

VYSOKÁ ŠKOLA BÁŇSKÁ – TECHNICKÁ UNIVERZITA OSTRAVA  
FAKULTA STAVEBNÍ

# ZÁKLADY METODY KONEČNÝCH PRVKŮ

Jiří Brožovský

Kancelář: LP – H 406/3  
Telefon: 597 321 321  
E-mail: [jiri.brozovsky@vsb.cz](mailto:jiri.brozovsky@vsb.cz)

# Náplň předmětu

1. opakování potřebných vztahů (statika, pružnost)
2. energetické principy, variační metody
3. variační metody
4. základní principy metody konečných prvků (MKP)
5. aplikace MKP na prutové, plošné a prostorové konstrukce
6. izoparametrické konečné prvky
7. okrajové podmínky, zásady tvorby výpočetních modelů

# Doporučená literatura

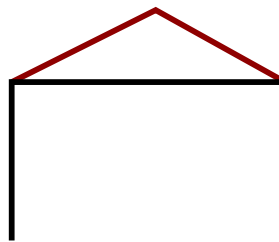
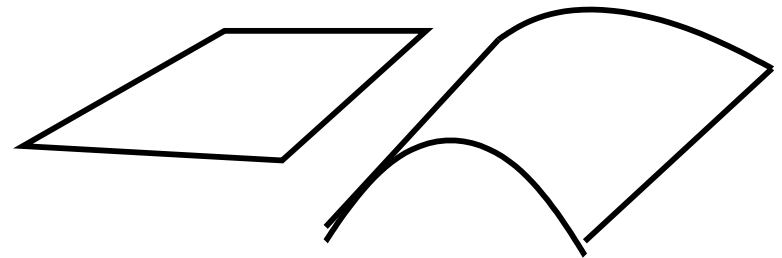
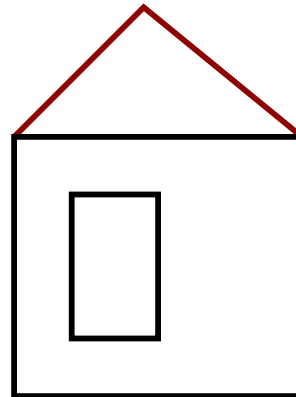
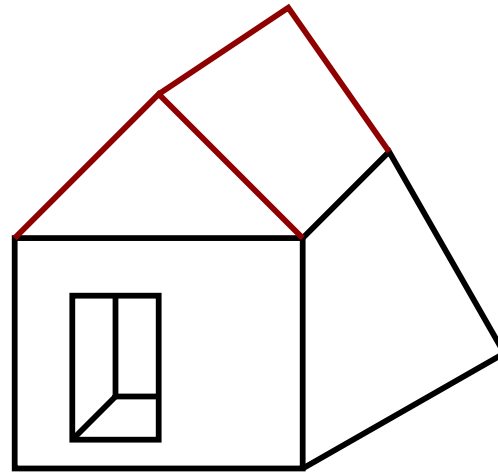
- Teplý, B. – Šmiřák, S.: Pružnost a plasticita 2., VUT v Brně, Brno, 1992 (skriptum)
- Kolář, V., Kratochvíl, J., Leitner, F., Ženíšek, A. Výpočet plošných a prostorových konstrukcí metodou konečných prvků, SNTL, Praha, 1979
- Kolář V., Němec I., Kanický V. FEM Principy a praxe metody konečných prvků, Computer Press, Praha, 1997

# Doplňková literatura

- Šmiřák, S.: Energetické principy a variační metody v teorii pružnosti, VUT v Brně, Brno, 1998 (skriptum)
- Dický, J., Mistríková, Z., Sumec, J.: Pružnost a plasticita v stavebníctve 2, STU, Bratislava, 2005
- Ravinger, J., Koleková, Y.: Pružnosť II., STU, Bratislava, 2002
- Servít a kol.: Teorie pružnosti a plasticity II., SNTL, Praha, 1984 (celostátní učebnice)
- Cook, R. D., Malkus, D. S., Plesha, M. E., Witt, R. J.: Concepts and Applications of Finite Element Analysis, John Wiley and Sons, 1995

# Idealizace geometrie konstrukce

- tělesa
- plošné konstrukce
  - stěny (rovinný problém)
  - desky
  - skořepiny
- pruty



# Opakování: základní předpoklady v lineární mechanice

- látka studovaného tělesa je **spojitá**
- látka je **homogenní** (ve všech místech stejné vlastnosti)
- látka je **isotropní** (ve všech směrech stejné vlastnosti)
- látka se chová **lineárně pružně** (tzv. Hookeův zákon)
- těleso je vystaveno jen **malým deformacím**

## Pak lze použít:

- princip superpozice
- princip úměrnosti

# Isotropní a anisotropní materiál

- **isotropní:** ve všech směrech stejné vlastnosti
- **anisotropní:** v různých směrech různé vlastnosti
- **ortotropní:** různé vlastnosti ve vzájemně kolmých směrech

# Opakování: výpočet deformací staticky určitých konstrukcí

- **lineární mechanika** (viz předchozí předpoklady):
- malé deformace (mnohem menší než rozměry konstrukce)
- platí principy superpozice a úměrnosti
- podmínky rovnováhy stanovujeme na nedeformované konstrukci (**teorie 1. řádu**)

**Kladný směr** deformačních veličin: ve směru příslušné kladné souřadnicové poloosy, u pootočení proti směru hodinových ručiček (při pohledu proti kladné poloose).



# Princip virtuálních prací (1)

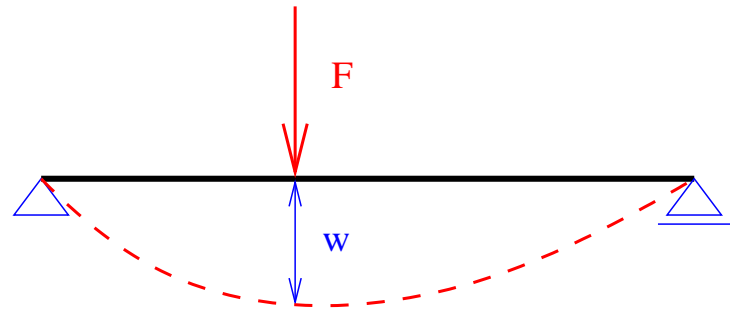
**Virtuální veličina:** myšlená, avšak možná (síla, deformace).

**Práce:** součin síly a dráhy, na které působí.

Práce vnějších sil:

$$L_e = F w, [N m] = [J] \text{ (Joule)}$$

$$L_e = \int_a^b q(x)w(x) dx$$



**Virtuální práce:** práce virtuálních sil na skutečných deformacích (*silová virtuální práce*) nebo práce skutečných sil na virtuálních deformacích (*deformační virtuální práce*).

# Princip virtuálních prací (2)

**Virtuální práce vnitřních sil:**

$$L_i = - \left\{ \int_l N du + \int_l M_y d\varphi_y + \int_l M_z d\varphi_z + \int_l T d\varphi_x + \int_l V_y dv + \int_l V_z dw \right\}$$

Vnitřní síly brání deformacím, jsou proto do vztahu zavedeny jako záporné (znaménko mínus před složenou závorkou).

# Princip virtuálních prací (3)

**Princip virtuálních prací (J. L. Lagrange):**

Celková virtuální práce na vyšetřované konstrukci je rovna **nule**.

$$L_e + L_i = 0$$

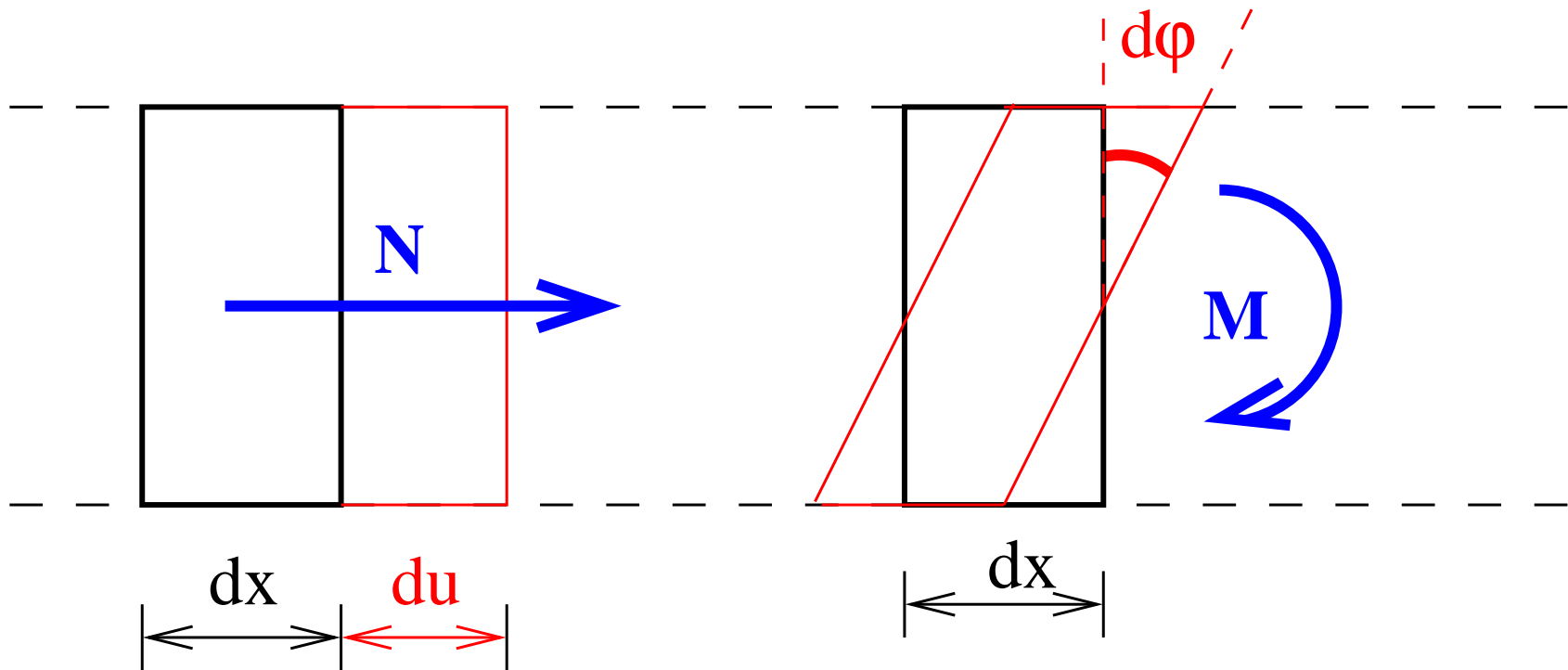
tedy:

$$L_e = -L_i$$

# Princip virtuálních prací (4)

Deformace elementárních vrstviček materiálu:

$$du = \frac{N}{EA}dx, \dots, d\varphi_y = \frac{M_y}{EI_y}dx, \dots, dv = \frac{V_z}{GA_z^*}dx$$



# Princip virtuálních prací (5)

Deformace elementárních vrstviček materiálu:

$$du = \frac{N}{EA} dx, \dots, d\varphi_y = \frac{M_y}{EI_y} dx, \dots, dv = \frac{V_z}{GA_z^*} dx$$

Z  $L_e = -L_i$  a z:

$$L_i = - \left\{ \int_l N du + \int_l M_y d\varphi_y + \int_l M_z d\varphi_z + \int_l T d\varphi_x + \int_l V_y dv + \int_l V_z dw \right\}$$

plyne:

$$L_e = \int_0^l \left\{ \frac{N\bar{N}}{EA} + \frac{M_y\bar{M}_y}{EI_y} + \frac{M_z\bar{M}_z}{EI_z} + \frac{T\bar{T}}{EI_t} + \frac{V_y\bar{V}_y}{GA_y^*} + \frac{V_z\bar{V}_z}{GA_z^*} \right\} dx$$

Veličiny označené *pruhem* jsou **virtuální**.

# Metoda jednotkových sil (1)

Hledáme neznámou deformaci (přetvoření)  $\delta$  od skutečného zatížení.

Aplikujeme na konstrukci virtuální sílu

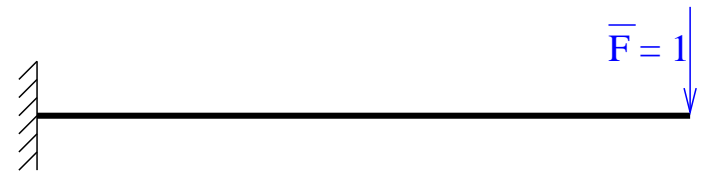
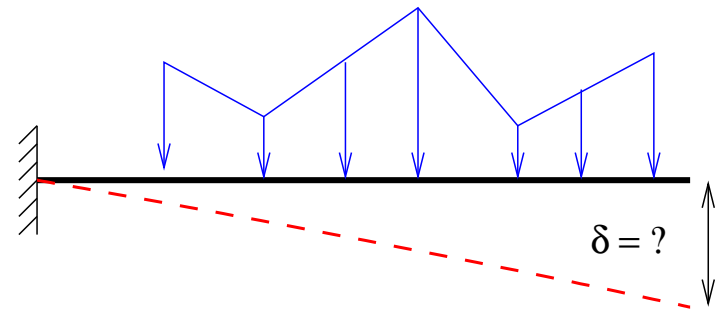
$$\bar{F} = 1.$$

Virtuální práce síly  $\bar{F}$  na deformaci  $\delta$ :

$$L_e = 1 \delta = \delta$$

Tedy zřejmě:

$$\delta = \int_0^l \left\{ \frac{N\bar{N}}{EA} + \frac{M_y\bar{M}_y}{EI_y} + \frac{M_z\bar{M}_z}{EI_z} + \frac{T\bar{T}}{EI_t} + \frac{V_y\bar{V}_y}{GA_y^*} + \frac{V_z\bar{V}_z}{GA_z^*} \right\} dx$$



# Metoda jednotkových sil (2)

1. stanovíme průběhy  $M, N, V$  od skutečného zatížení
2. zavedeme jednotkovou (a bezrozměrnou) virtuální sílu v místě hledaného posunutí (v případě pootočení zavedeme moment)
3. určíme průběhy  $\bar{M}, \bar{N}, \bar{V}$  od virtuální veličiny
4. vypočítáme hledanou veličinu pomocí vzorce (v rovině):

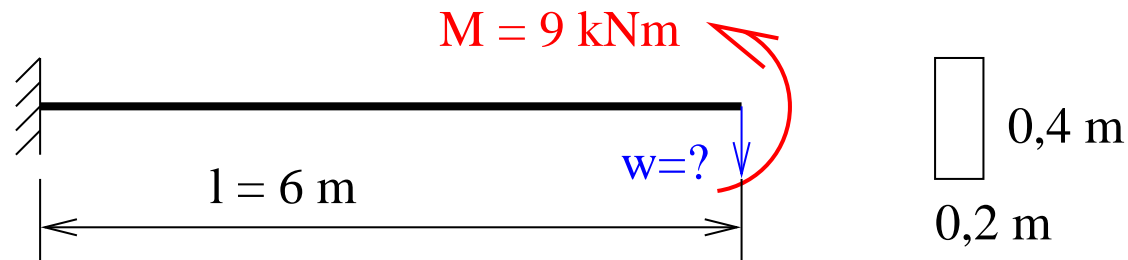
$$\delta = \int_0^l \frac{N\bar{N}}{EA} dx + \int_0^l \frac{M\bar{M}}{EI} dx + \int_0^l \frac{V\bar{V}}{GA^*} dx$$

U nosníkových úloh obvykle zanedbáváme člen  $\int_0^l \frac{V\bar{V}}{GA^*} dx$ .

*Úlohy kde nelze zanedbat práci posouvajících sil – viz Pružnost a plasticita.*

# Příklad 1 (1)

Stanovte průhyb na volném konci konzoly,  $E = 20GPa$ .



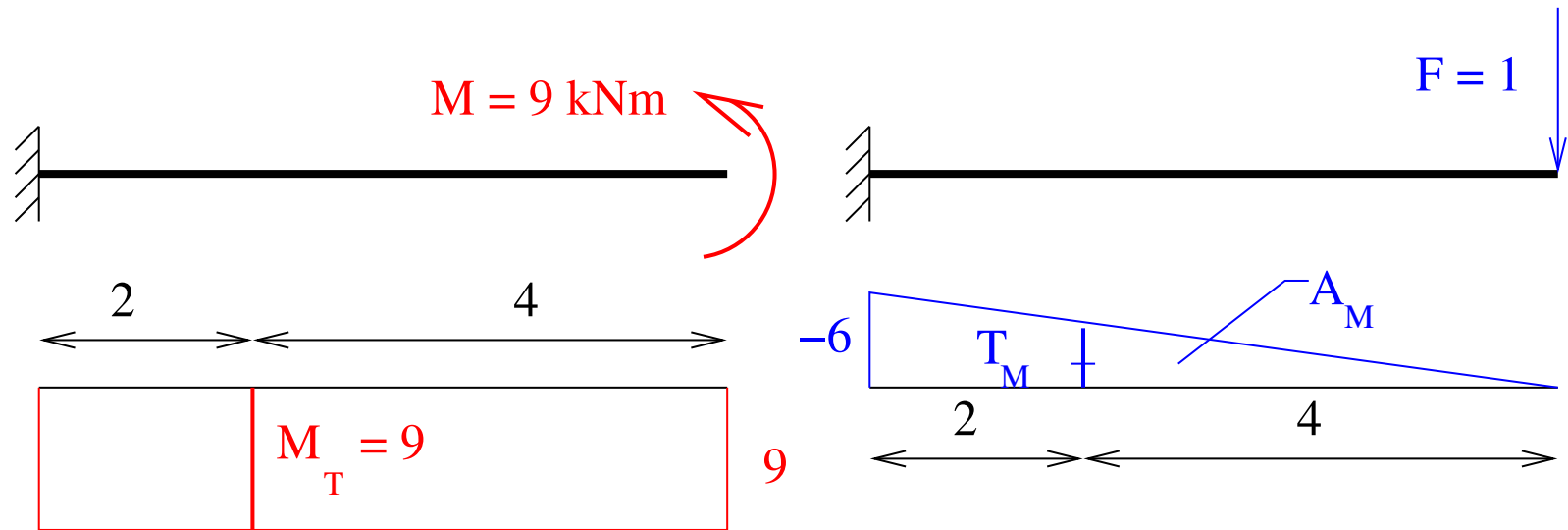
Tedy:

$$I = \frac{1}{12} \times b \times h^3 = \frac{1}{12} \times 0,2 \times 0,4^3 = 0,00106667 \text{ m}^4$$

$$EI = E \times I = 20 \times 10^9 \times 0,00106667 = 21333333,333 \text{ N m}^2$$



# Příklad 1 (2)



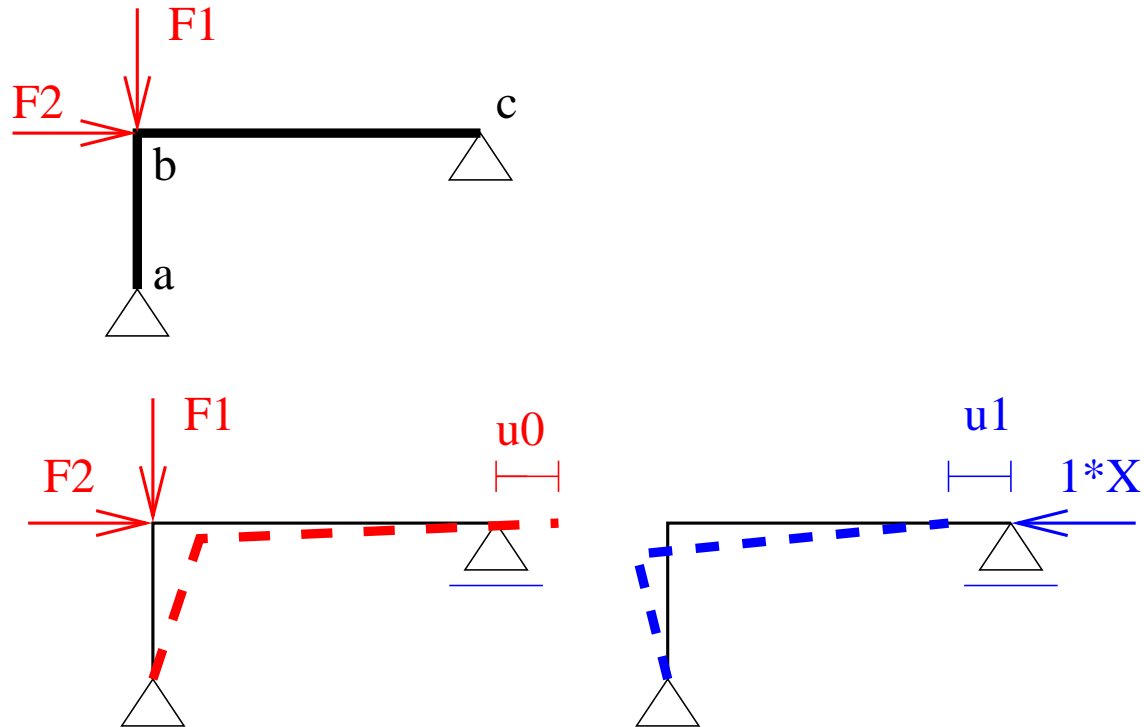
$$\int_0^l M \bar{M} dx = A_M \times \bar{M}_T = \frac{1}{2} \times 6 \times (-6) \times 9 = -162$$

$$w = \frac{1}{EI} \int_0^l M \bar{M} dx = \frac{162 \times 10^3}{21333333,333} = -0,007594 \text{ m } (\uparrow)$$

