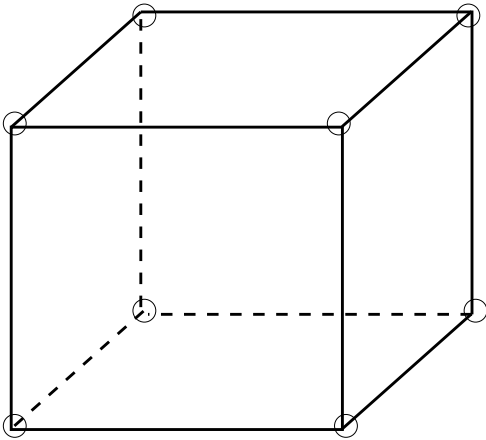


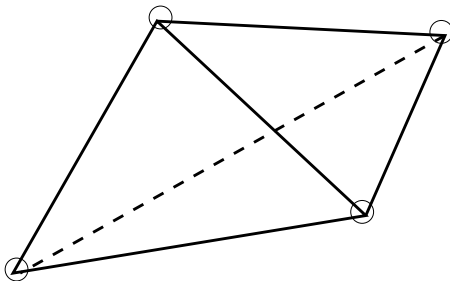
Konečné prvky pro řešení 3D úloh

Prostorové konstrukce



neznámé parametry: u, v, w

volba různého počtu uzlů a
neznámých v uzlech



možnost zakřivených hran prvků
(prvky se středostranovými uzly)

Opakování: Geometrické vztahy ve 3D

Maticově ($\varepsilon = \varepsilon \partial \mathbf{u}$):

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix}, \quad (1)$$

Fyzikální vztahy ve 3D

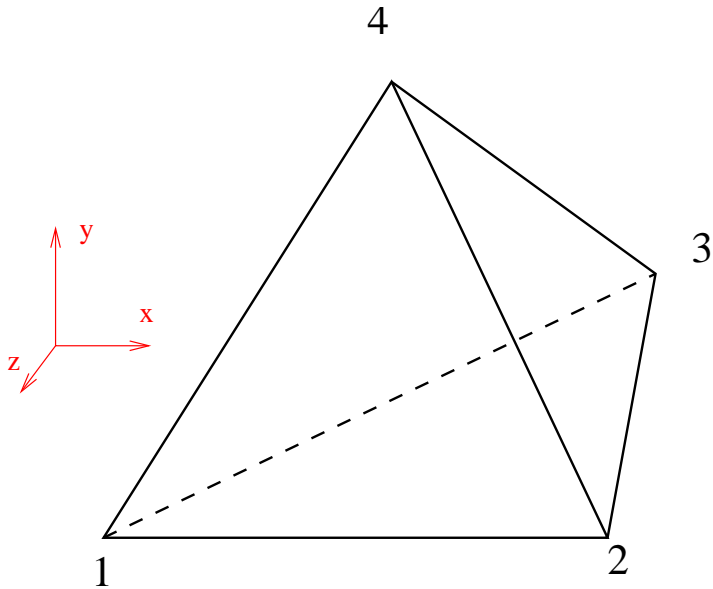
Maticově ($\sigma = D \varepsilon$) pro lineárně pružný materiál:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = A \begin{bmatrix} 1 & \frac{\mu}{1-\mu} & \frac{\mu}{1-\mu} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\mu}{1-\mu} & 1 & \frac{\mu}{1-\mu} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\mu}{1-\mu} & \frac{\mu}{1-\mu} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\mu}{2(1-\mu)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\mu}{2(1-\mu)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\mu}{2(1-\mu)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix},$$

$$A = \frac{E(1-\mu)}{(1+\mu)(1-2\mu)} \quad (2)$$

Odvození konečného prvku pro 3D úlohy

(1)



Neznámé parametry deformace:
 u, v, w v každém uzlu.

Tj. celkem dvanáct, neznámých uzlových parametrů:

$$\{u_1, v_1, w_1, u_2, v_2, w_2, u_3, v_3, w_3, u_4, v_4, w_4\}^T.$$

Odvození konečného prvku pro 3D úlohy

(2)

Aproximace neznámých uzlových posunutí:

$$u(x, y) = a_1 x + a_2 y + a_3 z + a_4 \quad (3)$$

$$v(x, y) = a_5 x + a_6 y + a_7 z + a_8 \quad (4)$$

$$w(x, y) = a_9 x + a_{10} y + a_{11} z + a_{12} \quad (5)$$

Odvození konečného prvku pro 3D úlohy

(3)

Maticově ($\mathbf{u} = \mathbf{U} \mathbf{a}$):

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y & z & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x & y & z & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x & y & z & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \\ a_7 \\ a_8 \\ a_9 \\ a_{10} \\ a_{11} \\ a_{12} \end{Bmatrix} \quad (6)$$

Odvození k. p. pro 3D úlohy (4)

Aproximace neznámých uzlových posunutí v uzlech 1, 2, 3

($\mathbf{r} = \mathbf{S} \mathbf{a}$):

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \\ w_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ w_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ w_3 \\ u_4 \\ v_4 \\ w_4 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x_1 & y_1 & z_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x_2 & y_2 & z_2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x_3 & y_3 & z_3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \end{pmatrix}$$

(7)

Odvození k. p. pro 3D úlohy (5)

Kombinací vztahů $\varepsilon = \partial u$ a $u = U a$ vznikne $\varepsilon = B a$, kde $B = \partial^T U$:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \\ a_7 \\ a_8 \\ a_9 \\ a_{10} \\ a_{11} \\ a_{12} \end{Bmatrix} \quad (8)$$

Odvození k. p. pro 3D úlohy (6)

Z $\mathbf{r} = \mathbf{S} \mathbf{a}$ plyne: $\mathbf{a} = \mathbf{S}^{-1} \mathbf{r}$.

Pak: $\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B} \mathbf{S}^{-1} \mathbf{r}$.

Potenciální energie vnitřních sil:

$$\Pi_i = \frac{1}{2} \int_V \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} dV = \frac{1}{2} \int_V \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon} dV. \quad (9)$$

Potenciální energie vnějších sil:

$$\Pi_e = - \int_V \mathbf{X}^T \mathbf{r} dV - \int_S \mathbf{p}^T \mathbf{r} dS. \quad (10)$$

Odvození k. p. pro 3D úlohy (7)

Potenciální energie soustavy:

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_V \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon} dV - \int_V \mathbf{X}^T \mathbf{r} dV - \int_S \mathbf{p}^T \mathbf{r} dS. \quad (11)$$

Po dosazení za $\boldsymbol{\varepsilon}$ a vytknutí \mathbf{r} :

$$\Pi = \frac{1}{2} \mathbf{r}^T \int_V \mathbf{S}^{-1T} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} \mathbf{S}^{-1} dV \mathbf{r} - \int_V \mathbf{X}^T dV \mathbf{r} - \int_S \mathbf{p}^T dS \mathbf{r}. \quad (12)$$

Stručně:

$$\Pi = \frac{1}{2} \mathbf{r}^T \mathbf{K} \mathbf{r} - \mathbf{F}^T \mathbf{r}. \quad (13)$$

Odvození k. p. pro 3D úlohy (8)

Aplikací Lagrangeova variačního principu ($\partial \Pi = \min.$) na (13):

$$\mathbf{K} \mathbf{r} = \mathbf{F}, \quad (14)$$

kde \mathbf{K} ... matice tuhosti konečného prvku:

$$\mathbf{K} = \int_V \mathbf{S}^{-1T} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} \mathbf{S}^{-1} dV, \quad (15)$$

\mathbf{F} ... zatěžovací vektor konečného prvku:

$$\mathbf{F} = - \int_V \mathbf{X}^T dV - \int_S \mathbf{p}^T dS. \quad (16)$$

Odvození k. p. pro 3D úlohy (9)

Pro studovaný konečný prvek (\mathbf{B} , \mathbf{D} , \mathbf{S}^{-1} obsahují jen konstanty):

$$\mathbf{K} = \mathbf{S}^{-1T} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} \mathbf{S}^{-1}. \quad (17)$$

$$\mathbf{F} = \mathbf{X}. \quad (18)$$

Analýza konstrukce

Z \mathbf{K}_e a \mathbf{r}_e a \mathbf{F}_e jednotlivých prvků (e je číslo prvku) sestavíme \mathbf{K} a \mathbf{r} a \mathbf{F} celé konstrukce a neznámé určíme řešením soustavy rovnic:

$$\mathbf{K} \mathbf{r} = \mathbf{F}. \quad (19)$$

Výpočet výsledků (napětí a deformací) na konečných prvcích

1. z vektoru \mathbf{r} celé konstrukce sestavíme vektory \mathbf{r}_e jednotlivých konečných prvků

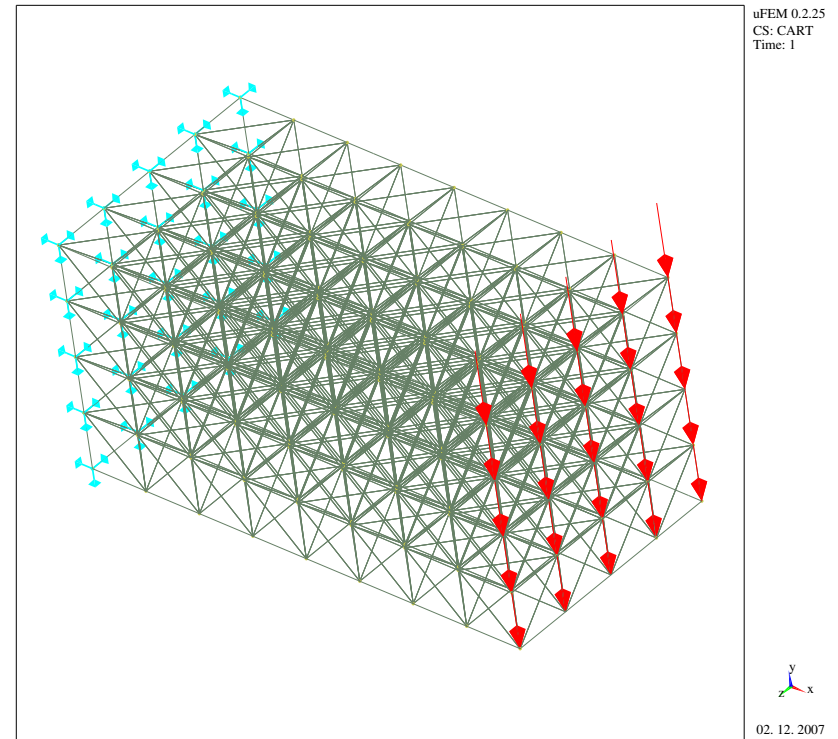
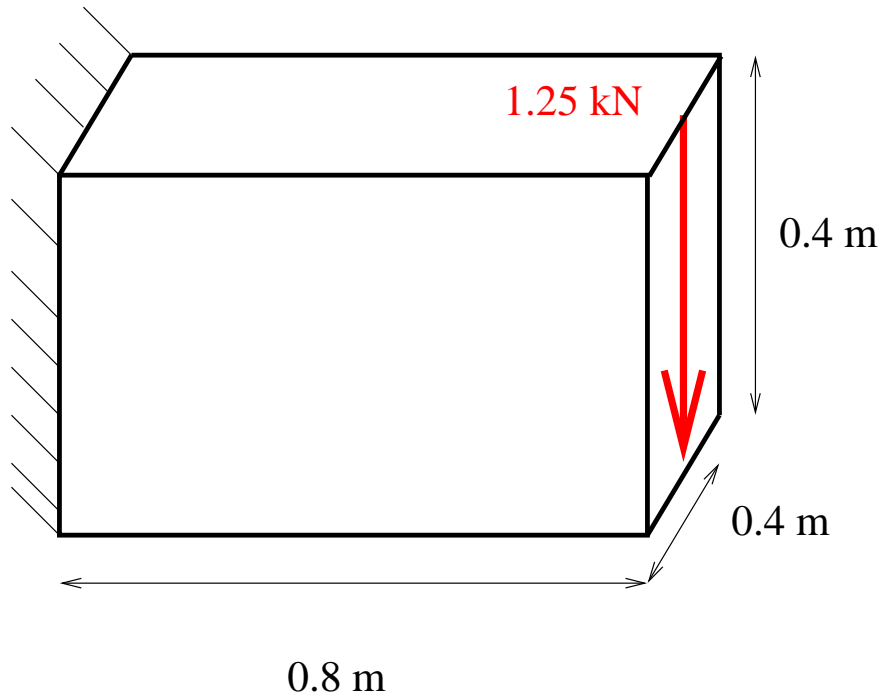
2. pro každý prvek stanovíme poměrné deformace:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_e = \mathbf{B} \mathbf{S}^{-1} \mathbf{r}_e$$

3. pro každý prvek stanovíme napětí:

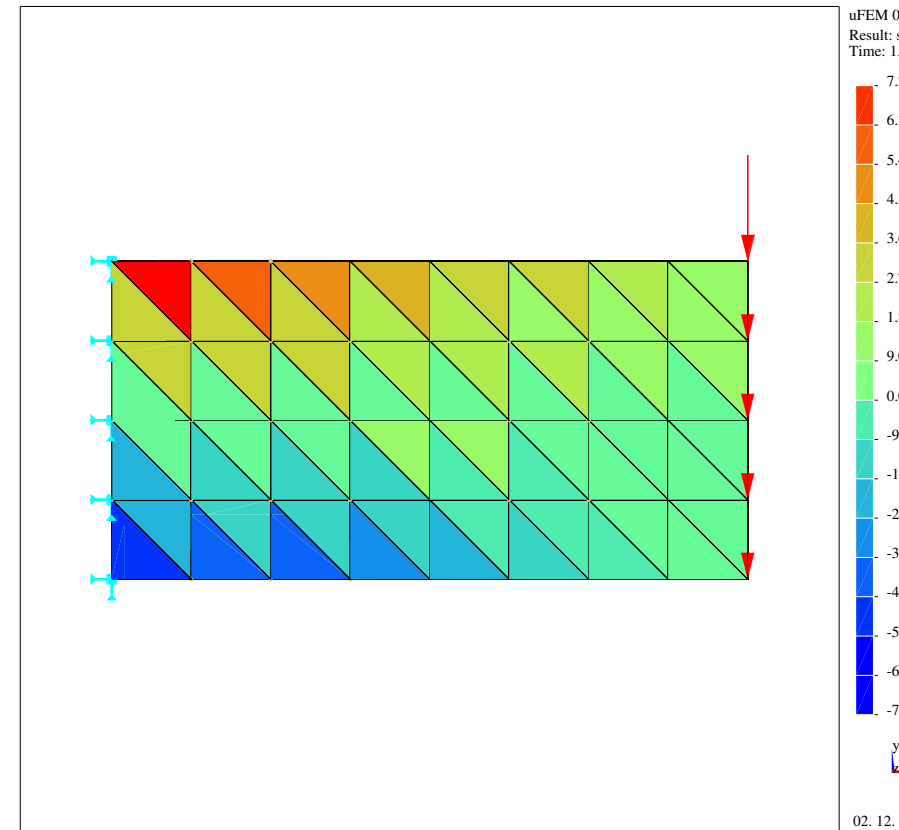
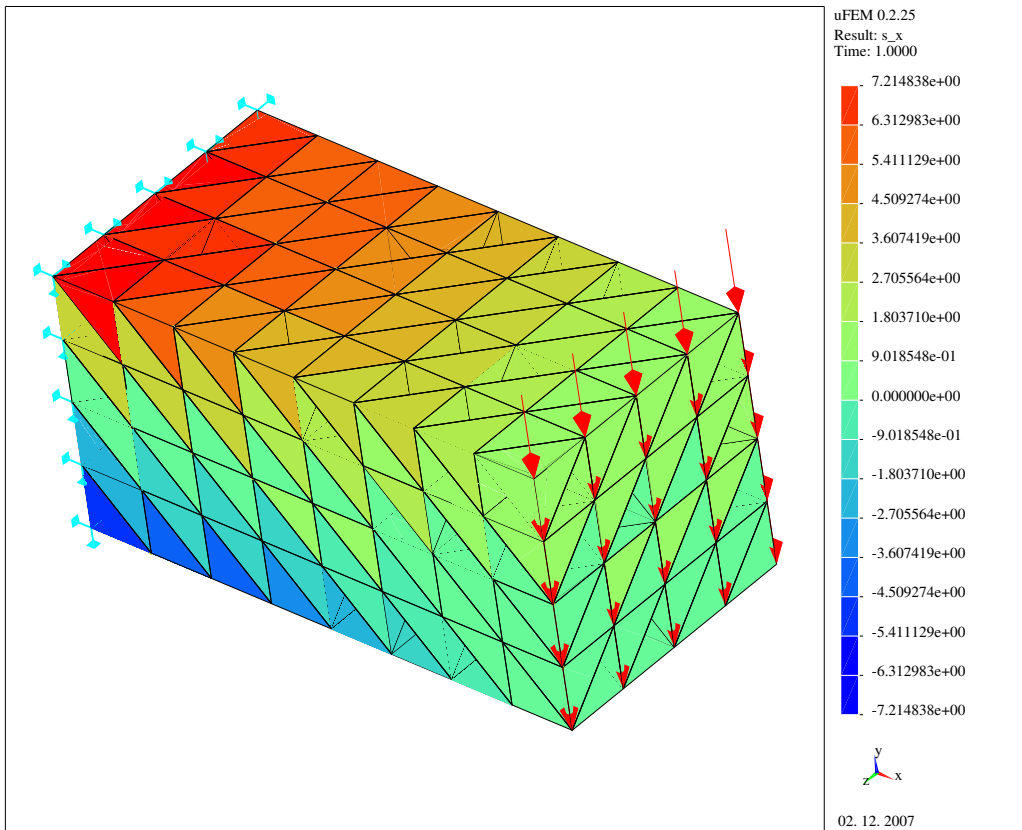
$$\boldsymbol{\sigma}_e = \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon}_e \text{ nebo } \boldsymbol{\sigma}_e = \mathbf{D} \mathbf{B} \mathbf{S}^{-1} \mathbf{r}_e$$

Příklad – velmi krátká konzola (1)

