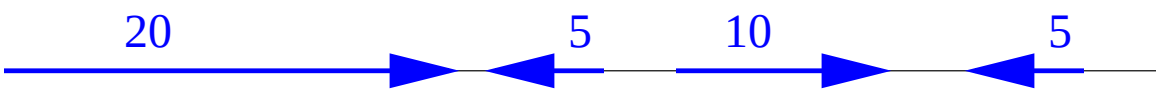
a)



b)

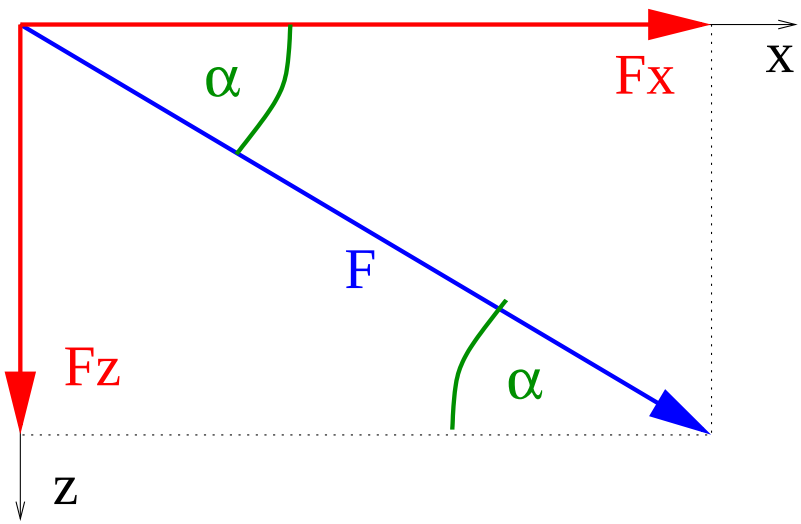


c)



Rozklad síly na pravoúhlé složky

Uplatníme znalost Pythagorovy věty:



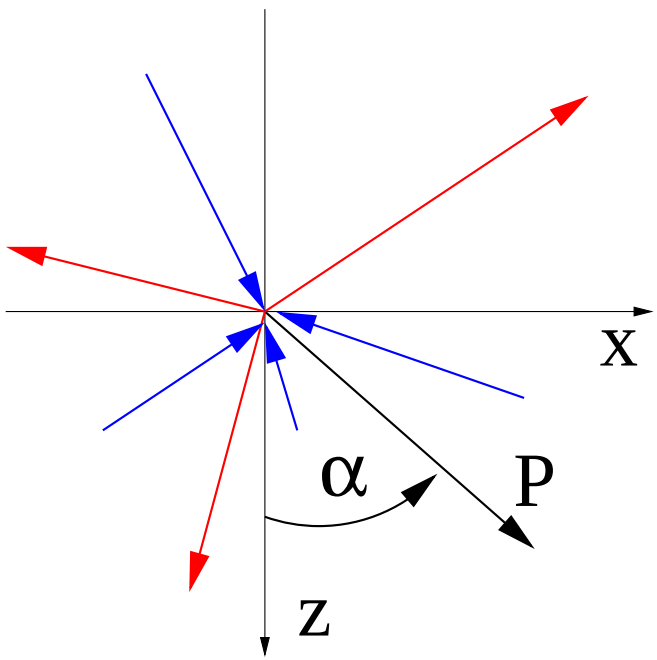
$$F = \sqrt{F_x^2 + F_z^2}$$

$$\cos(\alpha) = \frac{F_x}{F} \Rightarrow F_x = F\cos(\alpha)$$

$$\sin(\alpha) = \frac{F_z}{F} \Rightarrow F_z = F\sin(\alpha)$$

Silový pravoúhelník je zde **obdélník**.

Rovinný svazek sil



- **Skupina sil se společným působištěm**
- Výslednici hledáme ve třech krocích:
  1. rozklad všech sil na složky ve směru os X a Z
  2. suma složek v jednotlivých směrech:

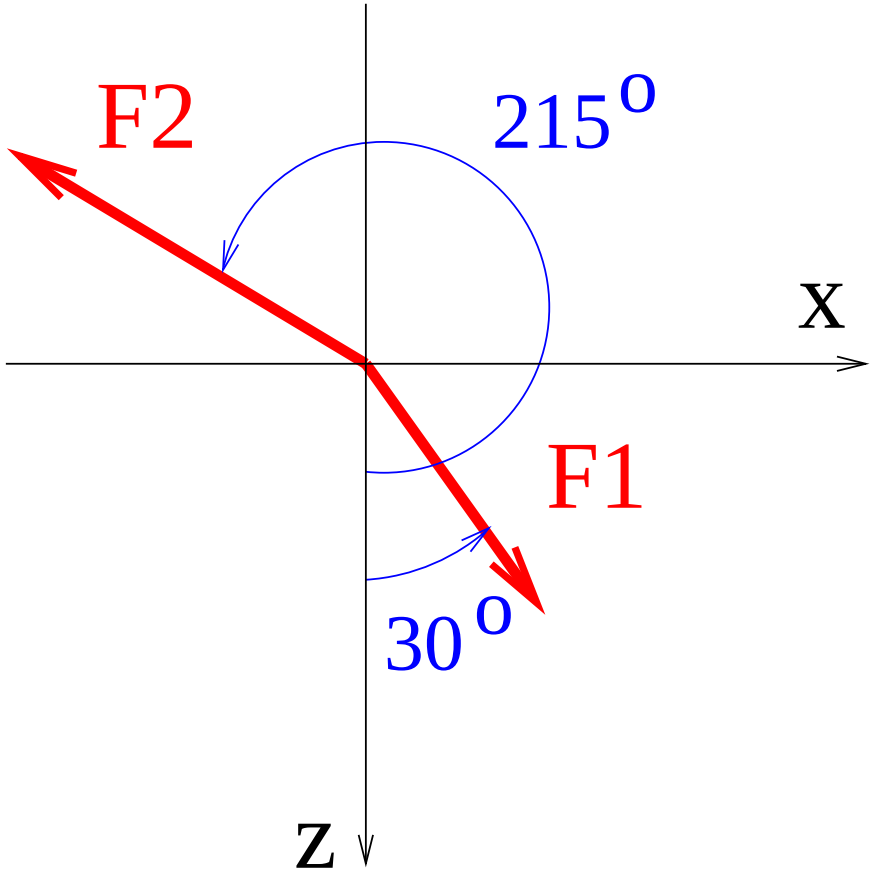
     $P_x = \sum_{i=1}^{n} F_{x,i}, \qquad P_z = \sum_{i=1}^{n} F_{z,i}$
  3. Určíme výslednici a její úhel od osy z:

     $P = \sqrt{P_x^2 + P_z^2}, \qquad \cos(\alpha) = \frac{P_z}{P}$

Rovinný svazek sil – příklad (1)

Stanovte směr a velikost výslednice svazku sil:

$F1 = 10\,kN, \quad F2 = 12\,kN.$

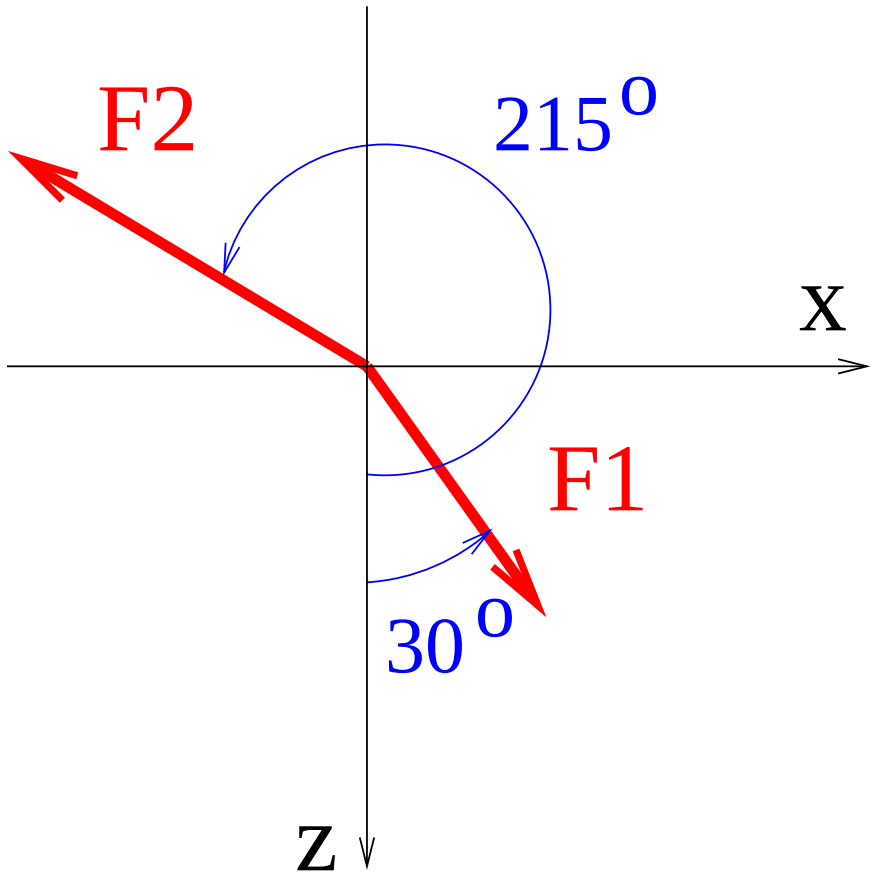


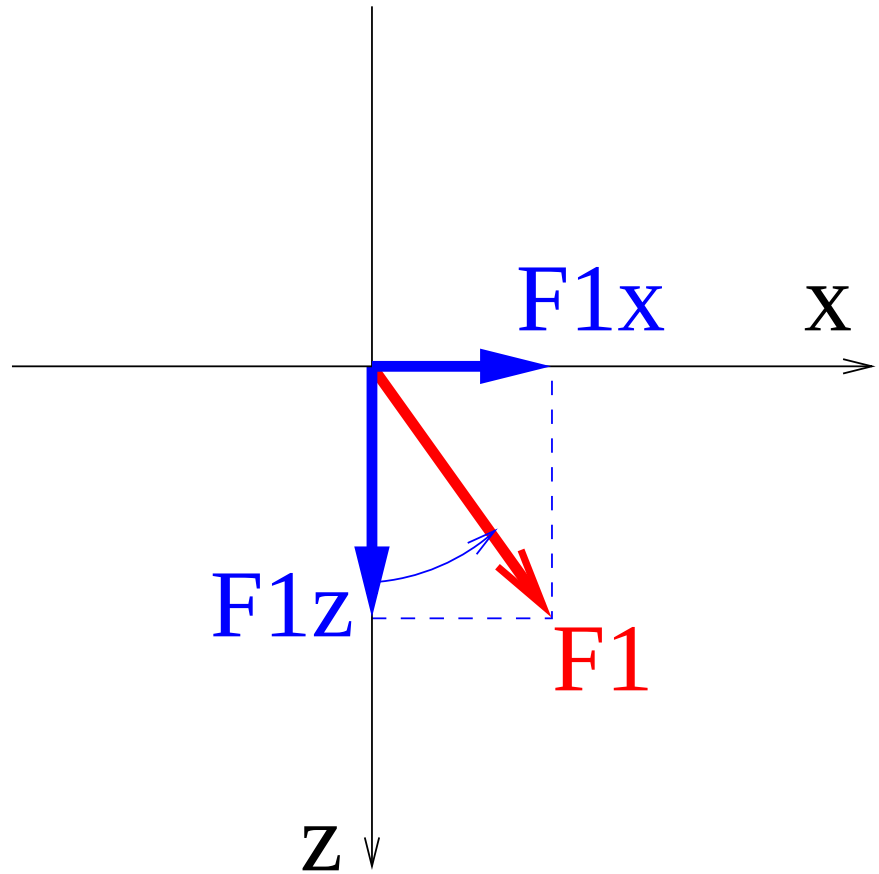
Rovinný svazek sil – příklad (2)

Rozklad síly **F1**:

$F1_x = F1 \times \sin 30^o = 10 \times 0,5 = 5\ kN\ (\rightarrow)$

$F1_z = F1 \times \cos 30^o = 10 \times 0,866 = 8.66\ kN\ (\downarrow)$



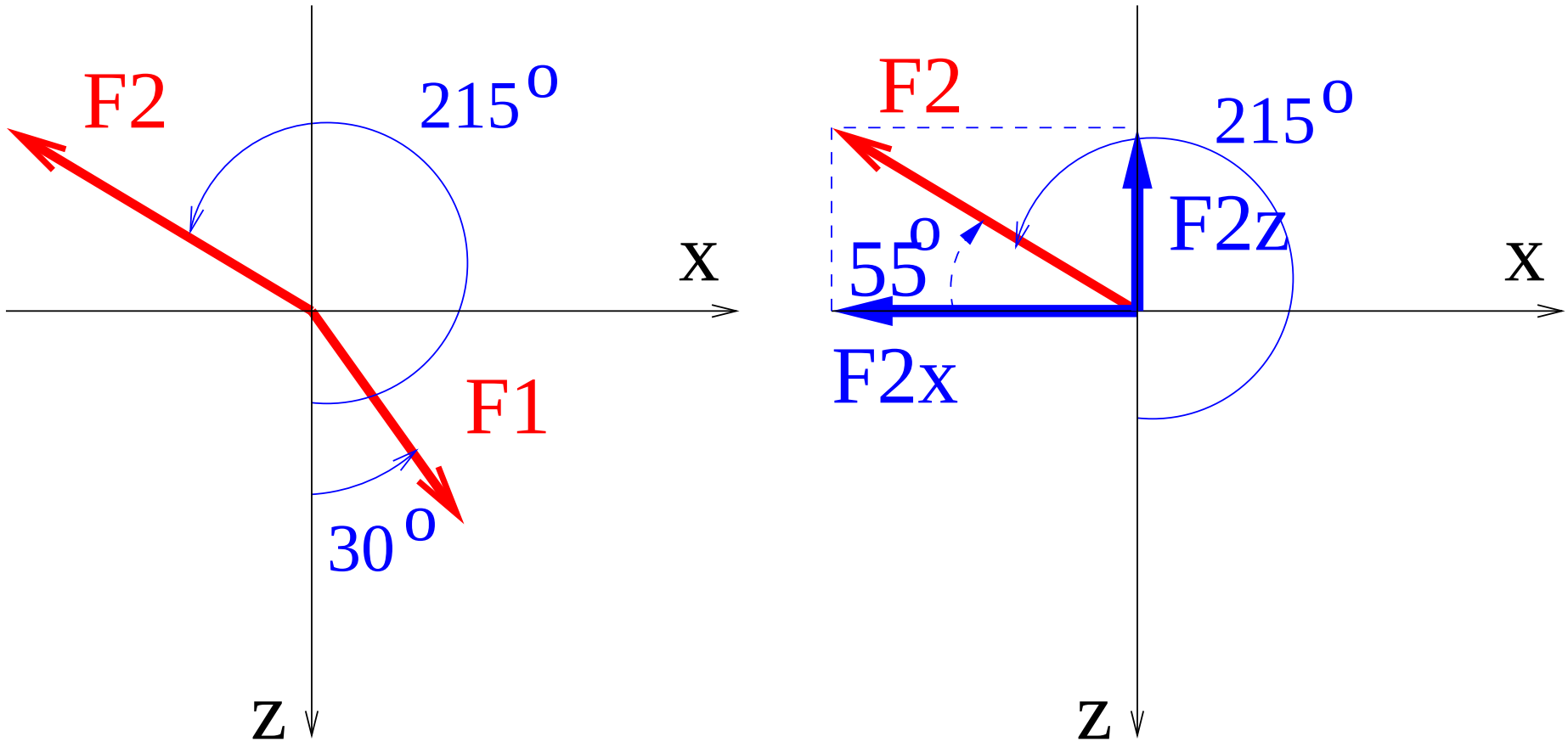


Rovinný svazek sil – příklad (3)

