

# Metoda konečných prvků

- Vztah mezi Ritzovou metodou a MKP
- Základní principy MKP
- Odvození matice tuhosti konečného prvku pro příhradovinu

# Metoda konečných prvků (1)

Nevýhoda klasických variačních metod – obtížná (často nemožná) volba aproximačních funkcí  $\varphi$  na složitějších oblastech.

Řešení: rozdělení konstrukce na malé oblasti na  $n$  jednoduchých podoblastí a volba aproximačních funkcí na nich  $\varphi_j$  na nich.

Protože  $\Pi$  je skalární veličina, lze:

$$\Pi_{approx.} = \sum_{j=1}^n \Pi_{e,j}, \quad (1)$$

kde  $\Pi_{e,j}$  je potenciální energie  $j$ -té podoblasti („konečného prvku“).

# Metoda konečných prvků (2)

Další postup je analogický klasickým variačním metodám (např. Ritzově metodě) – řeší se soustava  $n$  lineárních rovnic:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial a_i} = 0, \quad i = 1..n \quad (2)$$

Pozn.: zde je použit **Lagrangeův variační princip** a jde tedy o **deformační variantu** metody konečných prvků MKP (viz dále).

# Metoda konečných prvků (3)

Varianty MKP:

- deformační (Lagrangeův variační princip) – neznámá jsou posunutí a pootočení (nejčastější, přes 90% případů),
- silová (např. Castiglianův variační princip) – neznámé jsou silové veličiny,
- smíšená (např. variační princip Hu-Washitsu).

# Deformační varianta MKP

Hledané **deformační veličiny** – viz klasická teorie pružnosti (mohou být i jejich derivace!):

- rovinná napjatost s deformace (stěny, ...):  $u, v$
- desky:  $w, \varphi_x, \varphi_y$
- prostorové úlohy:  $u, v, w$

Aproximační funkce se volí **zásadně** ve tvaru polynomů.

# Matrice tuhosti kon. prvku (1)

Potenciální energie soustavy:

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_V \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon} dV - \int_V \mathbf{X}^T \mathbf{r} dV. \quad (3)$$

Po dosazení za  $\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B}\mathbf{S}\mathbf{r}$  a vytknutí vektoru neznámých konstant (posunutí)  $\mathbf{r}$ :

$$\Pi = \frac{1}{2} \mathbf{r}^T \int_V \mathbf{S}^{-1T} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} \mathbf{S}^{-1} dV \mathbf{r} - \int_V \mathbf{X}^T dV \mathbf{r}. \quad (4)$$

Stručně:

$$\Pi = \frac{1}{2} \mathbf{r}^T \mathbf{K} \mathbf{r} - \mathbf{F}^T \mathbf{r}. \quad (5)$$

# Matice tuhosti kon. prvku (2)

Aplikací Lagrangeova variačního principu ( $\partial \Pi = 0$ ) na (28):

$$\mathbf{K} \mathbf{r} = \mathbf{F}, \quad (6)$$

kde  $\mathbf{K}$  ... matice tuhosti konečného prvku:

$$\mathbf{K} = \int_V \mathbf{S}^{-1T} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} \mathbf{S}^{-1} dV, \quad (7)$$

$\mathbf{F}$  ... zatěžovací vektor konečného prvku:

$$\mathbf{F} = - \int_V \mathbf{X}^T dV - \int_S \mathbf{p}^T dS. \quad (8)$$

# Analýza konstrukce

Z  $K_e$  a  $r_e$  a  $F_e$  jednotlivých prvků ( $e$  je číslo prvku) sestavíme  $K$  a  $r$  a  $F$  celé konstrukce a neznámé určíme řešením soustavy rovnic:

$$K r = F. \quad (9)$$

**Poznámka:** tyto sestavení matice tuhosti a zatěžovacího vektoru je zcela shodné s postupem v obecné deformační metodě.



# Zatížení konstrukce

- Zatížení zavádíme výhradně v uzlech konečných prvků
- Zatížení má silový charakter:
  - **síly** pracují na posunutích
  - **momenty** pracují na pootočeních
- Zatížení deformacemi bude popsáno dále

# Podepření konstrukce – okrajové podmínky

- Pružné podpory: přidáme odpovídající tuhost pružiny na diagonálu matice tuhosti
- Pevná podpora (posunutí, pootočení)  $\Rightarrow$  známá hodnota  $(0, 0)$  neznámého posunutí/pootočení (upravíme systém rovnic)
- Popuštění podpor:  $\Rightarrow$  známá hodnota neznámého posunutí/pootočení (upravíme systém rovnic)

# Deformační varianta MKP

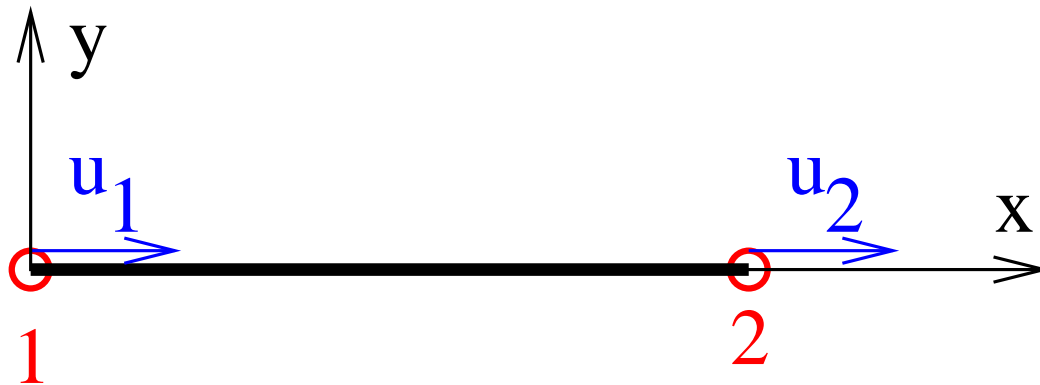
Hledané **deformační veličiny** – viz klasická teorie pružnosti (mohou být i jejich derivace!):

- rovinná napjatost s deformace (stěny, ...):  $u, v$
- desky:  $w, \varphi_x, \varphi_y$
- prostorové úlohy:  $u, v, w$

Aproximační funkce se volí **zásadně** ve tvaru polynomů.

# Odvození konečného prvku příhradoviny

(1)



Neznámé parametry deformace:  $u$ ,  $v$  v každém uzlu.

Tj. celkem dva neznámé uzlové parametry:

$$\{u_1, u_2\}^T.$$

# Odvození konečného prvku příhradoviny (2)

Geometrická rovnice:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \quad (10)$$

Maticově ( $\varepsilon = \partial^T \mathbf{u}$ ):

$$\{ \varepsilon_x \} = \left[ \frac{\partial}{\partial x} \right] \{ u \} \quad (11)$$

# Odvození konečného prvku příhradoviny (3)

Podmínka rovnováhy:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + X = 0 \quad (12)$$

Maticově ( $\partial \sigma + X = 0$ ):

$$\left[ \frac{\partial}{\partial x} \right] \{ \sigma_x \} + \{ X \} = \{ 0 \} \quad (13)$$

# Odvození konečného prvku příhradoviny (4)

Fyzikální rovnice:

$$\sigma_x = E \times \varepsilon_x \quad (14)$$

Maticově ( $\sigma = D \varepsilon$ ):

$$\{ \sigma_x \} = [ E ] \{ \varepsilon_x \} \quad (15)$$

# Odvození konečného prvku příhradoviny

(5)

Aproximace neznámých uzlových posunutí:

$$u(x) = a_1 + a_2 x \quad (16)$$

Maticově ( $\mathbf{u} = \mathbf{U} \mathbf{a}$ ):

$$\{ u \} = [ 1 \quad x ] \left\{ \begin{array}{c} a_1 \\ a_2 \end{array} \right\} \quad (17)$$



# Odvození konečného prvku příhradoviny (6)

Aproximace neznámých uzlových posunutí v uzlech 1, 2

( $\mathbf{r} = \mathbf{S} \mathbf{a}$ ):

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} \quad (18)$$

# Odvození konečného prvku příhradoviny (7)

Kombinací vztahů  $\varepsilon = \partial^T u$  a  $u = U a$  vznikne  $\varepsilon = B a$ ,  
kde  $B = \partial^T U a$ :

$$\{ \varepsilon_x \} = \left[ \frac{\partial}{\partial x} \right] \left[ \mathbf{1} \quad x \right] \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} \quad (19)$$

# Odvození konečného prvku příhradoviny (8)

Kombinací vztahů  $\varepsilon = \partial^T u$  a  $u = U a$  vznikne  $\varepsilon = B a$ ,  
kde  $B = \partial^T U$ :

$$\{ \varepsilon_x \} = [ 0 \quad 1 ] \left\{ \begin{array}{c} a_1 \\ a_2 \end{array} \right\} \quad (20)$$

# Odvození konečného prvku příhradoviny

(9)

Z  $\mathbf{r} = \mathbf{S} \mathbf{a}$  plyne:

$$\mathbf{a} = \mathbf{S}^{-1} \mathbf{r}, \quad (21)$$

kde:

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{S}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{x_2}{x_2 - x_1} & \frac{-x_1}{x_2 - x_1} \\ \frac{-1}{x_2 - x_1} & \frac{1}{x_2 - x_1} \end{bmatrix} \quad (22)$$

Pak místo  $\varepsilon = \mathbf{B} \mathbf{a}$  lze psát  $\varepsilon = \mathbf{B} \mathbf{S}^{-1} \mathbf{r}$ :

$$\left\{ \varepsilon_x \right\} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{x_2}{x_2 - x_1} & \frac{-x_1}{x_2 - x_1} \\ \frac{-1}{x_2 - x_1} & \frac{1}{x_2 - x_1} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}. \quad (23)$$

# Odvození konečného prvku příhradoviny (11)

Potenciální energie vnitřních sil:

$$\Pi_i = \frac{1}{2} \int_V \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} dV = \frac{1}{2} \int_V \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon} dV \quad (24)$$

Potenciální energie vnějších sil:

$$\Pi_e = - \int_V \mathbf{X}^T \mathbf{r} dV - \int_S \mathbf{p}^T \mathbf{r} dS. \quad (25)$$

# Odvození konečného prvku příhradoviny (12)

Potenciální energie soustavy:

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_V \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon} dV - \int_V \mathbf{X}^T \mathbf{r} dV - \int_S \mathbf{p}^T \mathbf{r} dS. \quad (26)$$

Po dosazení za  $\boldsymbol{\varepsilon}$  a vytknutí  $\mathbf{r}$ :

$$\Pi = \frac{1}{2} \mathbf{r}^T \int_V \mathbf{S}^{-1T} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} \mathbf{S}^{-1} dV \mathbf{r} - \int_V \mathbf{X}^T dV \mathbf{r} - \int_S \mathbf{p}^T dS \mathbf{r}. \quad (27)$$

Stručně:

$$\Pi = \frac{1}{2} \mathbf{r}^T \mathbf{K} \mathbf{r} - \mathbf{F}^T \mathbf{r}. \quad (28)$$

# Odvození konečného prvku příhradoviny (13)

Aplikací Lagrangeova variačního principu ( $\partial \Pi = 0$ ) na (28):

$$\mathbf{K} \mathbf{r} = \mathbf{F}, \quad (29)$$

kde  $\mathbf{K}$  ... matice tuhosti konečného prvku:

$$\mathbf{K} = \int_V \mathbf{S}^{-1T} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} \mathbf{S}^{-1} dV, \quad (30)$$

$\mathbf{F}$  ... zatěžovací vektor konečného prvku:

$$\mathbf{F} = - \int_V \mathbf{X}^T dV - \int_S \mathbf{p}^T dS. \quad (31)$$

# Odvození konečného prvku příhradoviny (14)

Pro studovaný konečný prvek:

$$\mathbf{F} = \mathbf{X} + \mathbf{p}. \quad (32)$$

$$\mathbf{K} = \int_V \mathbf{S}^{-1T} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} \mathbf{S}^{-1} dV = A \int_0^L \mathbf{S}^{-1T} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} \mathbf{S}^{-1} dx, \quad (33)$$

podrobný zápis:

$$\mathbf{K} = A \int_0^L \begin{bmatrix} \frac{x_2}{x_2-x_1} & \frac{-1}{x_2-x_1} \\ \frac{-x_1}{x_2-x_1} & \frac{-1}{x_2-x_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{x_2}{x_2-x_1} & \frac{-x_1}{x_2-x_1} \\ \frac{-1}{x_2-x_1} & \frac{-1}{x_2-x_1} \end{bmatrix} dx \quad (34)$$



