

MKP a stacionární vedení tepla

Konstrukce posuzujeme také:

- z pohledu vedení tepla (tepelné odpory)
- nalezení „tepelných mostů“
- izolačních schopností konstrukce

Matematicky podobná je například i úloha **difuze** (např. solí v betonu) nebo při modelování šíření vlhkosti.

Stacionární vedení tepla

- Stručný nástin úlohy stacionárního vedení tepla.
- Vedení tepla v 1D (teorie).
- Trojuzlový prvek pro řešení 2D úloh – analogický trojuzlovému prvku pro řešení rovinného problému.

Základní vztahy v 1D úloze (2)

Základní rovnice vedení tepla:

$$E_{in} + E_{gen} = \Delta U + E_{out}, \quad (1)$$

kde

- E_{in} je teplo vstupující do úlohy ($[W h]$, $[J]$),
- E_{gen} je teplo generované vnitřním zdrojem ($[J]$),
- ΔU je změna energie ($[J]$) a
- E_{out} je vystupující teplo ($[J]$).

Základní vztahy v 1D úloze (3)

Základní rovnice vedení tepla po úpravě:

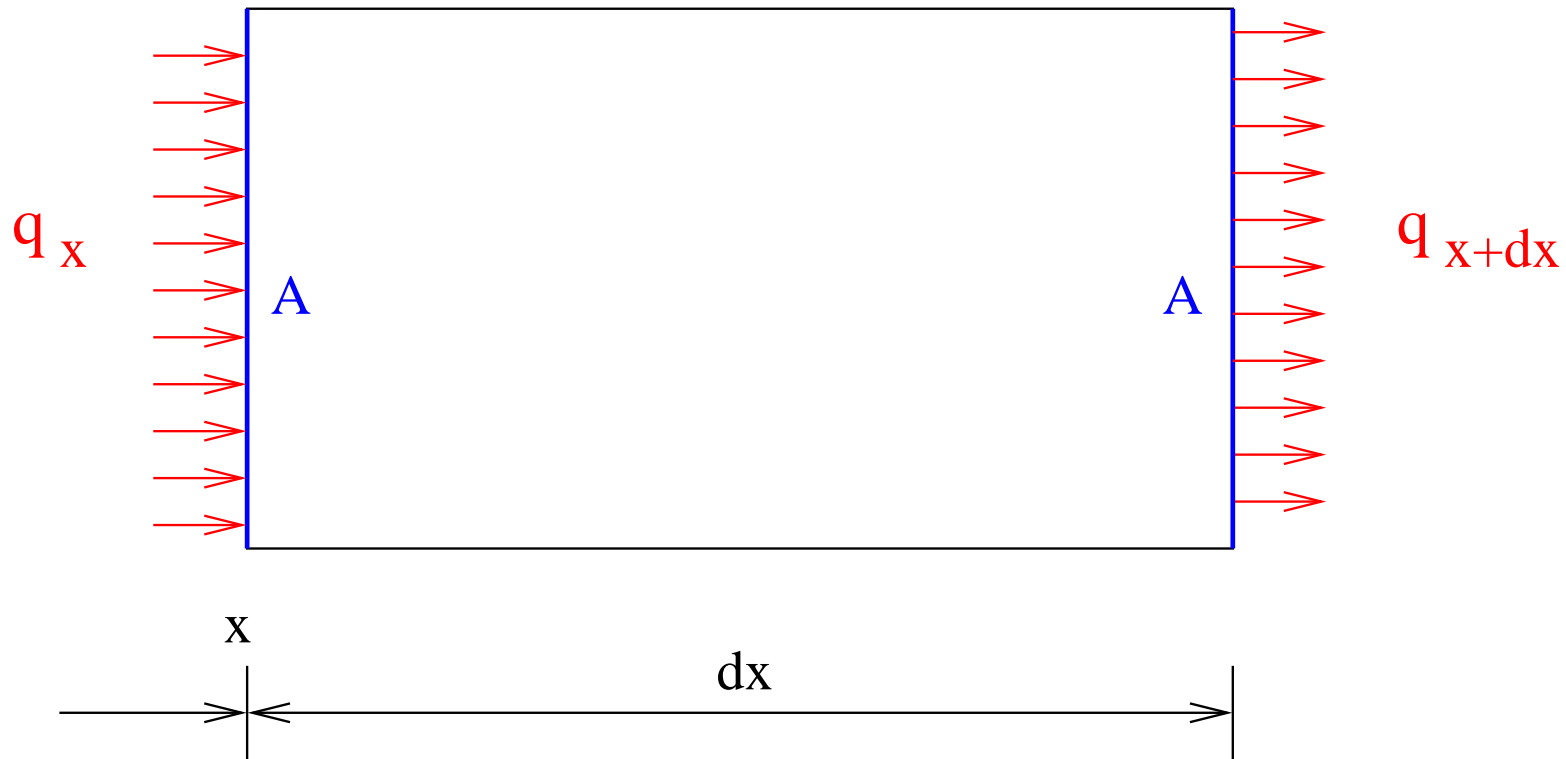
$$q_x A dt + Q A dx dt = \Delta U + q_{x+dx} A dt, \quad (2)$$

kde

- q_x je teplo vstupující do úlohy na okraji x (*tepelný tok*), ($[W/m^2]$),
- q_{x+dx} ... teplo vstupující do úlohy na okraji $x + dx$ ($[W/m^2]$),
- t je čas ($[s]$),
- Q je vnitřní zdroj ($[W/m^3]$)
- A je plocha kolmá na tepelný tok ($[m^2]$).

Základní vztahy v 1D úloze (4)

Vedení tepla tělesem:



Fourierův zákon (1)

$$q_x = -\lambda_x \frac{\partial T}{\partial x}, \quad (3)$$

kde

- q_x je tepelný tok (teplo vstupující do úlohy), ($[W/m^2]$),
- λ_x je tepelná vodivost [$W/(m K)$],
- T je teplota,
- $\frac{\partial T}{\partial x} = g_x$ je tepelný gradient [$K m^{-1}$].

Fourierův zákon (2)

$$q_x = -\lambda_x \frac{\partial T}{\partial x},$$

Taylorův rozvoj (1. člen):

$$f_{x+dx} = f_x + \frac{df_x}{dx} dx, \quad (4)$$

tedy z (4) plyne:

$$q_{x+dx} = - \left[\lambda_x \frac{dT}{dx} + \frac{d}{dx} \left(\lambda_x \frac{dT}{dx} \right) dx \right]. \quad (5)$$

Změna energie

Změnu energie ΔU můžeme zapsat jako:

$$\Delta U = c (\rho A dx) dT. \quad (6)$$

kde

- c je měrná tepelná kapacita ($[(W h)/(kg K)]$) a
- ρ je objemová hmotnost (kg/m^3).

Rovnice nestacionárního vedení tepla

Dosazením výrazů (6) a (4) do základní rovnice (2) získáme **rovnici nestacionárního vedení tepla:**

$$\frac{d}{dx} \left(\lambda_x \frac{dT}{dx} \right) + Q = \frac{c\rho dT}{dt}. \quad (7)$$

Rovnice stacionárního vedení tepla

Úpravou předchozí rovnice (7) získáme
rovnici stacionárního vedení tepla:

$$\frac{d}{dx} \left(\lambda_x \frac{dT}{dx} \right) + Q = 0. \quad (8)$$

V tomto případě musíme zavést omezující předpoklad, že tepelné toky se v čase nemění.

Maticový přepis vztahů pro úlohu stacionárního vedení tepla

Pro 2D úlohu můžeme napsat vztahy pro teplotní gradienty ve tvaru $\varepsilon = \partial T$:

$$\begin{Bmatrix} g_x \\ g_y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T \end{Bmatrix}, \quad (9)$$

což lze chápat jako analogii *geometrických rovnic v mechanice*.

Fourierův zákon

$\mathbf{q} = \mathbf{D}\varepsilon$:

$$\begin{Bmatrix} q_x \\ q_y \end{Bmatrix} = -\lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} g_x \\ g_y \end{Bmatrix}, \quad (10)$$

což je analogií k *fyzikálním rovnicím* v mechanice.

