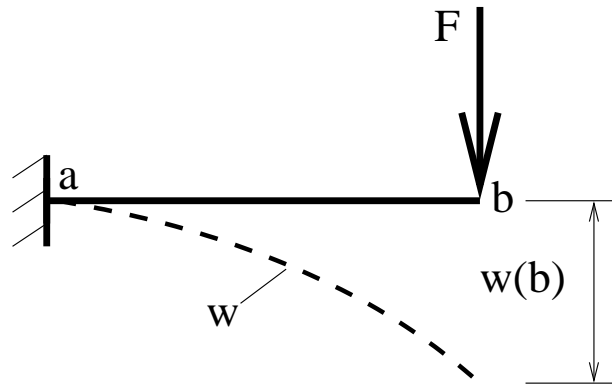


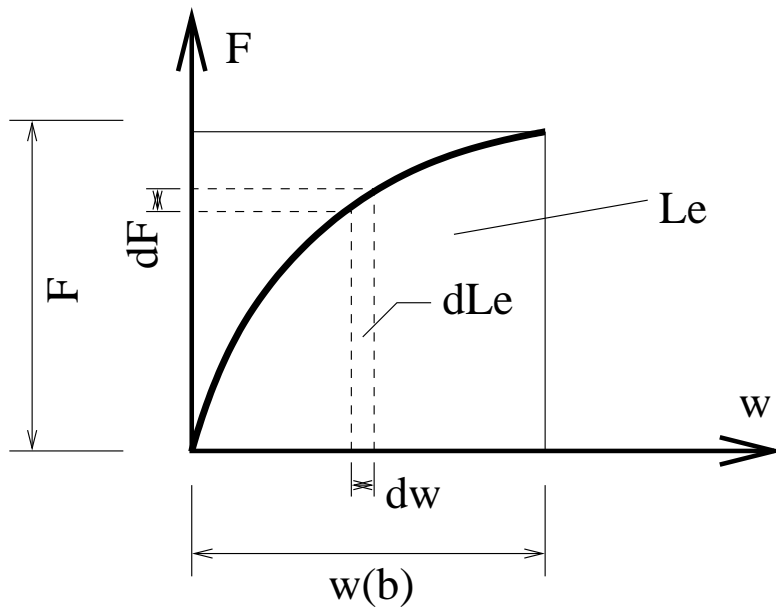
Energetické principy a variační metody ve stavební mechanice

- Přetvárná práce vnějších sil
- Přetvárná práce vnitřních sil
- Potenciální energie
- Lagrangeův princip
- Variační metody
- Ritzova metoda

Přetvárná práce vnějších sil (1)



Přetvárná práce v. s.:

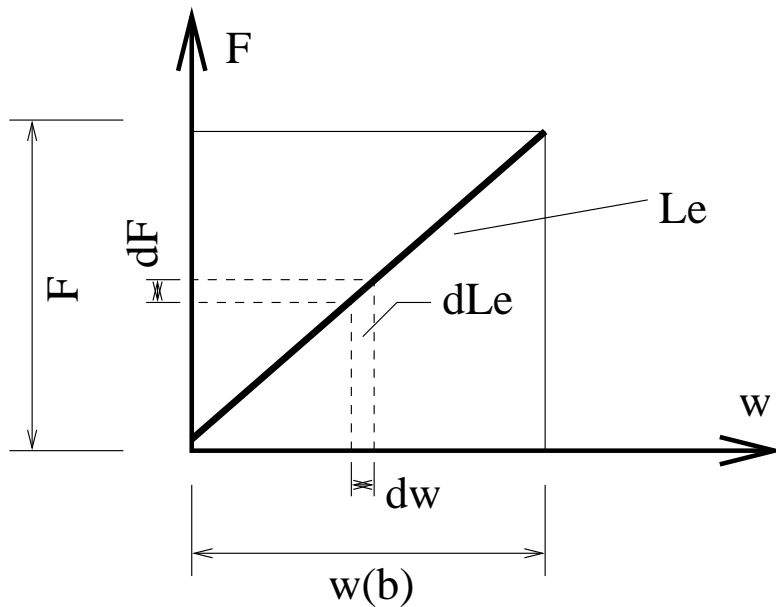


$$d L_e = F(w) d w, \quad (1)$$

$$L_e = \int_0^{w} F(w) d w. \quad (2)$$

Přetvárná práce vnějších sil (2)

Lineárně pružná odezva konstrukce:



Clapeyronova věta:

$$L_e = \frac{1}{2} F w. \quad (3)$$

Přetvárná práce vnějších sil (3)

Lagrangeova věta:

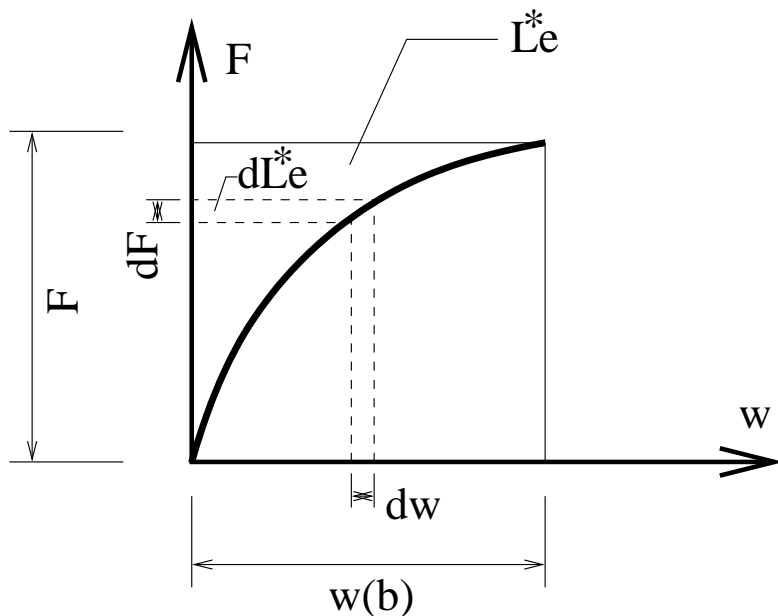
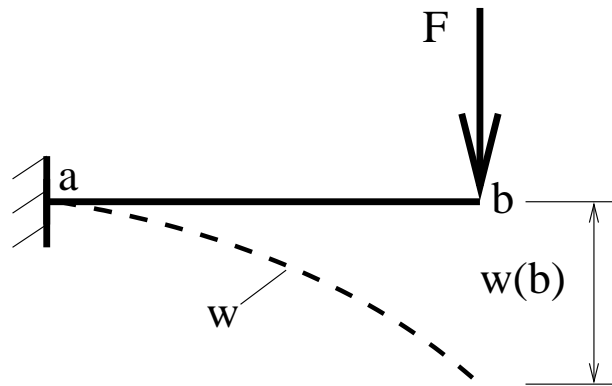
Z (2) plyne:

$$F = F(w) = \frac{d L_e}{d w} \quad (4)$$

a pro případ obecného počtu sil:

$$F_i = \frac{\partial L_e}{\partial u_i}, \quad (5)$$

Přetvárná práce vnějších sil (4)



Doplňková (komplementární)
přetvárná práce v. s.:

$$d L_e^* = w(F) d F, \quad (6)$$

$$L_e^* = \int_0^F w(F) d F. \quad (7)$$

Pro lineárně pružnou odezvu
konstrukce:

$$L_e^* = L_e = \frac{1}{2} F w. \quad (8)$$

Přetvárná práce vnějších sil (5)

Přetvárná práce vnějších sil L_e : práce vnějších sil vykonaná v průběhu zatěžování.

Komplementární přetvárná práce vnějších sil L_e^* :

- práce nutná k tomu, aby působení síly F na dráze w mělo statický charakter (možno představit jako práci „brzdící“ síly působící proti F na dráze w);
- práce nutná k navrácení konstrukce do nedeformované polohy.

$$L_e + L_e^* = F w. \quad (9)$$

Přetvárná práce vnějších sil (6)

Castiglianova věta:

Z (7) plyne:

$$w = w(F) = \frac{d L_e^*}{d F} \quad (10)$$

a pro případ obecného počtu sil:

$$w_i = \frac{\partial L_e^*}{\partial F_i}, \quad (11)$$

Castiglianova metoda určování deformací

Ze znalosti Castiglianovy věty $w = \frac{d L_e^*}{d F}$ a znalosti $\Pi_i = L_e^*$

Ize psát:

$$w_i = \frac{\partial \Pi_i}{\partial F_i}. \quad (12)$$

Dosazením za Π_i a úpravou lze získat vztah pro výpočet deformace nosníku pod silou (bez vlivu práce posouvajících sil):

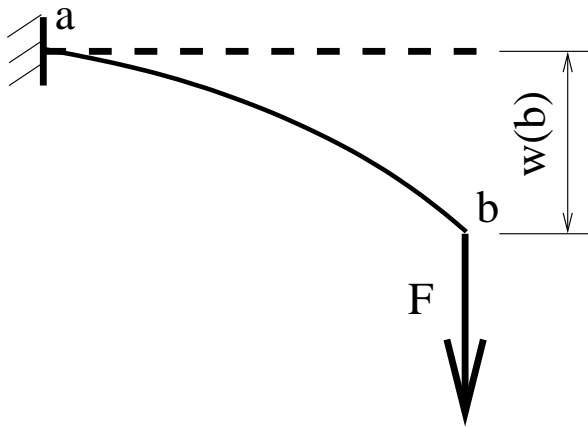
$$w_i = \int_0^L \frac{N}{E A} \frac{\partial N}{\partial F_i} dx + \int_0^L \frac{M}{E I} \frac{\partial M}{\partial F_i} dx \quad (13)$$

Potenciální energie vnějších sil

Potenciální energie vnějších sil (Π_e):



$$\Pi_e = -F w, \quad (14)$$



pro obecné zatížení:

$$\Pi_e = - \sum_{i=1}^n F_i u_i - \sum_{j=1}^n M_j \varphi_j - \int_c^d q(x) w(x) dx. \quad (15)$$

Obecný stav napjatosti tělesa:

$$\Pi_e = - \int_V \mathbf{X}^T \mathbf{u} dV - \int_S \mathbf{p}^T \mathbf{u} dS. \quad (16)$$

