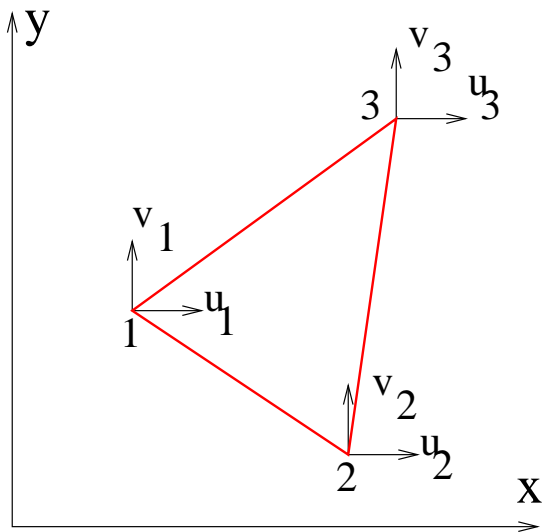


# Odvození konečného prvku pro rovinný problém (1)



Neznámé parametry deformace:  $u, v$  v každém uzlu.

Tj. celkem šest neznámých uzlových parametrů:

$$\{u_1, v_1, u_2, v_2, u_3, v_3\}^T.$$

# Odvození konečného prvku pro rovinný problém (2)

Geometrické rovnice:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \tau_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}. \quad (1)$$

Maticově ( $\varepsilon = \partial^T \mathbf{u}$ ):

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} \quad (2)$$

# Odvození konečného prvku pro rovinný problém (3)

Podmínky rovnováhy:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + X = 0, \quad \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + Y = 0. \quad (3)$$

Maticově ( $\partial \sigma + \mathbf{X} = \mathbf{0}$ ):

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} X \\ Y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (4)$$

# Odvození konečného prvku pro rovinný problém (4a)

Fyzikální rovnice (rovinná napjatost):

$$\sigma_x = \frac{E}{1 - \mu^2} (\varepsilon_x + \mu \varepsilon_y) \quad (5)$$

$$\sigma_y = \frac{E}{1 - \mu^2} (\varepsilon_y + \mu \varepsilon_x) \quad (6)$$

$$\tau_{xy} = \frac{E}{2(1 - \mu)} \gamma_{xy} \quad (7)$$

Maticově ( $\sigma = D \varepsilon$ ):

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{1 - \mu^2} \begin{bmatrix} 1 & \mu & 0 \\ \mu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}(1 + \mu) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (8)$$

# Odvození konečného prvku pro rovinný problém (4b)

Fyzikální rovnice (rovinná deformace):

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \frac{E}{(1 + \mu)(1 - 2\mu)} [(1 - \mu) \varepsilon_x + \mu \varepsilon_y] \\ \sigma_y &= \frac{E}{(1 + \mu)(1 - 2\mu)} [\mu \varepsilon_x + (1 - \mu) \varepsilon_y] \\ \tau_{xy} &= \frac{E}{(1 + \mu)(1 - 2\mu)} \gamma_{xy} \frac{1}{2}(1 - \mu)\end{aligned} \quad (9)$$

Maticově ( $\sigma = D \varepsilon$ ):

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{(1 + \mu)(1 - 2\mu)} \begin{bmatrix} 1 - \mu & \mu & 0 \\ \mu & 1 - \mu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}(1 - \mu) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}$$

# Odvození konečného prvku pro rovinný problém

(5)

Aproximace neznámých uzlových posunutí:

$$u(x, y) = a_1 x + a_2 y + a_3 \quad (10)$$

$$v(x, y) = a_4 x + a_5 y + a_6 \quad (11)$$

Maticově ( $\mathbf{u} = \mathbf{U} \mathbf{a}$ ):

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x & y & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \end{Bmatrix} \quad (12)$$

# Odvození konečného prvku pro rovinný problém (6)

Aproximace neznámých uzlových posunutí v uzlech 1, 2, 3  
( $\mathbf{r} = \mathbf{S} \mathbf{a}$ ):