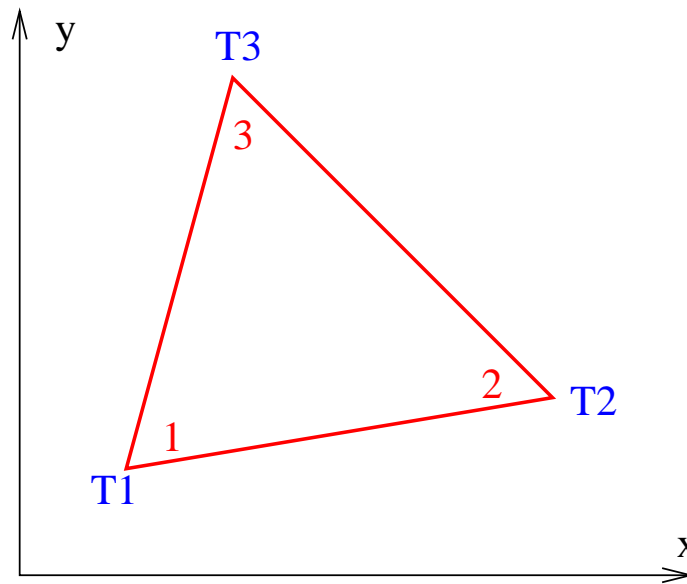
Potenciální energie

Potenciální energie „vnitřních sil“ potom můžeme zapsat jako:

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_V \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{q} dV = \frac{1}{2} \int_V \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon} dV. \quad (11)$$

Odvození konečného prvku pro stacionární problém (1)

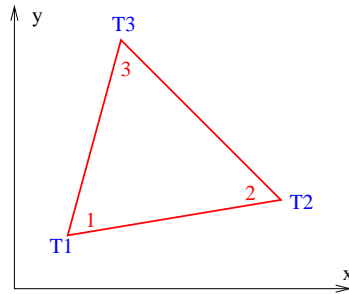
Trojuzlový prvek pro úlohy vedení tepla:



Je-li prvek trojuzlový, musí mít celkem tři neznámé uzlové parametry:

$$\mathbf{T} = \{T_1, T_2, T_3, \}^T. \quad (12)$$

Odvození konečného prvku pro stacionární problém (2)



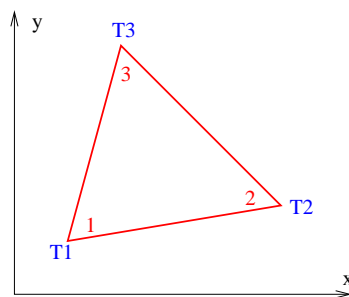
Aproximace neznámých teplot na prvku tedy bude mít tvar:

$$T(x, y) = a_1 x + a_2 y + a_3, \quad (13)$$

což je možné zapsat maticově ($\mathbf{T} = \mathbf{U} \mathbf{a}$):

$$\{ T \} = \begin{bmatrix} x & y & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Bmatrix}. \quad (14)$$

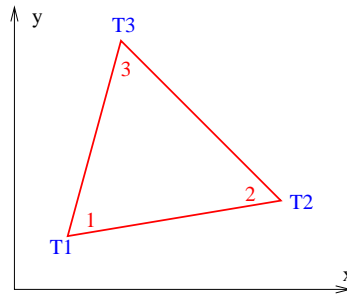
Odvození konečného prvku pro stacionární problém (3)



V uzlech 1, 2, 3 můžeme napsat aproximace teplot ($r = S a$):

$$\begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Bmatrix} \quad (15)$$

Odvození konečného prvku pro stacionární problém (4)



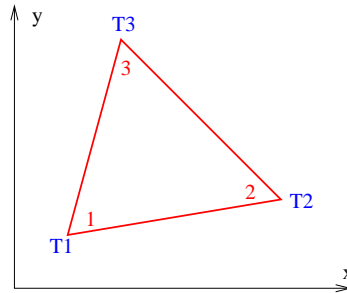
Kombinací vztahů $\varepsilon = \partial^T \mathbf{T}$ a $\mathbf{T} = \mathbf{U}$ a vznikne $\varepsilon = \mathbf{B} \mathbf{a}$, kde $\mathbf{B} = \partial^T \mathbf{U}$:

$$\begin{Bmatrix} g_x \\ g_y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & y & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Bmatrix}, \quad (16)$$

tedy:

$$\begin{Bmatrix} g_x \\ g_y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Bmatrix} \quad (17)$$

Odvození konečného prvku pro stacionární problém (5)