# Opakování: Silová metoda

- řešení staticky neurčitých konstrukcí
- využívá principu virtuálních prací
- využívá také: podmínky rovnováhy, princip superpozice, princip úměrnosti

# Silová metoda – princip



Výsledný deformační stav (červený + modrý) musí být ve shodě s původní konstrukcí, a proto musí platit (v místě  $c$ ):

$$u_0 + u_1 \times X = 0$$

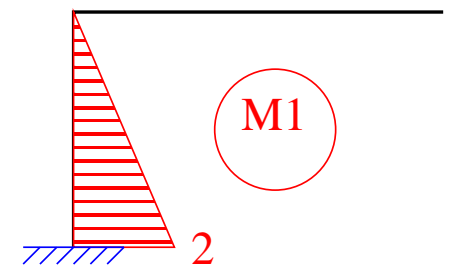
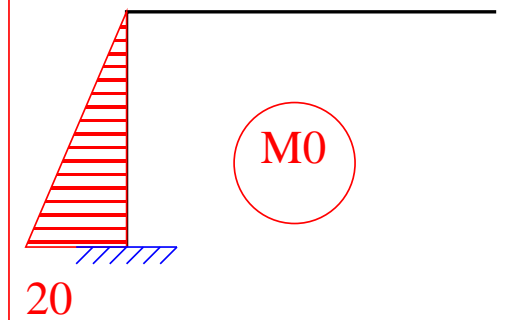
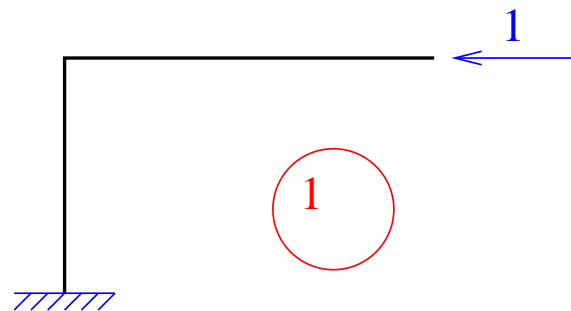
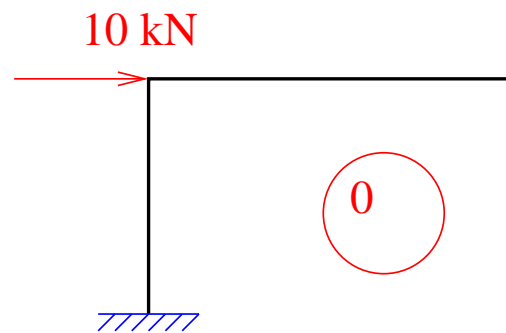
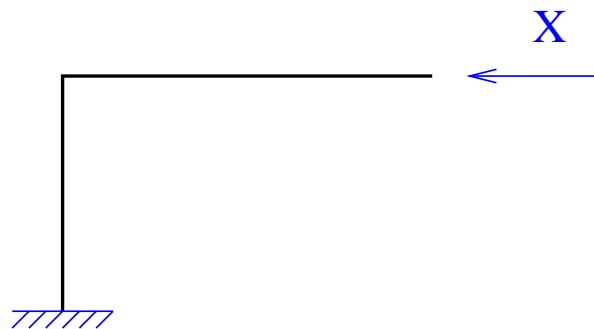
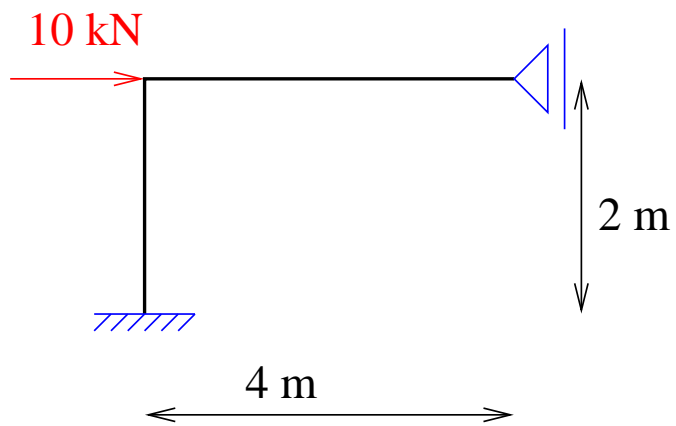
# Silová metoda – postup

1. určení stupně statické neurčitosti  $s$
2. odebrání  $s$  vazeb: vznikne **základní staticky určitá soustava** (pozor na výjimečné případy!)
3. vložení síly neznámé síly  $X_i$  v místě každé odebrané vazby
4. určení deformací  $\delta_{i,j}$  (místo  $X_i$  zavedeme jednotkovou sílu – princip superpozice)
5. sestavení  $s$  deformačních podmínek pro posunutí ve směrech všech  $s$  odebraných vazeb:

$$\delta_{0,1} + \delta_{1,1} \times X_1 + \delta_{1,2} \times X_2 + \dots = 0$$

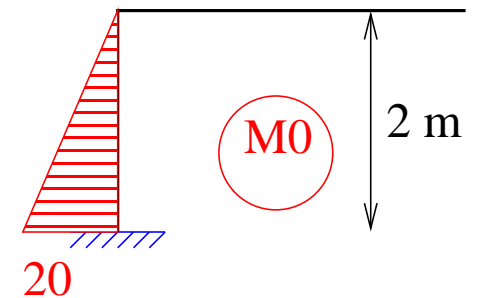
$$\delta_{0,2} + \delta_{2,1} \times X_1 + \delta_{2,2} \times X_2 + \dots = 0$$

# Příklad 2 (1)

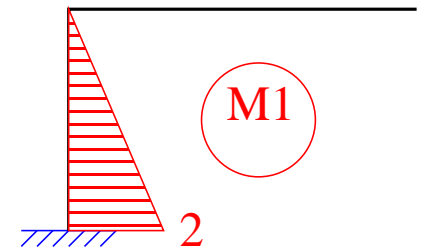


## Příklad 2 (2)

$$\delta_{1,1} = \int \frac{M_1 \overline{M}_1}{EI} = \frac{1}{2} \times 2 \times 2 \times \frac{2}{3} \times 2 = \frac{2,667}{EI}$$