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x_3 & y_3 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \end{Bmatrix} \quad (13)$$

# Odvození konečného prvku pro rovinný problém (7)

Kombinací vztahů  $\varepsilon = \partial^T u$  a  $u = U a$  vznikne  $\varepsilon = B a$ , kde  $B = \partial^T U$ :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & y & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x & y & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \end{Bmatrix} \quad (14)$$



# Odvození konečného prvku pro rovinný problém (8)

Kombinací vztahů  $\varepsilon = \partial^T u$  a  $u = U a$  vznikne  $\varepsilon = B a$ ,  
kde  $B = \partial^T U$ :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \end{Bmatrix} \quad (15)$$

# Odvození konečného prvku pro rovinný problém (9)

Z  $\mathbf{r} = \mathbf{S} \mathbf{a}$  plyne:  $\mathbf{a} = \mathbf{S}^{-1} \mathbf{r}$ .

Pak:  $\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B} \mathbf{S}^{-1} \mathbf{r}$ .

Potenciální energie vnitřních sil:

$$\Pi_i = \frac{1}{2} \int_V \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} dV = \frac{1}{2} \int_V \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon} dV \quad (16)$$

Potenciální energie vnějších sil:

$$\Pi_e = - \int_V \mathbf{X}^T \mathbf{r} dV - \int_S \mathbf{p}^T \mathbf{r} dS. \quad (17)$$

# Odvození konečného prvku pro rovinný problém (10)

Potenciální energie soustavy:

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_V \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon} dV - \int_V \mathbf{X}^T \mathbf{r} dV - \int_S \mathbf{p}^T \mathbf{r} dS. \quad (18)$$

Po dosazení za  $\boldsymbol{\varepsilon}$  a vytknutí  $\mathbf{r}$ :

$$\Pi = \frac{1}{2} \mathbf{r}^T \int_V \mathbf{S}^{-1T} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} \mathbf{S}^{-1} dV \mathbf{r} - \int_V \mathbf{X}^T dV \mathbf{r} - \int_S \mathbf{p}^T dS \mathbf{r}. \quad (19)$$

Stručně:

$$\Pi = \frac{1}{2} \mathbf{r}^T \mathbf{K} \mathbf{r} - \mathbf{F}^T \mathbf{r}. \quad (20)$$

# Odvození konečného prvku pro rovinný problém (11)

Aplikací Lagrangeova variačního principu ( $\delta \Pi = 0$ ) na (20):

$$\mathbf{K} \mathbf{r} = \mathbf{F}, \quad (21)$$

kde  $\mathbf{K}$  ... matice tuhosti konečného prvku:

$$\mathbf{K} = \int_V \mathbf{S}^{-1T} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} \mathbf{S}^{-1} dV, \quad (22)$$

$\mathbf{F}$  ... zatěžovací vektor konečného prvku:

$$\mathbf{F} = - \int_V \mathbf{X}^T dV - \int_S \mathbf{p}^T dS. \quad (23)$$

# Odvození konečného prvku pro rovinný problém (12)

Pro studovaný konečný prvek:

$$\mathbf{K} = t \mathbf{A} \mathbf{S}^{-1T} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} \mathbf{S}^{-1}, \quad (24)$$

kde  $t$  ... tloušťka konečného prvku,  $A$  ... plocha konečného prvku.

$$\mathbf{F} = \mathbf{X} + \mathbf{p}. \quad (25)$$

# Analýza konstrukce

Z  $\mathbf{K}_e$  a  $\mathbf{r}_e$  a  $\mathbf{F}_e$  jednotlivých prvků ( $e$  je číslo prvku) sestavíme  $\mathbf{K}$  a  $\mathbf{r}$  a  $\mathbf{F}$  celé konstrukce a neznámé určíme řešením soustavy rovnic:

$$\mathbf{K} \mathbf{r} = \mathbf{F}. \quad (26)$$

# Výpočet výsledků (napětí a deformací) na konečných prvcích

1. z vektoru  $\mathbf{r}$  celé konstrukce sestavíme vektory  $\mathbf{r}_e$  jednotlivých konečných prvků

