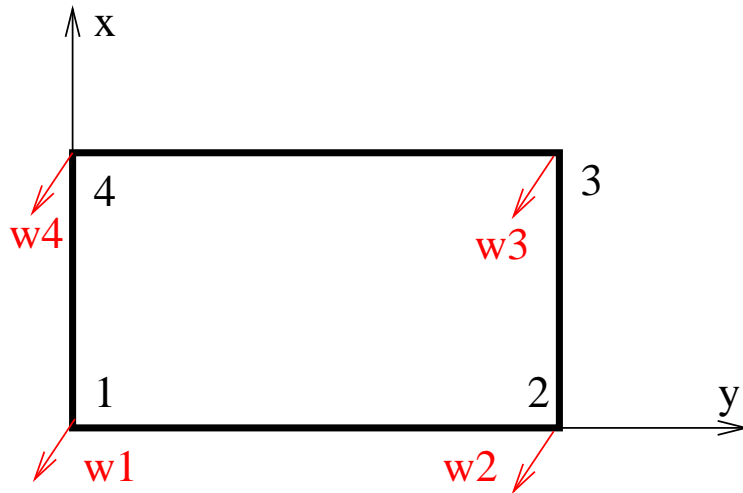


Odvození konečného prvku pro tenkou desku

(1)



Neznámé parametry deformace: w , φ_x , φ_y v každém uzlu.

Tj. celkem dvanáct neznámých uzlových parametrů:

$$\mathbf{r} = \{w_1, \varphi_{x,1}, \varphi_{y,1}, w_2, \varphi_{x,2}, \varphi_{y,2}, w_3, \varphi_{x,3}, \varphi_{y,3}\}^T,$$

$$\varphi_{x,i} = \frac{\partial w_i}{\partial x}, \quad \varphi_{y,i} = \frac{\partial w_i}{\partial y}.$$

Odvození konečného prvku pro tenkou desku (2)

Geometrické rovnice:

$$\varepsilon_x = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad \varepsilon_y = -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \quad \tau_{xy} = -2\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}. \quad (1)$$

Maticově ($\varepsilon = \partial^T \mathbf{u}$):

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\partial^2}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2}{\partial y^2} \\ -2\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \end{bmatrix} \{ w \} \quad (2)$$

Odvození konečného prvku pro tenkou desku (3)

Fyzikální rovnice (bez $q_x, q_y!$):

$$m_x = \frac{E h^3}{12(1 - \mu^2)} (\varepsilon_x + \mu \varepsilon_y) \quad (3)$$

$$m_y = \frac{E h^3}{12(1 - \mu^2)} (\varepsilon_y + \mu \varepsilon_x) \quad (4)$$

$$m_{xy} = \frac{E h^3}{24(1 + \mu^2)} \gamma_{xy} \quad (5)$$

Maticově ($\sigma = D \varepsilon$):

$$\begin{Bmatrix} m_x \\ m_y \\ m_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E h^3}{12(1 - \mu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \mu & 0 \\ \mu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}(1 - \mu) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (6)$$

Odvození konečného prvku pro tenkou desku (4)

Aproximace neznámých uzlových posunutí:

$$w = a_1 + a_2 x + a_3 y + a_4 x^2 + a_5 xy + a_6 y^2 + a_7 x^3 + a_8 x^2 y + a_9 xy^2 + a_{10} y^3 + a_{11} x^3 y + a_{12} xy^3 \quad (7)$$

$$\varphi_x = a_2 + 2a_4 x + a_5 y + 3a_7 x^2 + 2a_8 xy + 3a_{11} x^2 y + a_{12} y^3$$

$$\varphi_y = a_3 + a_5 x + 2a_6 y + a_8 x^2 + 2a_9 xy + 3a_{10} y^2 + a_{11} x^3 + 3a_{12} xy^2$$

Odvození konečného prvku pro tenkou desku

(5)

Maticově ($\mathbf{u} = \mathbf{U} \mathbf{a}$):

$$\{w, \varphi_x, \varphi_y\}^T =$$

$$\begin{bmatrix} 1 & x & y & x^2 & xy & y^2 & x^3 & x^2y & xy^2 & y^3 & x^3y & xy^3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & x & 2y & 0 & x^2 & 2xy & 3y^2 & x^3 & 3xy^2 \\ 0 & -1 & 0 & -2x & -y & 0 & -3x^2 & -2xy & -y^2 & 0 & -3x^2y & -y^3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \\ a_7 \\ a_8 \\ a_9 \\ a_{10} \\ a_{11} \\ a_{12} \end{Bmatrix} \quad (8)$$

Odvození konečného prvku (6)

Aproximace neznámých uzlových posunutí v uzlech 1, 2, 3, 4

($\mathbf{r} = \mathbf{S} \mathbf{a}$):

$$\{w_1, \varphi_{x,1}, \varphi_{y,1}, w_2, \dots, w_4, \varphi_{x,4}, \varphi_{y,4}\}^T =$$

$$\begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 & x_1^2 & x_1 y_1 & y_1^2 & x_1^3 & x_1^2 y_1 & x_1 y_1^2 & y_1^3 & x_1^3 y_1 & x_1 y_1^3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & x_1 & 2y_1 & 0 & x_1^2 & 2x_1 y_1 & 3y_1^2 & x_1^3 & 3x_1 y_1^2 \\ 0 & -1 & 0 & -2x_1 & -y_1 & 0 & -3x_1^2 & -2x_1 y_1 & -y_1^2 & 0 & -3x_1^2 y_1 & -y_1^3 \\ 1 & x_2 & y_2 & x_2^2 & x_2 y_2 & y_2^2 & x_2^3 & x_2^2 y_2 & x_2 y_2^2 & y_2^3 & x_2^3 y_2 & x_2 y_2^3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & x_2 & 2y_2 & 0 & x_2^2 & 2x_2 y_2 & 3y_2^2 & x_2^3 & 3x_2 y_2^2 \\ 0 & -1 & 0 & -2x_2 & -y_2 & 0 & -3x_2^2 & -2x_2 y_2 & -y_2^2 & 0 & -3x_2^2 y_2 & -y_2^3 \\ 1 & x_3 & y_3 & x_3^2 & x_3 y_3 & y_3^2 & x_3^3 & x_3^2 y_3 & x_3 y_3^2 & y_3^3 & x_3^3 y_3 & x_3 y_3^3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & x_3 & 2y_3 & 0 & x_3^2 & 2x_3 y_3 & 3y_3^2 & x_3^3 & 3x_3 y_3^2 \\ 0 & -1 & 0 & -2x_3 & -y_3 & 0 & -3x_3^2 & -2x_3 y_3 & -y_3^2 & 0 & -3x_3^2 y_3 & -y_3^3 \\ 1 & x_4 & y_4 & x_4^2 & x_4 y_4 & y_4^2 & x_4^3 & x_4^2 y_4 & x_4 y_4^2 & y_4^3 & x_4^3 y_4 & x_4 y_4^3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & x_4 & 2y_4 & 0 & x_4^2 & 2x_4 y_4 & 3y_4^2 & x_4^3 & 3x_4 y_4^2 \\ 0 & -1 & 0 & -2x_4 & -y_4 & 0 & -3x_4^2 & -2x_4 y_4 & -y_4^2 & 0 & -3x_4^2 y_4 & -y_4^3 \end{bmatrix}$$

$$\times \{ a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8, a_9, a_{10}, a_{11}, a_{12} \}^T \quad (9)$$

Odvození konečného prvku pro tenkou desku (7)

Kombinací vztahů $\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\partial}^T \mathbf{u}$ a $\mathbf{u} = \mathbf{U} \mathbf{a}$ vznikne $\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B} \mathbf{a}$, kde $\mathbf{B} = \boldsymbol{\partial}^T \mathbf{U}$.

Z $\mathbf{r} = \mathbf{S} \mathbf{a}$ plyne: $\mathbf{a} = \mathbf{S}^{-1} \mathbf{r}$ a $\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B} \mathbf{S}^{-1} \mathbf{r}$.

Potenciální energie vnitřních sil:

$$\Pi_i = \frac{1}{2} \int_V \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} dV = \frac{1}{2} \int_V \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon} dV \quad (10)$$

Potenciální energie vnějších sil:

$$\Pi_e = - \int_V \mathbf{X}^T \mathbf{r} dV - \int_S \mathbf{p}^T \mathbf{r} dS. \quad (11)$$

Odvození konečného prvku pro tenkou desku (8)

Potenciální energie soustavy:

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_V \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon} dV - \int_V \mathbf{X}^T \mathbf{r} dV - \int_S \mathbf{p}^T \mathbf{r} dS. \quad (12)$$

Po dosazení za $\boldsymbol{\varepsilon}$ a vytknutí \mathbf{r} :

$$\Pi = \frac{1}{2} \mathbf{r}^T \int_V \mathbf{S}^{-1T} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} \mathbf{S}^{-1} dV \mathbf{r} - \int_V \mathbf{X}^T dV \mathbf{r} - \int_S \mathbf{p}^T dS \mathbf{r}. \quad (13)$$

Stručně:

$$\Pi = \frac{1}{2} \mathbf{r}^T \mathbf{K} \mathbf{r} - \mathbf{F}^T \mathbf{r}. \quad (14)$$

Odvození konečného prvku pro tenkou desku (9)

Aplikací Lagrangeova variačního principu ($\partial \Pi = \min.$) na (14):

$$\mathbf{K} \mathbf{r} = \mathbf{F}, \quad (15)$$

kde \mathbf{K} ... matice tuhosti konečného prvku:

$$\mathbf{K} = \int_V \mathbf{S}^{-1T} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} \mathbf{S}^{-1} dV, \quad (16)$$

\mathbf{F} ... zatěžovací vektor konečného prvku:

$$\mathbf{F} = - \int_V \mathbf{X}^T dV - \int_S \mathbf{p}^T dS. \quad (17)$$

Odvození konečného prvku pro tenkou desku (10)

Pro studovaný konečný prvek je vhodné použít numerickou integraci ve 2D, protože matice \mathbf{B} obsahuje proměnné x, y a její obecné vyčíslení je pracné.

$$\mathbf{K} = t \int_A \mathbf{S}^{-1T} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} \mathbf{S}^{-1} dA, \quad (18)$$

kde t ... tloušťka konečného prvku.

$$\mathbf{F} = \mathbf{X} + \mathbf{p}. \quad (19)$$

Analýza konstrukce

Z \mathbf{K}_e a \mathbf{r}_e a \mathbf{F}_e jednotlivých prvků (e je číslo prvku) sestavíme \mathbf{K} a \mathbf{r} a \mathbf{F} celé konstrukce a neznámé určíme řešením soustavy rovnic:

$$\mathbf{K} \mathbf{r} = \mathbf{F}. \quad (20)$$

Výpočet výsledků (vnitřních sil a deformací) na konečných prvcích

1. z vektoru \mathbf{r} celé konstrukce sestavíme vektory \mathbf{r}_e jednotlivých konečných prvků

2. pro každý prvek stanovíme poměrné deformace:

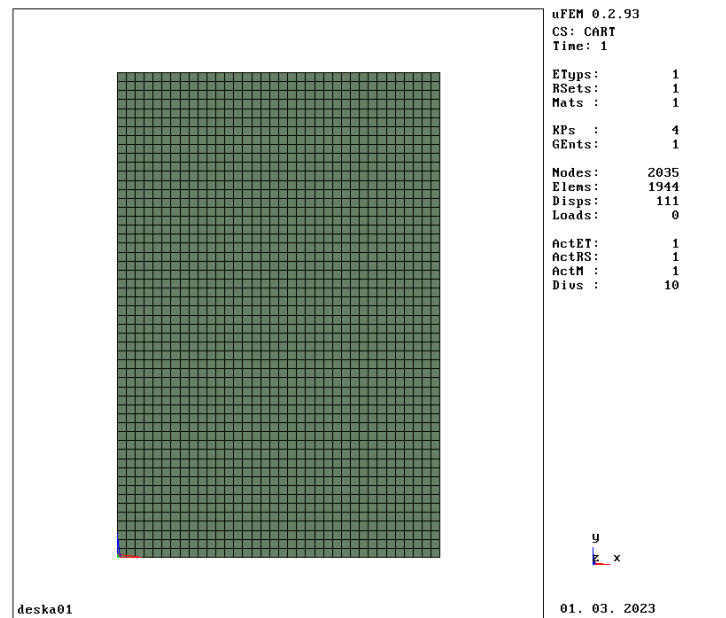
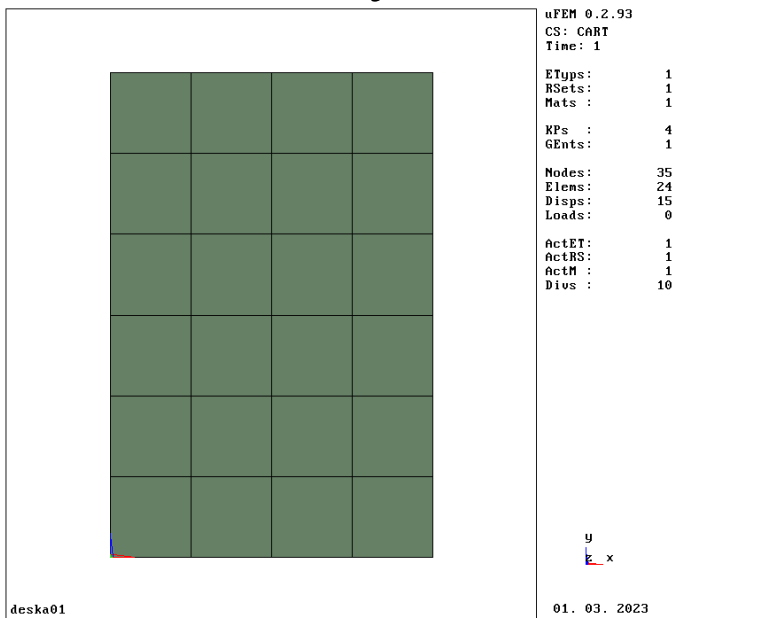
$$\boldsymbol{\varepsilon}_e = \mathbf{B} \mathbf{S}^{-1} \mathbf{r}_e$$

3. pro každý prvek stanovíme napětí:

$$\boldsymbol{\sigma}_e = \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon}_e \text{ nebo } \boldsymbol{\sigma}_e = \mathbf{D} \mathbf{B} \mathbf{S}^{-1} \mathbf{r}_e$$

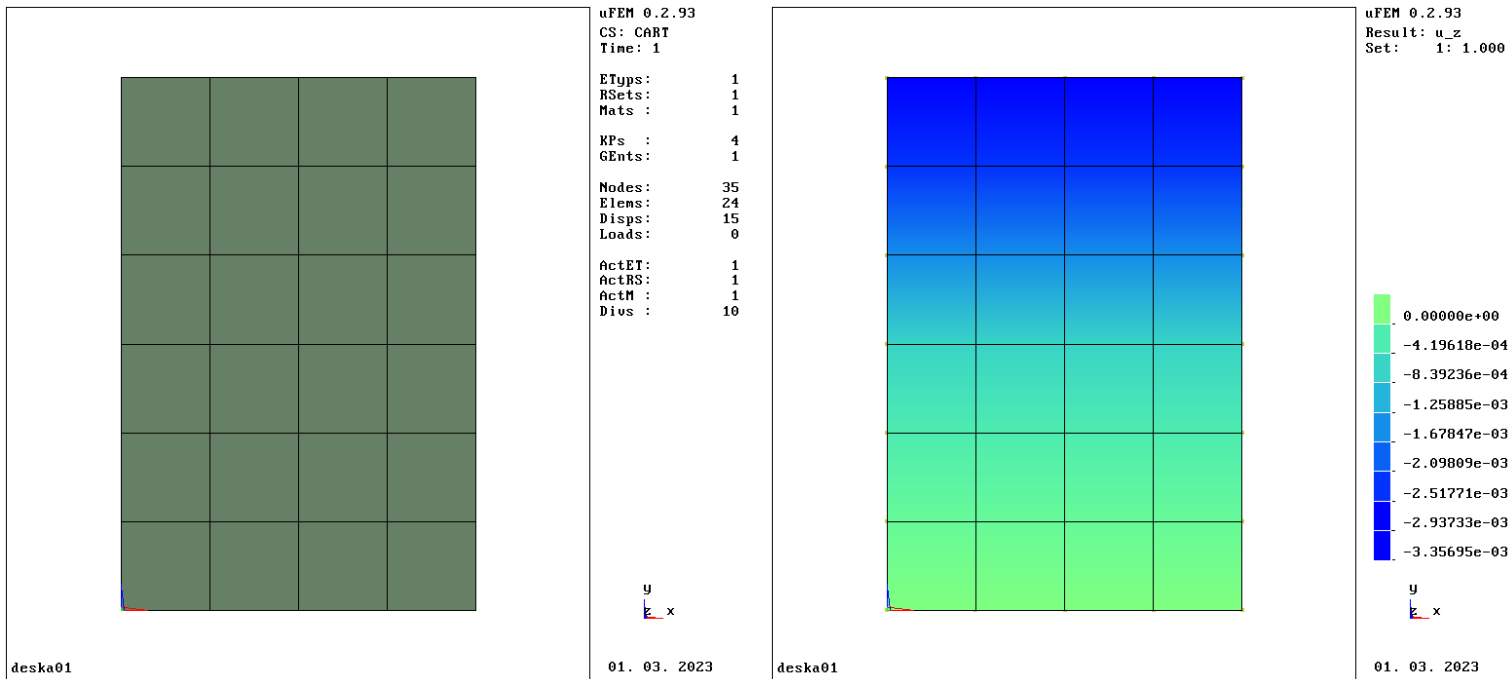
Ukázka desky (1)

- Je použit čtyřuzlový prvek.
- Deska $4 \times 6 \times 0.2$ m vetknutá na jednom okraji a zatížená vlastní tíhou.
- Tři modely s různou hustotou sítě.