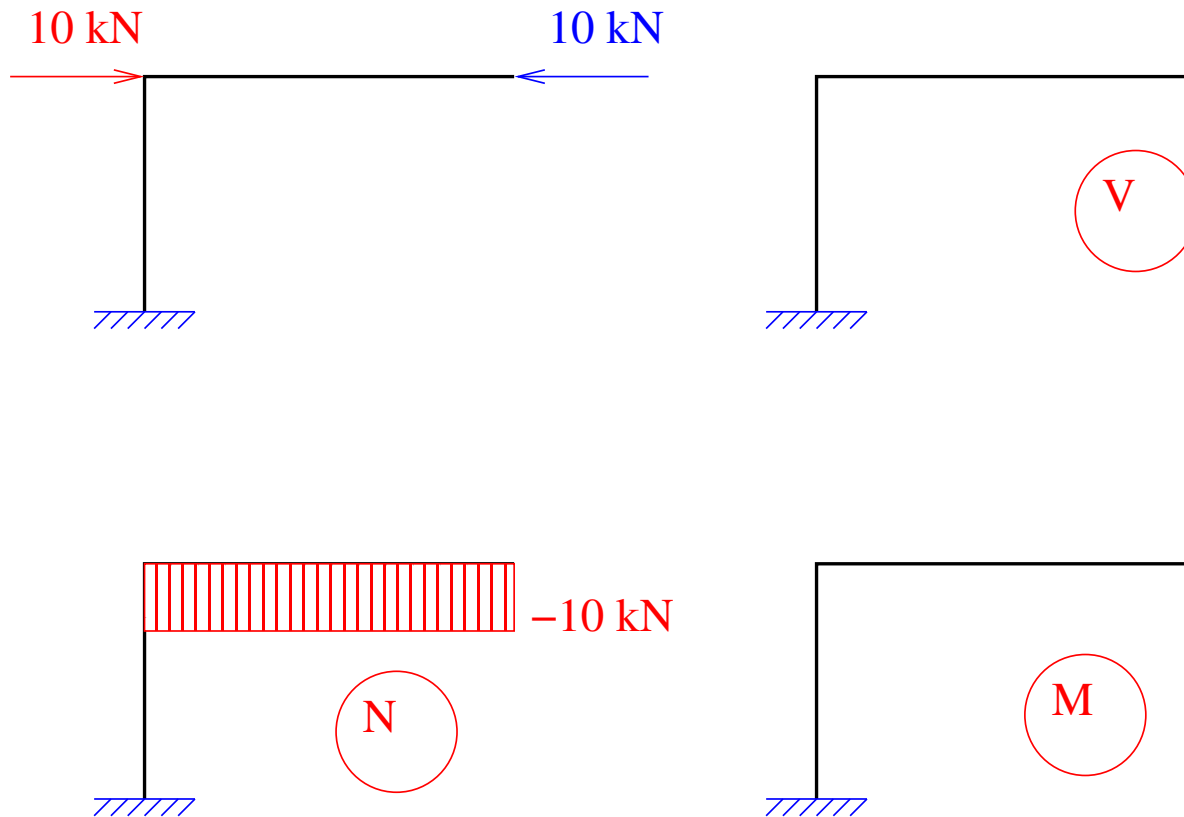
$$\delta_{1,0} = \int \frac{M_0 \overline{M}_1}{EI} = -\frac{1}{2} \times 20 \times 2 \times \frac{2}{3} \times 2 = -\frac{26,667}{EI}$$



$$\delta_{1,0} + \delta_{1,1} \times X_1 = 0 \quad \dots \quad X_1 = -\frac{\delta_{1,0}}{\delta_{1,1}}$$

# Příklad 2 (3)

$$X_1 = -\frac{\delta_{1,0}}{\delta_{1,1}} = -\frac{-26,667}{2,667} = 10 \text{ kN}$$

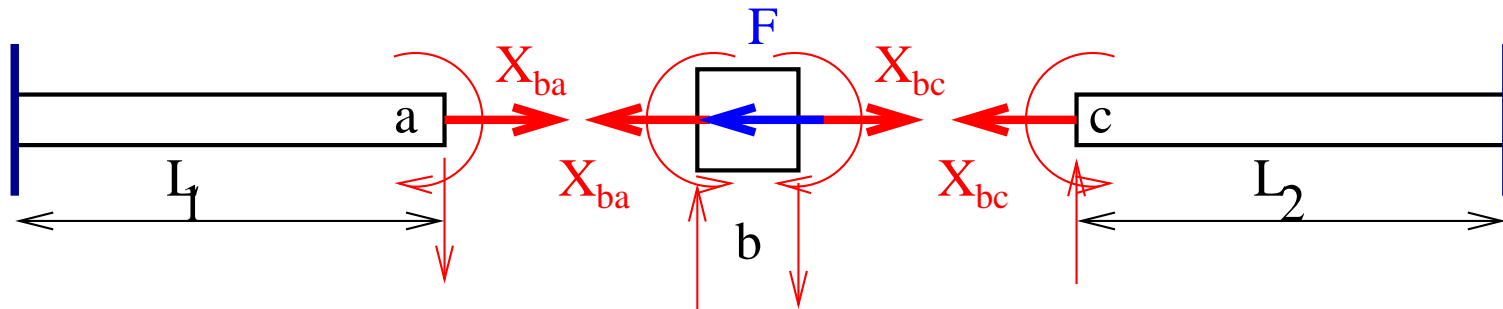


# Opakování: Deformační metoda

- řešení staticky neurčitých konstrukcí
- využívá statických podmínek rovnováhy
- využívá také: základní vztahy teorie pružnosti, princip superpozice, princip úměrnosti



# Deformační metoda: princip (1)



Sestavení podmínek rovnováhy ve styčnicku (např.):

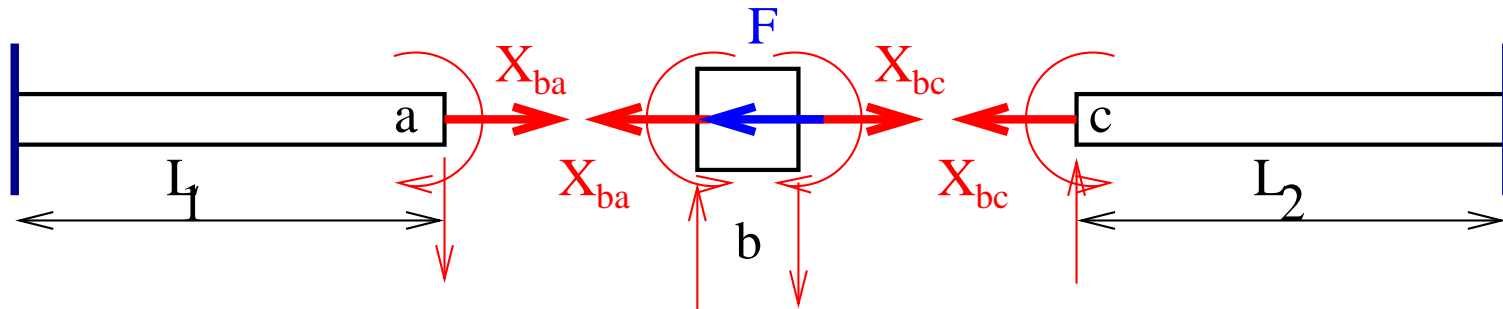
$$\sum F_{ix} =: X_{ba} - X_{bc} + F = 0$$

Určení sil v prutech z principů pružnosti:

$$\Delta L = \frac{X_{ba} \times L_1}{E_1 \times A_1}$$

Dosazením deformačních vztahů do podmínek rovnováhy získáme známou soustavu rovnic  $\mathbf{K} \times \mathbf{u} = \mathbf{F}$ .

# Deformační metoda: princip (2)



$$\sum F_{ix} =: X_{ba} - X_{bc} + F = 0$$

Dosazením deformačních vztahů do podmínek rovnováhy získáme známou soustavu rovnic  $\mathbf{K} \times \mathbf{u} = \mathbf{F}$ .

$$\left( \frac{E_1 \times A_1}{L_1} - \frac{E_2 \times A_2}{L_2} \right) \times u_{bx} = F$$

Pozn.: vztahy platí pro osovou úlohu bez momentů a posouvajících sil.