Rozklad síly **F2**:

$$F2_x = -(F2 \times \cos 55^o) = -(20 \times 0,574) = -6,89\ kN\ (\leftarrow)$$

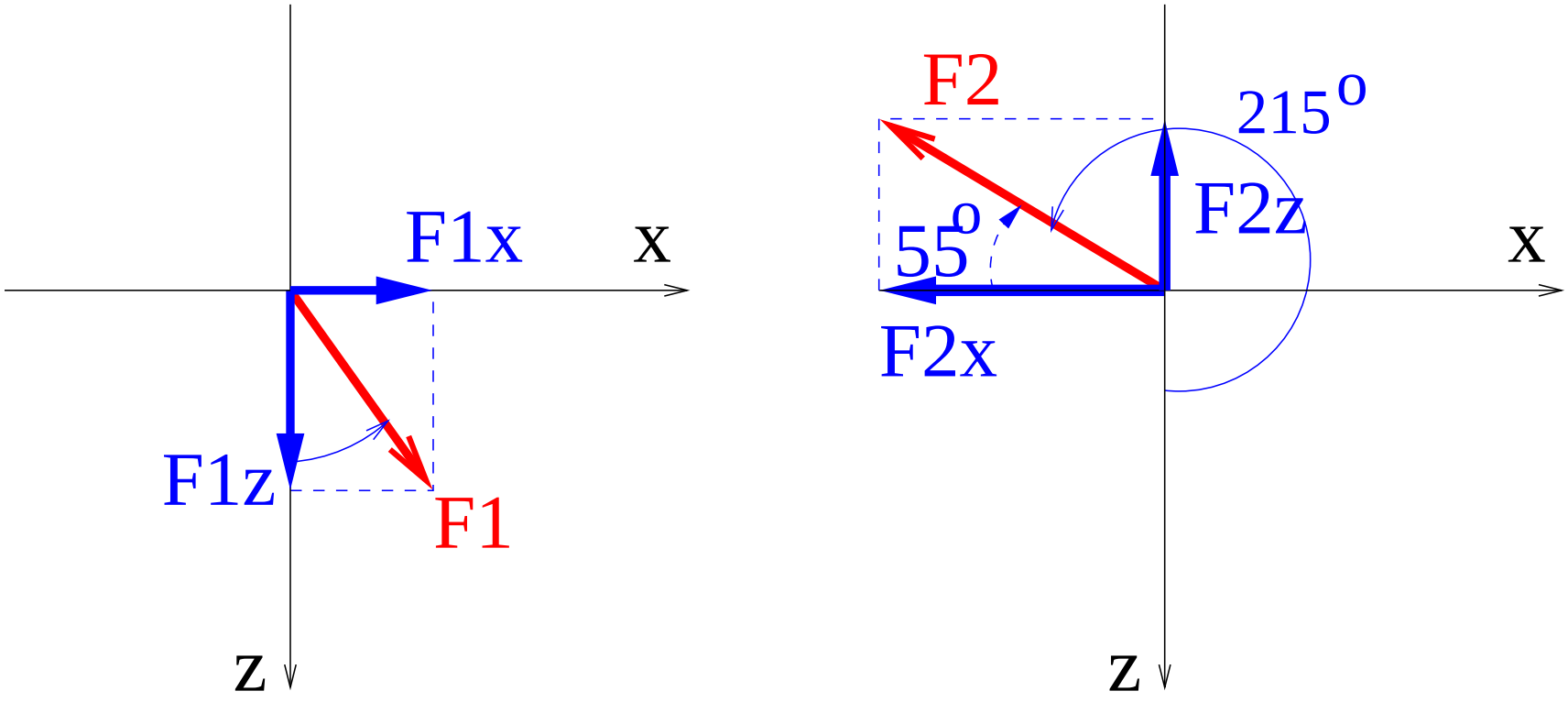
$$F2_z = -(F2 \times \sin 55^o) = -(12 \times 0,819) = -9,83\ kN\ (\uparrow)$$



Rovinný svazek sil – příklad (4)

Výslednice P_x sil **ve směru osy x**:

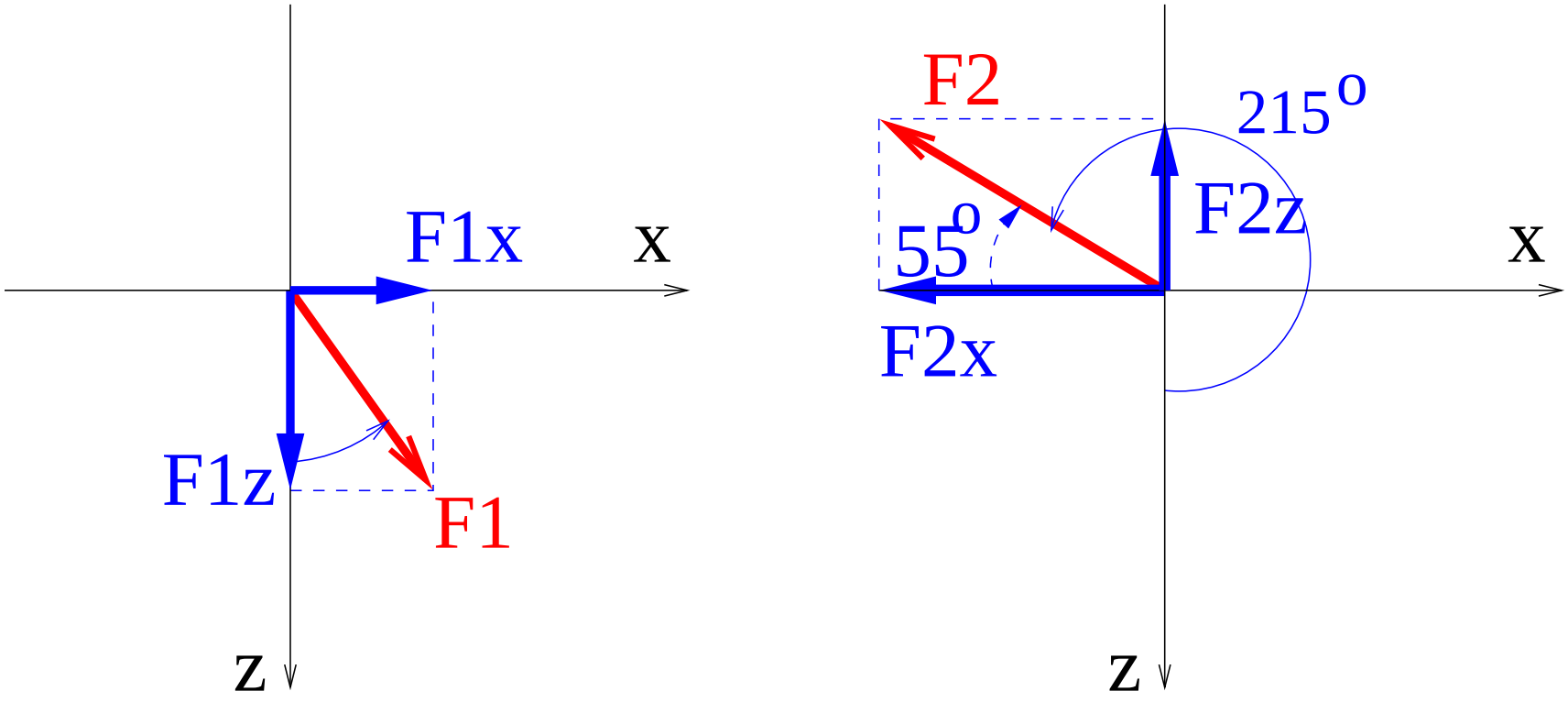
$$P_x = \sum_{i=1}^{n} F_{i,x} = F1_x + F2_x = 5,0 - 6,89 = -1,89\ kN$$
$$P_x = 1,89\ kN\ (\leftarrow)$$



Rovinný svazek sil – příklad (5)

Výslednice P_z sil **ve směru osy z**:

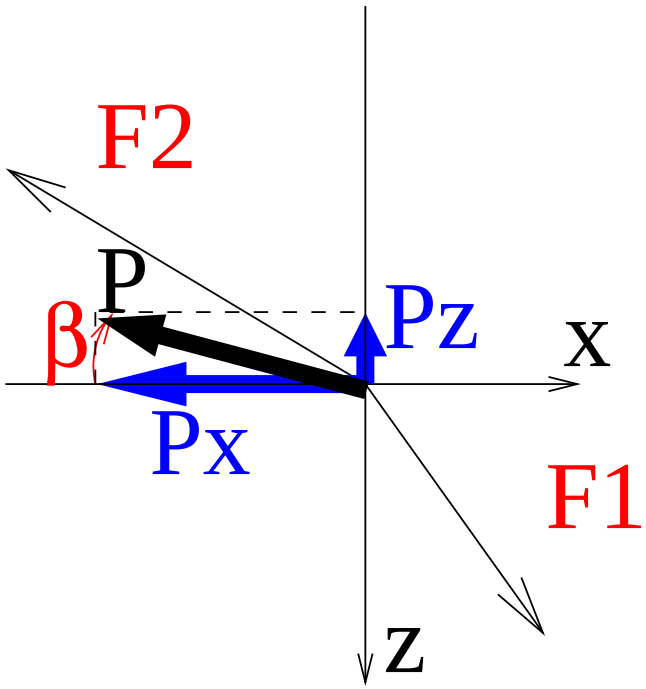
$$P_z = \sum_{i=1}^{n} F_{i,z} = F1_z + F2_z = 8,66 - 9,83 = -1,17\ kN$$
$$P_z = 1,17\ kN\ (\uparrow)$$



Rovinný svazek sil – příklad (6)

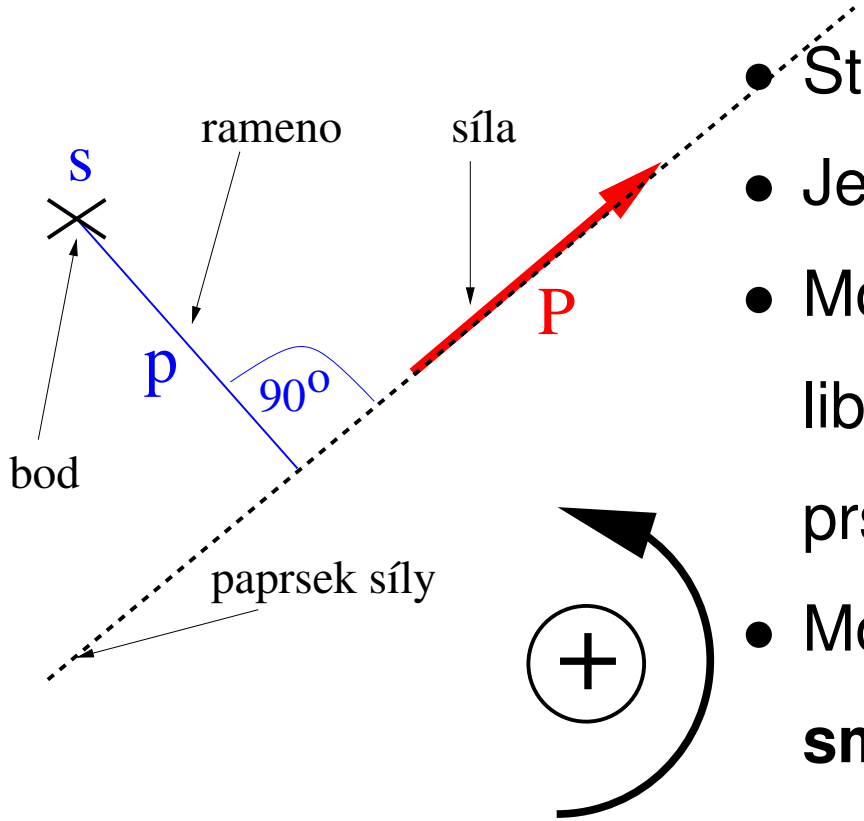
Výslednice P:

$$P = \sqrt{Px^2 + Pz^2} = \sqrt{(-1,89)^2 + (1,17)^2} = 2,22\,kN\ (\nwarrow)$$



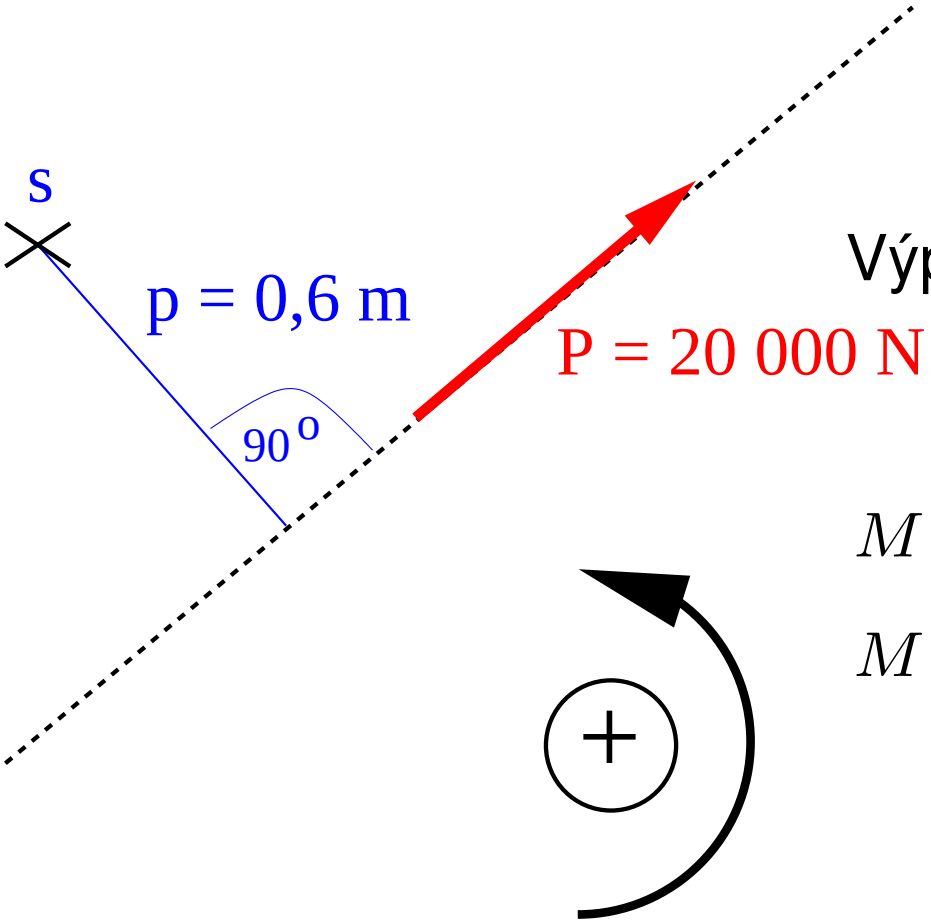
$$\sin\beta = \frac{Pz}{P} = \frac{1,17}{1,90} \Rightarrow \beta = 38,0^o$$