2. pro každý prvek stanovíme poměrné deformace:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_e = \mathbf{B} \mathbf{S}^{-1} \mathbf{r}_e$$

3. pro každý prvek stanovíme napětí:

$$\boldsymbol{\sigma}_e = \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon}_e \text{ nebo } \boldsymbol{\sigma}_e = \mathbf{D} \mathbf{B} \mathbf{S}^{-1} \mathbf{r}_e$$

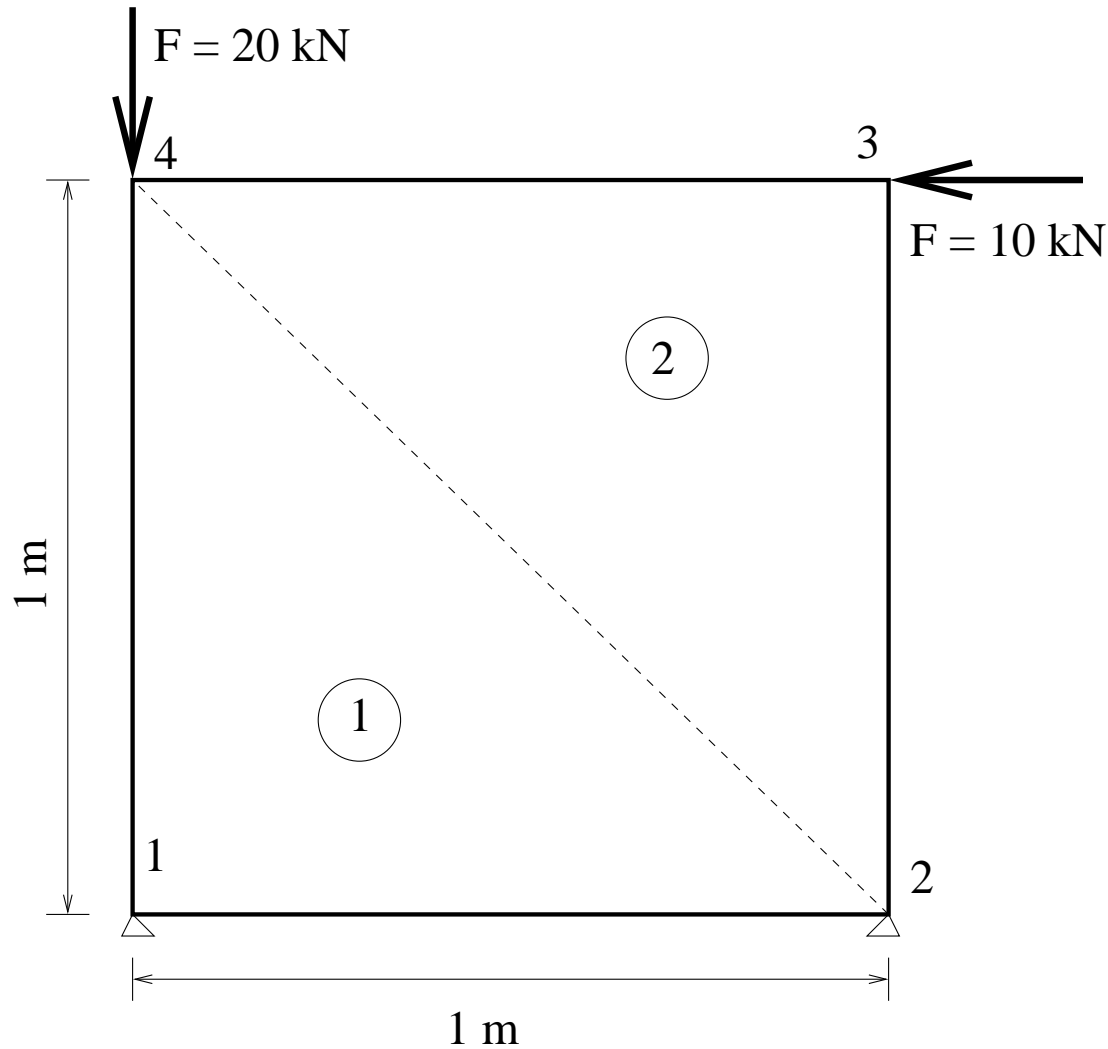
# Příklad: Analýza stěny metodou konečných prvků (1)

Stanovte průběhy posunutí, napětí a poměrných deformací na stěně. Úlohu řešte metodou konečných prvků, použijte konečný prvek odvozený na minulé přednášce.

Geometrie, zatížení a dělení na konečné prvky jsou uvedeny na obrázku, tloušťka stěny je konstantní a má velikost  $t = 0.1 \text{ m}$ , modul pružnosti použitého materiálu je  $E = 20 \text{ GPa}$ , Poissonův součinitel má velikost 0.2.



# Příklad: Analýza stěny metodou konečných prvků (2)



# Příklad: Matice tuhosti konečného prvku (3)

V dále uvedeném tvaru matice tuhosti (viz Kolář a kol: Finite Element Method, Brno, 1971) se vyskytují některé symboly:

$$\begin{aligned}C_1 &= \frac{E}{1 - \mu^2} \\C_2 &= \mu \\ \lambda &= \frac{1}{2}(1 - C_2)\end{aligned}$$

$$\begin{vmatrix} x_i & y_i & 1 \\ x_j & y_j & 1 \\ x_k & y_k & 1 \end{vmatrix} = x_i y_j 1 + x_j y_k 1 + x_k y_i 1 - (x_k y_j 1 + x_j y_i 1 + x_i y_k 1)$$

Souřadnicové rozdíly:  $x_{ij} = x_i - x_j$ ,  $y_{ij} = y_i - y_j, \dots$

# Příklad: Matice tuhosti konečného prvku (Kolář a kol, 1970) (3a)

Matice tuhosti trojúhelníkového prvku  $i j k$  (obr. 7; str. 44)

$$K = \frac{C_1 t}{2} \begin{bmatrix} x_i y_i 1 \\ x_j y_j 1 \\ x_k y_k 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{jk}^2 + \lambda x_{jk}^2 & -C_2 x_{jk} y_{jk} - \lambda y_{jk} x_{jk} & -y_{ik} y_{jk} - \lambda x_{jk} x_{ik} & C_2 x_{ik} y_{jk} + \lambda y_{ik} x_{jk} & y_{jk} y_{ij} + \lambda x_{jk} x_{ij} & -C_2 y_{jk} x_{ij} - \lambda x_{jk} y_{ij} \\ x_{jk}^2 + \lambda y_{jk}^2 & C_2 x_{jk} y_{ik} + \lambda x_{ik} y_{jk} & -x_{jk} x_{ik} - \lambda y_{jk} y_{ik} & -C_2 x_{jk} y_{ij} - \lambda y_{jk} x_{ij} & x_{ij} x_{jk} + \lambda y_{jk} y_{ij} \\ y_{ik}^2 + \lambda x_{ik}^2 & C_2 x_{ik} y_{ik} - \lambda x_{ik} y_{ik} & -y_{ik} y_{ij} - \lambda x_{ik} x_{ij} & C_2 x_{ij} y_{ik} + \lambda x_{ik} y_{ij} \\ x_{ik}^2 + \lambda y_{ik}^2 & C_2 x_{ik} y_{ij} + \lambda y_{ik} x_{ij} & -x_{ik} x_{ij} - \lambda y_{ik} y_{ij} \\ y_{ij}^2 + \lambda x_{ij}^2 & -C_2 x_{ij} y_{ij} - \lambda x_{ij} y_{ij} \\ x_{ij}^2 + \lambda y_{ij}^2 \end{bmatrix}$$

Symetrie

Uspořádání:

$$\underline{\Delta}^T = [u_i \ v_i \ u_j \ v_j \ u_k \ v_k] \ , \quad \underline{F}^T = [F_{xi} \ F_{yi} \ F_{xj} \ F_{yj} \ F_{xk} \ F_{yk}] \ , \quad \underline{K} \underline{\Delta} = \underline{F}$$

Označení: Souřadnicové rozdíly  $x_{ij}$  atd. podle (2.65)

Fyzikální konstanty  $C_1, C_2$  podle (2.78) - rovinná napjatost

(2.79) - rovinná deformace

$$\lambda = \frac{1}{2} (1 - C_2)$$

$$C_1 = \frac{E}{1 - \nu^2} \quad C_2 = \nu$$

# Příklad: Konečný prvek č. 1 (4)

$$C_1 = \frac{E}{1 - \mu^2} = \frac{20 \cdot 10^9}{1 - 0,2^2} = 20,83 \cdot 10^9$$

$$C_2 = \mu = 0,2$$

$$\lambda = \frac{1}{2} (1 - C_2) = \frac{1}{2} (1 - 0,2) = 0,4$$

$x_i = x_1 = 0$	$y_i = y_1 = 0$	$x_{ij} = -1$	$y_{ij} = 0$
$x_j = x_2 = 1$	$y_j = y_2 = 0$	$x_{jk} = 1$	$y_{jk} = -1$
$x_k = x_4 = 0$	$y_k = y_4 = 1$	$x_{ik} = 0$	$y_{ik} = -1$

Násobitel matice tuhosti (ten zlomek s determinanem dole):

$$NAS_1 = \frac{C_1 t}{2 \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{20,83 \cdot 10^9 \cdot 0,1}{2 \cdot 1} = 1,042 \cdot 10^9$$

# Příklad: Konečný prvek č. 1 (5)

Matice tuhosti (bez násobitele):

	$u_1$	$v_1$	$u_2$	$v_2$	$u_4$	$v_4$
$u_1$	1,4	0,6	1,0	-0,4	-0,4	-0,2
$v_1$	0,6	1,4	-0,2	-0,4	-0,4	-1,0
$u_2$	1,0	-0,2	1,0	0	0	0,2
$v_2$	-0,4	-0,4	0	0,4	0,4	0
$u_4$	-0,4	-0,4	0	0,4	0,4	0
$v_4$	-0,2	-1,0	0,2	0	0	1,0

# Příklad: Konečný prvek č. 2 (6)

$$C_1 = \frac{E}{1 - \mu^2} = \frac{20 \cdot 10^9}{1 - 0,2^2} = 20,83 \cdot 10^9$$

$$C_2 = \mu = 0,2$$

$$\lambda = \frac{1}{2} (1 - C_2) = \frac{1}{2} (1 - 0,2) = 0,4$$

$x_i = x_2 = 1$	$y_i = y_2 = 0$	$x_{ij} = 0$	$y_{ij} = -1$
$x_j = x_3 = 1$	$y_j = y_3 = 1$	$x_{jk} = 1$	$y_{jk} = 0$
$x_k = x_4 = 0$	$y_k = y_4 = 1$	$x_{ik} = 1$	$y_{ik} = -1$

Násobitel matice tuhosti (ten zlomek s determinanem dole):

$$NAS_2 = \frac{C_1 t}{2 \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{20,83 \cdot 10^9 \cdot 0,1}{2 \cdot 1} = 1,042 \cdot 10^9$$

# Příklad: Konečný prvek č. 2 (7)

Matice tuhosti (bez násobitele):

	$u_2$	$v_2$	$u_3$	$v_3$	$u_4$	$v_4$
$u_2$	0,4	0	-0,4	-0,4	0	0,4
$v_2$	0	1,0	-0,2	-1,4	0,2	0
$u_3$	-0,4	-0,2	1,4	0,2	-1,0	-0,4
$v_3$	-0,4	-1,0	0,2	1,4	-0,2	-0,4
$u_4$	0	0,2	-1,0	-0,2	1,0	0
$v_4$	0,4	0	-0,4	-0,4	0	0,4

Násobitel je náhodou u obou matic stejný (neplatí obecně!).

Zneužijeme toto a necháme si ho až na později.

# Příklad: Matice tuhosti konstrukce (8)

- Sestavíme ji z matic tuhostí jednotlivých prvků,
- její velikost je rovna počtu stupňů volnosti  $(u_i, v_i)$  konstrukce,
- kontrole: matice musí být symetrická dle hlavní diagonály (souvisí s Bettiho větou).



# Příklad: Matice tuhosti kce (9)

Postup sestavení:

1. vyrobíme tabulku s počtem řádků a sloupců rovným počtu stupňů volnosti v konstrukci,
2. řádky a sloupce vhodně označíme (např.  $u_1 \dots v_4$ , stejným systémem jako u matic tuhosti prvků),
3. členy matic tuhostí prvků umísťujeme do matice tuhosti konstrukce podle indexů ( $[u_1, v_4]$  do  $[u_1, v_4]$  atd.) – pokud se někde setkají členy z více matic, tak je sečteme.

# Příklad: Matice tuhosti kce (10)

Matice tuhosti (bez násobitele):

	$u_1$	$v_1$	$u_2$	$v_2$	$u_3$	$v_3$	$u_4$	$v_4$
$u_1$	1,4	0,6	1,0	-0,4	0	0	-0,4	-0,2
$v_1$	0,6	1,4	-0,2	-0,4	0	0	-0,4	-1,0
$u_2$	1,0	-0,2	1,4	0	-0,4	-0,4	0	0,6
$v_2$	-0,4	-0,4	0	1,4	-0,2	-1,0	0,6	0
$u_3$	0	0	-0,4	-0,2	1,4	0,2	-1,0	-0,4
$v_3$	0	0	-0,4	-1,0	0,2	1,4	-0,2	-0,4
$u_4$	-0,4	-0,4	0	0,6	-1,0	-0,2	1,4	0
$v_4$	-0,2	-1,0	0,6	0	-0,4	-0,4	0	1,4

# Příklad: zatěžovací vektor (11)

- Vektor má stejnou velikost jako matice tuhosti,
- jednotlivé uzlové síly zapíšeme do řádků odpovídajících posunutím na kterých „pracují“,
- síla je kladná pokud působá ve směru kladné příslušné poloosy systému souřadnic.

# Příklad: zatěžovací vektor (12)

Tedy v našem případě:

$$F1 = F_{x,3} = -10\,000\text{N} \dots na \ u_3$$

$$F2 = F_{y,4} = -20\,000\text{N} \dots na \ v_4$$

Zatěžovací vektor:

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= \{F_{x,1}, F_{y,1}, F_{x,2}, F_{y,2}, F_{x,3}, F_{y,3}, F_{x,4}, F_{y,4}\}^T \\ &= \{0, 0, 0, 0, -10000, 0, 0, -20000\}^T \end{aligned}$$

# Příklad: soustava rovnic

(13)

$$N \begin{bmatrix} 1,4 & 0,6 & 1,0 & -0,4 & 0 & 0 & -0,4 & -0,2 \\ 0,6 & 1,4 & -0,2 & -0,4 & 0 & 0 & -0,4 & -1,0 \\ 1,0 & -0,2 & 1,4 & 0 & -0,4 & -0,4 & 0 & 0,6 \\ -0,4 & -0,4 & 0 & 1,4 & -0,2 & -1,0 & 0,6 & 0 \\ 0 & 0 & -0,4 & -0,2 & 1,4 & 0,2 & -1,0 & -0,4 \\ 0 & 0 & -0,4 & -1,0 & 0,2 & 1,4 & -0,2 & -0,4 \\ -0,4 & -0,4 & 0 & 0,6 & -1,0 & -0,2 & 1,4 & 0 \\ -0,2 & -1,0 & 0,6 & 0 & -0,4 & -0,4 & 0 & 1,4 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -10000 \\ 0 \\ 0 \\ -20000 \end{pmatrix}$$

$$N = 1,042 \cdot 10^9$$

Pěkné, že? Jenže tato soustava má nekonečně mnoho řešení (klidně zkuste ji vyřešit). Ještě je třeba uplatnit okrajové podmínky, aby nám konstrukce nelétala v prostoru.

# Příklad: okrajové podmínky (14)

V deformační variantě MKP zavádíme pevné podpory jako nulové hodnoty posunutí kterým brání (tj. přímo známe hodnoty posunutí).

V tomto příkladu tedy:

$$u_1 = 0$$

$$v_1 = 0$$

$$u_2 = 0$$

$$v_2 = 0$$

# Příklad: okrajové podmínky (14)

Praktické provedení (odpovídající rovnice není třeba a musíme se jí „zbavit“ – převést na tvar  $1 \times 0 = 0$ ):

- dosadíme hodnotu 0 na příslušné místo ve vektoru neznámých
- vynulujeme příslušný řádek vektoru pravé strany
- vynulujeme příslušný řádek a sloupec matice tuhosti a na diagonálu dosadíme 1

# Příklad: okrajové podmínky (15)

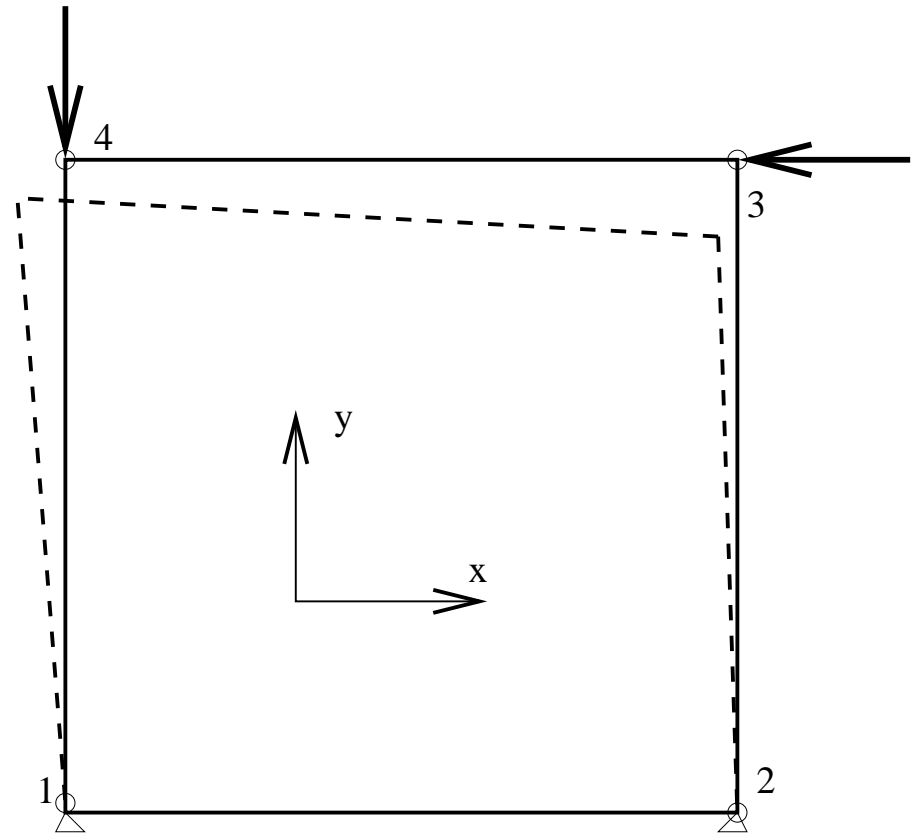
$$N \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1,4 & 0,2 & -1,0 & -0,4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,2 & 1,4 & -0,2 & -0,4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1,0 & -0,2 & 1,4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0,4 & -0,4 & 0 & 1,4 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -10000 \\ 0 \\ 0 \\ -20000 \end{pmatrix}$$

$$N = 1,042 \cdot 10^9$$



# Příklad: výsledky – posunutí (15)

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -3,87 \\ -0,39 \\ -2,82 \\ -1,91 \end{Bmatrix} \cdot 10^{-5}$$



# Příklad: výsledky na prvcích (16)

- z vektoru posunutí konstrukce vybereme hodnoty příslušné danému prvku
- z odvození víme (a použijeme):

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \{\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}\}^T = \mathbf{BS}^{-1}\mathbf{u}$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \{\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}\}^T = \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon}$$

# Příklad: výsledky na prvcích (17)

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{S} = \begin{bmatrix} x_i & y_i & 1 & 0 & 0 & 0 \\ x_j & y_j & 1 & 0 & 0 & 0 \\ x_k & y_k & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x_i & y_i & 1 \\ 0 & 0 & 0 & x_j & y_j & 1 \\ 0 & 0 & 0 & x_k & y_k & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{D} = \frac{E}{1 - \mu^2} \begin{bmatrix} 1 & \mu & 0 \\ \mu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}(1 + \mu) \end{bmatrix}$$

# Příklad: výsledky na prvku 1 (18)

$$\mathbf{u}_1 = \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_4 \\ v_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -2,82 \\ -1,91 \end{Bmatrix} 10^{-5}$$

$$\mathbf{D} = 20,83 \cdot 10^9 \begin{bmatrix} 1 & 0,2 & 0 \\ 0,2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0,4 \end{bmatrix}$$

# Příklad: výsledky na prvku 1 (19)

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{S}^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Inverzi matice je třeba provést numericky (kdo to zvládne ručně, ať se přihlásí).

# Příklad: výsledky na prvku 1 (20)

$$\boldsymbol{\varepsilon}_1 = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0,00 \\ -1,91 \\ -2,82 \end{Bmatrix} 10^{-5}$$

$$\boldsymbol{\sigma}_1 = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -79,5 \\ -397,9 \\ -235,0 \end{Bmatrix} 10^3$$

Ještě by se mohla spočítat hlavní napětí a jejich směr, maximální smykové napětí,...

# Příklad: výsledky na prvku 2 (21)

$$\mathbf{u}_1 = \begin{Bmatrix} u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -3,87 \\ -0,39 \\ -2,82 \\ -1,91 \end{Bmatrix} 10^{-5}$$

$$\mathbf{D} = 20,83 \cdot 10^9 \begin{bmatrix} 1 & 0,2 & 0 \\ 0,2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0,4 \end{bmatrix}$$

# Příklad: výsledky na prvku 2 (22)

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{S}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$



# Příklad: výsledky na prvku 2 (23)

$$\boldsymbol{\varepsilon}_2 = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 3,87 \\ -2,43 \\ -9,10 \end{Bmatrix} 10^{-5}$$

$$\boldsymbol{\sigma}_2 = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 705,2 \\ -344,2 \\ -7583,3 \end{Bmatrix} 10^3$$

Ještě by se mohla spočítat hlavní napětí a jejich směr, maximální smykové napětí,...

**HOTOVO!**

# Diskuse: spojitost a výstižnost výsledků (1)

Použitá aproximace posunutí:

$$u(x, y) = a_1 x + a_2 y + a_3$$

$$v(x, y) = a_4 x + a_5 y + a_6$$

Tedy **polynom 1. stupně** pro posunutí:

- spojitá deformace  $r$
- protože  $\varepsilon = \partial r$ , **konstantní poměrné deformace** (po derivaci snížení na polynom 0. stupně)
- protože  $\sigma = \mathbf{D} \varepsilon$ , **konstantní napětí** (polynom 0. stupně)

# Diskuse: spojitost a výstižnost výsledků (2)

- pro uvedený prvek jsou deformace aproximovány „lineárně“
- poměrné deformace a napětí jsou na prvku konstantní
- pro přesnější výsledky  $\Rightarrow$  hustší síť konečných prvků