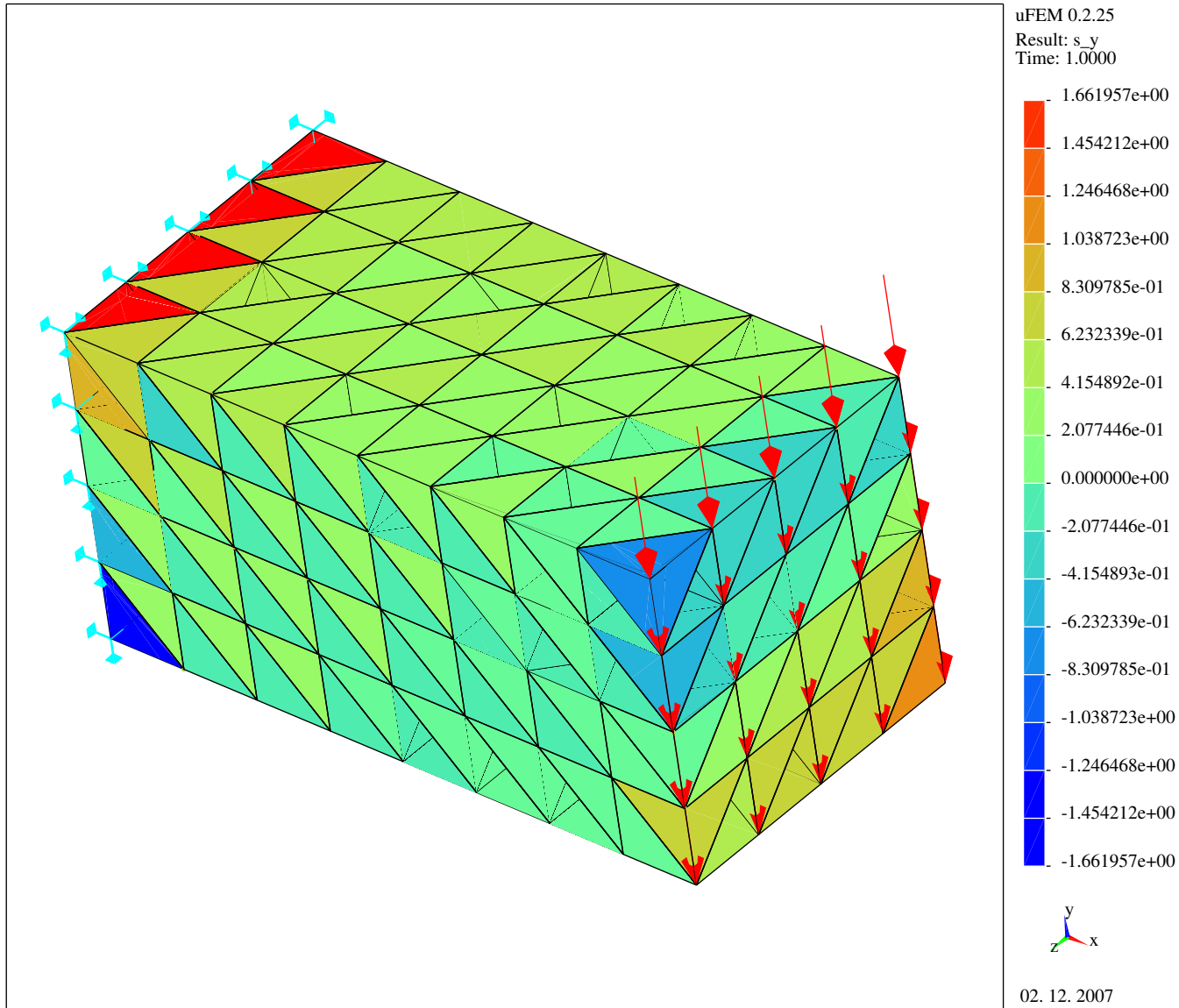


$$E = 27 \text{ MPa}, \mu = 0,2$$

Příklad – velmi krátká konzola (2)

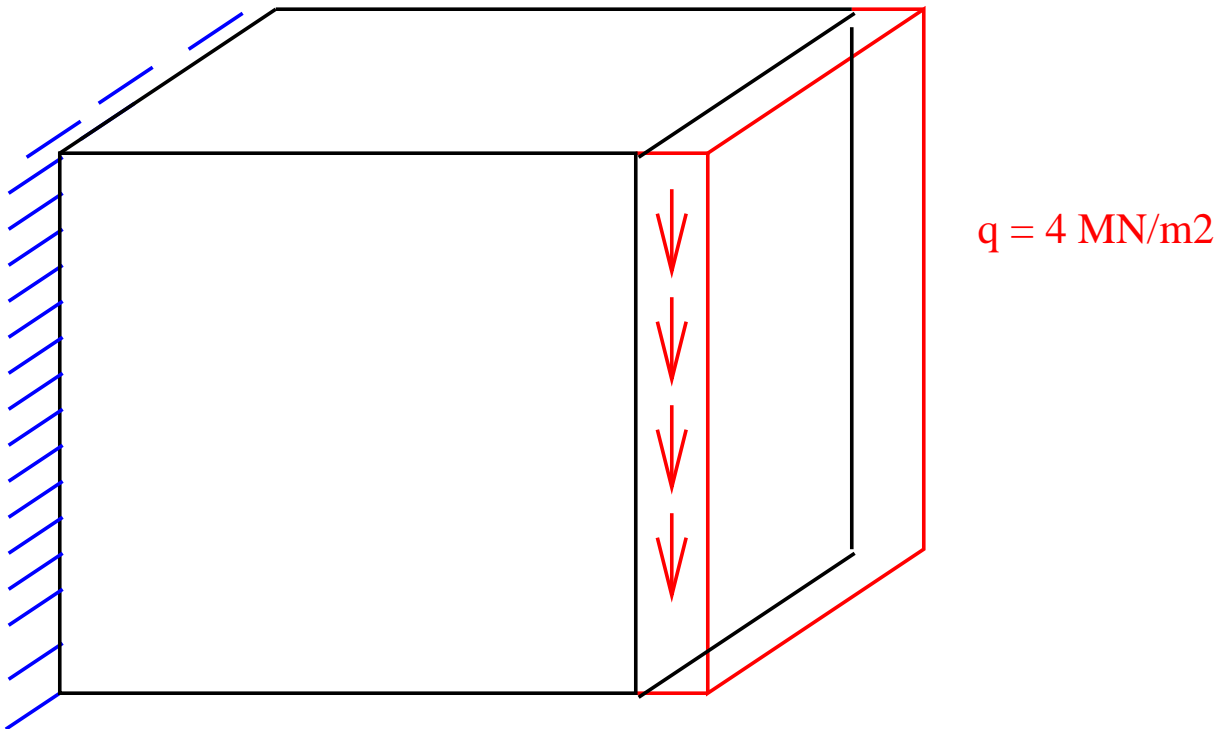


Příklad – velmi krátká konzola (3)



Příklad 2 – krychle (1)

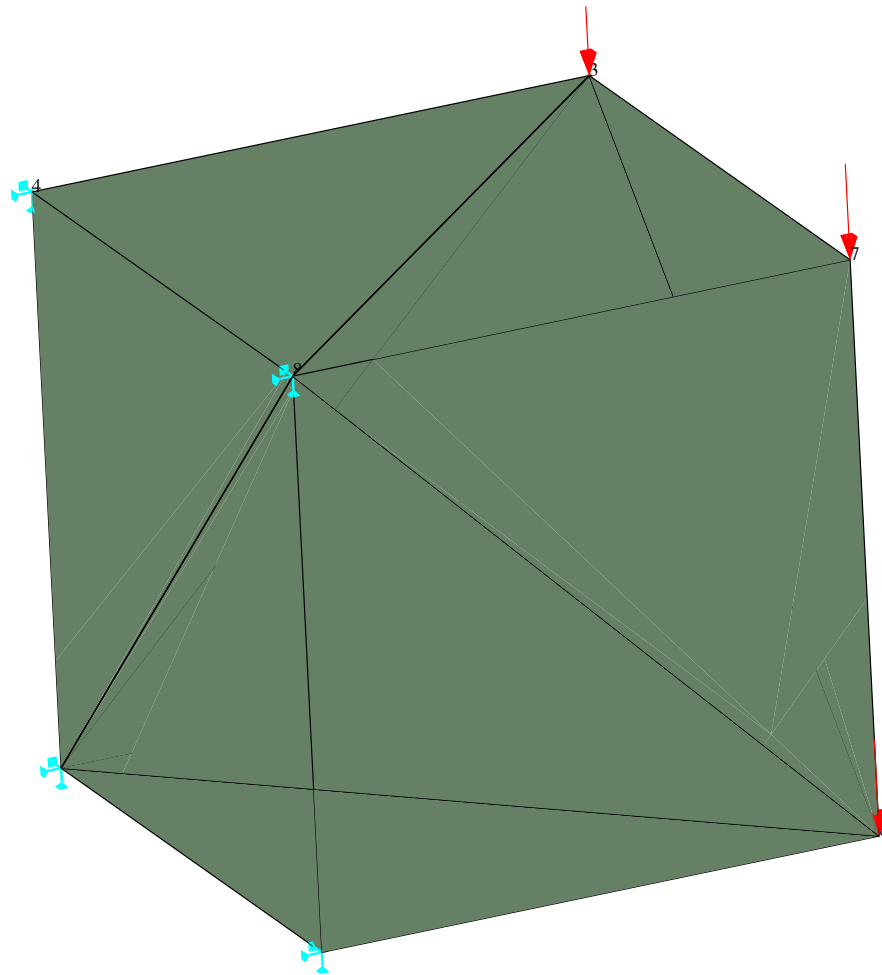
Je dána krychle o rozměrech $1 \times 1 \times 1 \text{ m}$, $E = 10 \text{ GPa}$, $\nu = 0.2$.



Rozdělte na nejmenší možný počet konečných prvků.

Příklad 2 – krychle (2)

Model (kolik obsahuje prvků?):



uFEM 0.2.53d
CS: CART
Time: 1

ETyps: 2
RSets: 1
Mats: 1

KPs: 0
GEnts: 0

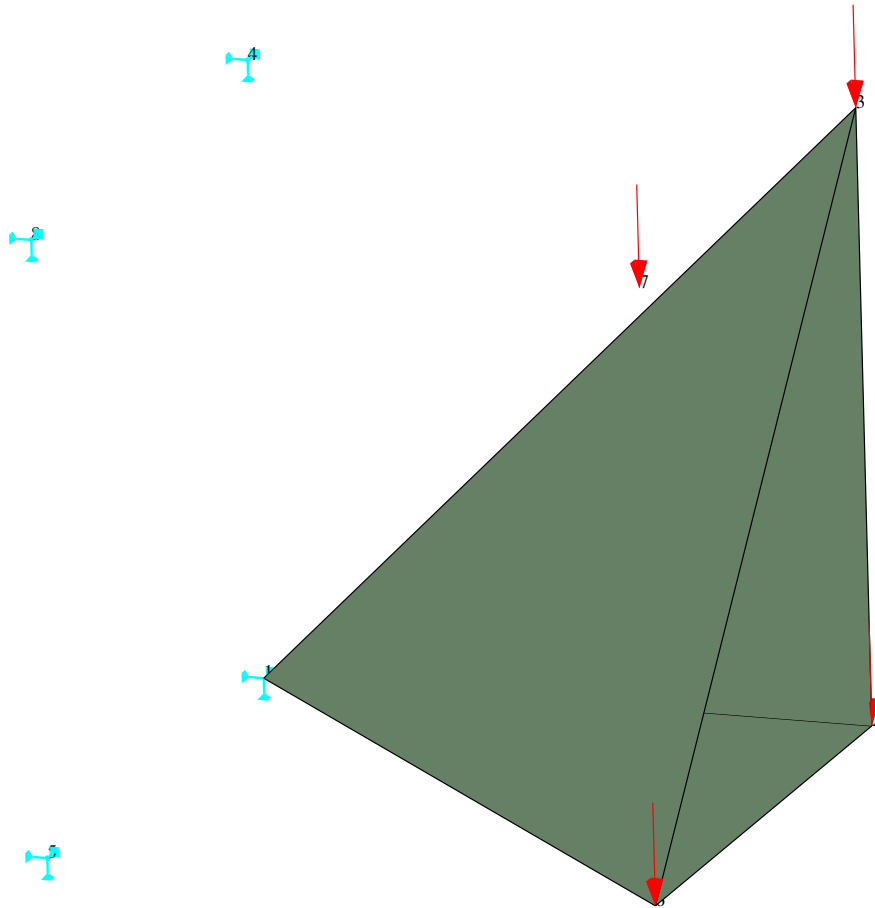
Nodes: 8
Elems: 5
Disps: 12
Loads: 4

tetrapack

09. 03. 2011

Příklad 2 – krychle (3)

Konečný prvek 1:



uFEM 0.2.53d
CS: CART
Time: 1

ETyps: 2
RSets: 1
Mats: 1

KPs: 0
GEnts: 0

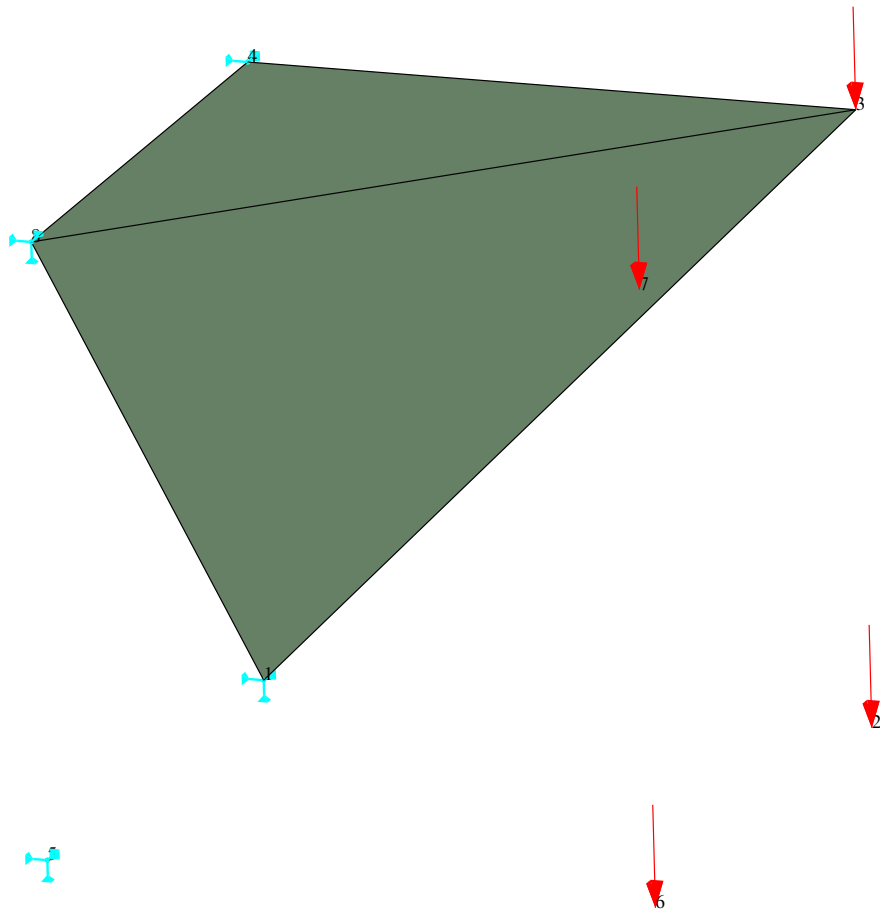
Nodes: 8
Elems: 5
Disps: 12
Loads: 4

tetrapack

09. 03. 2011

Příklad 2 – krychle (4)

Konečný prvek 2:



uFEM 0.2.53d
CS: CART
Time: 1
ETyps: 2
RSets: 1
Mats: 1
KPs: 0
GEnts: 0
Nodes: 8
Elems: 5
Disps: 12
Loads: 4



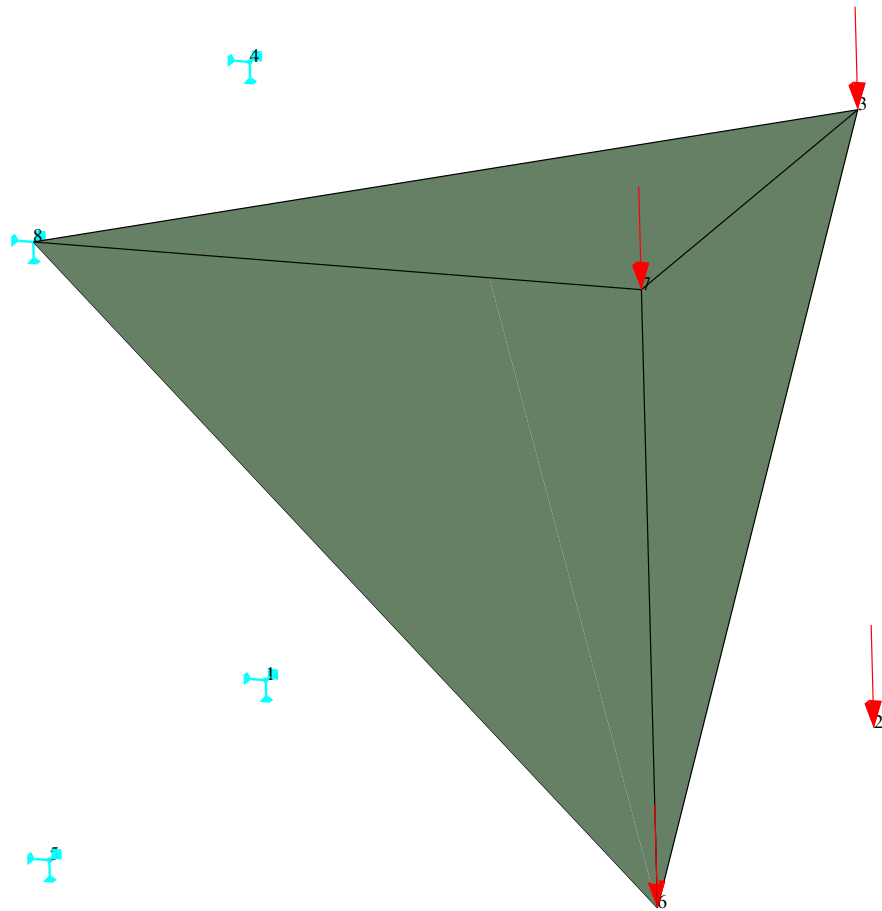
tetrapack



09. 03. 2011

Příklad 2 – krychle (5)

Konečný prvek 3:



uFEM 0.2.53d
CS: CART
Time: 1

ETyps: 2
RSets: 1
Mats: 1

KPs: 0
GEnts: 0

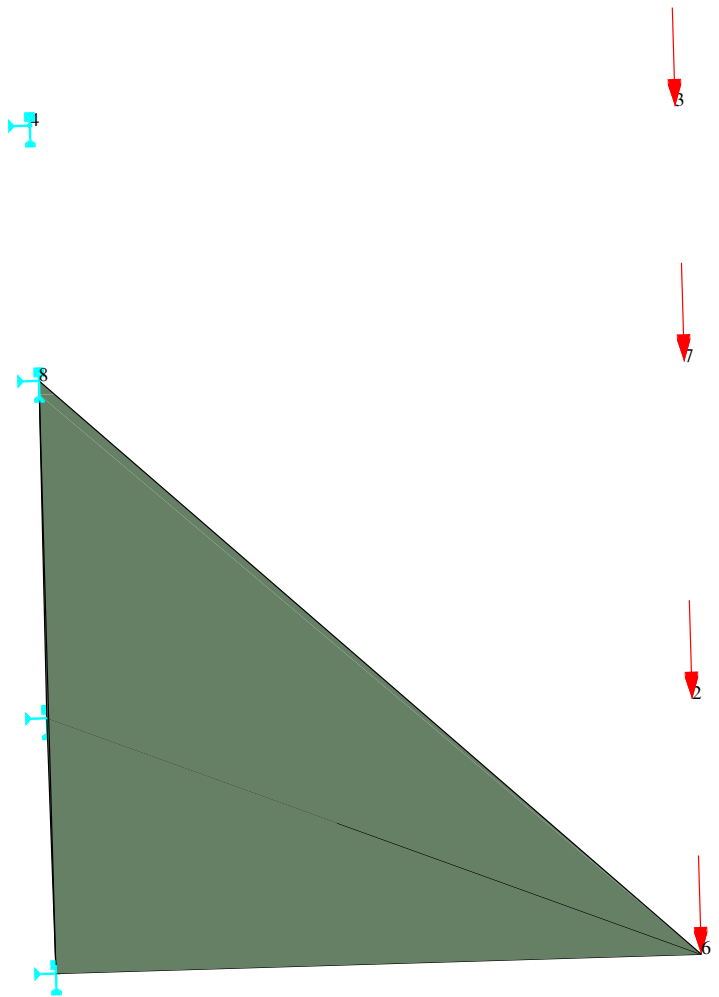
Nodes: 8
Elems: 5
Disps: 12
Loads: 4

tetrapack

09. 03. 2011

Příklad 2 – krychle (6)

Konečný prvek 4:



uFEM 0.2.53d
CS: CART
Time: 1

ETyps: 2
RSets: 1
Mats: 1

KPs: 0
GEnts: 0

Nodes: 8
Elems: 5
Disps: 12
Loads: 4

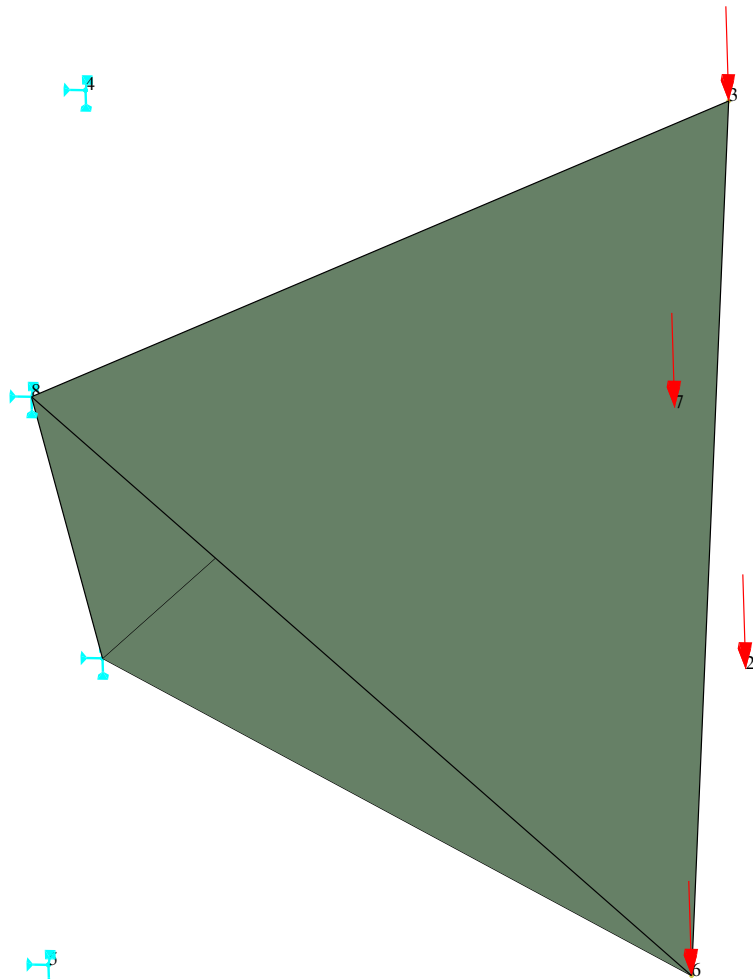


tetrapack

09. 03. 2011

Příklad 2 – krychle (7)

Konečný prvek 5:



uFEM 0.2.53d
CS: CART
Time: 1

ETyps: 2
RSets: 1
Mats: 1

KPs: 0
GEnts: 0

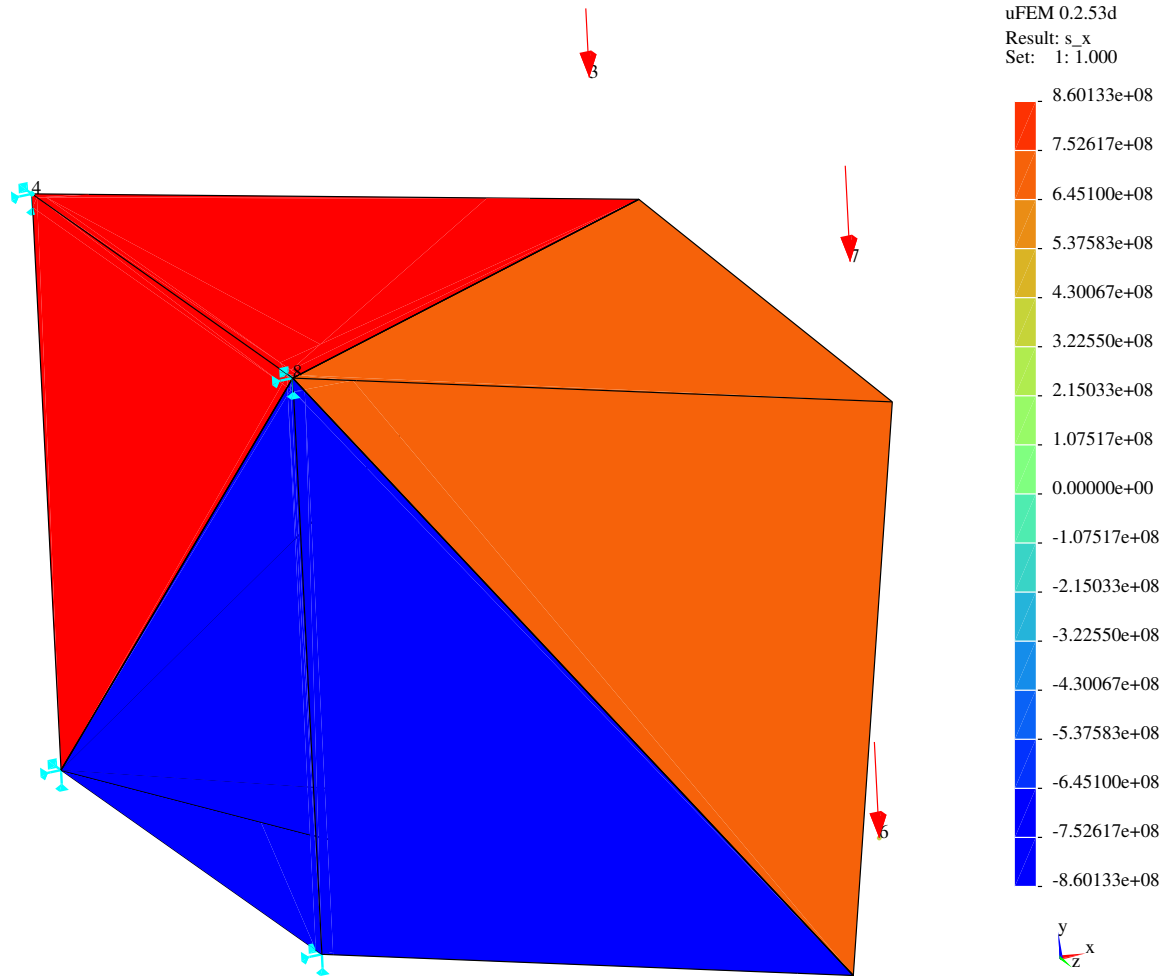
Nodes: 8
Elems: 5
Disps: 12
Loads: 4

tetrapack

09. 03. 2011

Příklad 2 – krychle (8)

Napětí σ_x :

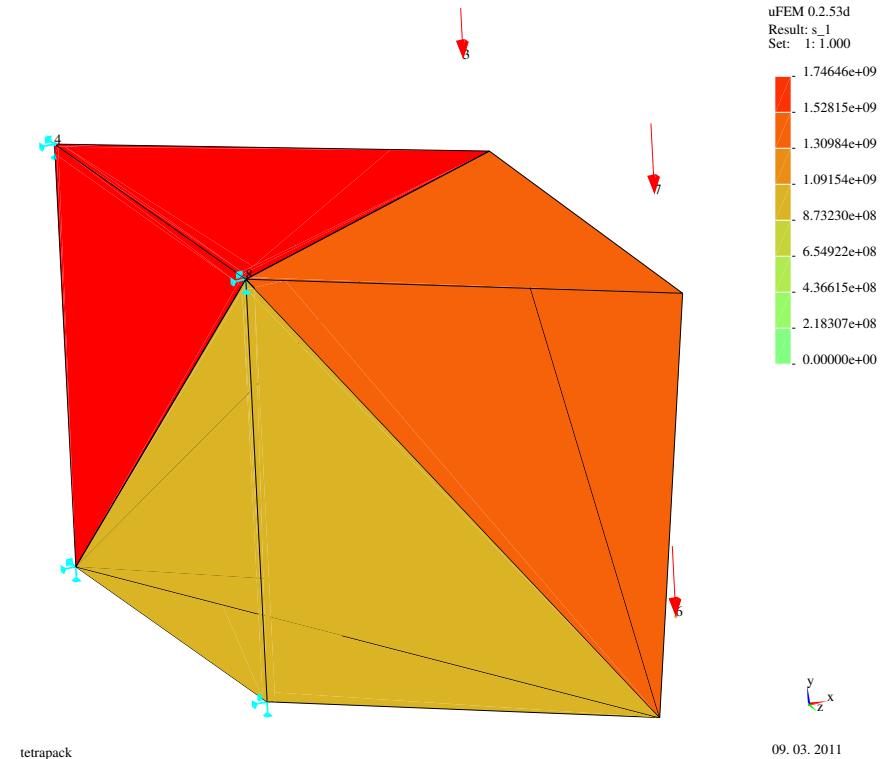
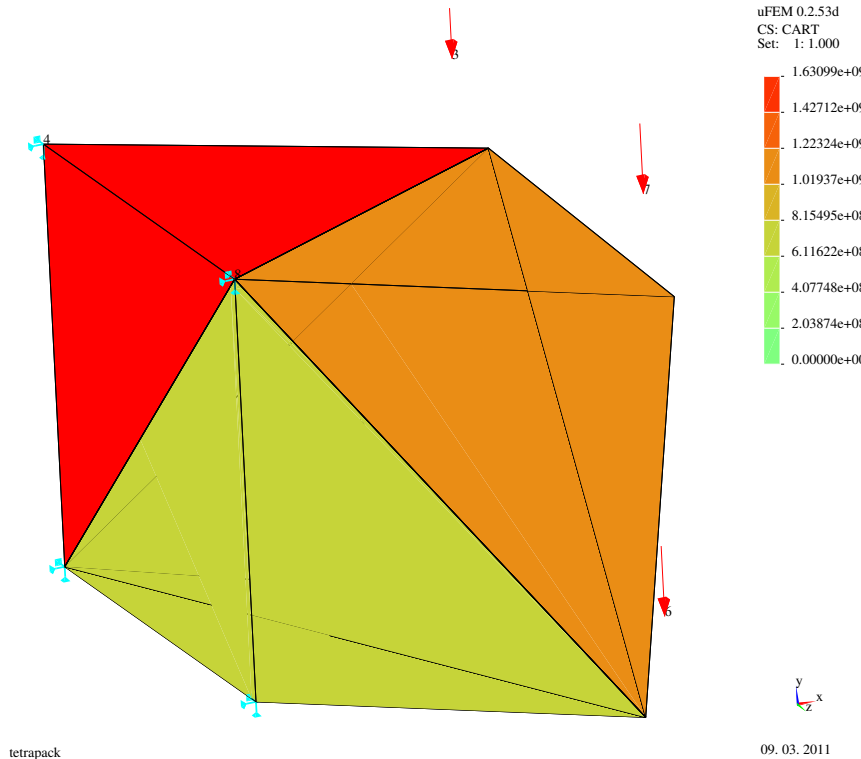


tetrapack

09. 03. 2011

Příklad 2 – krychle (9)

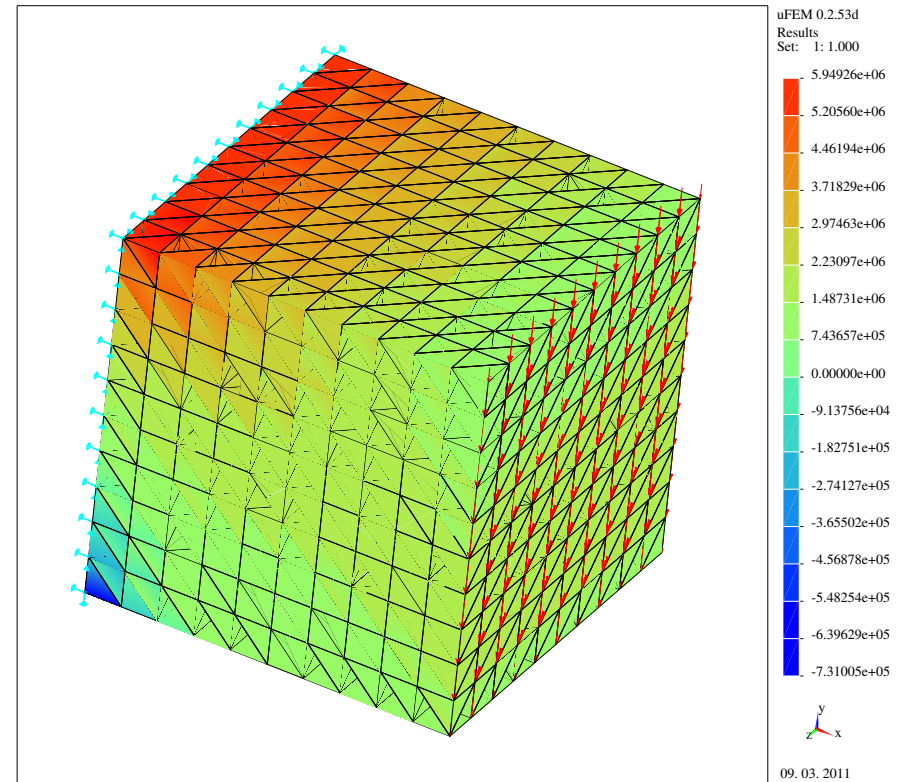
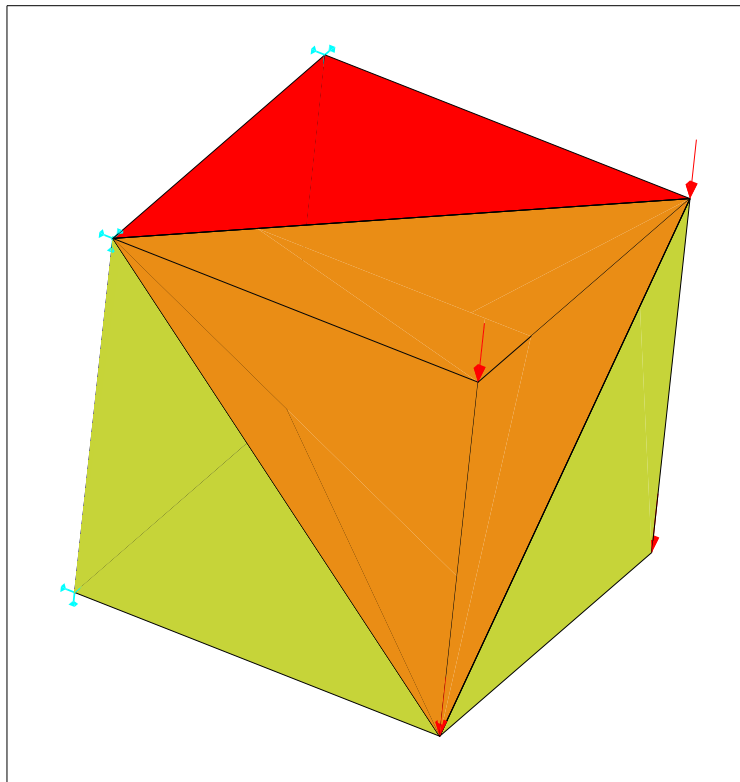
Napětí σ_1 :



$\sigma_1 = 1.63 \text{ MPa}$ (všechny) a 1.75 MPa (jen 4 prvky)

Příklad 2 – krychle (10)

Napětí σ_1 :



$\sigma_1 = 1.63 \text{ GPa}$ (5 prvků) a 5.94 MPa (podrobný model)

Příklad 2 – krychle (11)

Napětí σ_x :