Statický moment síly k bodu (1)



- Stanovíme: $|M| = |P|\ |p|$
- Jednotka: [N m]
- Moment se nemění, pokud se síla libovolně posunuje po svém paprsku.
- Moment je kladný, otáčí-li **proti směru** hodinových ručiček.

Statický moment síly k bodu (2)



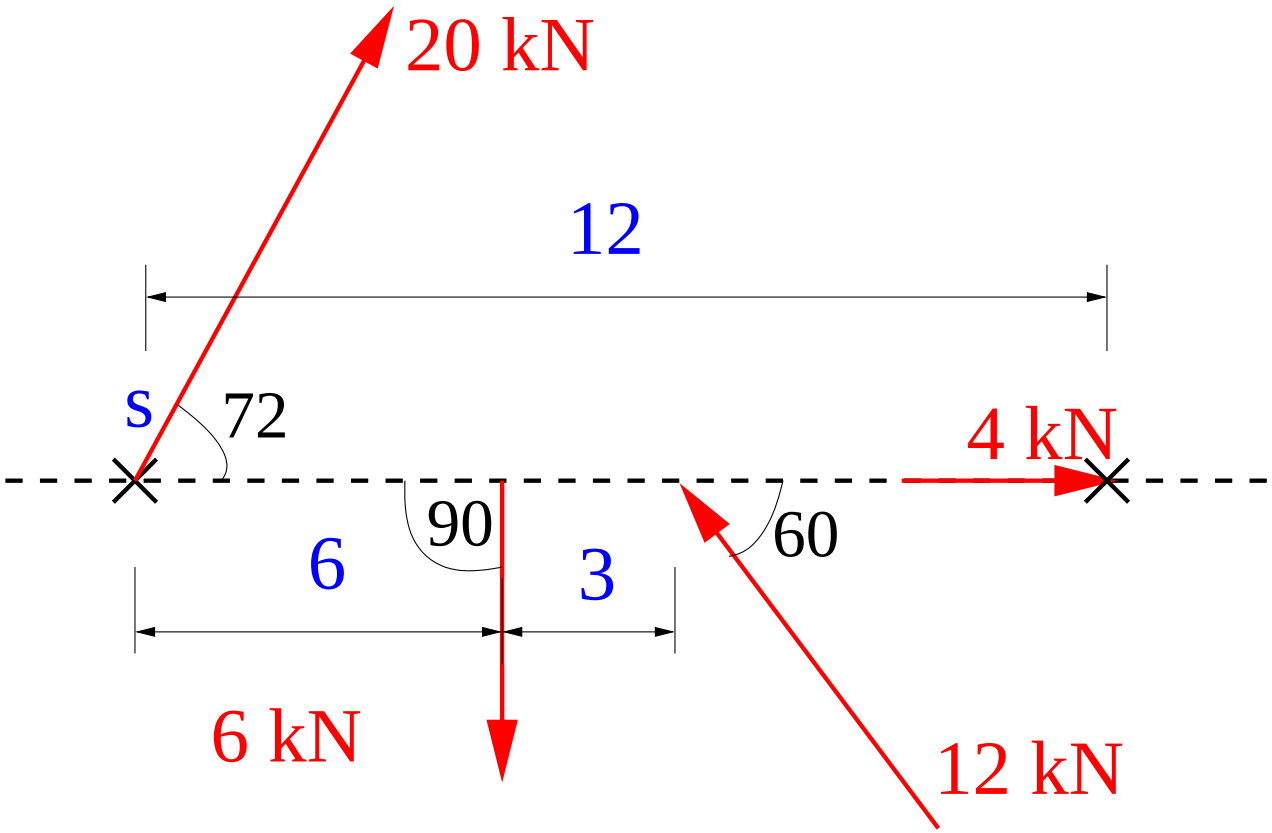
Výpočet velikosti momentu:

$$M = P \times p$$

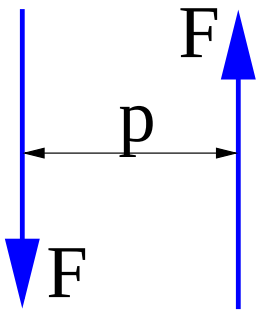
$$M = 20000 \times 0,6 = 12\,000 Nm$$

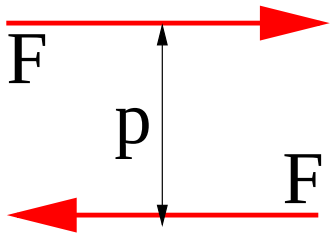
Statický moment síly k bodu (3)

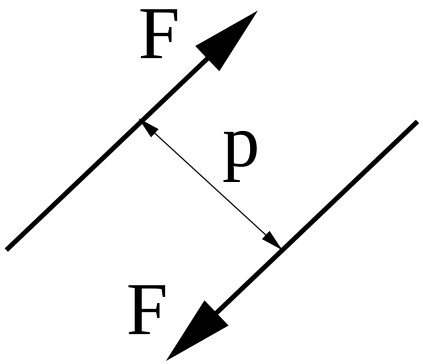
Stanovte výsledný moment sil k bodu **s** (úhly jsou ve stupních):



Dvojice sil



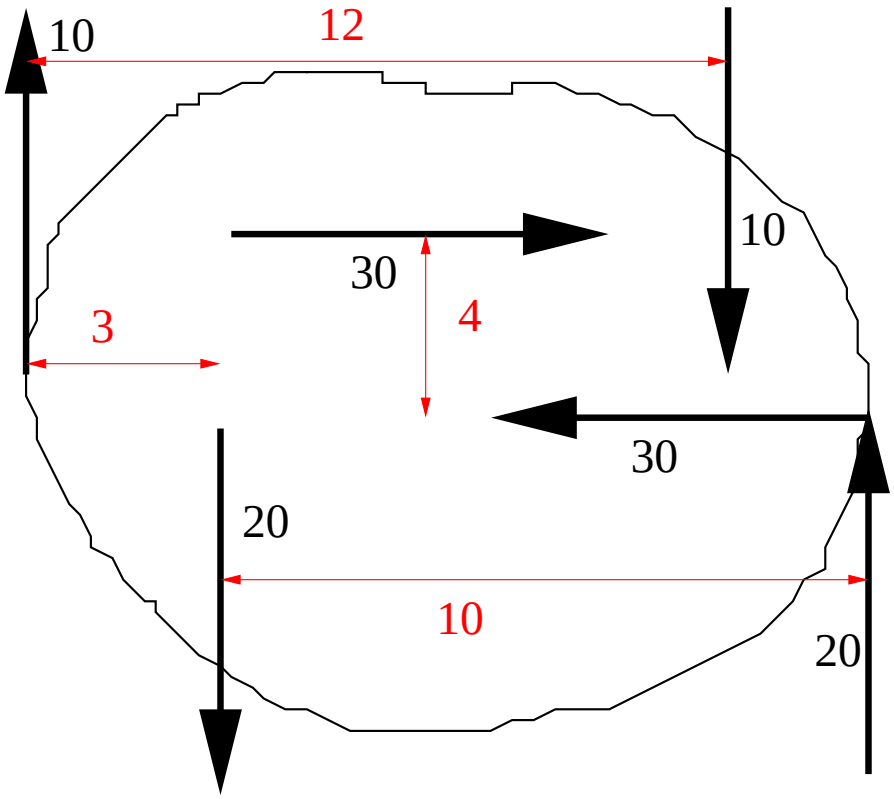




- ,,Dvojice rovnoběžných sil stejné velikosti, ale opačné orientace“
- Vždy vyvolává moment M
- Stanovíme: $|M| = |F|\ |p|$
- Jednotka: [N m]
- Otáčením dvojice sil se moment nemění.
- Výslednice více dvojic sil je jejich algebraickým součtem.
- Moment dvojice sil je **stejný ke všem bodům tělesa.**

Dvojice sil

Stanovte výsledný moment dvojic sil na obrázku.



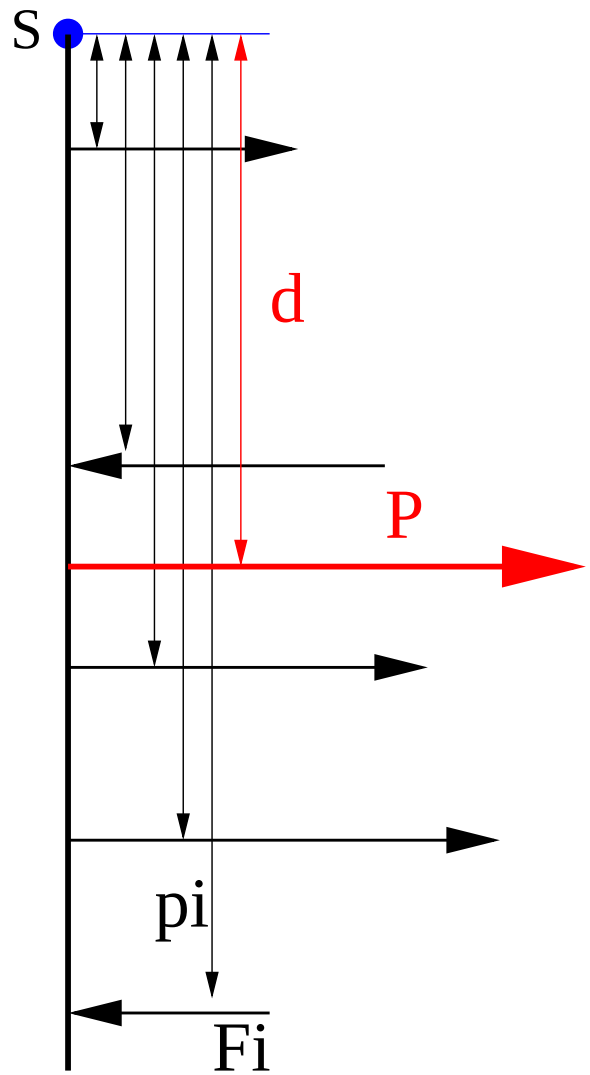
Varignonova momentová věta

Výsledný moment soustavy sil k momentovému středu s je roven součtu momentů těchto sil k bodu s plus součtu všech osamělých momentů. Lze jej vyjádřit

$$M_d = P_d\, p_d = \sum_{i=1}^{n} F_i\, p_i + \sum_{j=1}^{m} M_j,$$

kde M_j je moment j-té dvojice sil a $P_i\, p_i$ statický moment i-té síly k momentovému středu d.

Rovinná soustava rovnoběžných sil



- Výslednice:

$$P = \sum_{i=1}^{n} F_i$$

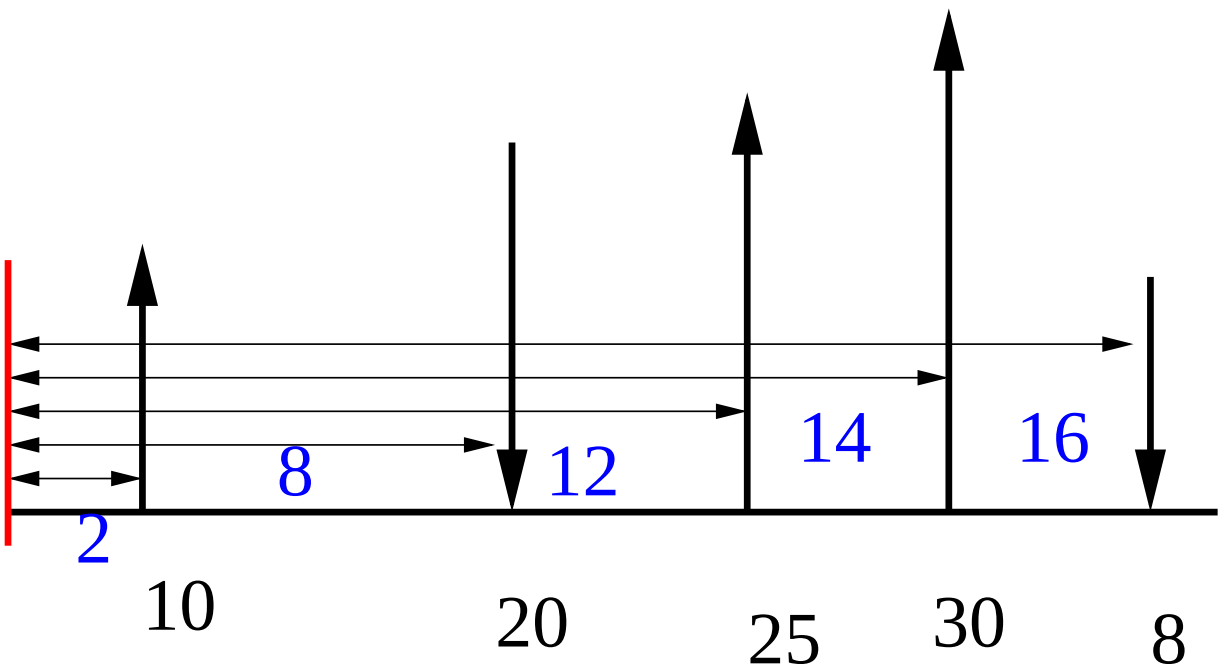
- Výsledný statický moment (k bodu S):

$$M_r = P\,d = \sum_{i=1}^{n} F_i\,p_i$$

- Poloha výslednice (k bodu S):

$$d = \frac{M_r}{P}$$

Stanovte polohu a velikost výslednice



$$M = \sum F_i \times r_i = 2\times10 - 8\times20 + 12\times25 + 14\times30 - 16\times8 = 708\,kNm$$

$$P = \sum F_i = 10 - 20 + 25 + 30 - 8 = 37\,kN\,(\uparrow), \quad d = \frac{M}{P} = \frac{708}{37} = 19,14\,m$$

Podmínky ekvivalence obecné rovinné soustavy sil

Vždy 3, **obvykle** ve složení:

$$
\begin{aligned}
R_x &= \sum_{i=1}^{n} P_{i,x} \\
R_z &= \sum_{i=1}^{n} P_{i,z} \\
M_s &= \sum_{i=1}^{n} (P_{i,x}\, p_{i,x} + P_{i,z}\, p_{i,z}) + \sum_{j=1}^{m} M_j
\end{aligned}
$$

Tedy, výsledný účinek soustavy sil můžeme vyjádřit pomocí tří hodnot: složek výslednice sil P_x a P_z a pomocí momentu M_s.