Z rovnice(15) plyne:

$$\mathbf{a} = \mathbf{S}^{-1} \mathbf{r}, \quad (18)$$

kde \mathbf{S}^{-1} má tvar:

$$\mathbf{S}^{-1} = \frac{\begin{bmatrix} y_2 - y_3 & y_3 - y_2 & y_1 - y_3 \\ x_3 - x_2 & x_1 - x_3 & x_2 - x_1 \\ x_2 y_3 - x_3 y_2 & x_3 y_1 - x_1 y_3 & x_1 y_2 - x_2 y_1 \end{bmatrix}}{x_1 - (y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)}. \quad (19)$$

Odvození konečného prvku pro stacionární problém (6)

Na základě rovnice (19) můžeme napsat vztah pro gradienty teploty:

$$\varepsilon = \mathbf{B} \mathbf{S}^{-1} \mathbf{r}, \quad (20)$$

který je možné rozepsat do podoby:

$$\varepsilon = \frac{\begin{bmatrix} y_2 - y_3 & y_3 - y_2 & y_1 - y_3 \\ x_3 - x_2 & x_1 - x_3 & x_2 - x_1 \\ x_2 y_3 - x_3 y_2 & x_3 y_1 - x_1 y_3 & x_1 y_2 - x_2 y_1 \end{bmatrix}}{x_1 - (y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)} \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{Bmatrix}. \quad (21)$$

Odvození konečného prvku pro stacionární problém (7)

Potenciální energie „vnitřních sil“ má tvar:

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_V \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{q} dV = \frac{1}{2} \int_V \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon} dV. \quad (22)$$

Po dosazení do (22) za jednotlivé členy je možné psát:

$$\Pi_i = \frac{1}{2} \mathbf{r}^T \int_V \mathbf{S}^{-1T} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} \mathbf{S}^{-1} dV \mathbf{r} \quad (23)$$

nebo stručně:

$$\Pi_i = \frac{1}{2} \mathbf{r}^T \mathbf{K} \mathbf{r}. \quad (24)$$

Odvození konečného prvku pro stacionární problém (8)

Potenciální energie „vnějších sil“ má tvar:

$$\Pi_e = \int_V \mathbf{Q}^T dV, \quad (25)$$

kde \mathbf{Q} je vektor tepelných toků:

$$\mathbf{Q} = \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{Bmatrix}. \quad (26)$$

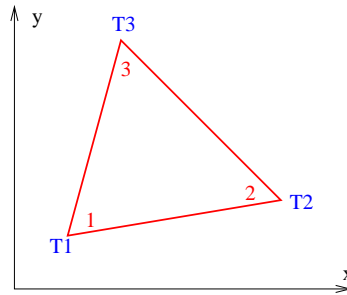
Dále můžeme napsat známý vztah:

$$\mathbf{K} \mathbf{r} = \mathbf{F}, \quad (27)$$

kde \mathbf{F} je vektor „zatížení“ (vektor tepelných toků) a \mathbf{K} ... matice „tuhosti“ (vodivosti) konečného prvku:

$$\mathbf{K} = \int_V \mathbf{S}^{-1T} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} \mathbf{S}^{-1} dV. \quad (28)$$

Odvození konečného prvku pro stacionární problém (9)



$$\mathbf{K} = \int_V \mathbf{S}^{-1T} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} \mathbf{S}^{-1} dV. \quad (29)$$

Protože všechny matice v integrálu obsahují jen konstanty, můžeme upravit do podoby:

$$\mathbf{K} = t \mathbf{A} \mathbf{S}^{-1T} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} \mathbf{S}^{-1}, \quad (30)$$

kde t ... tloušťka konečného prvku.

Převod teplot na zatížení v úlohách statiky

Vypočítané rozložení teplot (změn teplot) můžeme využít jako teplotní zatížení ve statických výpočtech.

Zřejmě platí:

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} \alpha T \\ \alpha T \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (31)$$

kde T je změna teploty oproti výchozímu nenapjatému stavu a α je součinitel teplotní roztažnosti ($[m/K]$).