Potenciální energie vnitřních sil

Dokonale pružné těleso plně akumuluje energii odpovídající vykonané přetvárné práci:

$$\Pi_i = L_e \quad (17)$$

Přetvárná práce vnitřních sil

Dokonale pružné těleso akumuluje energii Π_i odpovídající vykonané přetvárné práci L_e

$$\Pi_i = - L_e, \quad (18)$$

protože vnitřní síly brání deformaci, je v předchozí rovnici " $- L_e$ " a musí platit:

$$L_i \leq 0 \quad (19)$$

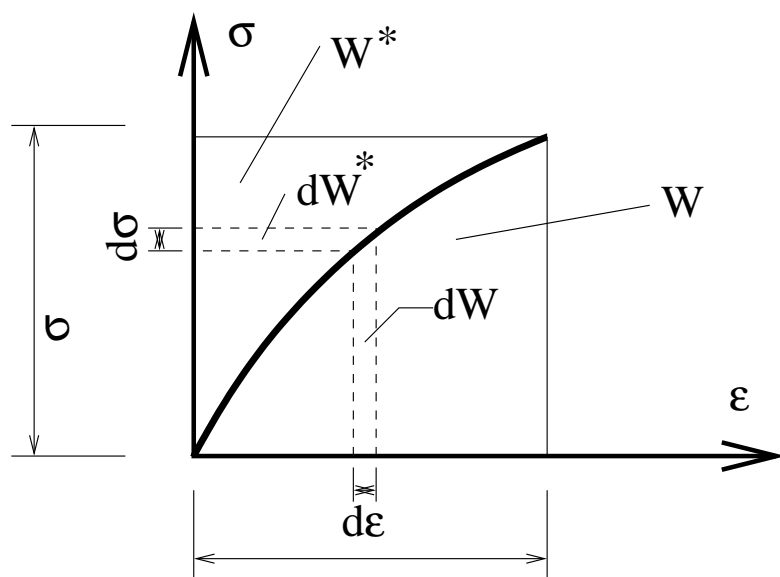
tedy:

$$\Pi_i = |L_i|. \quad (20)$$

Deformační energie

(1)

Potencionální energie Π_i nahromaděná v důsledku deformace = „deformační energie“.



Příspěvek normálových napětí:

$$W_\sigma = \int_0^\epsilon \sigma(\epsilon) d\epsilon, \quad (21)$$

$$W_\sigma^* = \int_0^\sigma \epsilon(\sigma) d\sigma. \quad (22)$$

Příspěvek smykových napětí:

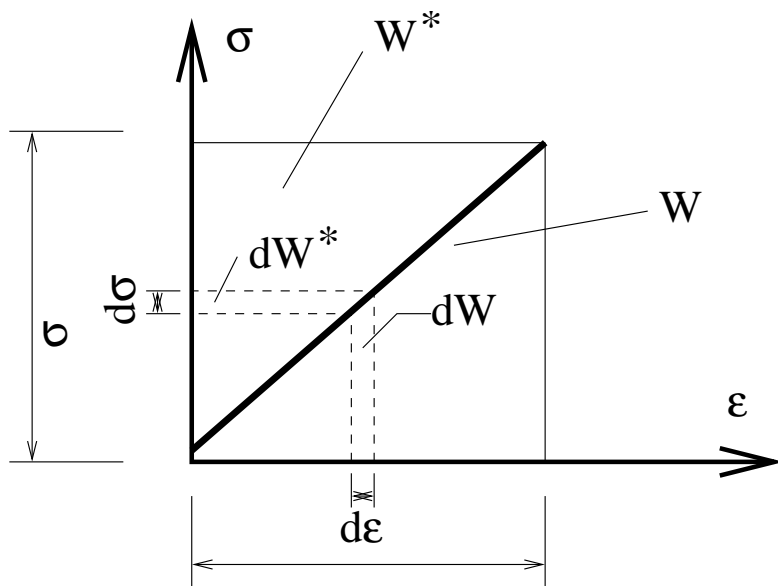
$$W_\epsilon = \int_0^\gamma \tau(\gamma) d\gamma, \quad (23)$$

$$W_\epsilon^* = \int_0^\tau \gamma(\tau) d\tau. \quad (24)$$

Deformační energie

(2)

Lineárně pružná odezva materiálu:



Příspěvek normálových napětí:

$$W_{\sigma} = W_{\sigma}^* = \frac{1}{2} \sigma \epsilon. \quad (25)$$

Příspěvek smykových napětí:

$$W_{\tau} = W_{\tau}^* = \frac{1}{2} \tau \gamma. \quad (26)$$

Deformační energie

(3)

Tedy **potenciální energie vnitřních sil** tělesa (pro lin. pružnou odezvu materiálu):

$$\begin{aligned}\Pi_i &= & (27) \\ &= \frac{1}{2} \int_V (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \sigma_z \varepsilon_z + \tau_{xy} \gamma_{xy} + \tau_{yz} \gamma_{yz} + \tau_{zx} \gamma_{zx}) dV.\end{aligned}$$

V maticovém zápisu:

$$\Pi_i = \Pi_i^* = \int_V \boldsymbol{\sigma}^T \boldsymbol{\varepsilon} dV. \quad (28)$$

*Pozn: Práci vnitřních sil považujeme za **zápornou**, práci vnějších sil za **kladnou**.*

Přímý prut (bez vlivu smyku)

Normálové síly ($\sigma = \frac{N}{A}$):

$$\Pi_{i,N} = \frac{1}{2} \int_V \frac{1}{E} \sigma_x^2 dV = \dots = \frac{1}{2} \int_l \frac{N^2}{E A} dx \quad (29)$$

Momenty ($\sigma = \frac{M y}{I}$):

$$\Pi_{i,M} = \frac{1}{2} \int_V \frac{1}{E} \sigma_x^2 dV = \dots = \frac{1}{2} \int_l \frac{M^2 y}{E I} dx \quad (30)$$

Tedy:

$$\Pi_i = \frac{1}{2} \int_l \frac{N^2}{E A} dx + \frac{1}{2} \int_l \frac{M^2 y}{E I} dx \quad (31)$$

Potenciální energie systému (1)

Potenciální energie vnějších sil (Π_e):

$$\Pi_e = (L_e + L_e^*). \quad (32)$$

Při lineárně pružné odezvě materiálu:

$$\Pi_e = 2 L_e. \quad (33)$$

Potenciální energie systému (2)

(Změna) potenciální energie systému (tedy podepřené konstrukce se zatížením) se získá jako součet potenciální energie vnějších sil a potenciální energie vnitřních sil.

$$\Pi = \Pi_e + \Pi_i. \quad (34)$$

Hodnota Π je u stavebních konstrukcí obvykle velká (v řádech MJ, GJ).

Potenciální energie systému (3)

(Lagrangeův) **princip minima celkové potenciální energie:**

$$\Pi = \Pi_e + \Pi_i = \min. \quad (35)$$

„Ze všech možných deformačních stavů tělesa (které neporušují jeho spojitost a respektují okrajové podmínky) nastane právě ten, při kterém je potenciální energie systému minimální.“

Variační úloha

- hledáme neznámou **funkci** (nikoli jen hodnotu),
- funkce musí splňovat určité okrajové nebo počáteční podmínky,
- hledaná funkce musí splňovat podmínku **extrému** nějaké veličiny.

Variační úlohy v teorii pružnosti

Protože platí (35):

$$\Pi = \Pi_i + \Pi_e = \min, \quad (36)$$

tedy hodnota potenciální energie je extrémní (minimální).

Z matematiky: pro extrém veličiny Π platí:

$$\partial\Pi = 0, \quad (37)$$

čehož využívají variační metody (např Ritzova metoda).

Ritzova metoda (1)

1. Aproximace řešení volíme ve tvaru:

$$w_n(x) = \sum_{i=1}^n a_i \psi_i, \quad (38)$$

kde a_i ... neznámé konstanty, ψ_i ... aproximační funkce.

2. Vyjádříme Π pomocí $w_n(x)$.

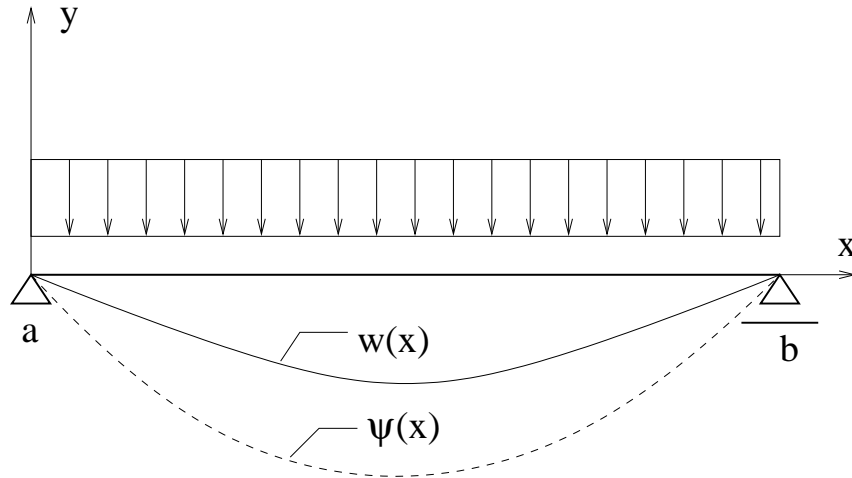
3. Sestavení a vyřešení n rovnic:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial a_i} = 0. \quad (39)$$

4. Dosazení vypočtených a_i do (44).

Rizova metoda (2) – bázové funkce

Bázové (aproximační) funkce ψ musí vyhovovat okrajovým podmínkám úlohy.



Např. při výpočtu průhybu musí platit:

$$\psi(a) = 0 \quad (\text{protože}$$

$$w(a)=0),$$

$$\psi(b) = 0 \quad (\text{protože}$$

$$w(b)=0).$$

Shrnutí:

Protože platí:

$$N = (E A) \frac{du}{dx}, \quad (40)$$

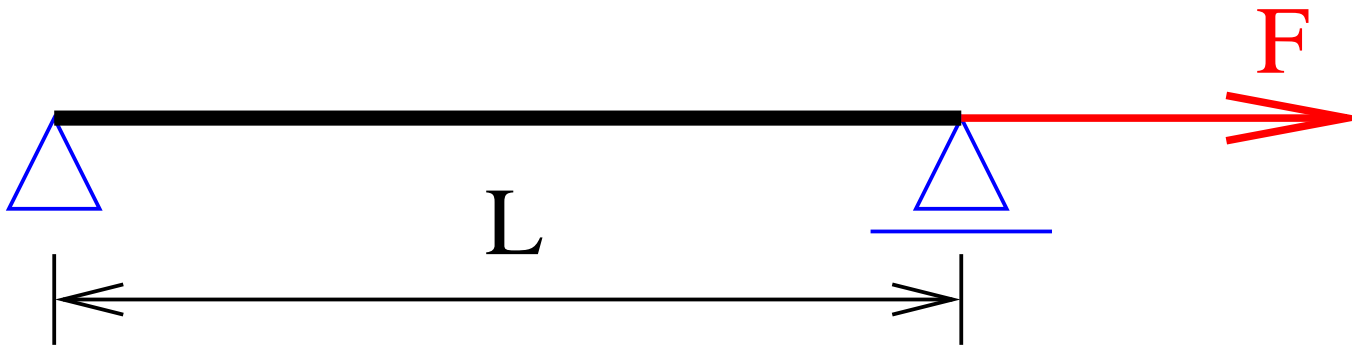
$$M = -(E I_y) \frac{d^2 w}{dx^2}, \quad (41)$$

tedy potenciální energie vnitřních sil (bez vlivu smyku):

$$\Pi_i = \frac{1}{2} \int_0^L E A u'^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^L E I w''^2 dx. \quad (42)$$

Příklad 1 (1)

Stanovte funkci osové deformace zadaného nosníku (viz schéma).
Předpokládejte, že součin $E \times A$ je po celé délce nosníku konstantní.



Volba aproximace:

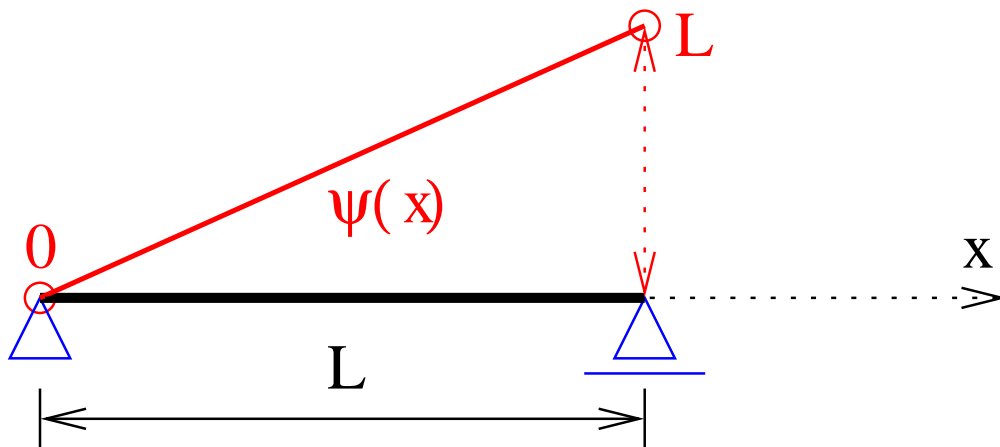
$$u(x) = a_1 \psi_1 = a_1 x, \quad \text{tj. } \psi_1 = x.$$

Příklad 1 (2)

Okrajové podmínky:

$$u(a) = w(x = 0) = 0 \dots \psi_1(a) = x = 0$$

$$u(b) = w(x = L) \neq 0 \dots \psi_1(b) = x = L$$



Příklad 1 (3)

Vyjádření Π_e :

$$\Pi_e = -F u - \int_0^L q u(x) dx.$$

Přitom F působí v bodě $x = L$:

$$\Pi_e = -F u = -F a_1 \psi_1 = -F a_1 x = -F L a_1.$$

Příklad 1 (4)

Derivace funkce $u = a_1 \psi_1$:

$$u' = [a_1 x]' = a_1.$$

Vyjádření Π_i :

$$\Pi_i = \frac{1}{2} \int_0^L E A (u')^2 dx = \frac{1}{2} \int_0^L E A a_1^2 dx = \frac{E A a_1^2}{2} \int_0^L dx$$

$$\Pi_i = \frac{E A a_1^2}{2} [x]_0^L = \frac{E A L}{2} a_1^2.$$

Příklad 1 (4)

Vyjádření Π :

$$\Pi = \Pi_e + \Pi_i = -F L a_1 + \frac{E A L}{2} a_1^2.$$

Sestavení rovnic(e) $\frac{\partial \Pi}{\partial a_i} = 0$:

$$-F L + E A L a_1 = 0$$

Výpočet a_1 :

$$a_1 = \frac{F}{E A}$$

Příklad 1 (5)

Výsledek (dosazením a_i do $u(x)$):

$$u(x) = a_1 \psi_1 = \frac{F}{E A} x.$$

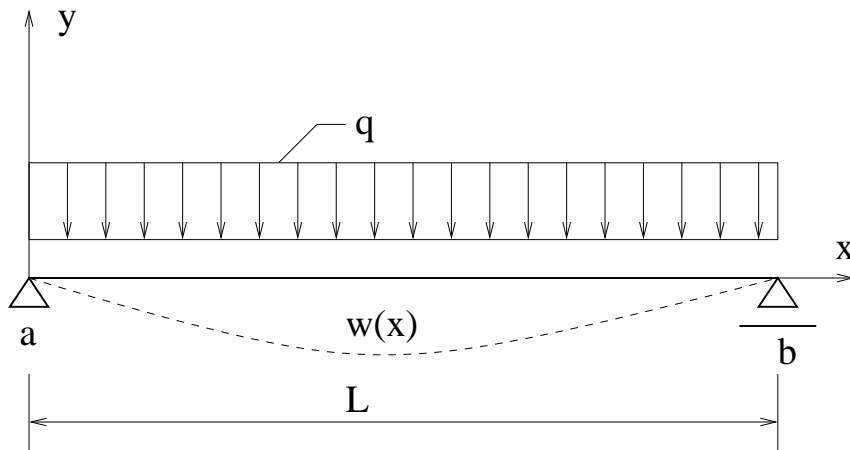
Protažení v $x = L$: $u(L) = \frac{F L}{E A}$.

Výpočet vnitřních sil (normálová síla):

$$N(x) = E A u' = -E A \left[\frac{F}{E A} x \right]' = F$$

Příklad 2 (1)

Stanovte funkci průhybu prostého nosníku (viz schéma).



Očekávaný výsledek:

$$w_{max} = \frac{5 q l^4}{384 E I}$$

Volba aproximace (jen 1. člen řady):

$$w(x) = a_1 \psi_1 = a_1 \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right), \quad tj. \psi_1 = \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right).$$

Příklad 2 (2)

Okrajové podmínky:

$$w(a) = w(x = 0) = 0 \dots \psi_1(a) = \sin\left(\frac{\pi \cdot 0}{L}\right) = 0$$

$$w(b) = w(x = L) = 0 \dots \psi_1(b) = \sin\left(\frac{\pi L}{L}\right) = 0$$

Vyjádření Π_e :

$$\Pi_e = - \int_0^L q w(x) dx = - \int_0^L q a_1 \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) dx =$$

$$\Pi_e = -q a_1 \left[-\frac{L}{\pi} \cos\left(\frac{\pi x}{L}\right) \right]_0^L = -\frac{2 q L}{\pi} a_1$$

Příklad 2 (3)

Vyjádření Π_i :

$$w' = \left[a_1 \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) \right]' = a_1 \frac{\pi}{L} \cos\left(\frac{\pi x}{L}\right)$$

$$w'' = -a_1 \frac{\pi^2}{L^2} \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)$$

$$\Pi_i = \frac{1}{2} \int_0^L E I w''^2 dx = \frac{1}{2} \int_0^L \left(-a_1 \frac{\pi^2}{L^2} \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) \right)^2 dx = \dots$$

$$\dots = \frac{\pi^4 E I}{4 L^3} a_1^2$$

Příklad 2 (4)

Vyjádření Π :

$$\Pi = \Pi_e + \Pi_i = -\frac{2 q L}{\pi} a_1 + \frac{\pi^4 E I}{4 L^3} a_1^2$$

Sestavení rovnic(e) $\frac{\partial \Pi}{\partial a_i} = 0$:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial a_1} = -\frac{2}{\pi} q L + \frac{\pi^4 E I}{4 L^3} 2 a_1 = 0$$

Výpočet a_1 :

$$a_1 = \frac{4 q L^4}{\pi^5 E I}$$

Příklad 2 (5)

Výsledek (dosazením a_i do $w(x)$):

$$w(x) = a_1 \psi_1 = \frac{4 q L^4}{\pi^5 E I} \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)$$

Výpočet vnitřních sil (moment):

$$\begin{aligned} M(x) &= -E I w'' = -E I \left(-a_1 \frac{\pi^2}{L^2} \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) \right) \\ &= -\frac{4 q L^2}{\pi^3} \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) \end{aligned}$$

Samostatně porovnejte $w(\frac{L}{2})$ a $M(\frac{L}{2})$ s řešením podle zásad statiky!

Doplnění: doplňková potenciální energie

Castiglianův princip minima doplňkové potenciální energie:

$$\Pi^* = \Pi_i = \min. \quad (43)$$

Je analogický Lagrangeovu principu, avšak je definován pro doplňkovou potenciální energii (systém ji nabývá z doplňkové práce sil).

Ritzova metoda pro tenké desky

Potenciální energie vnitřních sil:

$$\Pi_i = \frac{1}{2} \int_a^b \int_c^d \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 dx dy$$

Potenciální energie vnějších sil:

$$\Pi_e = - \int_a^b \int_c^d p(x, y) w(x, z) dx dy$$

Aplikace Ritzovy metody na desce

1. Aproximace řešení volíme ve tvaru:

$$w_n(x, y) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_{i,j} \psi_{i,j}(x, z) \quad (44)$$

kde $a_{i,j}$... neznámé konstanty, ψ_i ... aproximační funkce.

2. Vyjádříme Π pomocí $w_n(x, z)$.

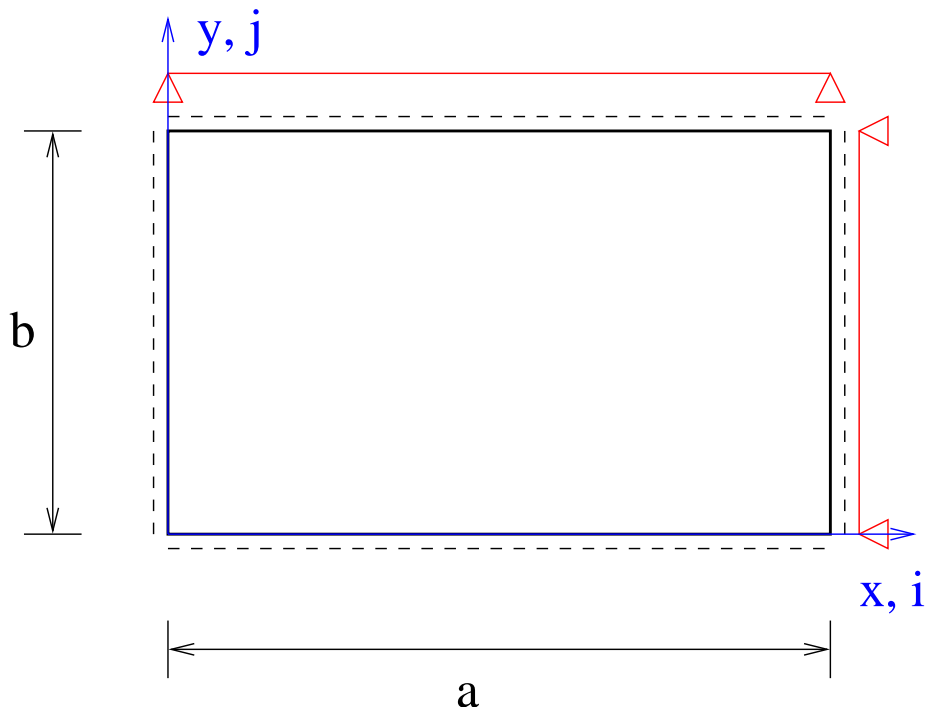
3. Sestavení a vyřešení n rovnic:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial a_i} = 0. \quad (45)$$

4. Dosazení vypočtených a_i do (44).

Ritzova metoda – příklad 3 (1)

Stanovte rovnici průhybové plochy desky po obvodě prostě podepřené a rozměrech $a \times b$ a tloušťce t . Deska je zatížena zatížením popsaným funkcí $p(x, y) = p$.



Ritzova metoda – příklad 3 (2)

Volba $w_n(x, y)$:

$$w_n(x, y) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_{1,1} \sin \frac{i \pi x}{a} \sin \frac{j \pi y}{b},$$

Derivace:

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial x} &= a_{1,1} \frac{\pi}{a} \cos \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} &= -a_{1,1} \left(\frac{\pi}{a}\right)^2 \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} &= -a_{1,1} \left(\frac{\pi}{b}\right)^2 \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b} \end{aligned}$$

Ritzova metoda – příklad 3 (3)

Potenciální energie vnitřních a vnějších sil:

$$\begin{aligned}\Pi_i &= \frac{1}{2} D a_{1,1}^2 \left(\frac{\pi^2}{a^2} + \frac{\pi^2}{b^2} \right) \int_0^a \int_0^b \sin^2 \frac{\pi x}{a} \sin^2 \frac{\pi y}{b} dx dy \\ &= \frac{1}{8} D a_{1,1}^2 \left(\frac{\pi^2}{a^2} + \frac{\pi^2}{b^2} \right) a b\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Pi_e &= - \int_0^a \int_0^b p(x, y) w_n(x, y) dx dy && (46) \\ &= -a_{1,1} p \int_0^a \int_0^b \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b} dx dy \\ &= -p a_{1,1} \frac{4 a b}{\pi^2}\end{aligned}$$

Ritzova metoda – příklad 3 (3)

Celková potenciální energie:

$$\Pi = \frac{1}{8} D a_{1,1}^2 \left(\frac{\pi^2}{a^2} + \frac{\pi^2}{b^2} \right) a b - p a_{1,1} \frac{4 a b}{\pi^2}$$

Soustava rovnic $\frac{\partial \Pi}{\partial a_{1,1}} = 0$:

$$\frac{1}{4} a_{1,1} \left(\frac{\pi^2}{a^2} + \frac{\pi^2}{b^2} \right) a b - p \frac{4 a b}{\pi^2} = 0$$

Hodnota neznámé konstanty $a_{1,1}$:

$$a_{1,1} = \frac{16p}{\pi^2 D} \frac{1}{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}}$$

Ritzova metoda – příklad 3 (4)

Výsledná aproximace průhybu:

$$w_n(x, y) = \frac{10 p}{\pi^6 D \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right)} \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}$$

Dále je možné stanovit momenty, posouvající síly,...

Ritzova metoda pro stěny (1)

Řešení využívající Airyho funkci F – „silová“ varianta.

Protože platí:

$$\Pi^* = \min. \quad (47)$$

variujeme

$$\frac{\partial \Pi^*(F_a)}{\partial a_i} = 0, \quad (48)$$

kde volíme:

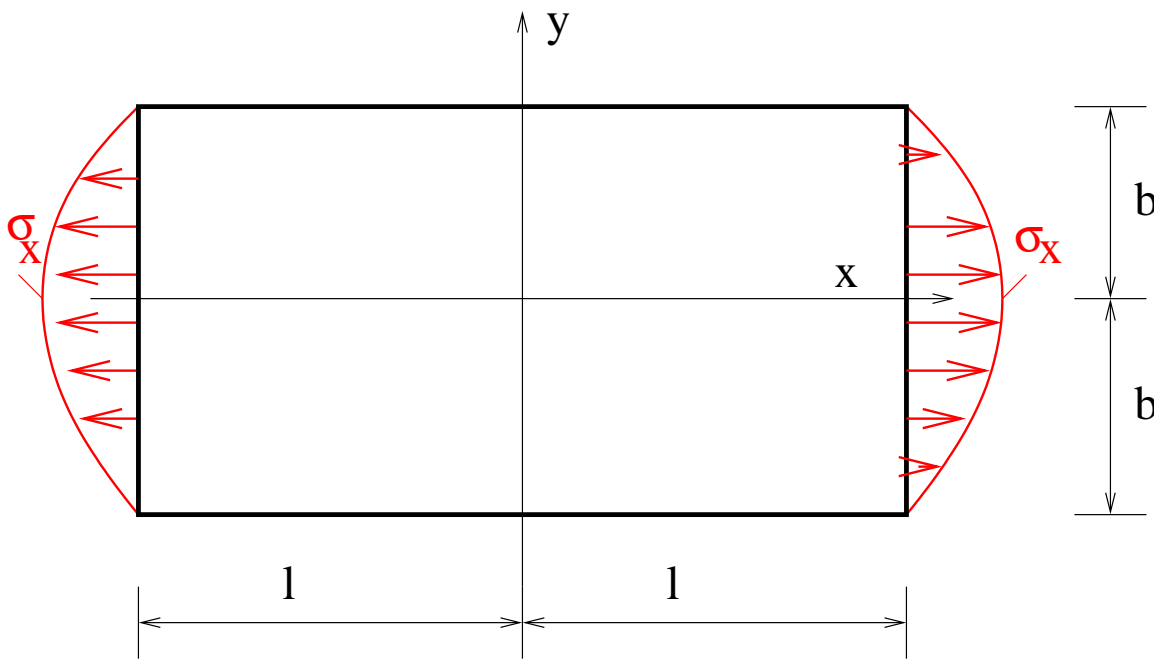
$$F_a = \sum a_i \psi_i \quad (49)$$

Ritzova metoda pro stěny (2)

Poznámka: uvedené řešení platí pro obě varianty rovinného problému: roviná napjatost („stěny“) i roviná deformace.

Ritzova metoda – příklad 4 (1)

Stanovte rozložení napětí uvnitř stěny na obrázku.



$$\sigma_x = p\left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right), \quad p \left[\frac{MN}{m^2} \right]$$

Ritzova metoda – příklad 4 (2)

Volba aproximace Airyho funkce:

$$F = F_0 + F_1$$

Tzv. primární stav (σ_x ve všech příčných řezech je rovno napětím v koncových řezech a $\sigma_y = \tau_{xy} = 0$):

$$F_0 = \frac{p}{2}y^2\left(1 - \frac{y^2}{6b^2}\right)$$

F_0 splňuje okrajové podmínky, protože:

$$\sigma_{x,o} = \frac{\partial^2 F_0}{\partial y^2} = p\left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right), \quad \sigma_{y,o} = \frac{\partial^2 F_0}{\partial x^2} = 0, \quad \tau_{xy,o} = -\frac{\partial^2 F_0}{\partial x \partial y} = 0$$

Ritzova metoda – příklad 4 (3)

Zvolíme:

$$F_1 = a_1 \psi(x, y) = a_1 (l^2 - x^2)^2 (b^2 - y^2)^2$$

F_1 neovlivňuje okrajové podmínky:

$$F_1(x = 0) = 0$$

$$F_1(x = l) = 0$$

Ritzova metoda – příklad 4 (4)

Napětí:

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \frac{\partial^2 F_o}{\partial y^2} = 4 a_1 l^2 b^4 \left(1 - \frac{x^2}{l^2}\right)^2 \left(-1 + 3 \frac{y^2}{b^2}\right) \\ \sigma_y &= \frac{\partial^2 F_o}{\partial x^2} = 4 a_1 b^2 l^4 \left(-1 + 3 \frac{x^2}{l^2}\right) \left(1 - \frac{y^2}{l^2}\right)^2 \\ \tau_{xy} &= -\frac{\partial^2 F_o}{\partial x \partial y} = -16 a_1 l^3 b^3 \frac{x}{l} \left(1 - \frac{x^2}{l^2}\right) \left(1 - \frac{y^2}{l^2}\right)\end{aligned}$$

Ritzova metoda – příklad 4 (5)

Doplňková potenciální energie:

$$\Pi^* = \Pi_i = \frac{h}{2E} \int_{-l}^l \int_{-b}^b (\sigma_x^2 + 2\tau_{xy}^2 + \sigma_y^2) dy dx$$

Dosadíme napětí $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ a výsledek variujeme podle a_1 :

$$\frac{\partial \Pi^*}{\partial a_1} = 0$$

Ritzova metoda – příklad 4 (6)

Po úpravě rovnice $\frac{\partial \Pi^*}{\partial a_1} = 0$:

$$a_1 \left(\frac{64}{7} \frac{256 b^2}{49 l^2} + \frac{64}{7} + \frac{b^2}{l^2} \right) = \frac{p}{l^4 b^2}$$

$$a_1 = \frac{\frac{p}{l^4 b^2}}{\left(\frac{64}{7} + \frac{256 b^2}{49 l^2} + \frac{64 b^2}{7 l^2} \right)}$$

$$F = F_0 + F_1 \frac{p}{2} y^2 \left(1 - \frac{y^2}{6b^2} \right) + \frac{\frac{p}{l^4 b^2}}{\left(\frac{64}{7} + \frac{256 b^2}{49 l^2} + \frac{64 b^2}{7 l^2} \right)} (l^2 - x^2)^2 (b^2 - y^2)$$

Ritzova metoda – příklad 4 (7)

Průběh napětí v $x = 0$ pro poměr $\frac{l}{b} = 1,0$:

