

# Konečné prvky na pružném podloží

- modely podloží
- deska na Winklerově pružném podloží
- další možnosti modelování

# Obvyklé modely podloží

- pružný poloprostor
- vrstevnatý pružný poloprostor
- kontaktní modely (Winklerův,...)

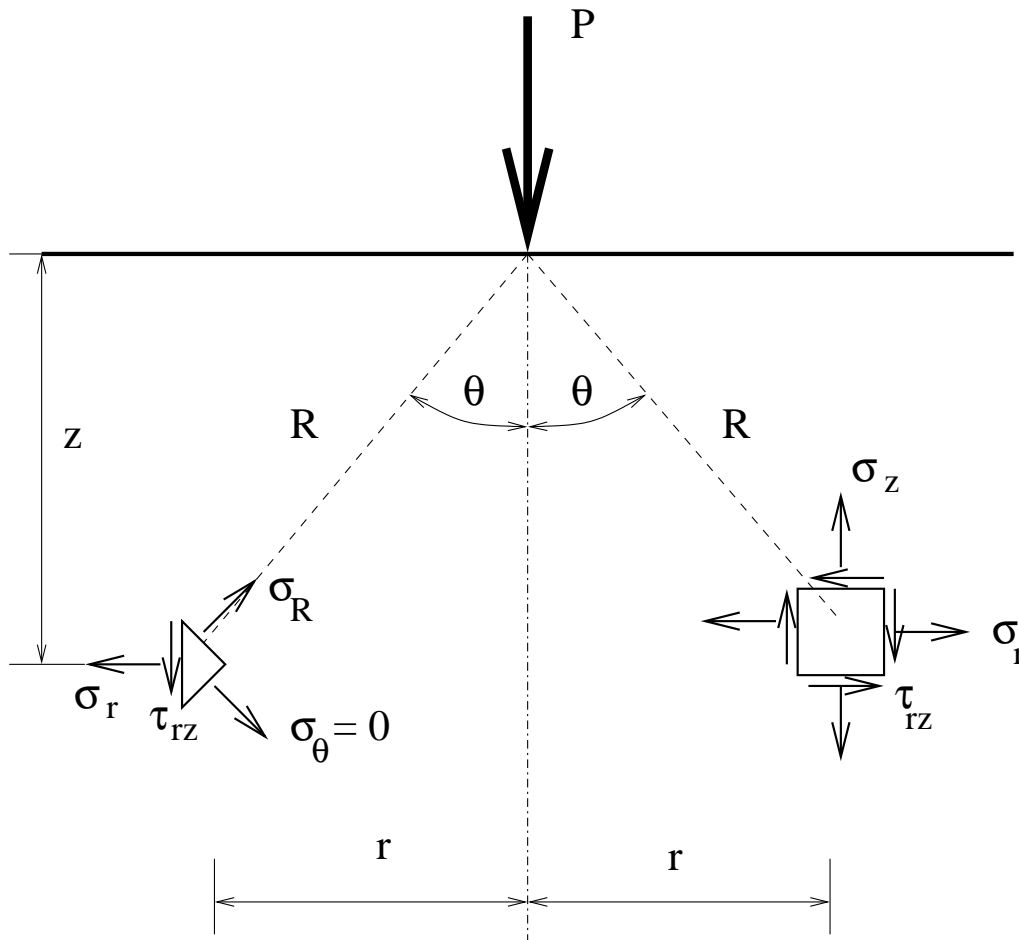
# Pružný poloprostor

(1)

- vychází z předpokladů teorie pružnosti
- pružná oblast ohraničená jen z jedné strany („povrch poloprostoru“)
- homogenní, obvykle izotropní materiál:  $E$ ,  $\nu$

# Pružný poloprostor

(2)



Klasické řešení – válcový souřadný systém  $(r, \varphi, z)$ :

$$\cos(\theta) = \frac{z}{R} \quad (1)$$

$$\sin(\theta) = \frac{r}{R} \quad (2)$$

$$r^2 = x^2 + y^2 \quad (3)$$

$$R^2 = r^2 + z^2 \quad (4)$$

$$R^2 = x^2 + y^2 + z^2 \quad (5)$$

# Pružný poloprostor

(3)

Pro zatížení osamělým břemenem (J. Boussinesque):

$$\sigma_z = -\frac{2}{3} \frac{P}{\pi} \frac{z^3}{R^5} \quad (6)$$

$$\sigma_r = \frac{P}{2\pi} \left[ \frac{1 - 2\mu}{R(R+z)} - \frac{3zr^2}{R^5} \right] \quad (7)$$

$$\sigma_\theta = \frac{P}{2\pi} (1 - \mu) \left[ \frac{z}{R^3} - \frac{1}{R(R+z)} \right] \quad (8)$$

$$\tau_{rz} = -\frac{3}{2} \frac{P}{\pi} \frac{z^2 r}{R^5} \quad (9)$$

# Pružný poloprostor

(4)

Pro zatížení osamělým břemenem (J. Boussinesque):

$$u = \frac{P(1 + \mu)}{2 \pi E} \left[ \frac{r z}{R^3} - (1 - 2 \mu) \frac{r}{R(R + z)} \right] \quad (10)$$

$$w = \frac{P(1 + \mu)}{2 \pi E} \left[ \frac{2(1 - \mu)}{R} + \frac{z^2}{R^3} \right] \quad (11)$$

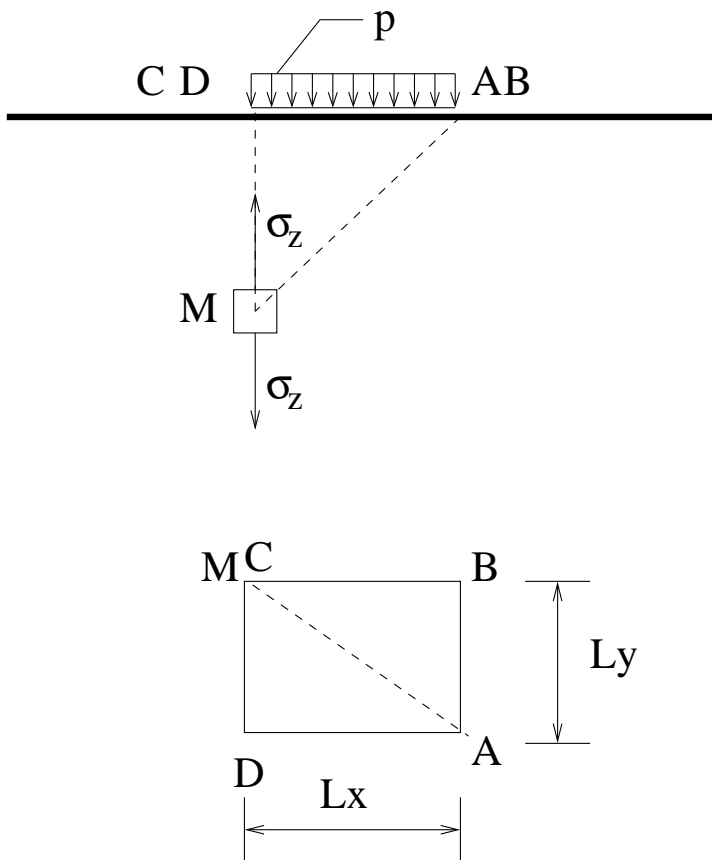
(12)

Pro povrch poloprostoru ( $z = 0$ ):

$$w_{pp} = \frac{R (1 - \mu)^2}{\pi E r} \quad (13)$$

# Pružný poloprostor (5)

Zatížení na ploše obdélníka:



Označme:

$$s = \sqrt{L_x^2 + L_y^2} \quad (14)$$

$$L = \sqrt{s^2 + z^2} \quad (15)$$

# Pružný poloprostor

(6)

Zatížení na ploše obdélníka:

$$\sigma_z = -\frac{p}{2\pi} \left[ \frac{L_x L_y z}{L} \left( \frac{1}{L_x^2 + z^2} + \frac{1}{L_y^2 + z^2} \right) + \arctan \left( \frac{L_x + L_y}{z L} \right) \right]$$
$$w = \frac{(1 - \mu^2)p}{\pi E} \left( L_x \ln \left( \frac{L_y + s}{L_x} \right) + L_y \ln \left( \frac{L_x + s}{L_y} \right) \right) \quad (1)$$



# Pružný poloprostor

(7)