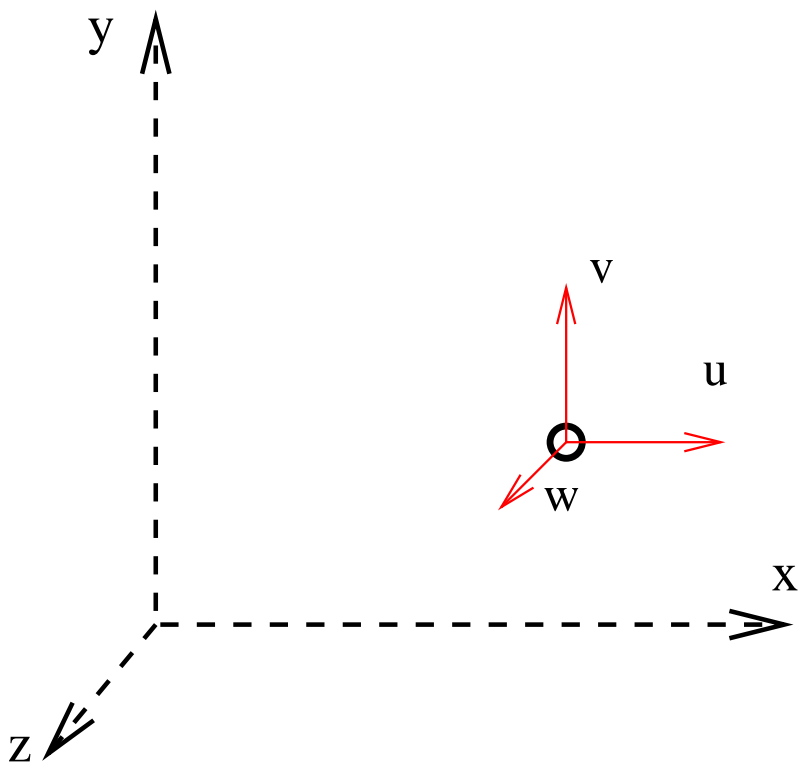
# Deformační metoda: k zopakování

- Matice tuhosti, vektor zatížení, vektor posunutí.
- Lokalizace matic tuhostí prutů do globální matice tuhosti.
- Transformace mezi systémy souřadnic.
- Řešení systémů  $\mathbf{K} \times \mathbf{u} = \mathbf{F}$ .

# Opakování: Základní úloha teorie pružnosti

- základní veličiny
- geometrické vztahy
- diferenciální podmínky rovnováhy
- fyzikální rovnice (konstitutivní vztahy)

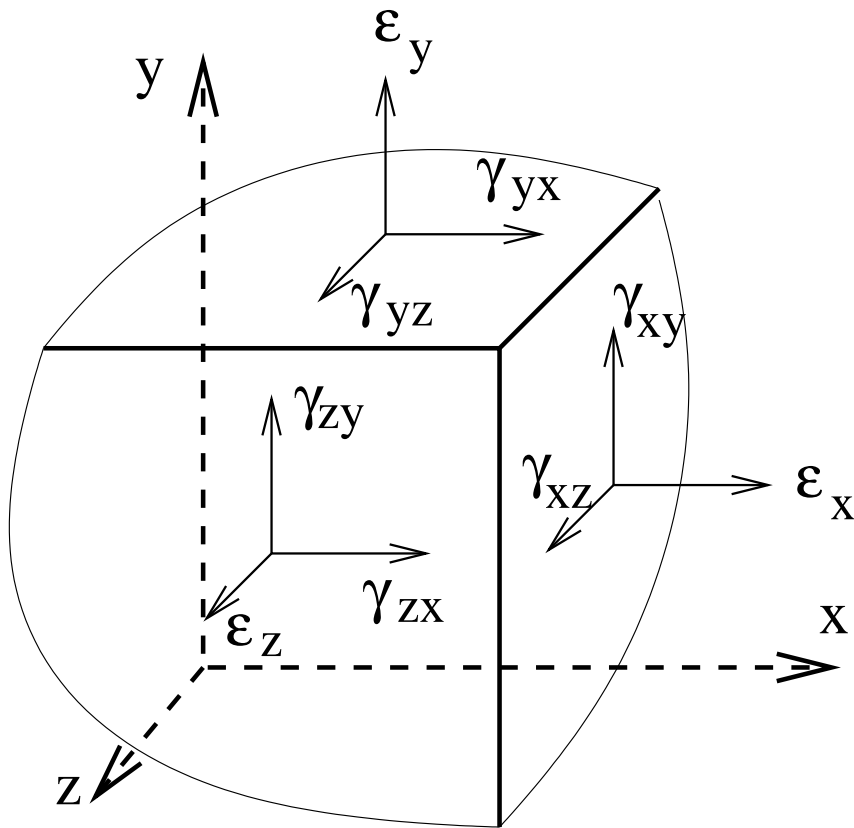
# Základní veličiny (1)



Vektor posunutí

$$\mathbf{u} = \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} \quad (1)$$

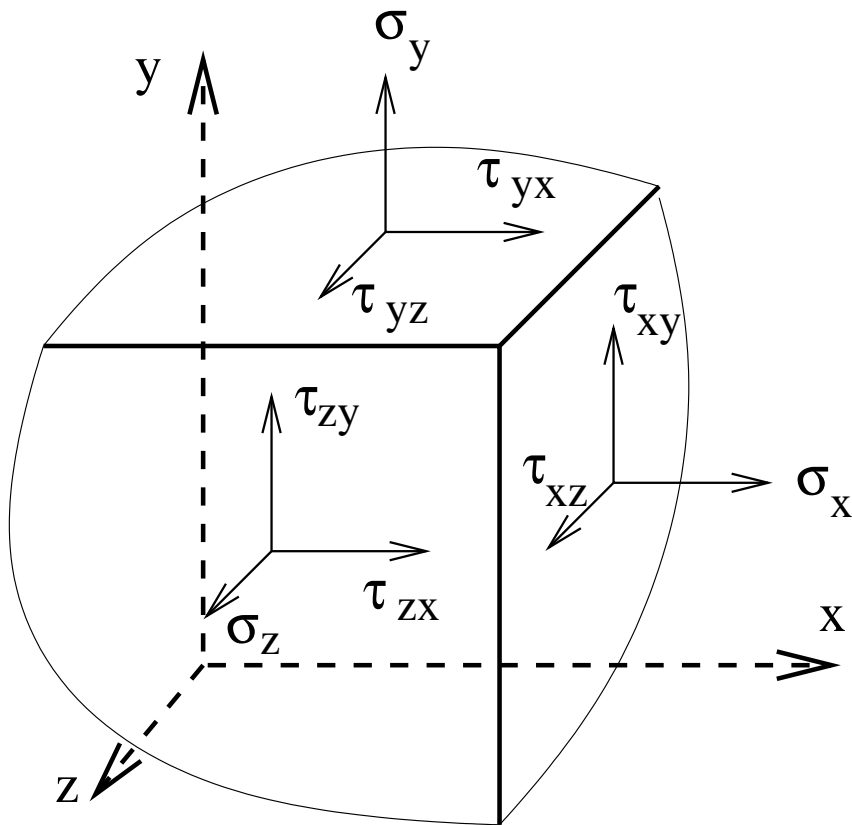
# Základní veličiny (2)