Podmínky rovnováhy obecné rovinné soustavy sil

Vždy 3, **obvykle** ve složení:

$$\sum_{i=1}^{n} P_{i,x} = 0$$
$$\sum_{i=1}^{n} P_{i,z} = 0$$
$$\sum_{j=1}^{m} M_{j,s} = 0$$

Momenty k libovolnému momentovému středu s zahrnují jak účinky sil $P_{i,x}$ a $P_{i,z}$, tak případné osamělé momenty M_k.

Je možné sestavit také 2 podmínky momentové a 1 silovou, nebo 3 momentové.

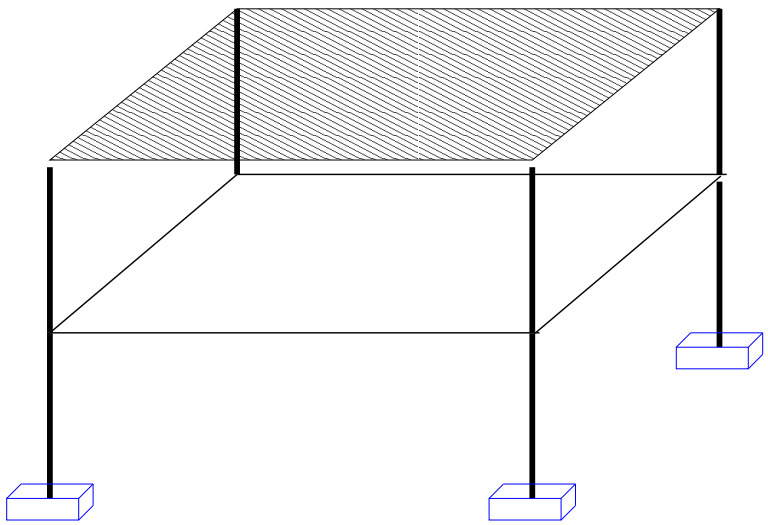
Otázky na příště

Prosím, jako kontrolu, že jste látku pochopili, mi **do pátku** na e-mail (`jiri.brozovsky@vsb.cz`) napište odpovědi na následující otázky. Jako předmět e-mailu uveďte **„ZSM“**:

1. Máme dvojici sil, které mají velikost po 29 kN a jsou od sebe vzdáleny 2 m. Jaká bude velikost výsledného momentu?

2. Co to je Varignonova věta? Ve kterých probíraných úlohách byla použita?

Nosné stavební konstrukce



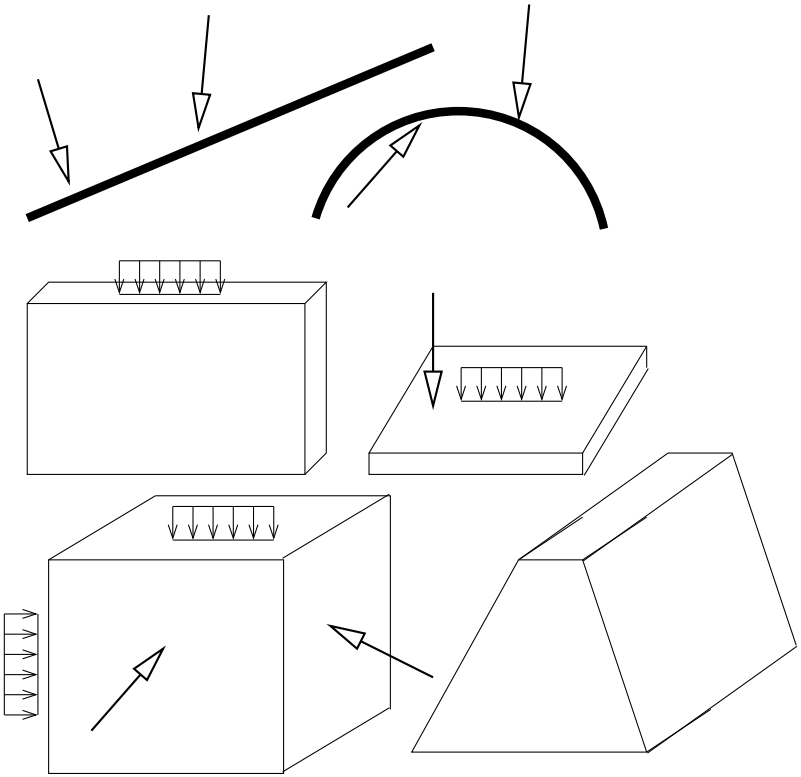
Nosná stavební konstrukce slouží k přenosu **zatížení** do **podloží** (horninového masivu):

- horní stavba,
- základová konstrukce.

Požadavky na konstrukci:

- dostatečná **únosnost**,
- dlouhodobá **použitelnost**.

Typy prvků konstrukcí podle tvaru



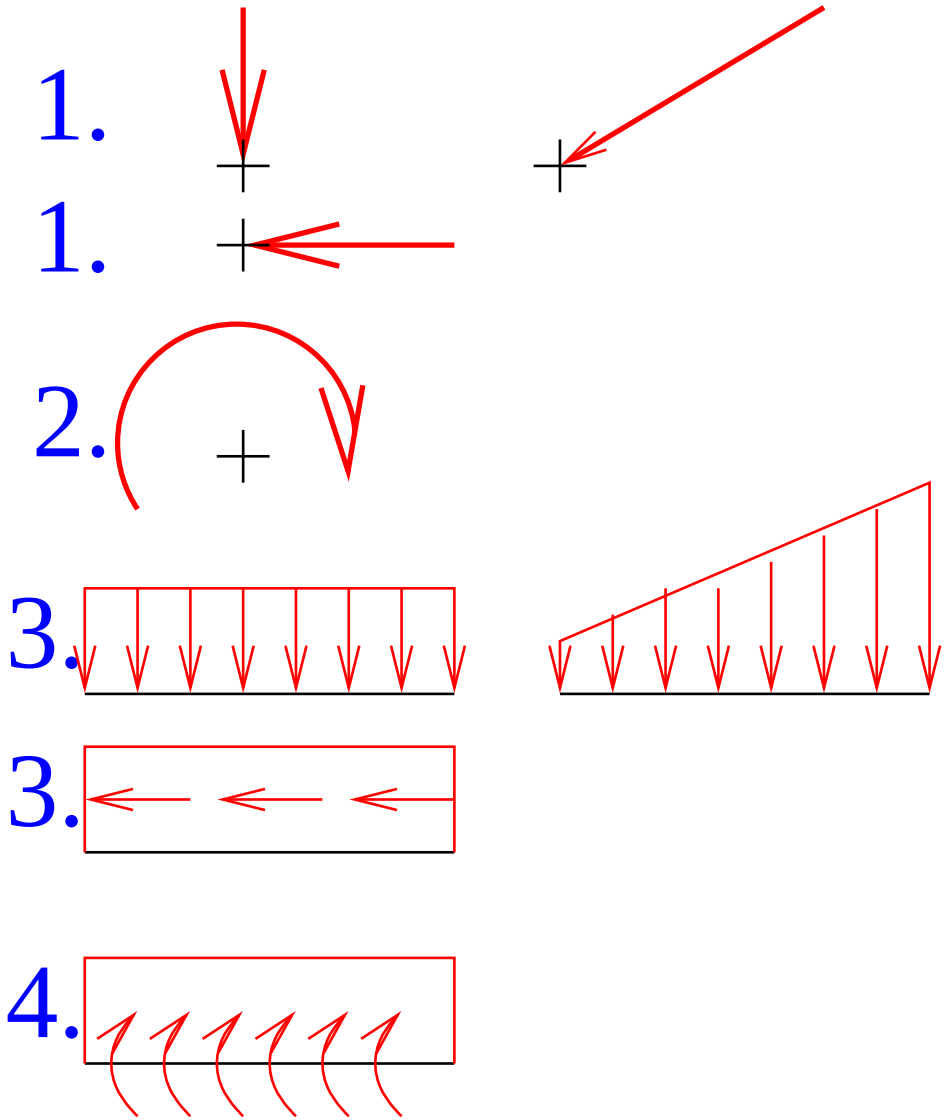
- **prut** - jeden rozměr je výrazně větší než ostatní (idealizace čarou)
- **plošný prvek** (stěna, deska, skořepina) - dva rozměry mnohem větší než třetí (idealizace rovinnou nebo zakřivenou plochou)
- masivní prvek – **těleso** (*idealizace tvaru* není třeba)

Zatížení konstrukce: charakter zatížení

- Silové: osamělé, liniové, plošné a objemové síly

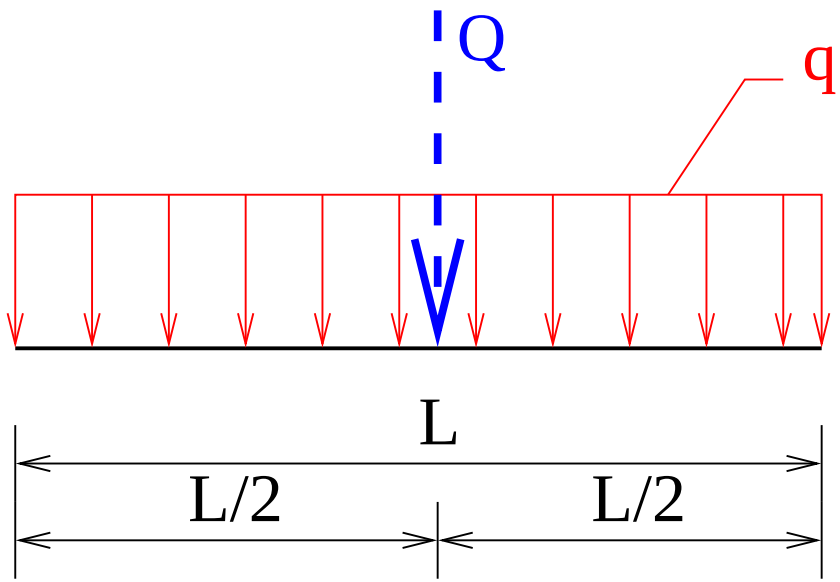
- Deformační: vynucená změna polohy některých částí konstrukce (poklesy podpor, objemové změny, vč. změn v důsledku změny teploty konstrukce)

Idealizované zatížení



1. bodová síla (osamělá síla)
2. bodový moment (osamělý...)
3. liniové silové zatížení
4. liniové momentové zatížení

Výslednice liniového zatížení



Rozměry veličin: Q $[N]$, q $[N/m]$, L $[m]$;

$$Q = L \times q$$

Pozn. 1: výslednice působí v těžišti zatěžovacího obrazce (zde ,,uprostřed“).

Pozn. 2: složitější zatěžovací obrazce probereme příště.

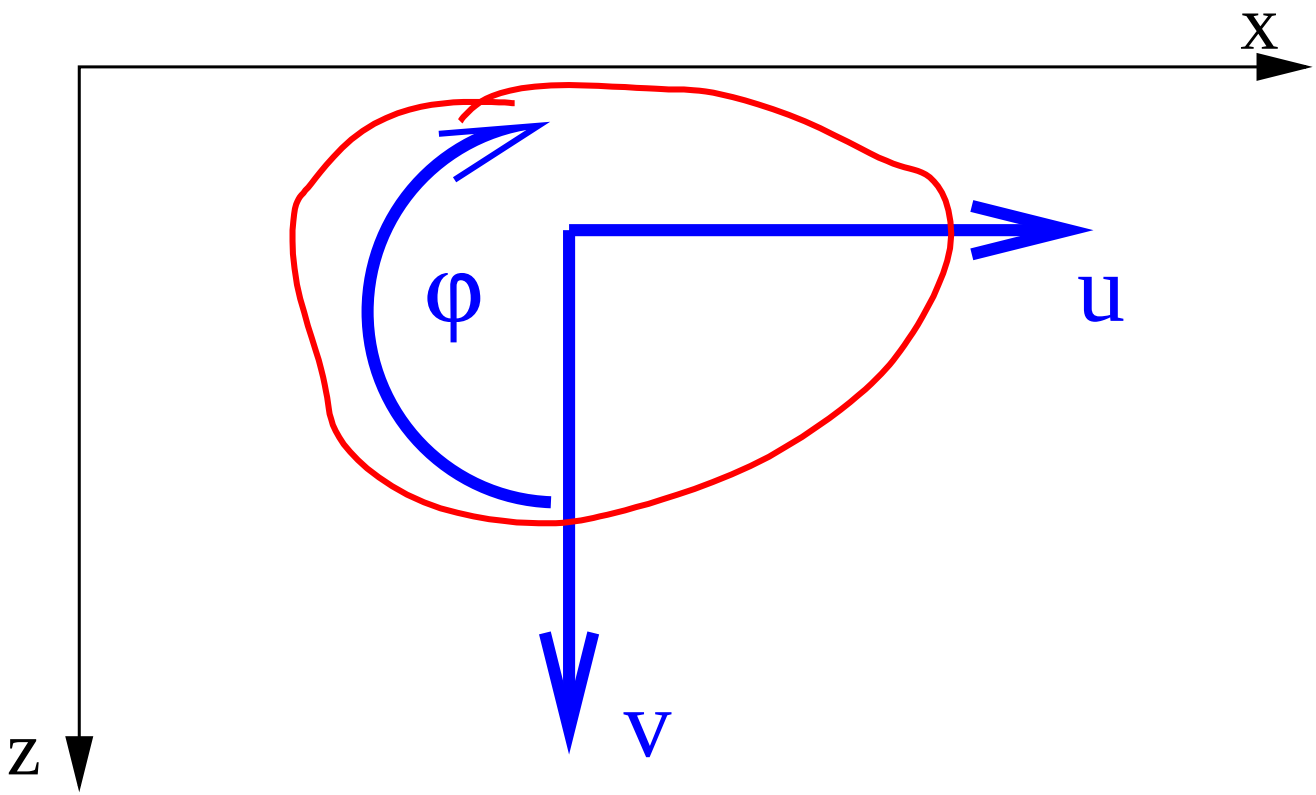
Podepření

Idealizace podepření:

- Vnější vazby – brání **absolutnímu** posunu nebo pootočení tělesa (připojením k dokonale tuhé **podporové konstrukci**)

- Vnitřní vazby brání **vzájemnému posunutí** nebo pootočení těles.