## Nevýhody, problémy :

- Silně zjednodušuje realitu (v podloží se vždy nachází více vrstev materiálu s různými vlastnostmi).
- Materiál je *lineárně pružný*, což neodpovídá skutečným zemínám a horninám (sypké hmoty, jíly,...)
- Přesnější je náhrada **vrstevnatým poloprostorem** s nelineárními chováním materiálu (např. pružně–plastické podle modelů Mohr–Coulomb, Drucker–Prager a dalších):
  - analytické řešení (velmi obtížné, jen pro jednoduchou geometrii vrstev a pro lineárně pružné chování),
  - modelování **výseku poloprostoru** numericky, například **metodou konečných prvků** – náročné na výpočetní čas, **vstupní data** a vyhodnocení.
- V praxi se takto numericky modeluje hlavně v podzemním sta-

# Pružný poloprostor

(8)

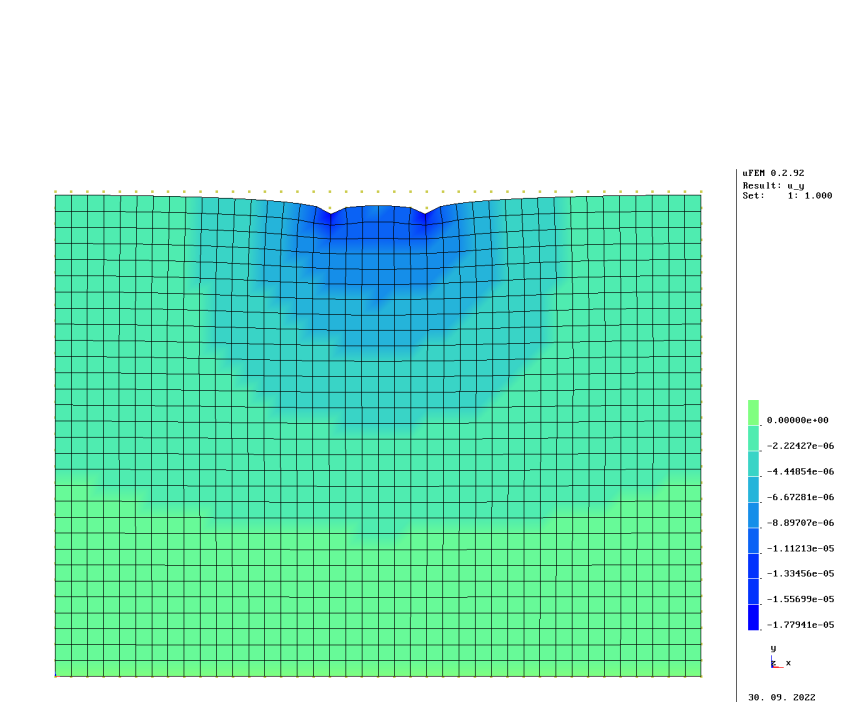
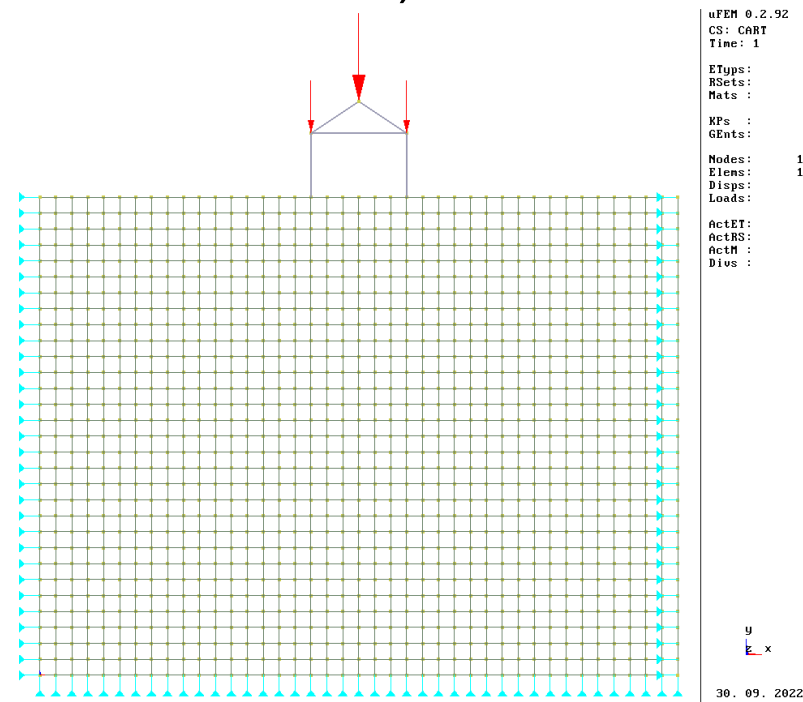
Řešení v MKP

- modelování jen „dostatečně velkého“ výseku poloprostoru
- modelování jen výseku poloroviny pro úlohy rovinné deformace
- vrstevnatý poloprostor: různé vlastnosti konečných prvků

# Pružný poloprostor (9)

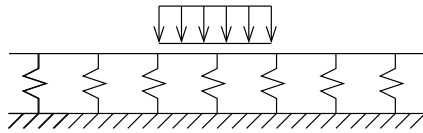
(9)

Řešení v MKP (ilustrace modelu a průběhu svislých napětí od konstrukce)

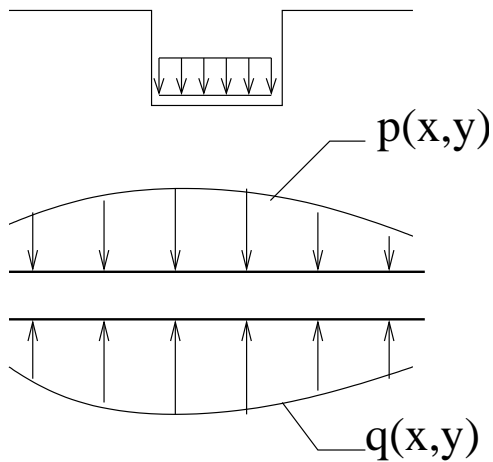


Použitý software: uFEM (<https://github.com/jurabr/ufem>)

# Kontaktní modely podloží (1)



Winklerův model:



$$q(x, y) = C w(x, y) \quad (17)$$

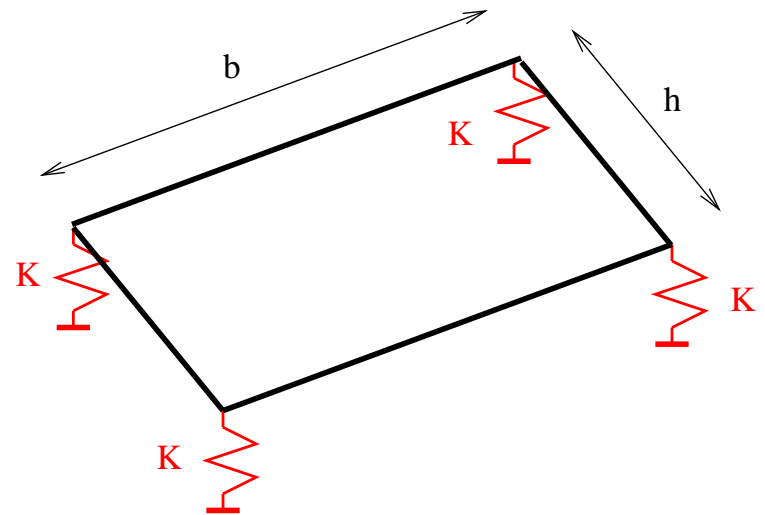
$C$  ... součinitel stlačitelnosti podkladu  $[\frac{N}{m^3}]$ .

# Deska na Winklerově podkladu (1)

- v MKP se obvykle tuhost podloží rozloží do uzlů
- na obdélníkovém prvku např.:

$$K = \frac{1}{4} C_1 b h$$

- možno použít i „ručně“ pokud to výpočetní program nepodporuje
- například program ANSYS: prvek SHELL63, „reálná“ konstanta EFS



# Deska na Winklerově podkladu (2)

- výpočet „matice tuhosti podloží” pomocí tvarových funkcí  $\mathbf{N}$ :

$$\mathbf{K}_e = C_1 \int_A \mathbf{N}^T \mathbf{N} dA,$$

kde  $C_1$  je konstanta Winklerova podkladu

- pro čtyřuzlový obdélníkový prvek:

$$K = \frac{1}{4} C_1 b h$$

