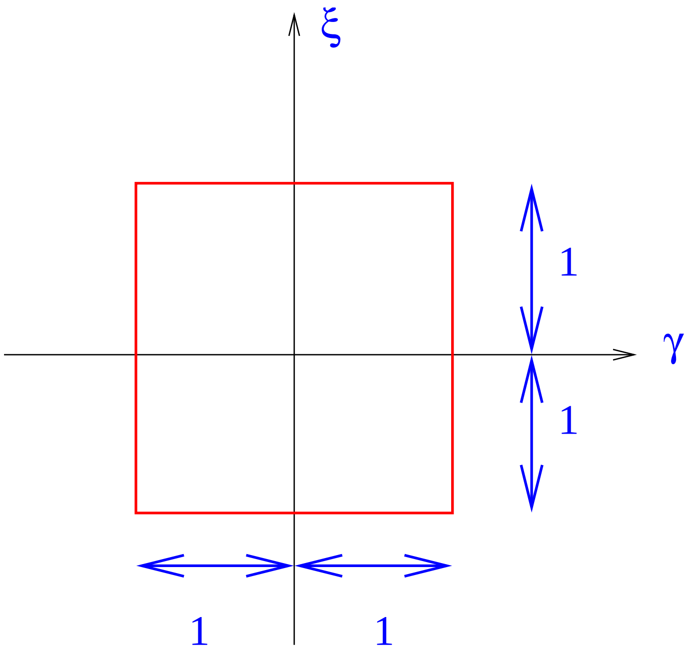
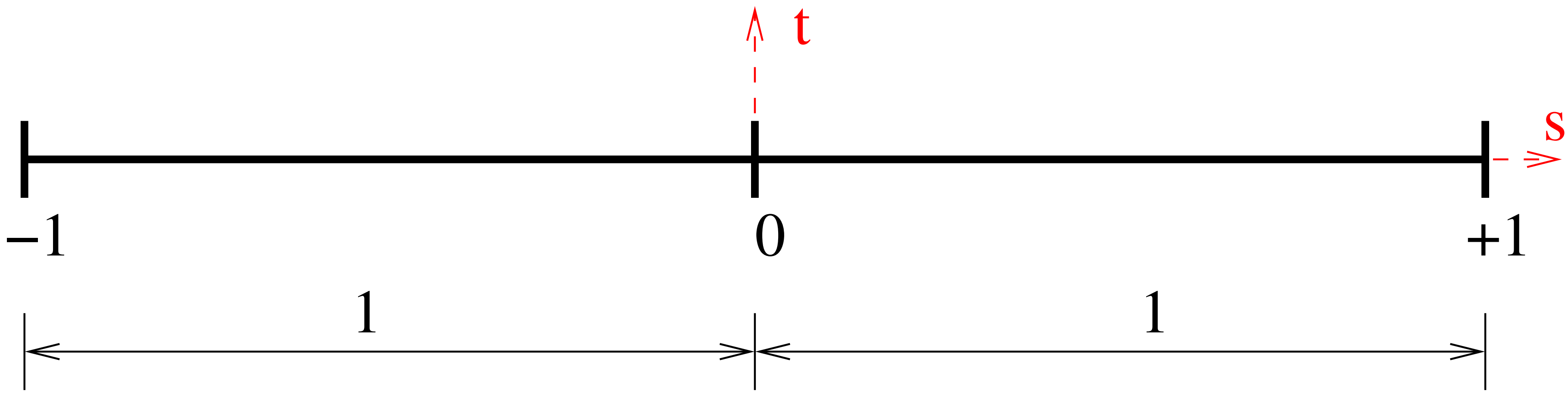
Izoparametrické konečné prvky

- Proces tvorby matice tuhosti konečného prvku probíhá na jednotkovém obrazci (čtverec, krychle) v jednotkových souřadnicích (η, ξ, ζ)
- Pomocí zvolených funkcí se jednotkový obrazec (η, ξ, ζ) zobrazí na skutečný tvar prvku (x, y, z)
- Funkce použité pro zobrazení se použijí i jako aproximace hledané veličiny



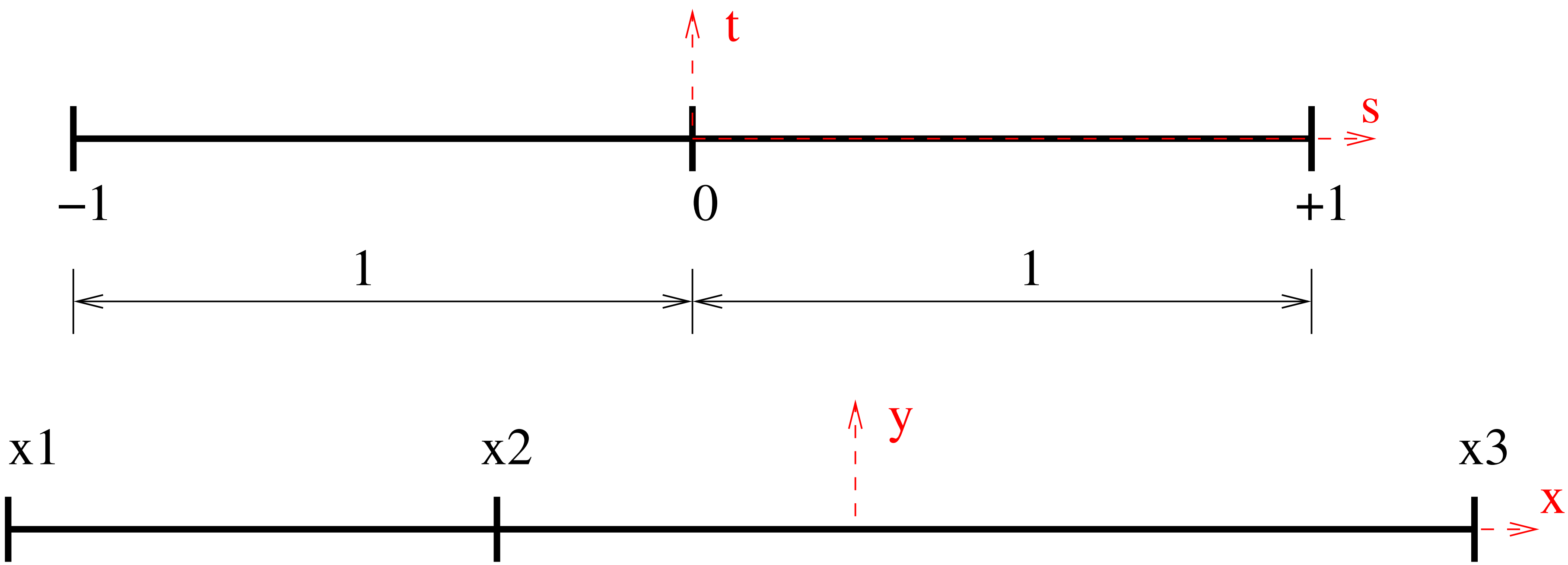
Jednotkový konečný prvek



- Délka strany prvku je $1 + 1 = 2$

- Použijeme přirozené souřadnice s, t (v literatuře často např. i ξ, η)

Jednotkový a skutečný prvek

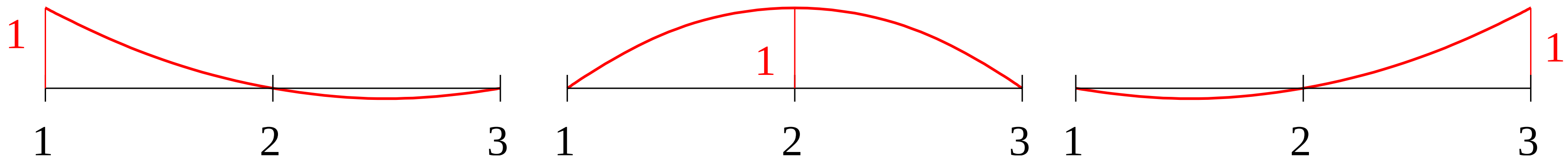


Vztah mezi x a s:

$$x = \sum_i N_i(s)\, x_i, \tag{1}$$

kde N_i jsou **tvarové funkce**

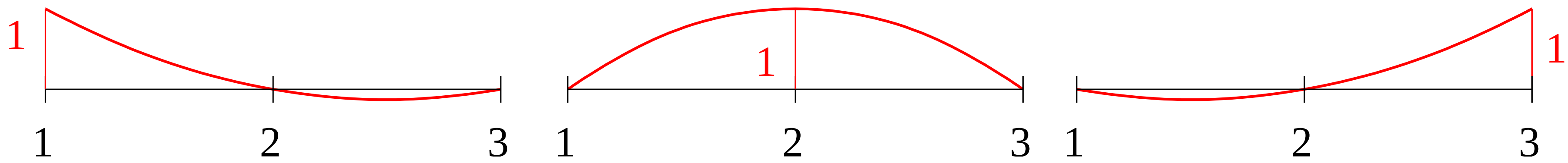
Tvarové funkce



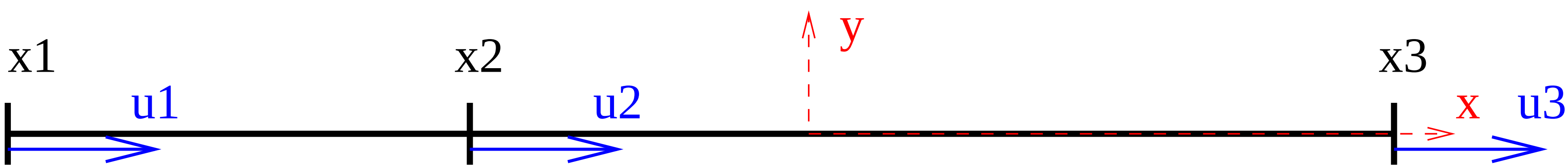
Aby bylo možné použít rovnici (5), musí tvarové funkce N_i nabývat:

- v bodě i hodnoty 1,
- ve všech ostatních bodech hodnoty 0.

Vyjádření polohy bodů



$$x = \sum_i N_i(s)\, x_i, \tag{2}$$

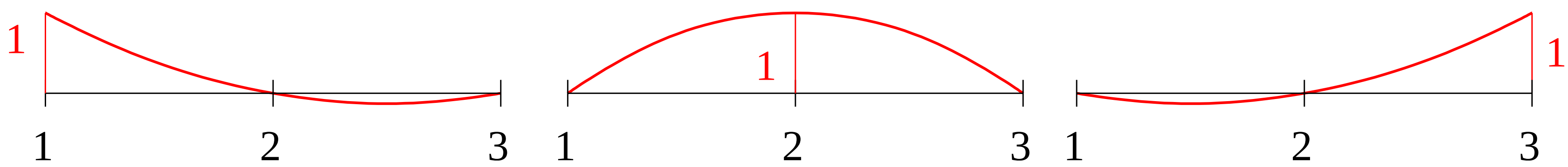


Pro uvedený trojuzlový prvek:

$$x = N_1(s)\, x_1 + N_2(s)\, x_2 + N_3(s)\, x_3 \tag{3}$$

Ukázka použití (1)

Volba tvarových funkcí pro zobrazený případ:

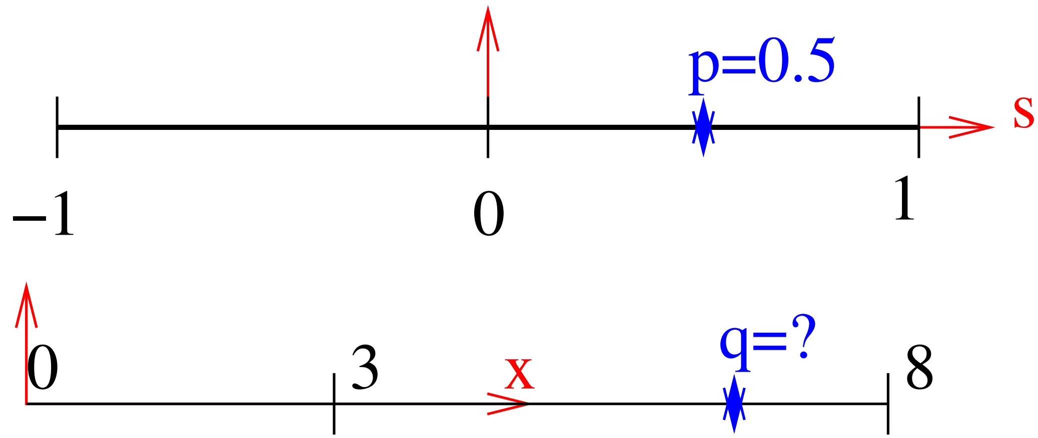


$$
\begin{aligned}
N_1 &= -\frac{s(1-s)}{2} \\
N_2 &= (1-s^2) \\
N_3 &= \frac{s(1+s)}{2}
\end{aligned}
\tag{4}
$$

Tedy:

$$
x = N_1\,x_1 + N_2\,x_2 + N_3\,x_3 = -\frac{s(1-s)}{2}\,x_1 + (1-s^2)\,x_2 + \frac{s(1+s}{2}
$$

Ukázka použití (2)



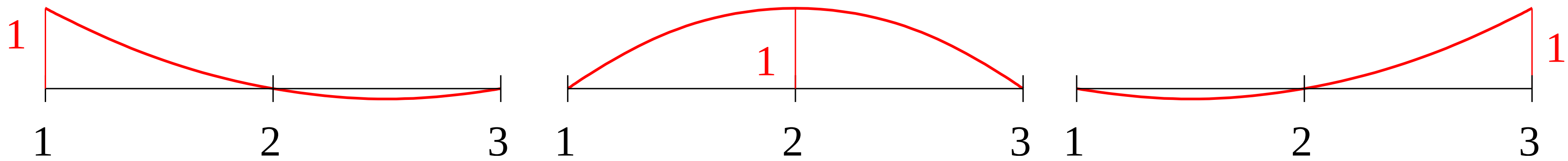
$$x = N_1\,x_1 + N_2\,x_2 + N_3\,x_3 = -\frac{s(1-s)}{2}\,x_1 + (1-s^2)\,x_2 + \frac{s(1+s}{2}$$

$$p = -\frac{0.5(1-0.5)}{2}\,0 + (1-0.5^2)\,3 + \frac{0.5(1+0.5)}{2}\,8 = 5.88$$

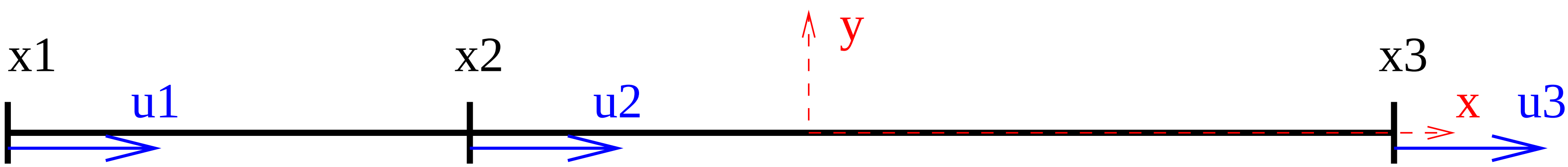
Pro kontrolu:

$$x(s=0) = -\frac{0(1-0)}{2}\,0 + (1-0^2)\,3 + \frac{0(1+0)}{2}\,8 = 3$$

Vyjádření neznámých posunutí



$$u = \sum_i N_i(s)\; u_i, \qquad (5)$$

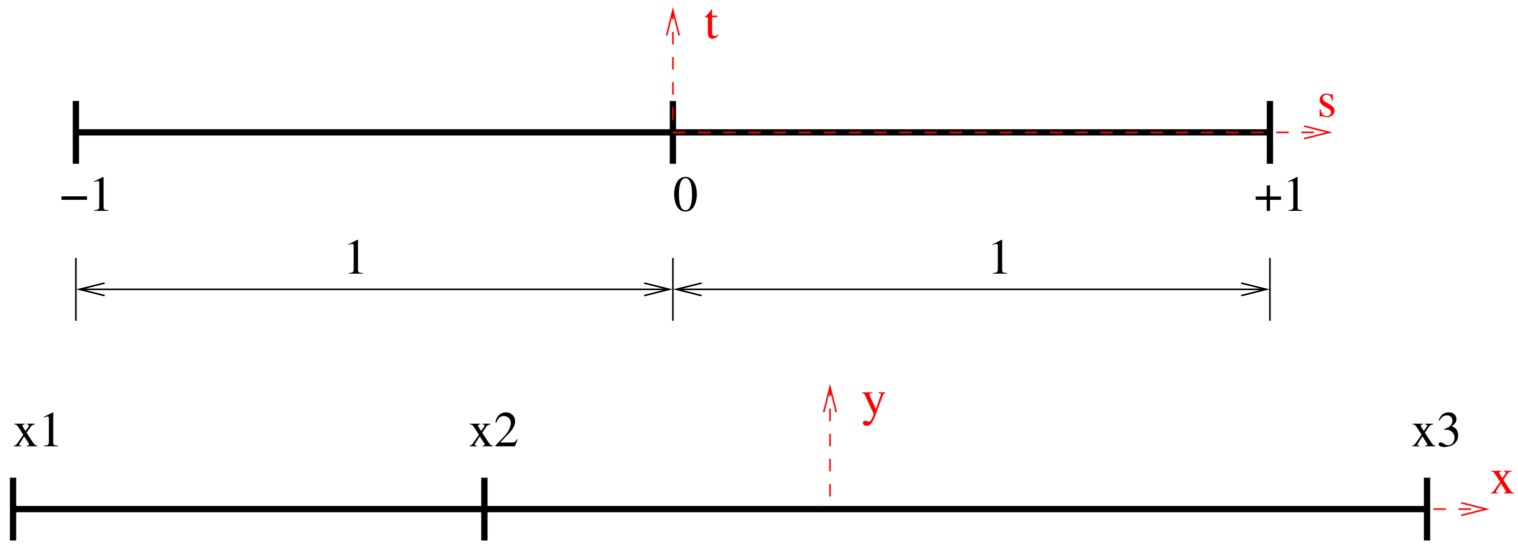


Pro uvedený trojuzlový prvek:

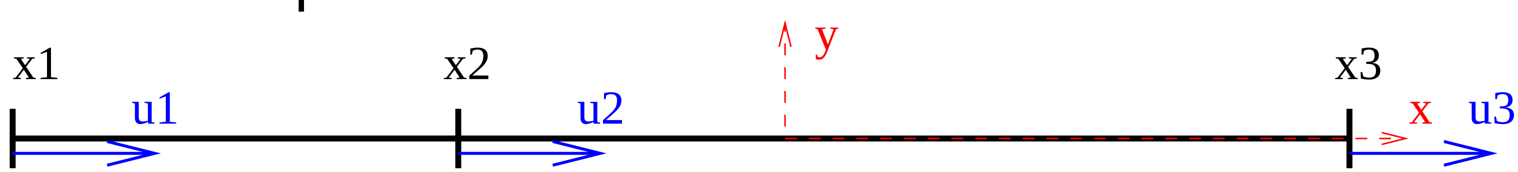
$$u = N_1(s)\; u_1 + N_2(s)\; u_2 + N_3(s)\; u_3 \qquad (6)$$

Trojuzlový prvek příhradoviny (1)

Jednotkový a skutečný prvek:



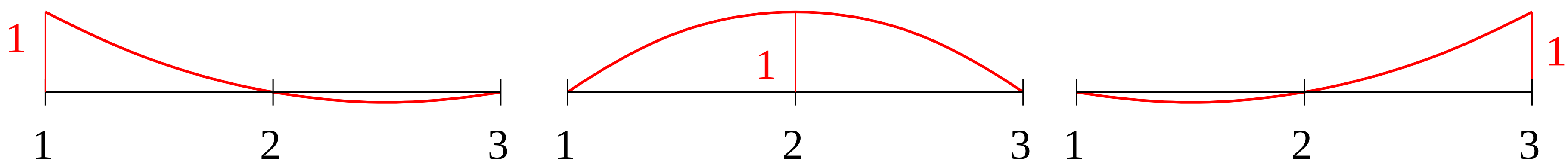
Neznámá posunutí:



Celkem tři neznámá posunutí $u = \{u_1, u_2, u_3\}^T$

Trojuzlový prvek příhradoviny (2)

Volba tvarových funkcí:



$$N_1 = -\frac{s(1-s)}{2}$$
$$N_2 = (1-s^2) \qquad (7)$$
$$N_3 = \frac{s(1+s)}{2}$$

Tedy:

$$x = N_1\, x_1 + N_2\, x_2 + N_3\, x_3 = -\frac{s(1-s)}{2}\, x_1 + (1-s^2)\, x_2 + \frac{s(1+s}{2} \qquad (8)$$

Trojuzlový prvek příhradoviny (3)

Volba tvarových funkcí:

$$x = N_1\, x_1 + N_2\, x_2 + N_3\, x_3 = -\frac{s(1-s)}{2}\, x_1 + (1-s^2)\, x_2 + \frac{s(1+s}{2} \tag{9}$$

Maticově:

$$\{x\} = \begin{bmatrix} N_1 & N_2 & N_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} \tag{10}$$

$$\{x\} = \begin{bmatrix} -\frac{s(1-s)}{2} & (1-s^2) & \frac{s(1+s)}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix}$$

Trojuzlový prvek příhradoviny (4)

Aproximace posunutí u (stejnými funkcemi jako x):

$$u = \sum_i N_i(s)\, u_i,$$

$$u = N_1\, u_1 + N_2\, u_2 + N_3\, u_3 = -\frac{s(1-s)}{2}\, u_1 + (1-s^2)\, u_2 +$$

Maticově:

$$\{u\} = \left[\begin{array}{ccc} N_1 & N_2 & N_3 \end{array}\right] \left\{\begin{array}{c} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{array}\right\} \qquad (12)$$

$$\{u\} = \left[\begin{array}{ccc} -\frac{s(1-s)}{2} & (1-s^2) & \frac{s(1+s)}{2} \end{array}\right] \left\{\begin{array}{c} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{array}\right\}$$

Trojuzlový prvek příhradoviny (5)

Poměrné derivace:

$$\varepsilon = \boldsymbol{\partial}\mathbf{u} \tag{13}$$

tedy:

$$\varepsilon = \frac{\partial u}{\partial x} = \{\frac{\partial}{\partial x}\}\left[\begin{array}{ccc} -\frac{s(1-s)}{2} & (1-s^2) & \frac{s(1+s)}{2} \end{array}\right]\left\{\begin{array}{c} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{array}\right\} \tag{14}$$

a po derivaci:

$$\varepsilon = \left[\begin{array}{ccc} \frac{\partial(-\frac{s(1-s)}{2})}{\partial x} & \frac{\partial(1-s^2)}{\partial x} & \frac{\partial\frac{s(1+s)}{2}}{\partial x} \end{array}\right]\left\{\begin{array}{c} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{array}\right\} \tag{15}$$

Trojuzlový prvek příhradoviny (6)

Poměrné derivace:

$$\varepsilon = \left[\begin{array}{ccc} \frac{\partial(-\frac{s(1-s)}{2})}{\partial x} & \frac{\partial(1-s^2)}{\partial x} & \frac{\partial\frac{s(1+s)}{2}}{\partial x} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{array} \right\}$$

stručně $\varepsilon = \mathbf{B}\ \mathbf{u}$:

$$\varepsilon = \left[\begin{array}{ccc} \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & \frac{\partial N_3}{\partial x} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{array} \right\} \qquad (16)$$

Problém: Ve vztazích pro ε je $\frac{\partial N_i}{\partial x}$, ale N_i je funkcí s.

Trojuzlový prvek příhradoviny (7)

Platí (z derivačního počtu):

$$\frac{\partial N_i}{\partial x} = \frac{\partial N_i}{\partial s}\,\frac{\partial s}{\partial x} \tag{17}$$

Podle rovnice (5):

$$x = \sum_i N_i(s)\, x_i$$

Derivací vztahu (5):

$$\frac{dx}{ds} = \sum_i \frac{\partial N_i}{\partial s}\, x_i = J \tag{18}$$

Výraz (obecně matice) J je nazývá **Jakobián tranformace**.

Trojuzlový prvek příhradoviny (8)

Ze vztahu

$$\frac{dx}{ds} = J$$

vyjádříme ds:

$$ds = \frac{1}{J}\, dx \tag{19}$$

Poznámka: Obecně bude místo $\frac{1}{J}$ inverzní matice: $\mathbf{J}^{-1}$.

Trojuzlový prvek příhradoviny (9)

Ze vztahů

$$\frac{\partial N_i}{\partial x} = \frac{\partial N_i}{\partial s}\,\frac{\partial s}{\partial x}$$

a

$$\partial s = \frac{1}{J}\,\partial x$$

plyne:

$$\frac{\partial N_i}{\partial x} = \frac{\partial N_i}{\partial s}\frac{1}{J} \tag{20}$$

Poznámka: Obecně bude místo $\frac{1}{J}$ inverzní matice: $\mathbf{J}^{-1}$.

Trojuzlový prvek příhradoviny (10)

Pomocí vztahu (20) vyjádříme matici $\mathbf{B}$:

$$\mathbf{B} = \left[\begin{array}{ccc} \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & \frac{\partial N_3}{\partial x} \end{array} \right] = \frac{1}{J} \left[\begin{array}{ccc} \frac{\partial N_1}{\partial s} & \frac{\partial N_2}{\partial s} & \frac{\partial N_3}{\partial s} \end{array} \right] \qquad (21)$$

Tedy:

$$\{\varepsilon\} = \frac{1}{J} \left[\begin{array}{ccc} \frac{\partial N_1}{\partial s} & \frac{\partial N_2}{\partial s} & \frac{\partial N_3}{\partial s} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{array} \right\} \qquad (22)$$

Nebo:

$$\varepsilon = \left[\begin{array}{ccc} -\frac{(1-2s)}{2} & (-2s) & \frac{(1+2s)}{2} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{array} \right\}$$

Trojuzlový prvek příhradoviny (11)

Známe-li $\varepsilon = \mathbf{D}\mathbf{r}$:

$$\{\varepsilon\} = \frac{1}{J}\left[\ \frac{\partial N_1}{\partial s} \quad \frac{\partial N_2}{\partial s} \quad \frac{\partial N_3}{\partial s}\ \right] \left\{ \begin{array}{c} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{array} \right\},$$

můžeme zapsat vztah pro výpočet potenciální energie vnitřních sil:

$$\Pi_i = \frac{1}{2}\int_V \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon} dV = \frac{1}{2}\mathbf{r}^T \int_V \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B}\, dV\ \mathbf{r}, \qquad (23)$$

a pro matici tuhosti prutového prvku:

$$\mathbf{K} = A \int_{x_1}^{x_3} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} dx. \qquad (24)$$

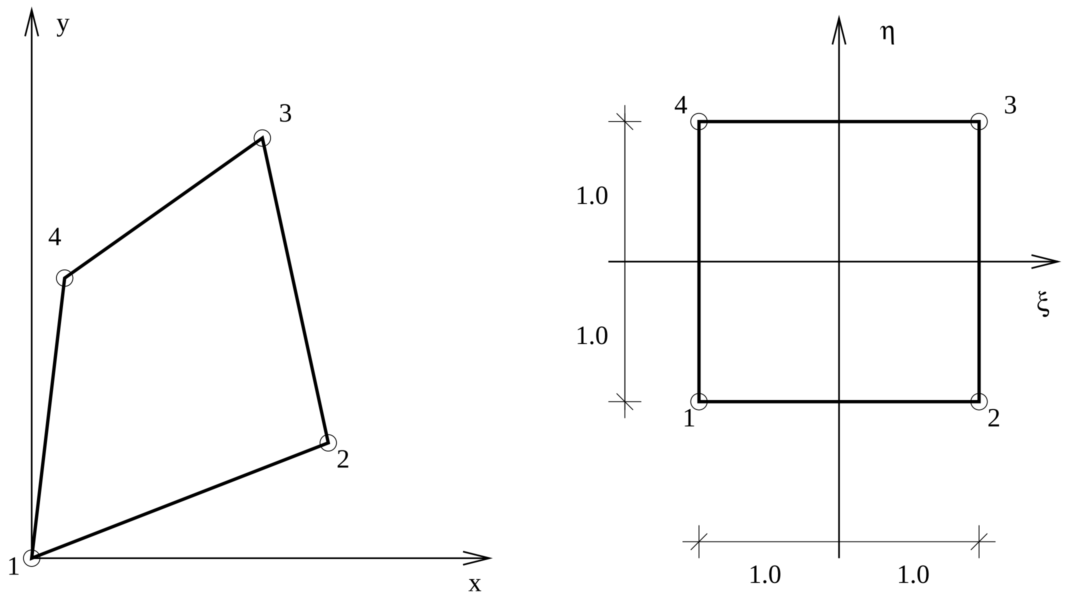
Trojuzlový prvek příhradoviny (12)

Rovnici (25) je v daném případě možné zintegrovat analyticky, u složitějších konečných prvků (prakticky použitelných - 2D, 3D) to obvykle možné není, proto se využívá **numerická integrace**, nejčastěji Gaussova integrační formule:

$$\mathbf{K} = A \sum_{i=1}^{m} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} w_i, \tag{25}$$

kde w_i je váha integračního bodu, m je počet integračních bodů.

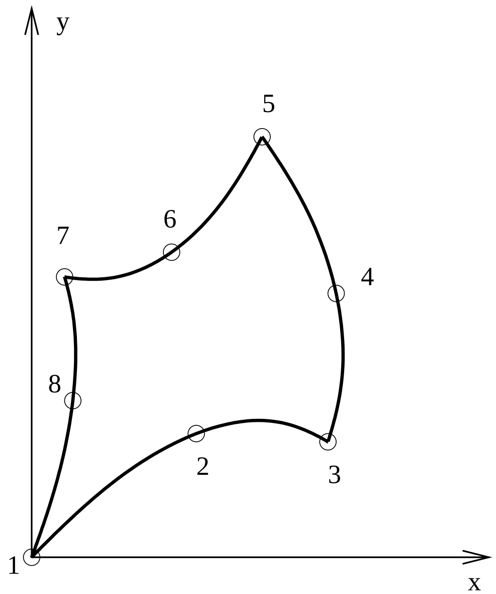
Izoparametrické prvky pro rovinný problém (1)

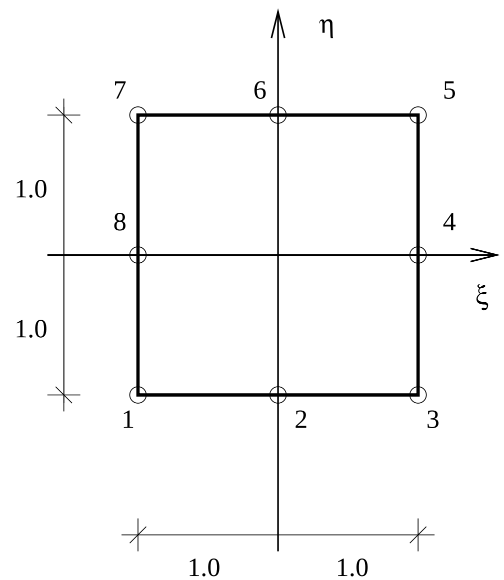


Tvarové funkce:

$$N_i(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1 + \xi\xi_i)(1 + \eta\eta_i), \tag{26}$$

Izoparametrické prvky pro rovinný problém (2)





Tvarové funkce pro vrcholy:

$$N_i(\xi,\eta) = \frac{1}{4}(1+\xi\xi_i)(1+\eta\eta_i)(\xi\,\xi_i+\eta\,\eta_i-1), \qquad (27)$$

pro středy stran

$$N_i(\xi,\eta) = \frac{\xi_i^2}{2}(1+\xi\xi_i)(1-\eta^2)+\frac{\eta^2}{2}(1-\xi\,\xi_i)(1-\eta^2). \quad (28)$$