Možnosti pohybu tělesa v rovině

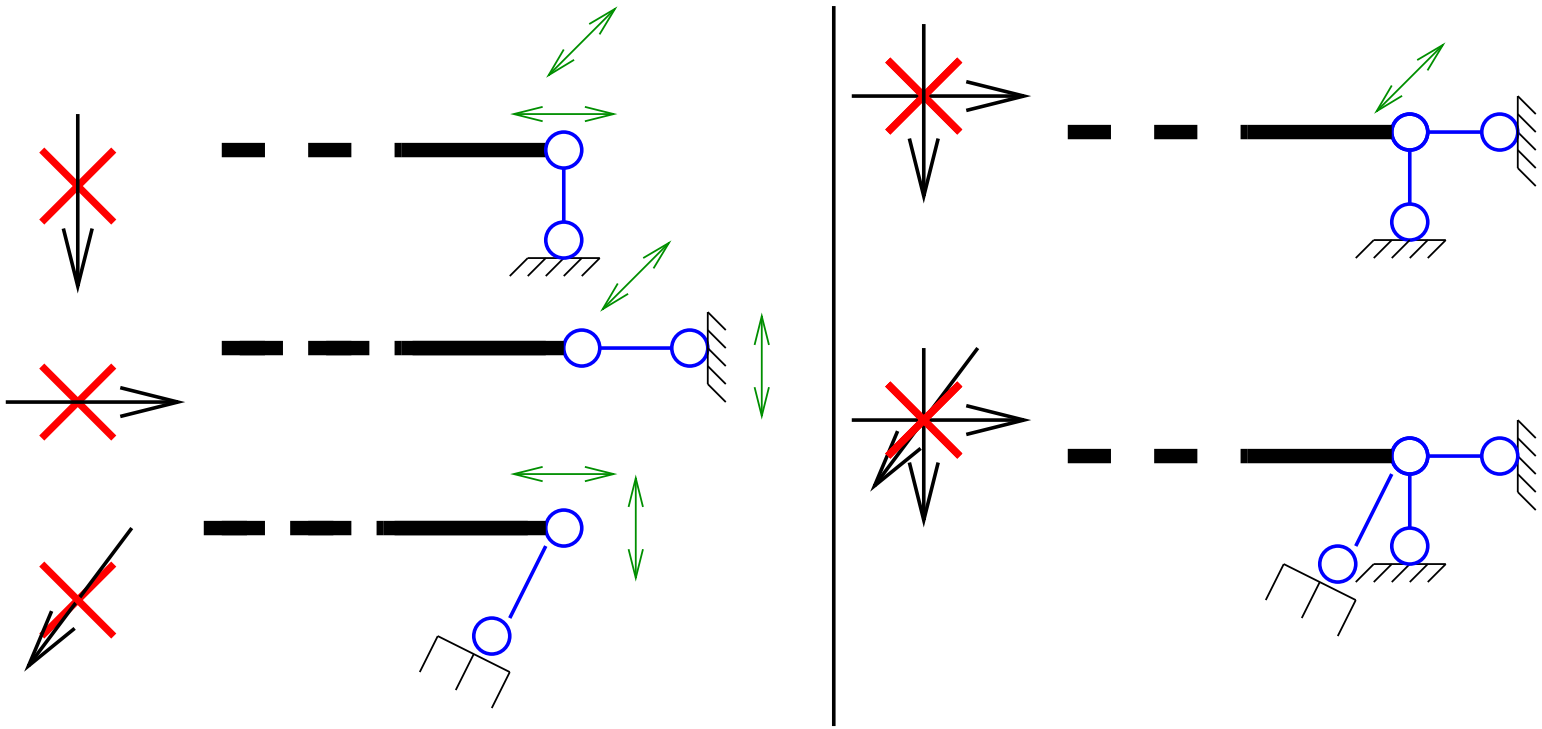


Celkem **3**: posunutí **u**, **v**, pootočení φ.

(V prostoru celkem 6).

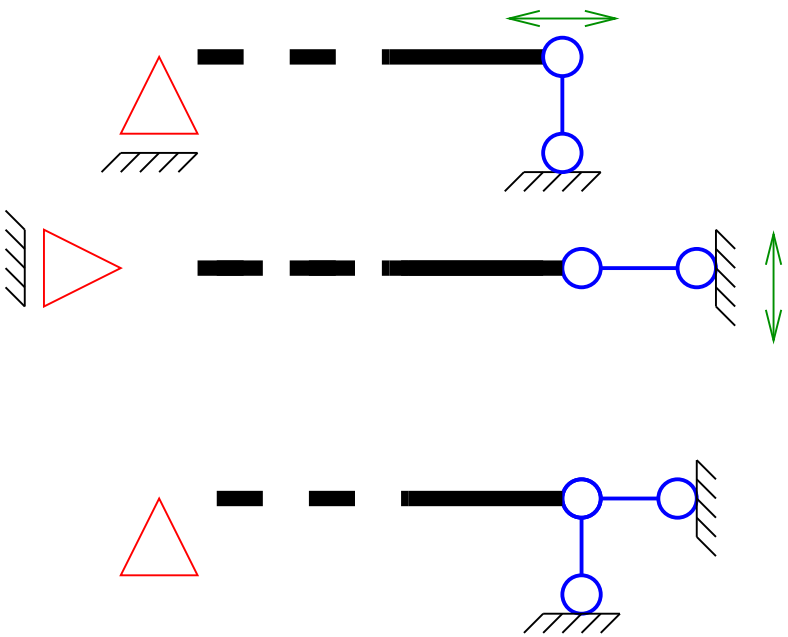
Vnější vazby

Vazba proti **posunu** v daném směru:



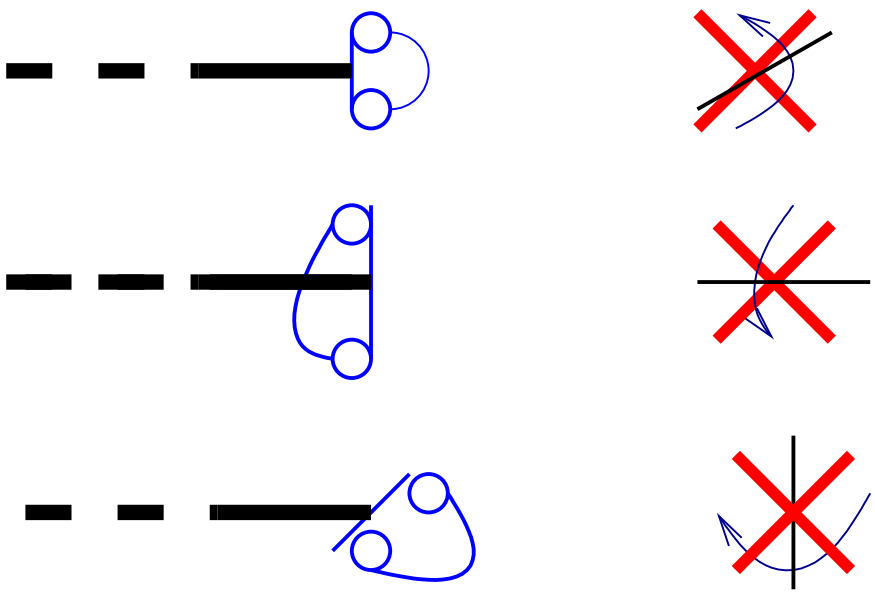
Vnější vazby: alternativní znázornění pro 2D

Vazba proti **posunu** v daném směru (posuvné a pevné klouby):



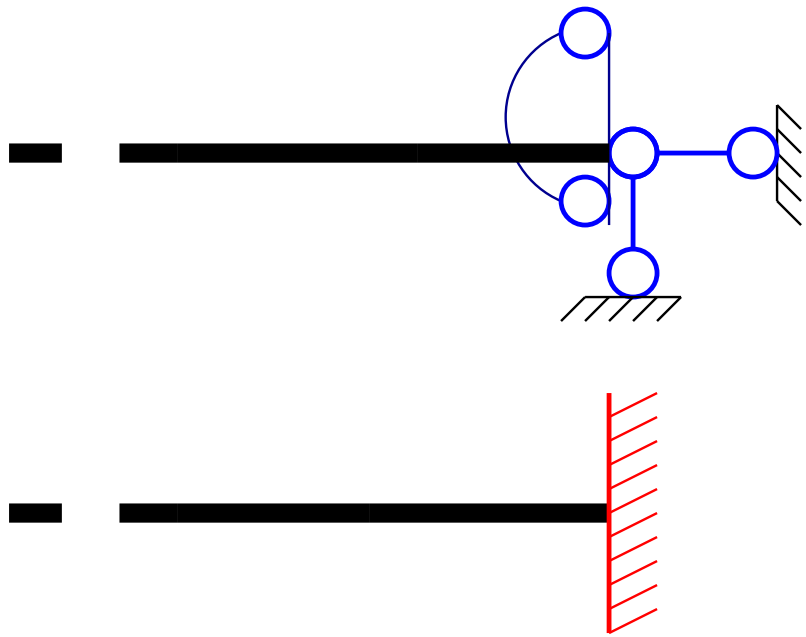
Vnější vazby – pootočení

Vazba proti **pootočení** v daném směru:

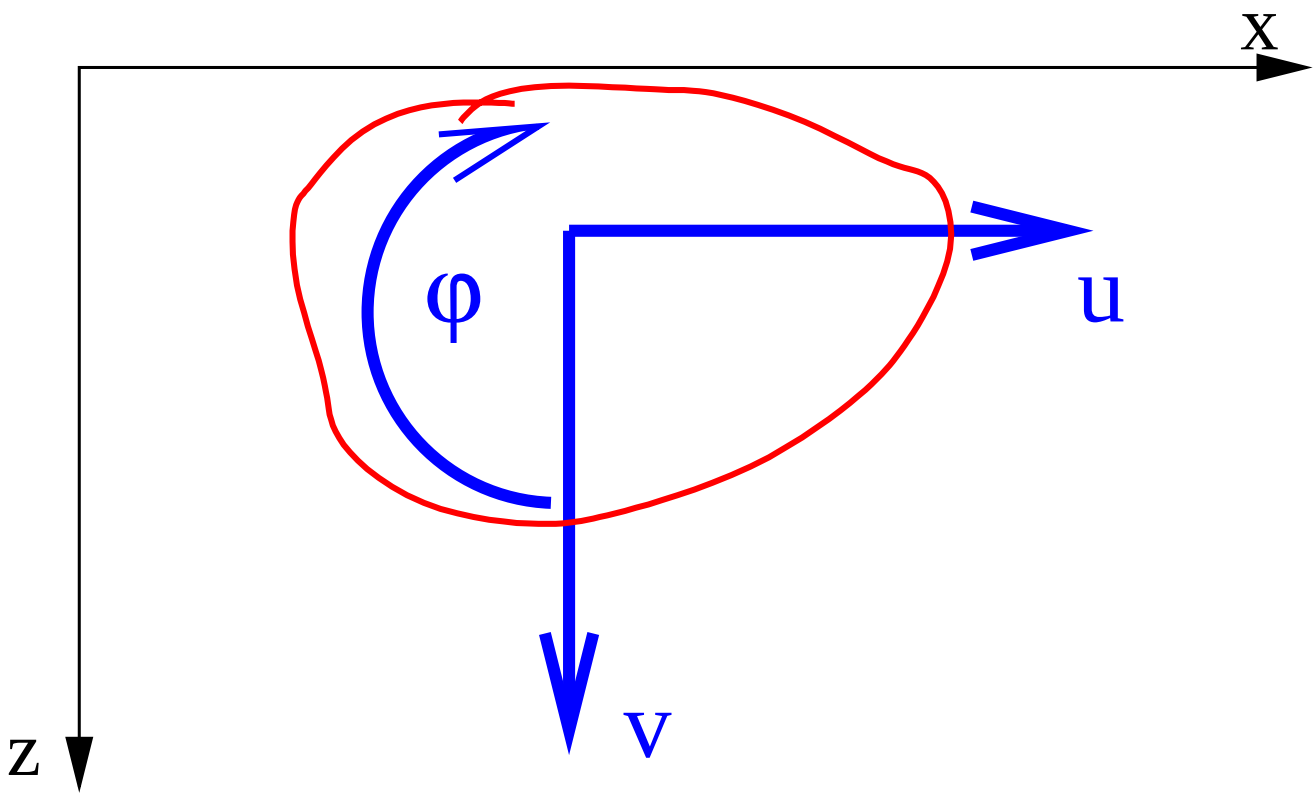


Vnější vazby – vetknutí ve 2D

Je zabráněno všem posunům (v rovině 2) a pootočení daného bodu prutu v rovině:



Možnosti pohybu tělesa v rovině (připomenutí)