# Odvození konečného prvku příhradoviny (15)

Podrobný zápis (vytknutí konstant pře integrál):

$$\mathbf{K} = A \begin{bmatrix} \frac{x_2}{x_2-x_1} & \frac{-1}{x_2-x_1} \\ \frac{-x_1}{x_2-x_1} & \frac{-1}{x_2-x_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} [E] [0 \ 1] \begin{bmatrix} \frac{x_2}{x_2-x_1} & \frac{-x_1}{x_2-x_1} \\ \frac{-1}{x_2-x_1} & \frac{-1}{x_2-x_1} \end{bmatrix} \int_0^L dx \quad (35)$$

Po úpravě (integrace  $\int_0^L dx = L$  násobení matic):

$$\mathbf{K} = EAL \begin{bmatrix} \frac{1}{(x_2-x_1)^2} & \frac{-1}{(x_2-x_1)^2} \\ \frac{-1}{(x_2-x_1)^2} & \frac{1}{(x_2-x_1)^2} \end{bmatrix}, \quad x_2-x_1 = L \Rightarrow \mathbf{K} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & \frac{-EA}{L} \\ \frac{-EA}{L} & \frac{EA}{L} \end{bmatrix}, \quad (36)$$

což je matice tuhosti známá i z deformační metody.

# Odvození konečného prvku příhradoviny (16)

Soustava rovnic pro jeden konečný prvek má tedy tvar:

$$\mathbf{K}_e \mathbf{e} = \mathbf{F}_e,$$

podrobně:

$$\begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & -\frac{EA}{L} \\ -\frac{EA}{L} & \frac{EA}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix} \quad (37)$$

# Odvození konečného prvku příhradoviny

(17)

Rozšíření na proměnné  $u$  a  $v$  v každém uzlu:

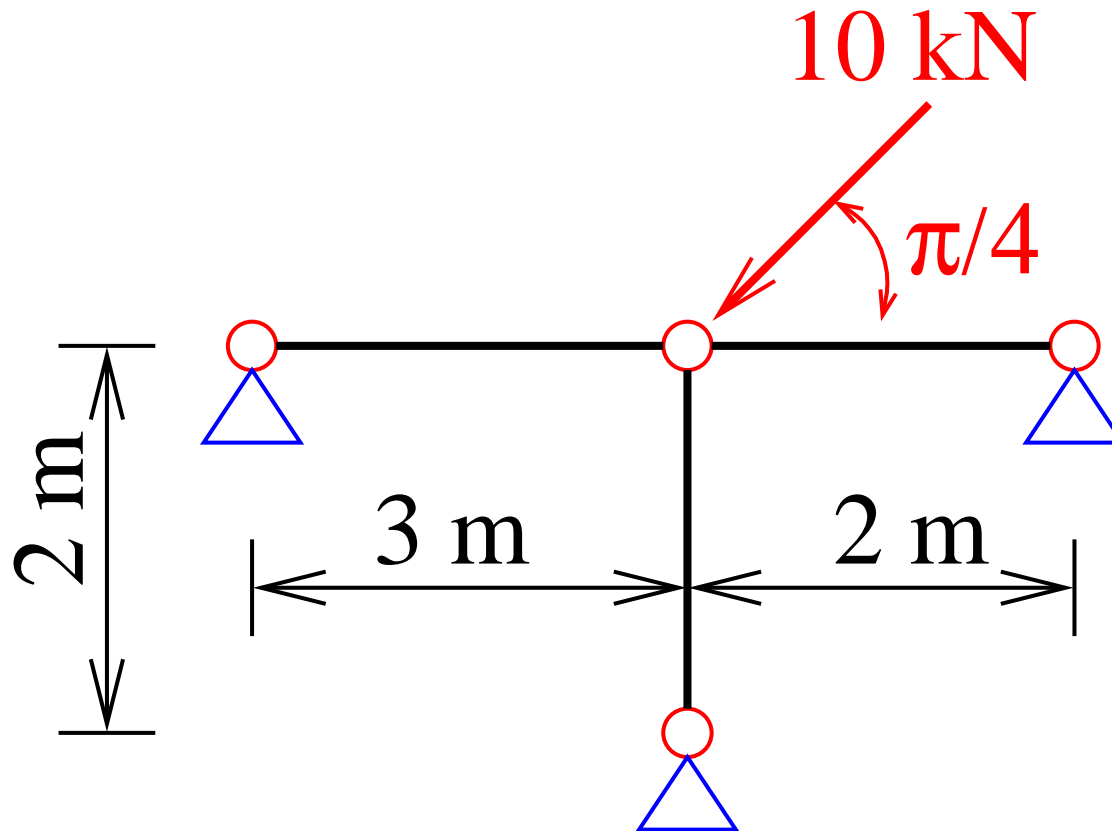


$$\begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{EA}{L} & 0 & \frac{EA}{L} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ 0 \\ F_2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (38)$$

# Příklad (1)

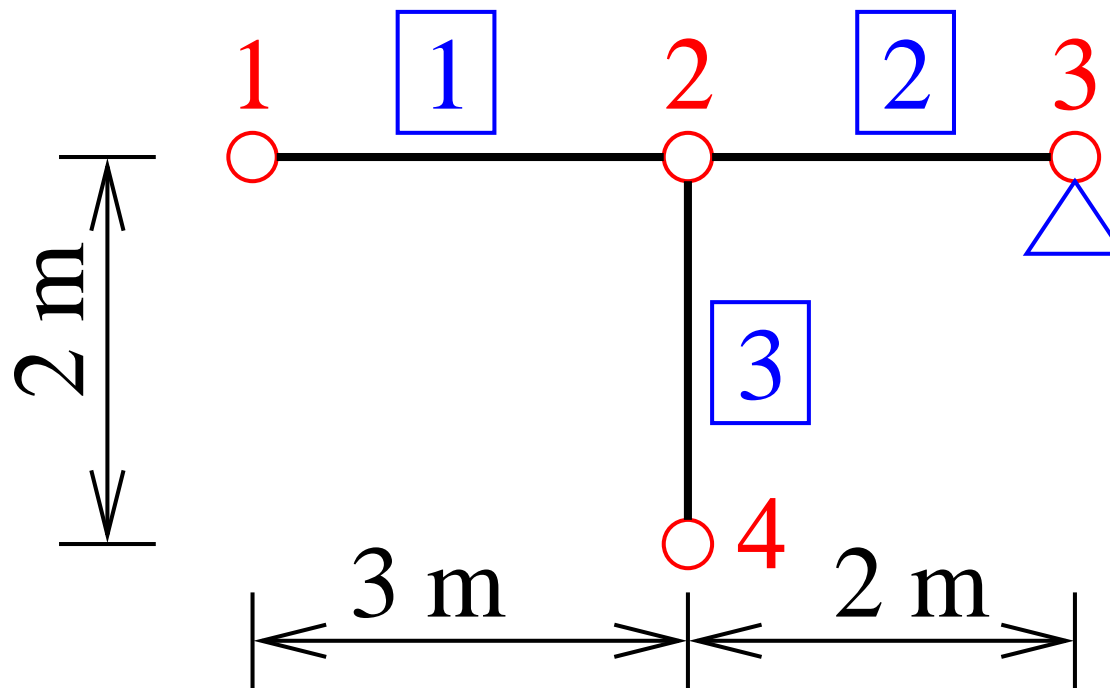
Stanovte vnitřní síly zadané příhradové konstrukce, je-li dáno

$$E = 20 \text{ GPa}, \quad A = 0.01 \text{ m}^2.$$



# Příklad (2)

Označení prvků a uzlů:



# Příklad (3)

Matice tuhosti prvku 1 (uzly 1,2):

	$u_1$	$v_1$	$u_2$	$v_2$
$u_1$	$\frac{EA}{L}$	0	$-\frac{EA}{L}$	0
$v_1$	0	0	0	0
$u_2$	$-\frac{EA}{L}$	0	$\frac{EA}{L}$	0
$v_2$	0	0	0	0

	$u_1$	$v_1$	$u_2$	$v_2$
$u_1$	66666667	0	-66666667	0
$v_1$	0	0	0	0
$u_2$	-66666667	0	66666667	0
$v_2$	0	0	0	0

# Příklad (4)

Matice tuhosti prvku 2 (uzly 2,3):

	$u_2$	$v_2$	$u_3$	$v_3$
$u_2$	$\frac{EA}{L}$	0	$-\frac{EA}{L}$	0
$v_2$	0	0	0	0
$u_3$	$-\frac{EA}{L}$	0	$\frac{EA}{L}$	0
$v_3$	0	0	0	0

	$u_2$	$v_2$	$u_3$	$v_3$
$u_2$	100000000	0	-100000000	0
$v_2$	0	0	0	0
$u_3$	-100000000	0	100000000	0
$v_3$	0	0	0	0

# Příklad (5)

Matrice tuhosti prvku 3 (uzly 2,4) v **lokálních souřadnicích**:

	$u_2$	$v_2$	$u_4$	$v_4$
$u_2$	$\frac{EA}{L}$	0	$-\frac{EA}{L}$	0
$v_2$	0	0	0	0
$u_4$	$-\frac{EA}{L}$	0	$\frac{EA}{L}$	0
$v_4$	0	0	0	0

	$u_2$	$v_2$	$u_4$	$v_4$
$u_2$	100000000	0	-100000000	0
$v_2$	0	0	0	0
$u_4$	-100000000	0	100000000	0
$v_4$	0	0	0	0



# Příklad (6)

Transformace matice tuhosti prvku 3 (uzly 2,4) do svislého směru (viz ODM):

$$\mathbf{K}_e = \mathbf{T}^T \mathbf{K}_e^{\text{loc}} \mathbf{T},$$

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \cos(90) & \sin(90) & 0 & 0 \\ -\sin(90) & \cos(90) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos(90) & \sin(90) \\ 0 & 0 & -\sin(90) & \cos(90) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Matice prvku 3 v **globálních souřadnicích**:

	$u_2$	$v_2$	$u_4$	$v_4$
$u_2$	0	0	0	0
$v_2$	0	100000000	0	-100000000
$u_4$	0	0	0	0
$v_4$	0	-100000000	0	100000000

# Příklad (7)

Matrice tuhosti konstrukce:

$$10^6 \times \begin{bmatrix} 67 & 0 & -67 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -67 & 0 & 167 & 0 & -100 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 100 & 0 & 0 & 0 & -100 \\ 0 & 0 & -100 & 0 & 100 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -100 & 0 & 0 & 0 & 100 \end{bmatrix}$$

# Příklad (8)

Soustava rovnic  $\mathbf{K} \times \mathbf{r} = \mathbf{F}$  po zavedení okrajových podmínek:

$$10^6 \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 167 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 100 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -7071 \\ -7071 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

# Příklad (9)

Vypočítaný vektor posunutí:

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -4.2426 \times 10^{-05} \\ -7.0711 \times 10^{-05} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} [m]$$

# Příklad (10)

Vektory posunutí jednotlivých prutů:

$$r_{e,1} = [0, 0, -4.2426 \times 10^{-05}]^T$$

$$r_{e,1} = [-4.2426 \times 10^{-05}, 0, 0]^T$$

$$r_{e,1} = [-4.2426 \times 10^{-05}, 0, 0]^T$$

Dopočet koncových (a vnitřních) sil:

$$\mathbf{K}_{e,i} \times \mathbf{r}_{e,i} = \mathbf{F}_{e,i} \Rightarrow N_i$$

Prut	Síla [kN]
1	-2.83
2	4.24
3	-7.07

# Volba náhradních polynomů (1)

- Nejlepší konvergence při použití úplného polynomu  $n$ -tého stupně (Ženíšek et al).
- Počet konstant v polynomu  $(a_1, a_2, \dots)$  = počet neznámých na konečném prvku  $(u_1, v_1, \dots)$ .
- Ne vždy je možné použít všechny členy úplného polynomu.

# Volba náhradních polynomů (2)

Pro neznámou  $x$ :

1.  $a_1 + a_2 x$

2.  $a_1 + a_2 x + a_3 x^2$

3.  $a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + a_4 x^3$

4.  $a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + a_4 x^3 + a_5 x^4$

# Volba náhradních polynomů (3)

Pro neznámé  $x$  a  $y$ :

1.  $a_1 + a_2 x + a_3 y$

2.  $a_1 + a_2 x + a_3 y + a_4 xy + a_5 x^2 + a_6 y^2$

3.  $a_1 + a_2 x + a_3 y + a_4 xy + a_5 x^2 + a_6 y^2 + a_7 x^3 + a_8 y^3 + a_9 x y^2 + a_{10} x^2 y$