Ukázka desky (2)

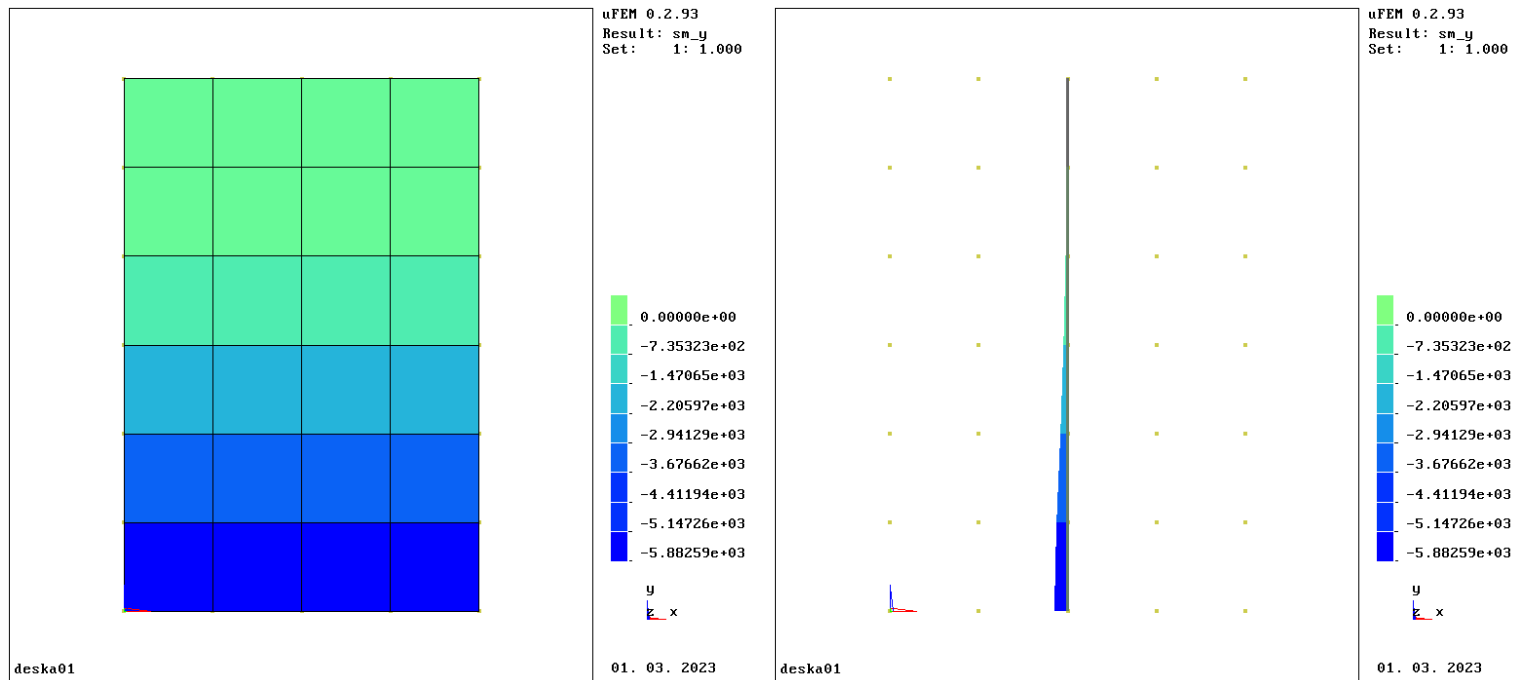
Síť 4×6 prvků – deformace:



$$u_{z,max} = 3.36 \text{ mm.}$$

Ukázka desky (3)

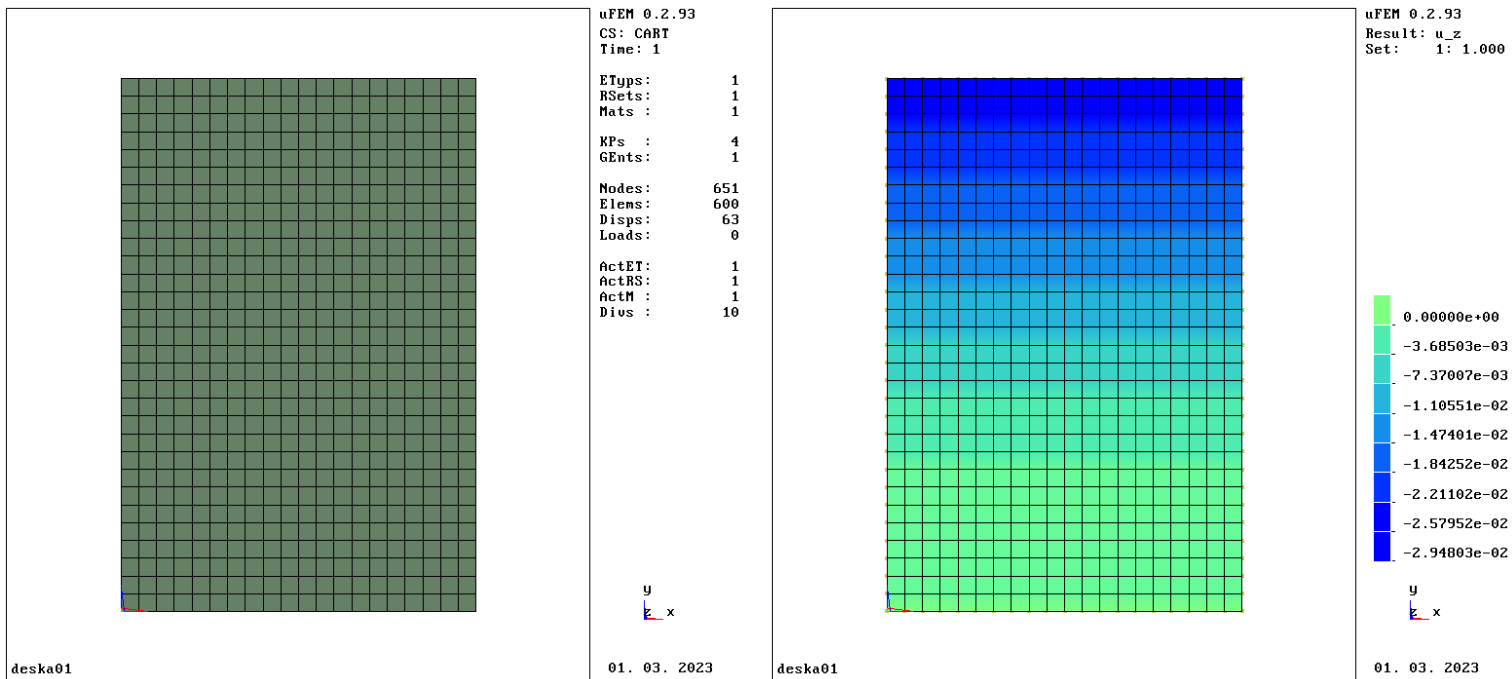
Síť 4 × 6 prvků – měrný moment:



$$m_{y,max} = 5.88 \frac{kN \cdot m}{m}$$

Ukázka desky (4)

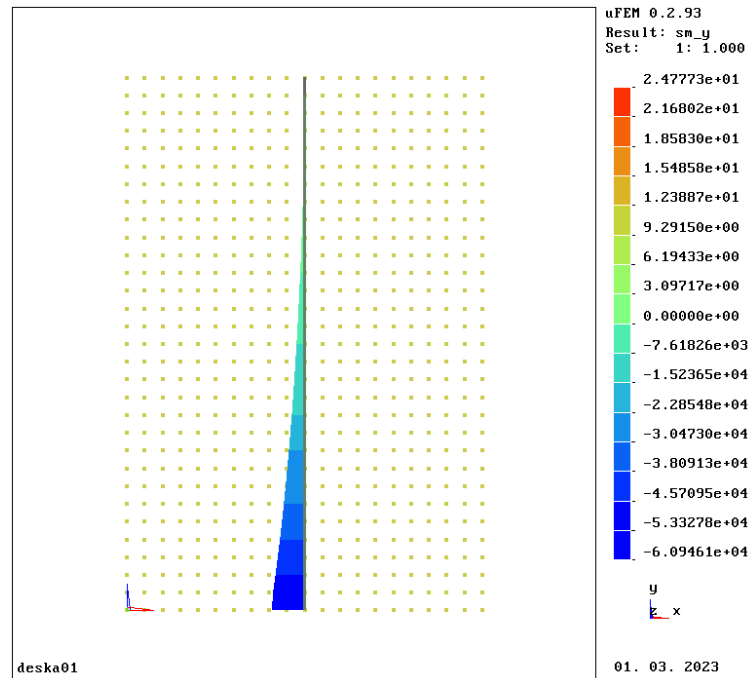
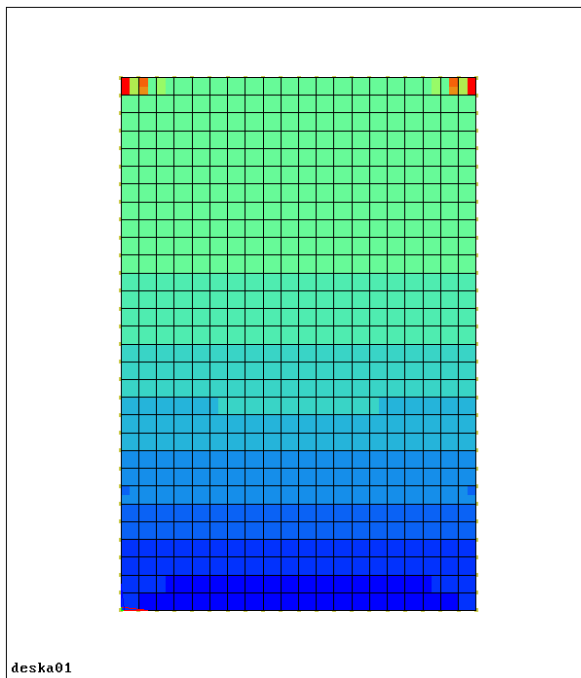
Síť 20 × 30 prvků – deformace:



$$u_{z,max} = 29.48 \text{ mm.}$$

Ukázka desky (5)

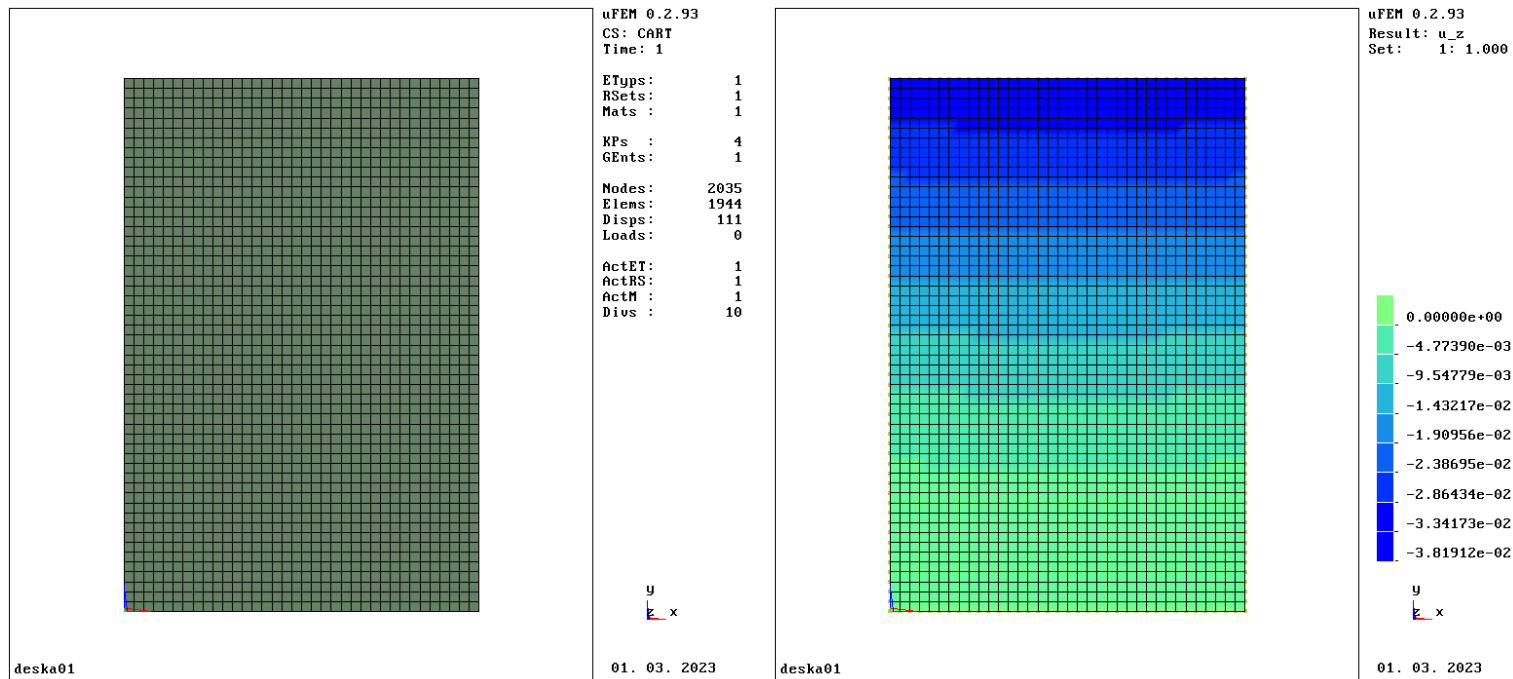
Síť 20 × 30 prvků – měrný moment:



$$m_{y,max} = 60.59 \frac{kN \cdot m}{m}$$

Ukázka desky (6)

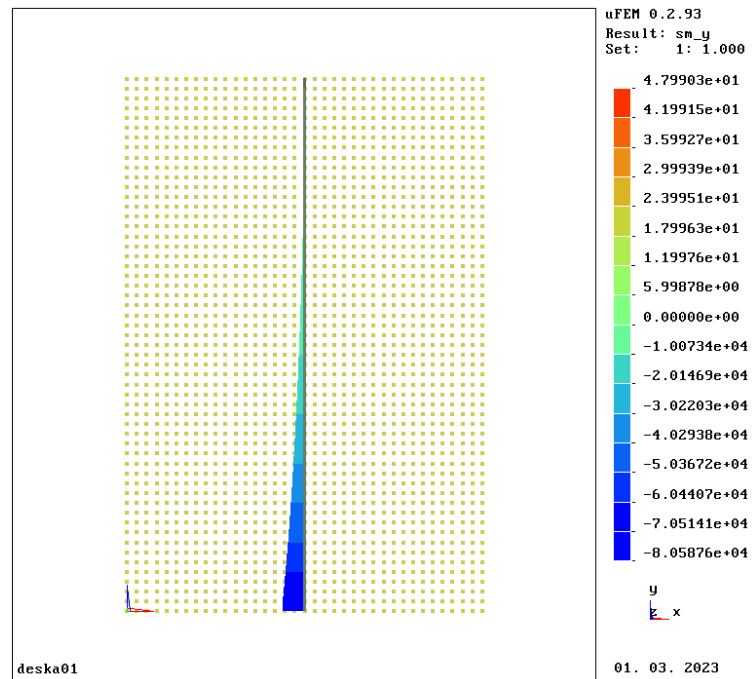
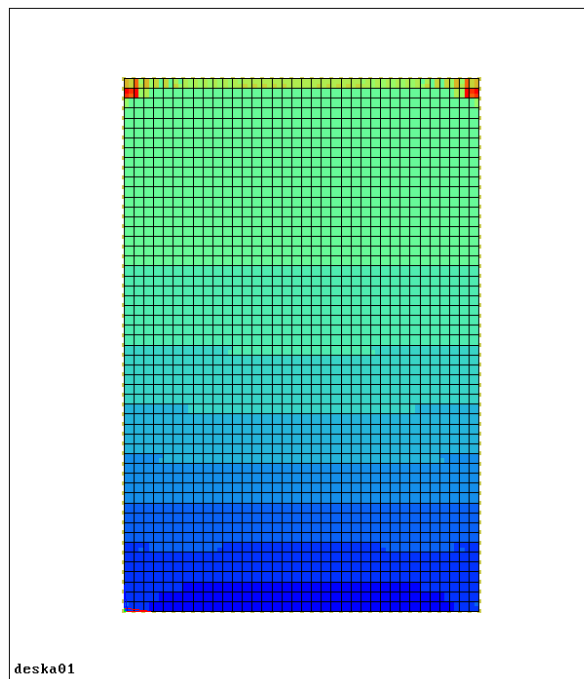
Síť 36 × 54 prvků – deformace:



$$u_{z,max} = 38.19 \text{ mm.}$$

Ukázka desky (7)

Síť 20 × 20 prvků – měrný moment:



$$m_{y,max} = 80.59 \frac{kN \cdot m}{m}$$

Ukázka desky (8)

Co si z výsledků odnést:

- Čím méně prvků, tím tužší deska.
- Velmi hustá síť může vést k lokálním extrémům.

Nosníkové řešení (pozor, deska je dost široká, takže není „přesné“):

$$M_{max} = 90 \text{ kN m} \Rightarrow m_{max} = 60 \text{ kN m}$$

$$w_{max} = 60.75 \text{ mm}$$