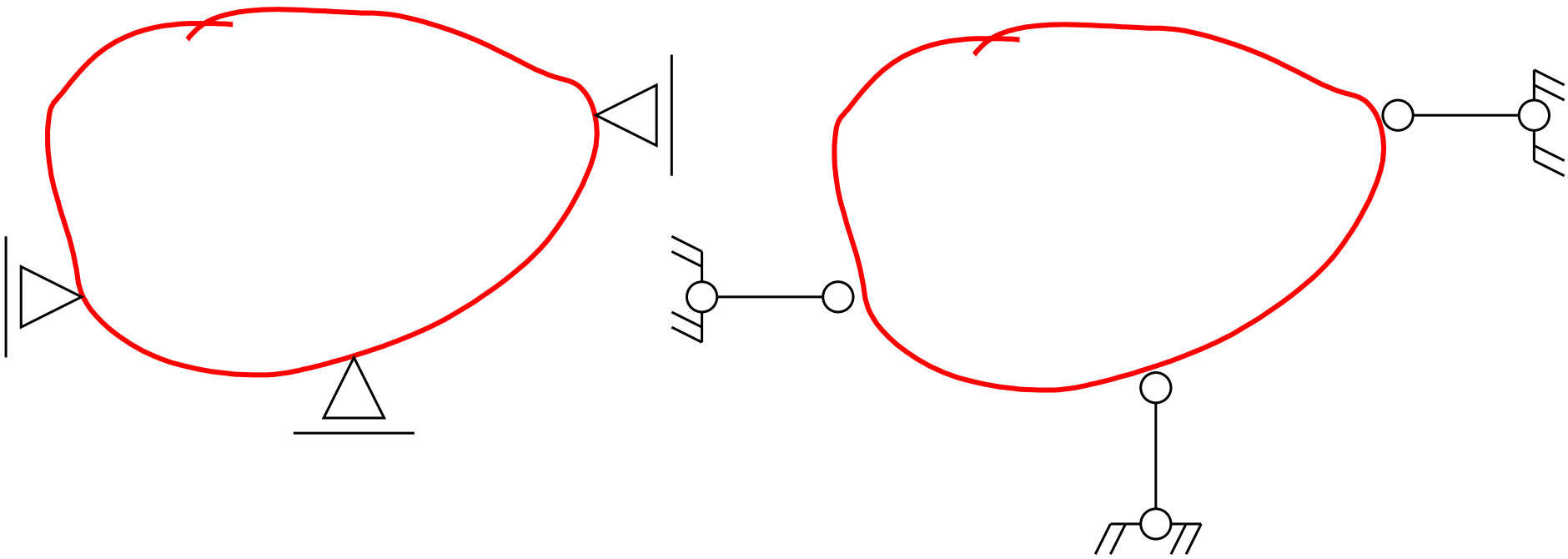
Celkem **3**: posunutí **u**, **v**, pootočení φ (v prostoru celkem 6).

Vazby tělesa (desky) v rovině (1)

Zajištění **nehybnosti tělesa**:

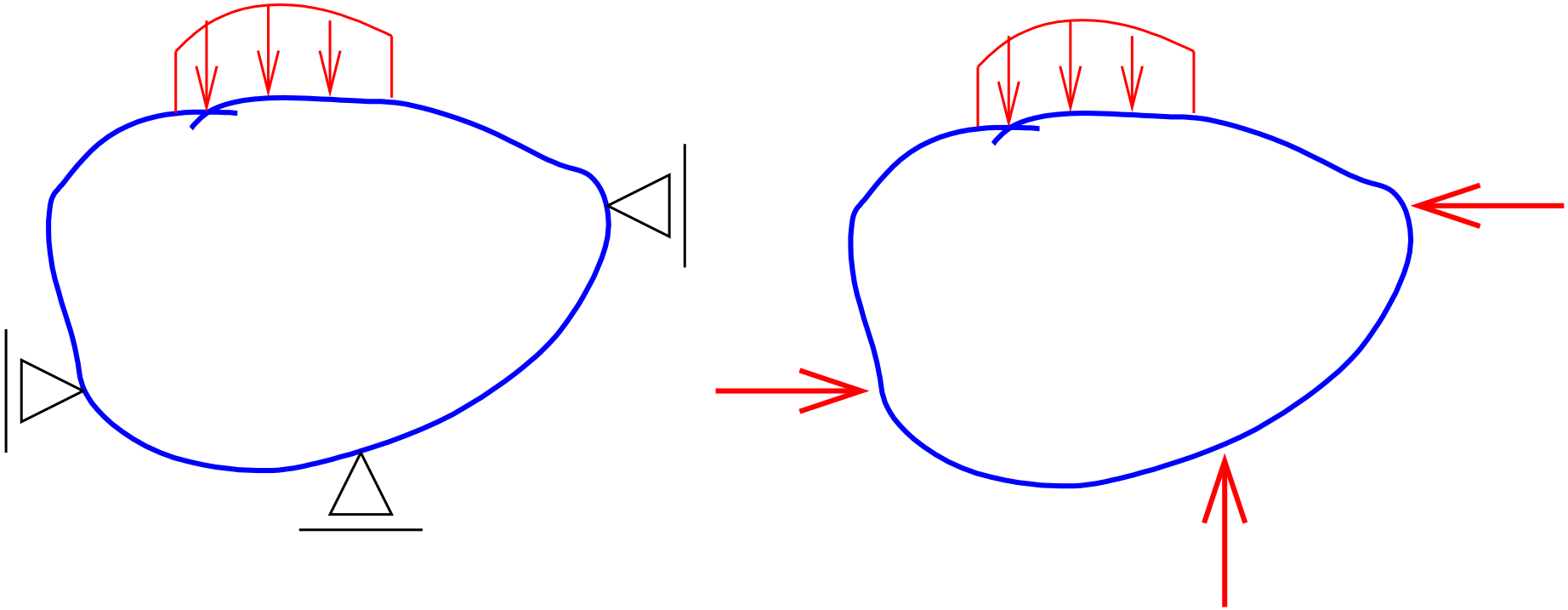
3 možnosti pohybu (stupně volnosti) $\Rightarrow$ **3 vazby**

Například:



Vazby tělesa v rovině (2)

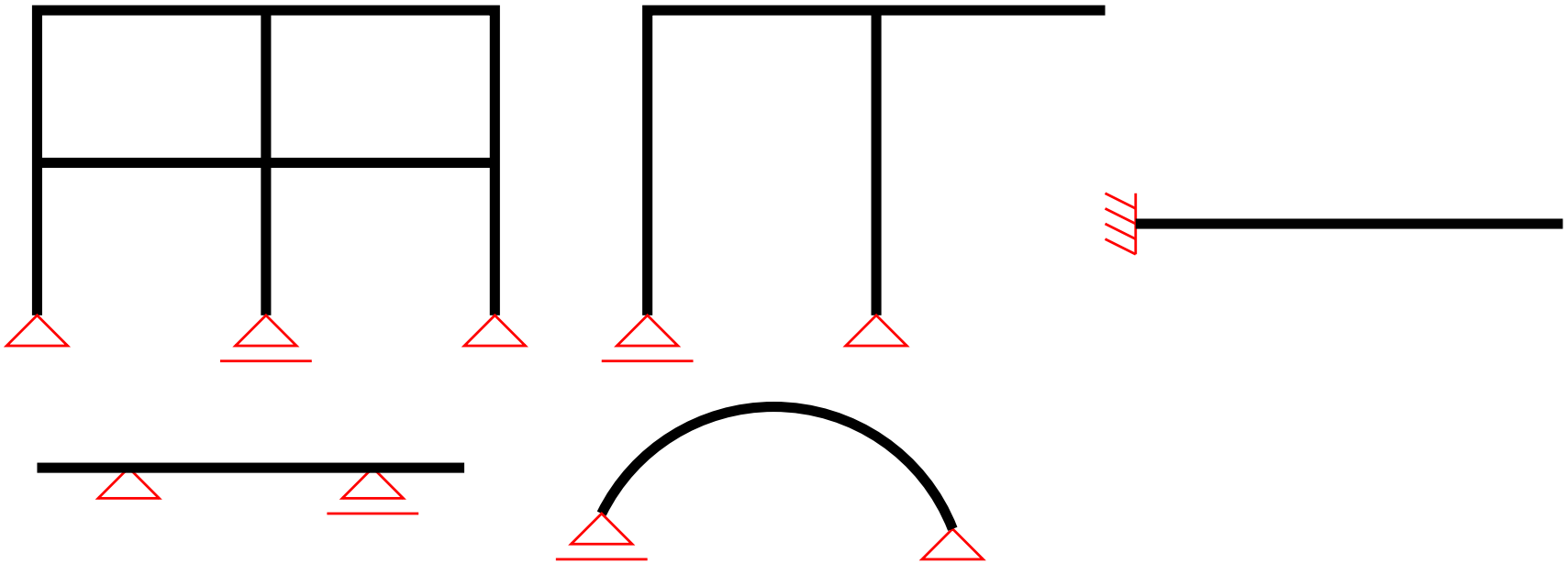
Zatížení tělesa vyvolává **reakce ve vazbách**:



Vazba bránící posunutí $\Rightarrow$ síla.

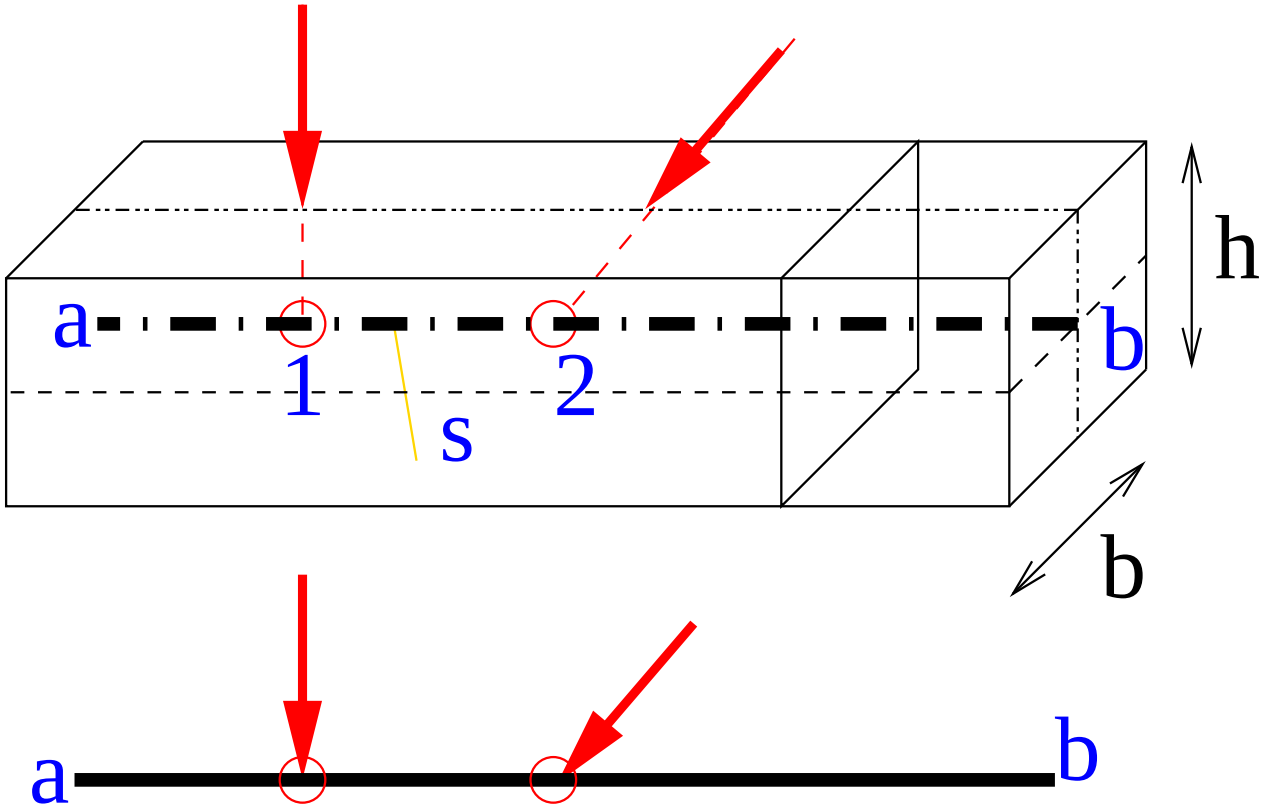
Vazba bránící pootočení $\Rightarrow$ moment.

Prutové konstrukce



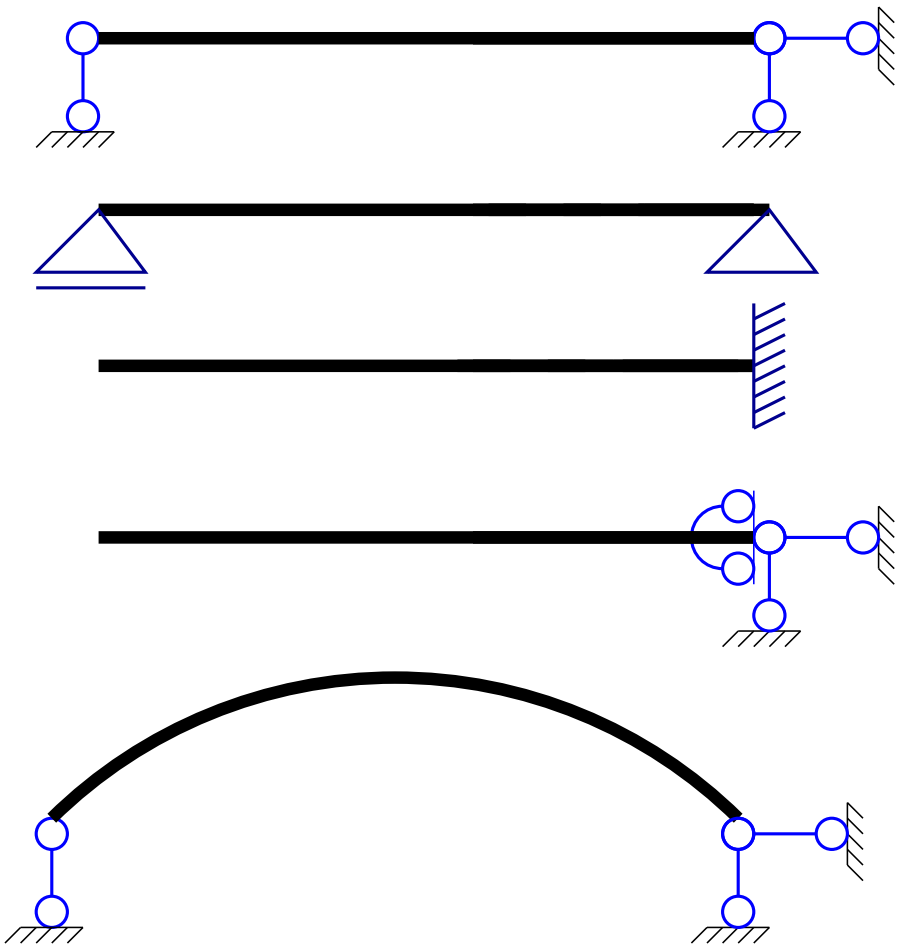
- Nejčastější nosné stavební konstrukce.
- Pro výpočet idealizujeme: řešíme osové jako schéma.
- V tomto semestru: jen staticky určité.

Prut – geometrický popis

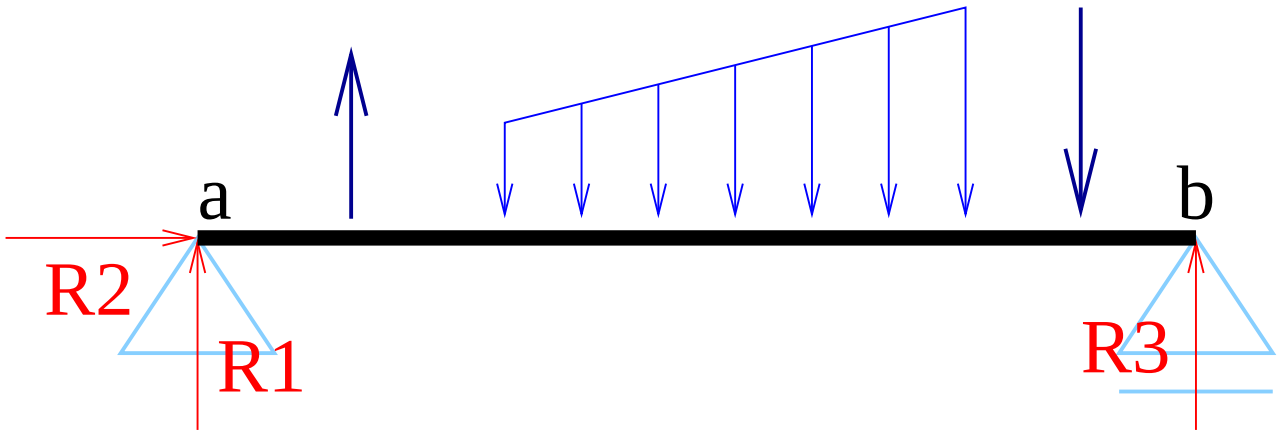


- s - řídící čára (**střednice**, u přímého prutu také **osa prutu**)
- b, h – šířka a výška **průřezu prutu**
- 1, 2 – **působiště sil**

Kinematicky a staticky určité konstrukce



Podmínky rovnováhy uvolněného prutu v rovině



$$\sum_{i=1}^{n} F_{i,x} = 0$$

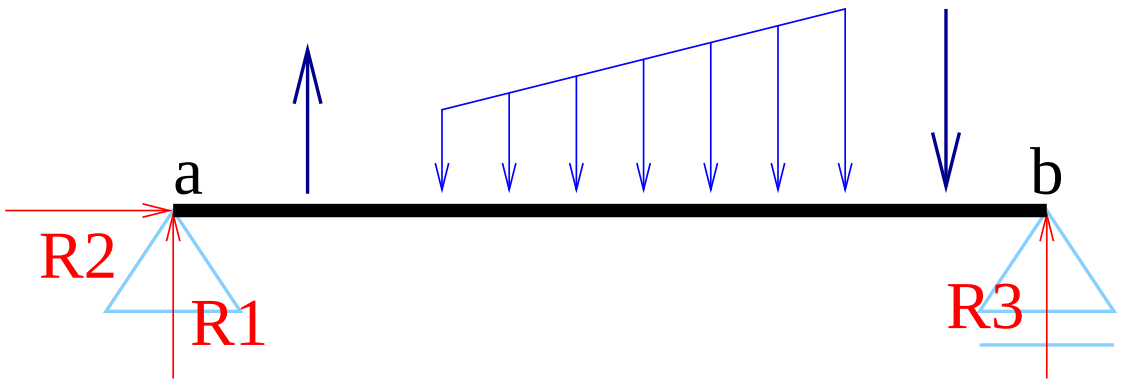
$$\sum_{j=1}^{m} F_{j,z} = 0$$

$$\sum_{k=1}^{g} M_{k,a} = 0$$

Můžeme (zde to bude i lepší) sestavit i 2 momentové a 1 silovou podmínku (musíme mít **vždy 3 nezávislé rovnice**):

$$\sum_{j=1}^{m} F_{j,z} = 0; \quad \sum_{k=1}^{g} M_{k,a} = 0; \quad \sum_{i=1}^{h} M_{k,b} = 0$$

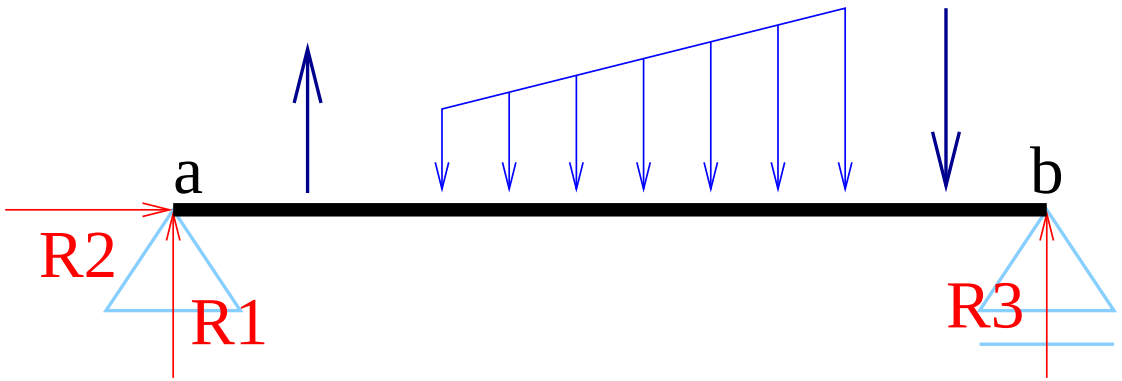
Stanovení reakcí nosníku (1)



- z podmínek rovnováhy ($\sum_{i=1}^{n} F_{i,x} = 0, \quad \sum_{j=1}^{m} F_{j,z} = 0,$ $\sum_{k=1}^{g} M_{k,a} = 0$) vyjádříme neznámé reakce.

- využijeme znalosti výpočtu **výsledného momentu soustavy rovnoběžných sil** a **výslednice přímkové soustavy sil**.

Stanovení reakcí nosníku (2)

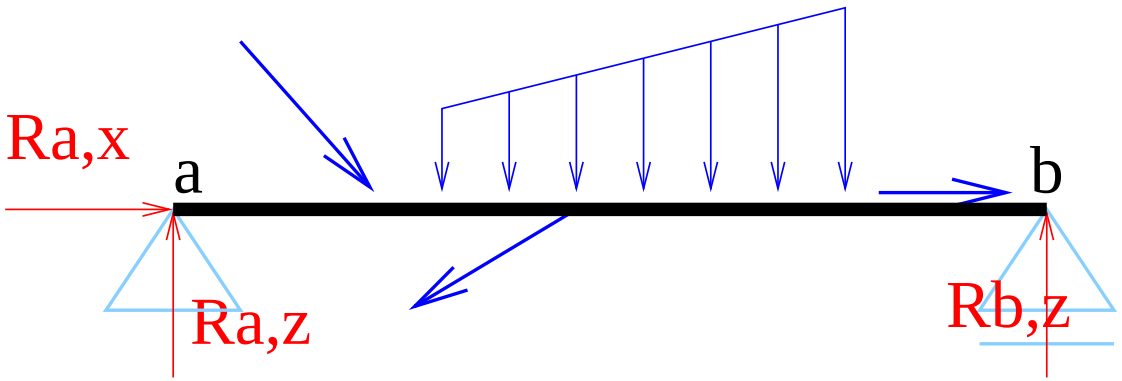


- máme k dispozici vždy tři (3) podmínky rovnováhy, můžeme použít i 2 momentové a 1 silovou, je-li to vhodné.

- momentové podmínky píšeme pro působiště reakcí (reakce v tomto místě z rovnice vypadnou)

Stanovení reakcí nosníku (3)

Obecné zatížení, **prostý nosník**.



$$\Sigma_{i=1}^{n} F_{i,x} = 0 \rightarrow R_{a,x}$$

$$\Sigma_{j=1}^{m} M_{j,a} = 0 \rightarrow R_{b,z},$$

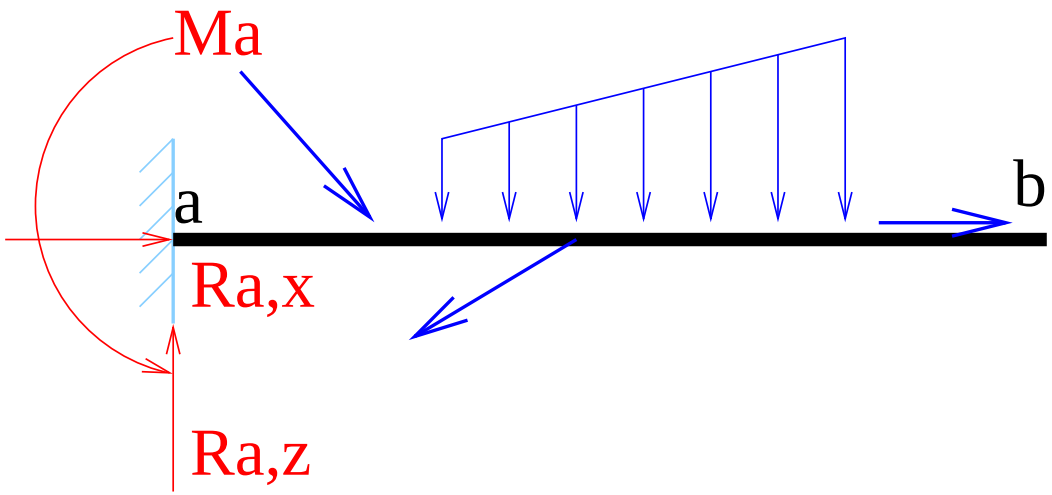
$$\Sigma_{k=1}^{g} M_{k,b} = 0 \rightarrow R_{a,z}$$

Kontrola:

$$\Sigma_{i=1}^{m} F_{i,z} = 0$$

Stanovení reakcí nosníku (4)

Obecné zatížení, **konzola**.

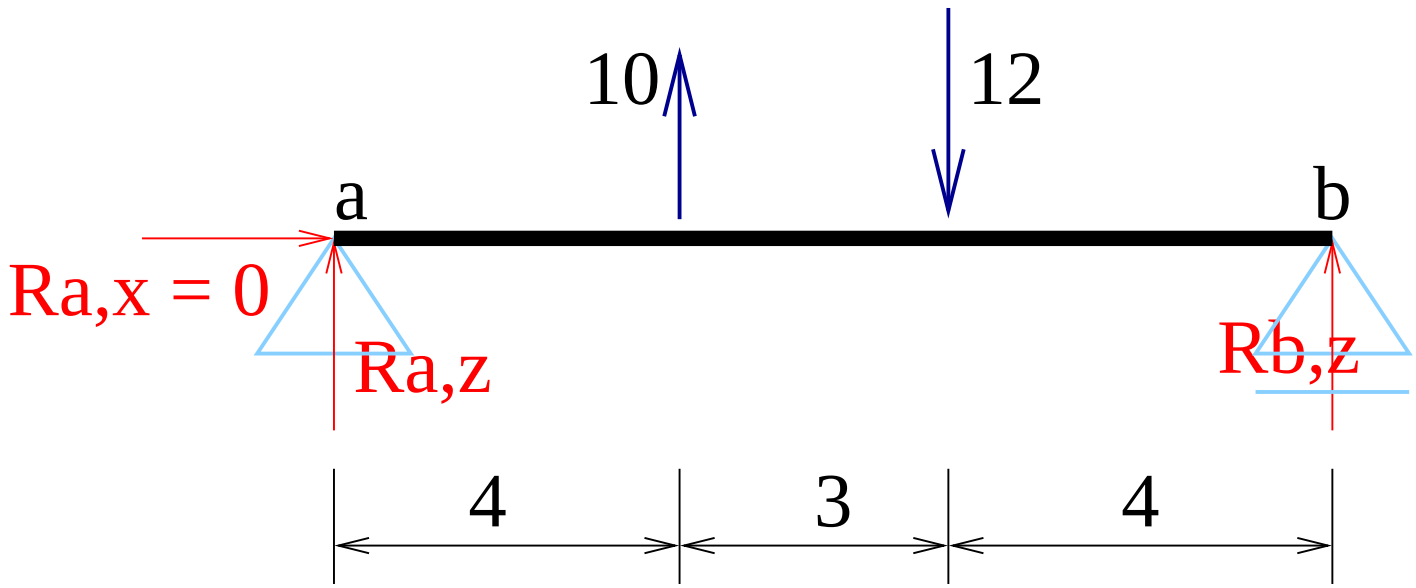


$$\Sigma_{i=1}^{n} F_{i,x} = 0 \rightarrow R_{a,x}$$

$$\Sigma_{i=1}^{m} F_{i,z} = 0 \rightarrow R_{a,z}$$

$$\Sigma_{k=1}^{g} M_{k,a} = 0 \rightarrow M_a$$

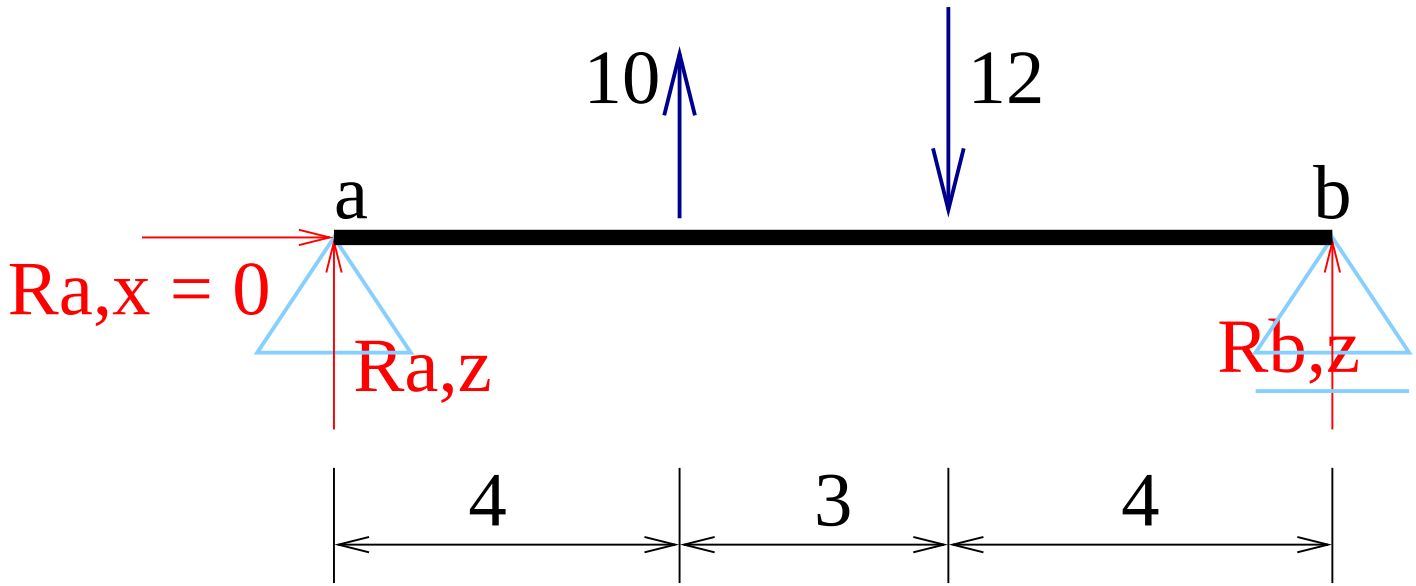
Příklad stanovení reakcí nosníku



Vodorovné reakce (není zde žádné zatížení ve směru X):

$\sum R_{i,x} = 0$: $\quad R_{a,x} + 0 = 0$

Příklad stanovení reakcí nosníku



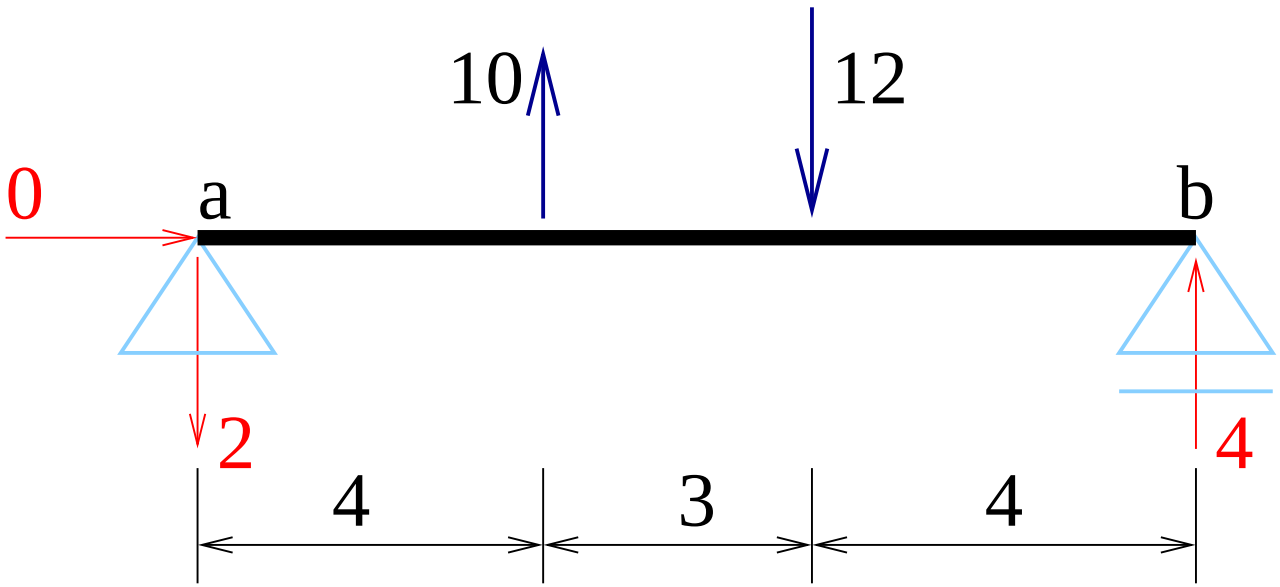
$$\sum M_{i,a} = 0: \quad 4 \times 10 - 7 \times 12 + 11 \times R_{b,z} = 0$$

$$R_{b,z} = \frac{-4 \times 10 + 7 \times 12}{11} = 4kN \uparrow$$

$$\sum M_{k,b} = 0: \quad 11 \times R_{a,z} + 7 \times 10 - 4 \times 12 = 0$$

$$R_{a,z} = \frac{-7 \times 10 + 4 \times 12}{11} = -2kN \downarrow$$

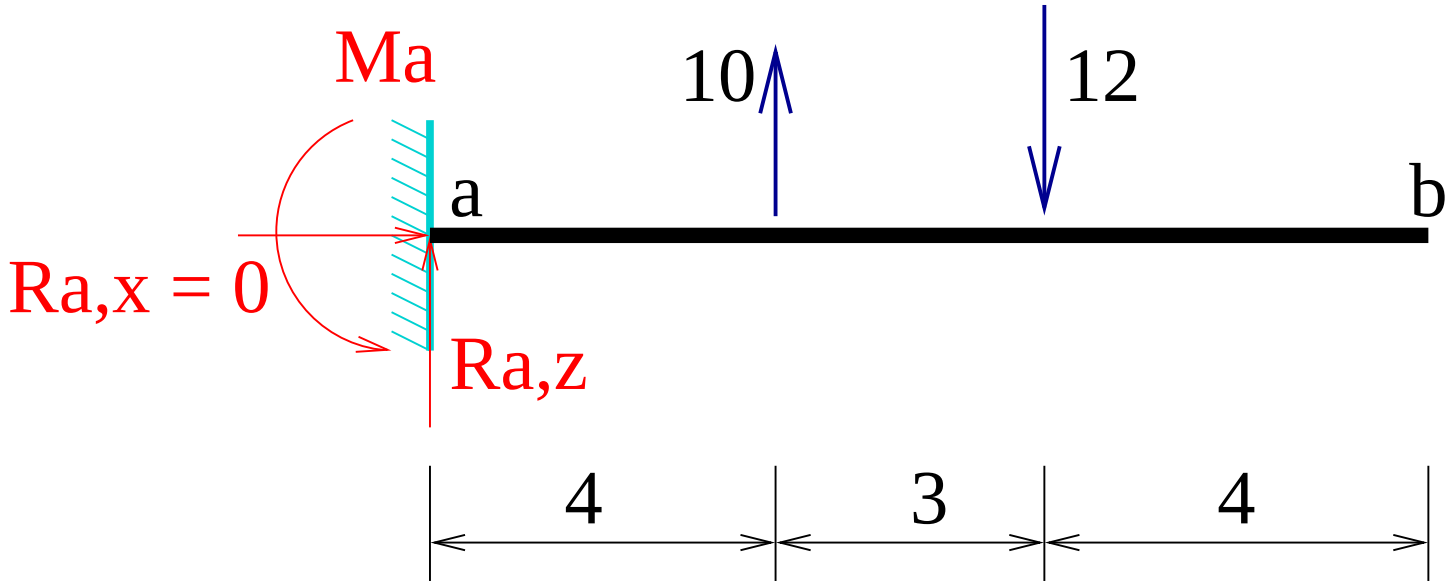
Příklad stanovení reakcí nosníku



Kontrola: $\sum F_{i,z} = 0$:

$R_{a,z} + (10 - 12) + R_{b,z} = 4 + 10 - 12 - 2 = 0 \Rightarrow$ kontrola vyšla!

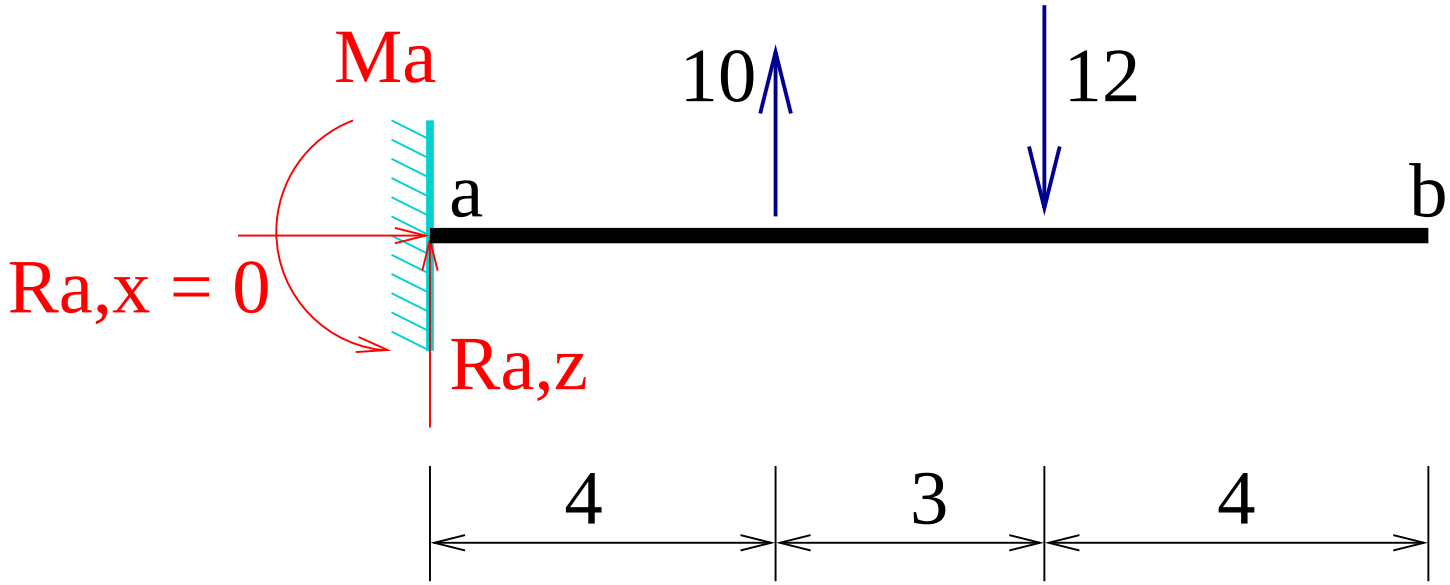
Příklad stanovení reakcí konzoly



Vodorovné reakce (není zde žádné zatížení ve směru X):

$\sum R_{i,x} = 0$: $\quad R_{a,x} + 0 = 0$

Příklad stanovení reakcí konzoly



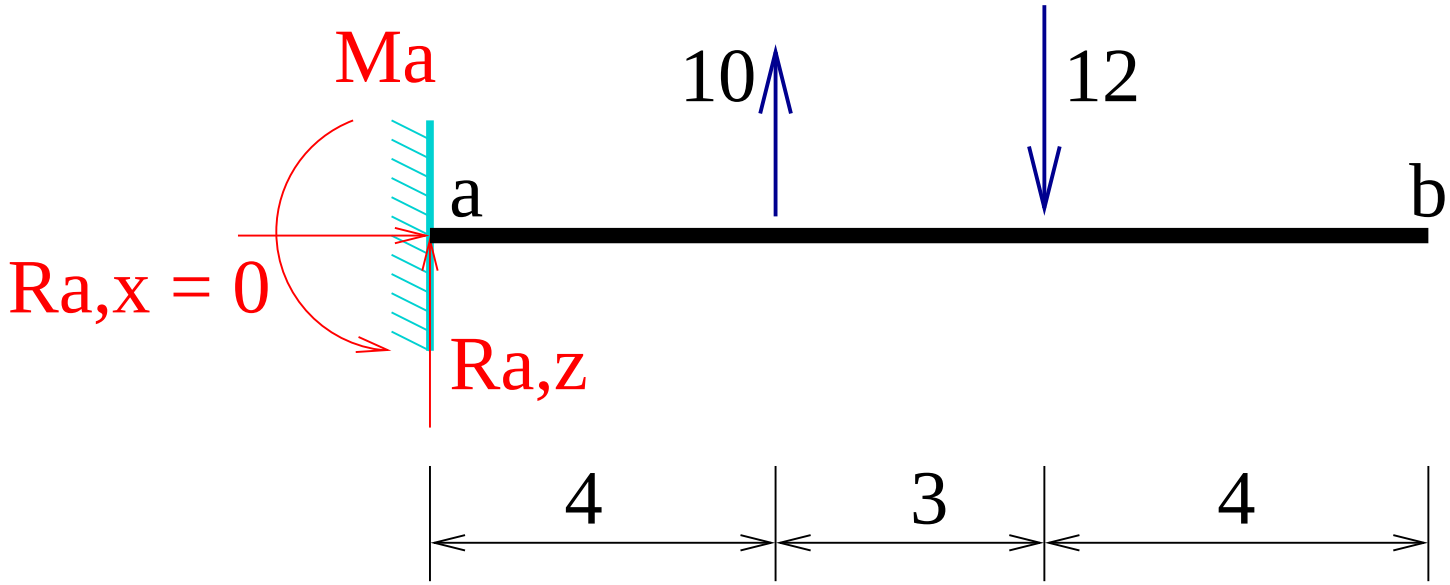
$$\sum M_{i,a} = 0: \qquad M_a + 4 \times 10 - 7 \times 12 = 0$$

$$M_a = -4 \times 10 + 7 \times 12 = 44 kNm$$

$$\sum F_{i,z} = R_{a,z} + 10 - 12 = 0$$

$$R_{a,z} = -10 + 12 = 2kN(\uparrow)$$

Příklad stanovení reakcí konzoly



Nebo je možné určit $R_{a,z}$ z momentové podmínky k bodu $\mathtt{b}$:

$\sum M_{k,b} = 0$: $\quad M_a - 11 \times R_{a,z} - 7 \times 10 + 4 \times 12 = 0$

$R_{a,z} = \frac{-44+7\times10-4\times12}{11} = 2kNm(\uparrow)$

Tuto podmínku můžeme také využít jako kontrolu.

Příklad stanovení reakcí konzoly