Vektor deformací

$$\boldsymbol{\epsilon} = \left\{ \begin{array}{c} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_z \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \\ \gamma_{xy} \end{array} \right\} \quad (2)$$

# Základní veličiny (3)

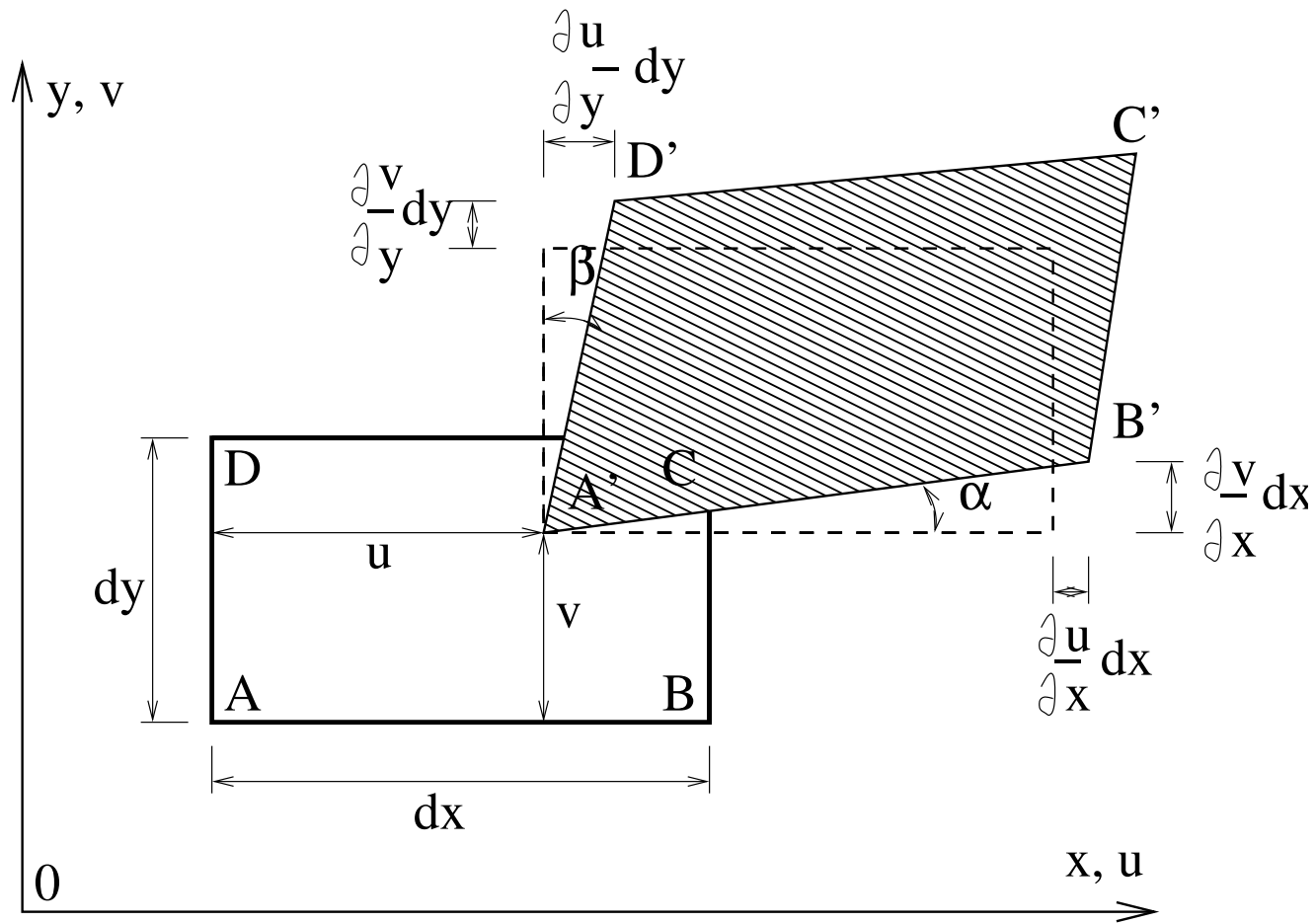


Vektor napětí

$$\sigma = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} \quad (3)$$

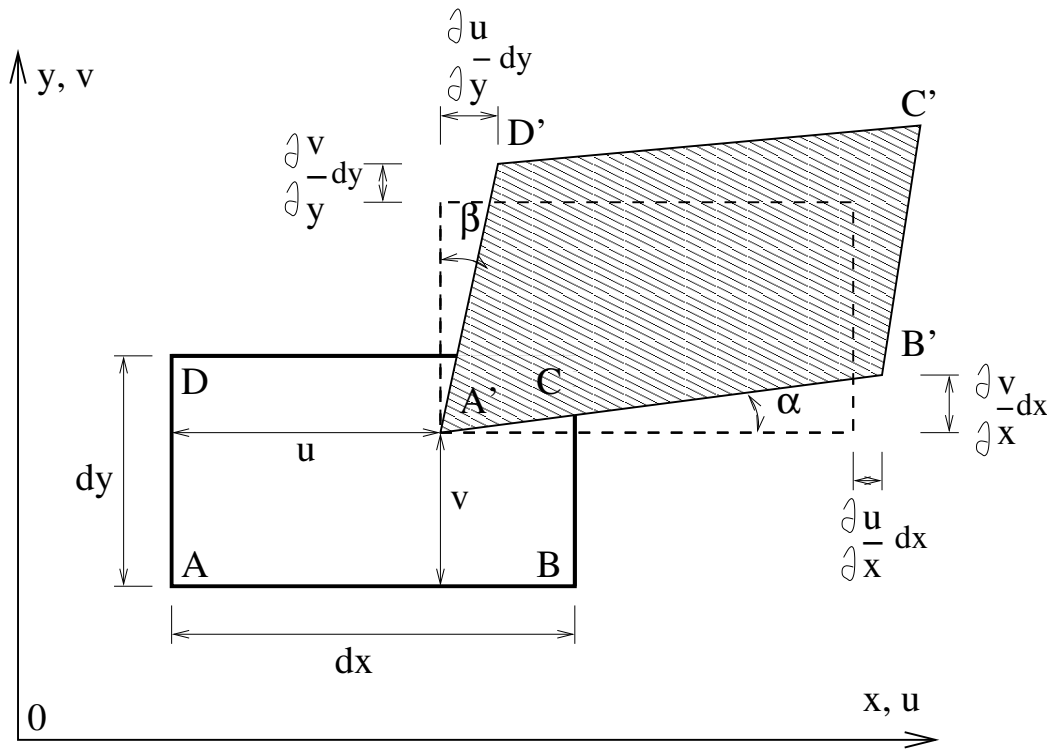
# Geometrické vztahy (1)

Vyjadřují vztahy mezi posunutími a deformacemi.





# Geometrické vztahy (2)



$$\epsilon_x = \frac{A'B' - AB}{AB} = \frac{(x + dx + u + \frac{\partial u}{\partial x} dx) - (x + u) - dx}{dx} = \frac{\partial u}{\partial x}$$

# Geometrické vztahy (3)

Normálové deformace

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}, \quad (4)$$

smykové deformace

$$\gamma_{yz} = \gamma_{zy} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \quad (5)$$

$$\gamma_{zx} = \gamma_{xz} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \quad (6)$$

$$\gamma_{xy} = \gamma_{yx} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}. \quad (7)$$

# Geometrické vztahy (4)

Uvedené vztahy obecně neplatí:

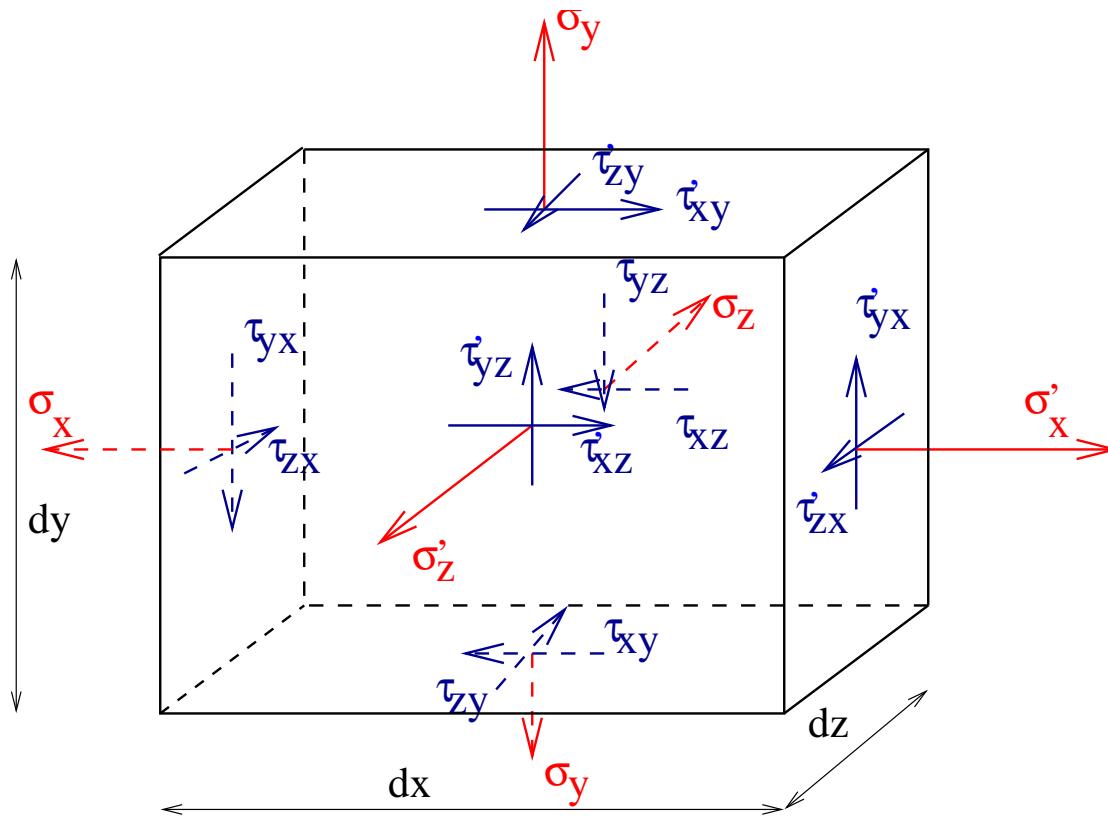
$$\gamma_{yz} = \gamma_{zy},$$

$$\gamma_{zx} = \gamma_{xz},$$

$$\gamma_{xy} = \gamma_{yx}.$$

**Předpoklad o vzájemnosti smykových napětí** se odvozuje z **přibližného** splnění momentových podmínek rovnováhy na elementu tělesa. Na smykové deformace se pohlíží obdobně.

# Diferenciální podmínky rovnováhy (1)



$$\sigma_x' = \sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx, \quad \tau_{xy}' = \tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} dy, \dots \quad (8)$$

# Diferenc. podmínky rovnováhy (2)

$$\sigma_x' = \sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx, \quad \tau_{xy}' = \tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} dy, \dots$$

$$\sum F_{i,y} = (\sigma_x' - \sigma_x) dy dz + (\tau_{xy} - \tau_{xy}') dx dz + (\tau_{xz} - \tau_{xz}') dx dy = 0$$

$$\left(\sigma_x - \sigma_x - \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx\right) dy dz + \left(\tau_{xy} - \tau_{xy} - \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} dy\right) dx dz + \left(\tau_{xz} - \tau_{xz} - \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} dz\right) dx dy = 0$$

A po úpravě:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = 0 \quad (9)$$

# Diferenc. podmínky rovnováhy (3)

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + X &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + Y &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + Z &= 0\end{aligned}\tag{10}$$

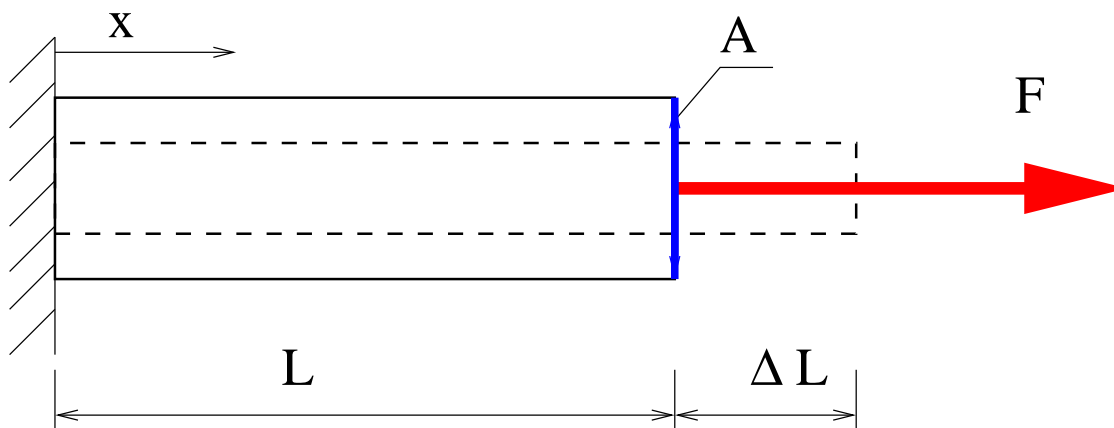
kde  $X, Y, Z$  jsou objemové síly.

# Fyzikální rovnice (1)

Vyjadřují vztahy mezi napětími a deformacemi.

Hookeův zákon v 1D (tah/tlak):

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E}$$



$$\varepsilon_x = \frac{\Delta L}{L} = \frac{\partial L}{\partial x}$$

$$\sigma_x = \frac{F}{A} = E \varepsilon_x$$

# Fyzikální rovnice (2)

Hookeův zákon v prostoru:

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu (\sigma_y + \sigma_z)], & \gamma_{yz} &= \frac{\tau_{yz}}{2G} \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu (\sigma_x + \sigma_z)], & \gamma_{xz} &= \frac{\tau_{xz}}{2G} \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu (\sigma_x + \sigma_y)], & \gamma_{xy} &= \frac{\tau_{xy}}{2G}\end{aligned}\quad (11)$$



# Shrnutí

## **15 neznámých veličin:**

3 složky posunutí  $u$

6 složek deformací  $\varepsilon$

6 složek napětí  $\sigma$

## **15 rovnic:**

6 geometrických rovnic

6 fyzikálních rovnic

3 podmínky rovnováhy