Potom napětí od změny teploty budou:

$$\sigma = \mathbf{D} \varepsilon, \quad (32)$$

a protože $\varepsilon = \mathbf{B} \mathbf{S}_{-1} \mathbf{r}$, tak uzlové síly prvku \mathbf{F} můžeme získat:

$$\mathbf{F} = t \mathbf{A} \mathbf{S}^{-1\mathbf{T}} \mathbf{B}^{\mathbf{T}} \mathbf{D} \cdot \varepsilon \quad (33)$$

Příklad 1

(1)

Stanovte průběhy napětí σ_x a σ_y na stěně. Úlohu řešte metodou konečných prvků, použijte odvozený konečný prvek na.

Tloušťka stěny o rozměrech $1 \times 0,5$ m je konstantní a má velikost $t = 0,1$ m, modul pružnosti použitého materiálu je $E = 20$ GPa, Poissonův součinitel má velikost 0.2, součinitel teplotní roztažnosti je $\alpha = 1 \cdot 10^{-6}$ m/K.

Stěna je zatížena teplotou -5 K na spodní okraji a $+10$ K na horním okraji.

Řešení

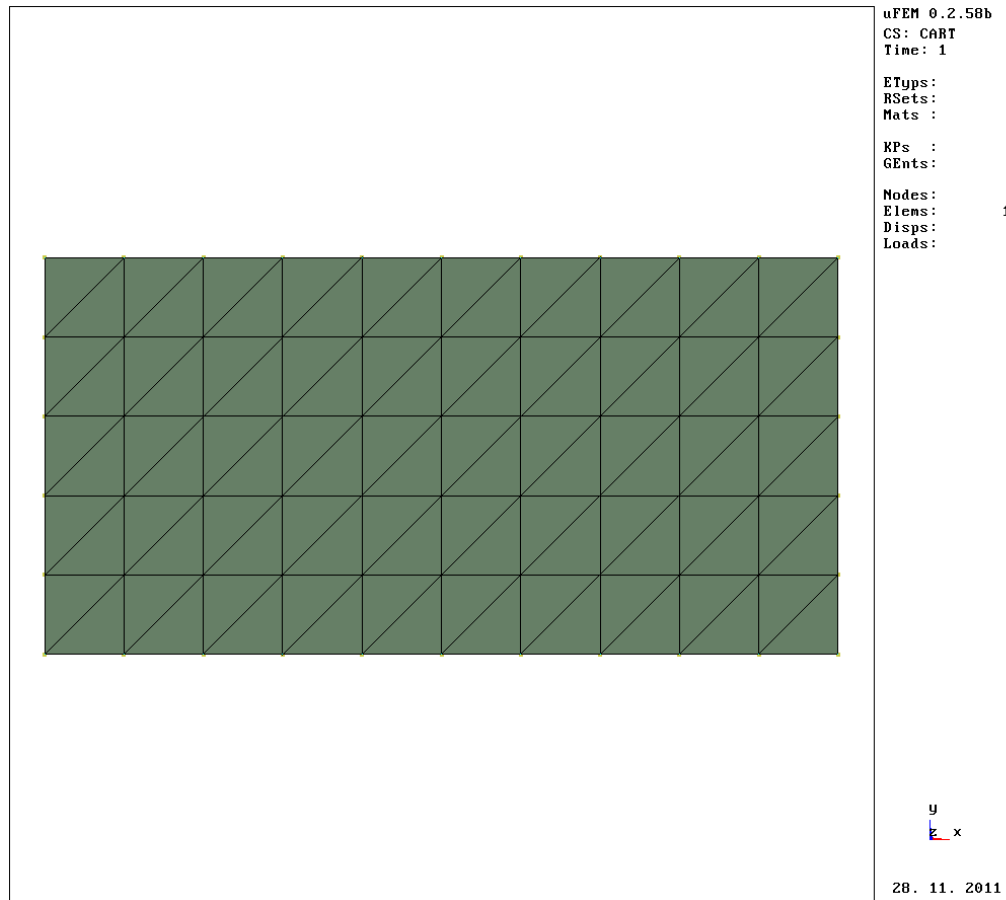
K řešení použijeme například konečněprvkový software uFEM.

Rozložení vypočtených teplot je uvedeno na dalších snímcích. Hodnoty na barevné škále přesně neodpovídají zadaným okrajovým podmínkám. Není to chybou software, ale okolností, že použitý grafický algoritmus průměruje hodnoty teplot ze všech tří uzlů prvku a až tento průměr zobrazuje.

Příklad 1

(2)

Síť konečných prvků pro příklad:



Příklad

(3)

Výsledné teploty:

