

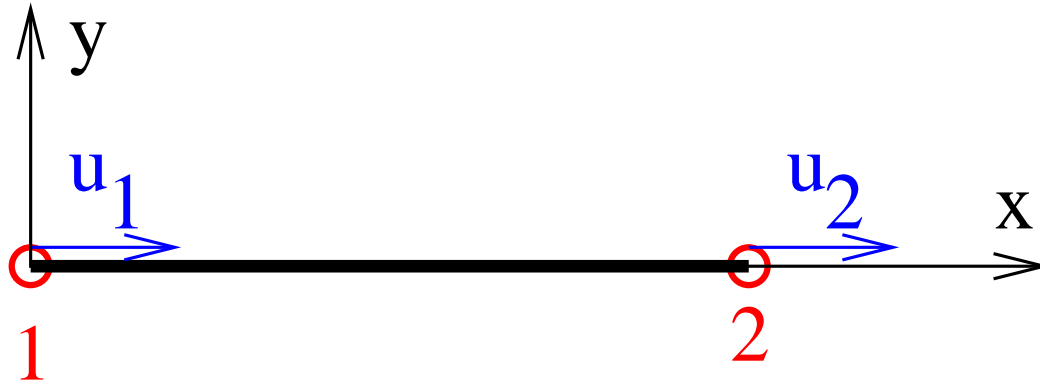
VYSOKÁ ŠKOLA BÁŇSKÁ – TECHNICKÁ UNIVERZITA OSTRAVA  
FAKULTA STAVEBNÍ

# ZÁKLADY METODY KONEČNÝCH PRVKŮ

Cvičení 3

Příhradová konstrukce metodou konečných prvků

# Matrice tuhosti konečného prvku



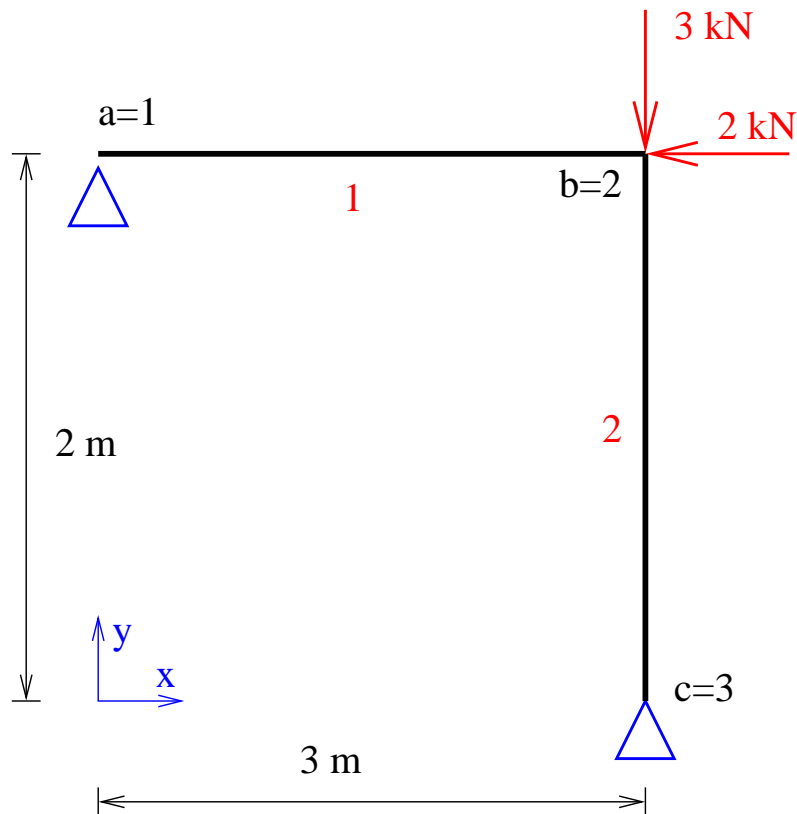
$$\mathbf{K} = \int_V \mathbf{S}^{-1T} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} \mathbf{S}^{-1} dV,$$

$$\mathbf{K} = A L \mathbf{S}^{-1T} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} \mathbf{S}^{-1}$$

kde:

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = [0 \quad 1], \quad \mathbf{D} = [E].$$

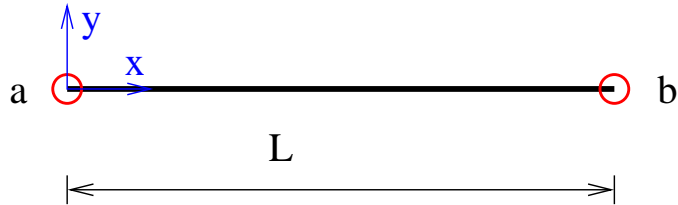
# Rovinná příhradová konstrukce (1)



Metodou konečných prvků stanovte vnitřní síly.

- $A_1 = A_2 = 0,01 \text{ m}^2$
- $E_1 = E_2 = 20 \text{ GPa}$

# Rovinná příhradová konstrukce (2)



Matice tuhosti v lokálních souřadnicích:

$$\mathbf{K} = A L \mathbf{S}^{-1T} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} \mathbf{S}^{-1}$$

kde:

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = [0 \quad 1], \quad \mathbf{D} = [E].$$

Na počítači:

$$x_1=0; \quad x_2=3$$

$$S = [1 \quad x_1 \ ; \ 1 \quad x_2]$$

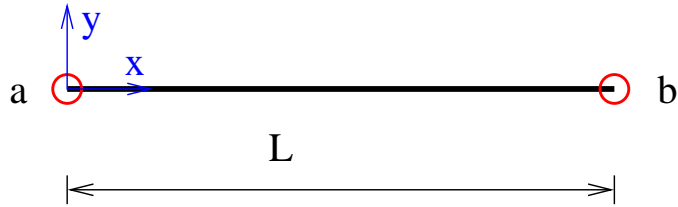
$$B = [0 \quad 1]$$

$$D = [E]$$

$$Si = \text{inv}(S)$$

$$K_{le} = A * l * Si' * B' * D * B * Si$$

# Rovinná příhradová konstrukce (2a)



Rozšíření na velikost  $4 \times 4$  na počítači:

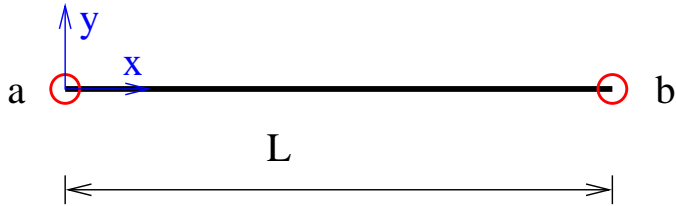
$$K1 = [K1e(1,1) \quad 0 \quad K1e(1,2) \quad 0 \quad ;$$

$$0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad ;$$

$$K1e(2,1) \quad 0 \quad K1e(2,2) \quad 0$$

$$0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad ]$$

# Rovinná příhradová konstrukce (3)



Matice tuhosti v lokálních souřadnicích:

$$\mathbf{K} = A L \mathbf{S}^{-1T} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} \mathbf{S}^{-1}$$

kde:

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = [0 \quad 1], \quad \mathbf{D} = [E].$$

Na počítači:

$$x_1=0; \quad x_2=L$$

$$\mathbf{S} = [1 \quad x_1 \ ; \ 1 \quad x_2]$$

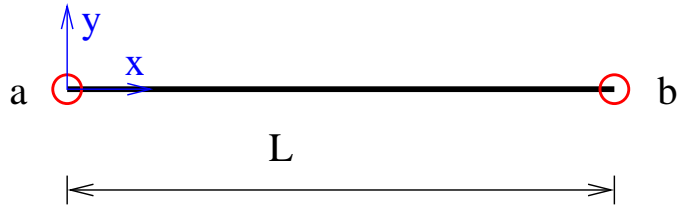
$$\mathbf{B} = [0 \quad 1]$$

$$\mathbf{D} = [E]$$

$$\mathbf{S} = \text{inv}(\mathbf{S})$$

$$\mathbf{K}_{2e} = A * L * \mathbf{S}i' * \mathbf{B}' * \mathbf{D} * \mathbf{B} * \mathbf{S}i$$

# Rovinná příhradová konstrukce (3a)



Rozšíření na velikost  $4 \times 4$  na počítači:

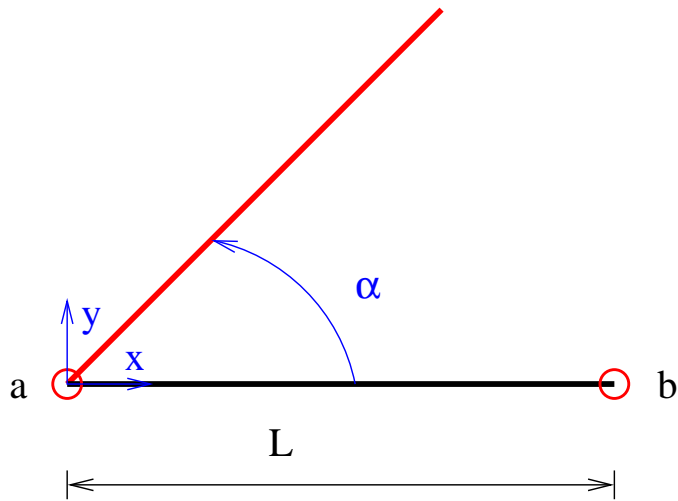
$$K_{21} = [K_{2e}(1,1) \quad 0 \quad K_{2e}(1,2) \quad 0 \quad ;$$

$$0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad ;$$

$$K_{2e}(2,1) \quad 0 \quad K_{2e}(2,2) \quad 0$$

$$0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad ]$$

# Rovinná příhradová konstrukce (4)



Transformační matice:

$$T = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \alpha & \sin \alpha \\ 0 & 0 & -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}_{2g} = \mathbf{T}^T \mathbf{K}_2 \mathbf{T}$$

Na počítači:

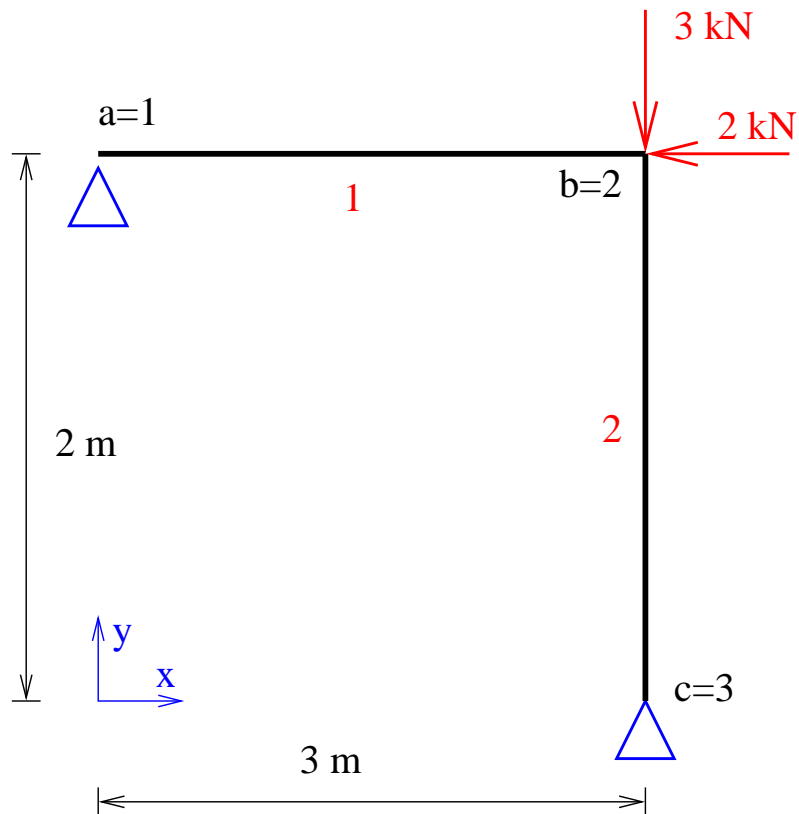
$$a = \text{pi}/2$$

$$T = \begin{bmatrix} \cos(a) & \sin(a) & 0 & 0 \\ -\sin(a) & \cos(a) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos(a) & \sin(a) \\ 0 & 0 & -\sin(a) & \cos(a) \end{bmatrix}$$

$$K2 = T' * K21 * T$$



# Rovinná příhradová konstrukce (5)



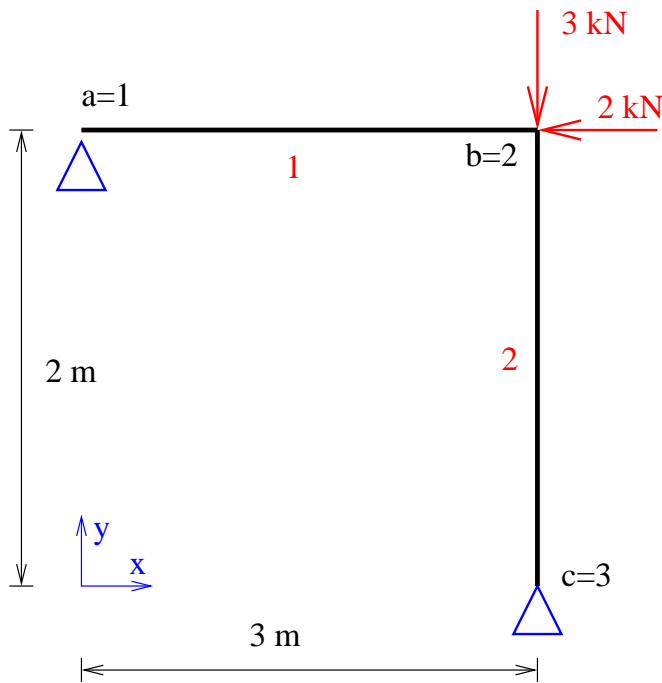
Soustava rovnic:

$$\mathbf{K} \mathbf{u} = \mathbf{F}$$

Nebo:

$$\begin{bmatrix} k_{1,1} & k_{1,2} \\ k_{2,1} & k_{2,2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ w_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_{x2} \\ F_{y2} \end{Bmatrix}$$

# Rovinná příhradová konstrukce (6)



Prut 1:

$$K_1 = \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & x1_{1,1} & x1_{1,2} \\ \cdot & \cdot & x1_{2,1} & x1_{2,2} \end{bmatrix}$$

Prut 2:

$$K_2 = \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & x2_{1,1} & x2_{1,2} \\ \cdot & \cdot & x2_{2,1} & x2_{2,2} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} k_{1,1} & k_{1,2} \\ k_{2,1} & k_{2,2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ w_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_{x2} \\ F_{y2} \end{Bmatrix}$$

# Rovinná příhradová konstrukce (7)

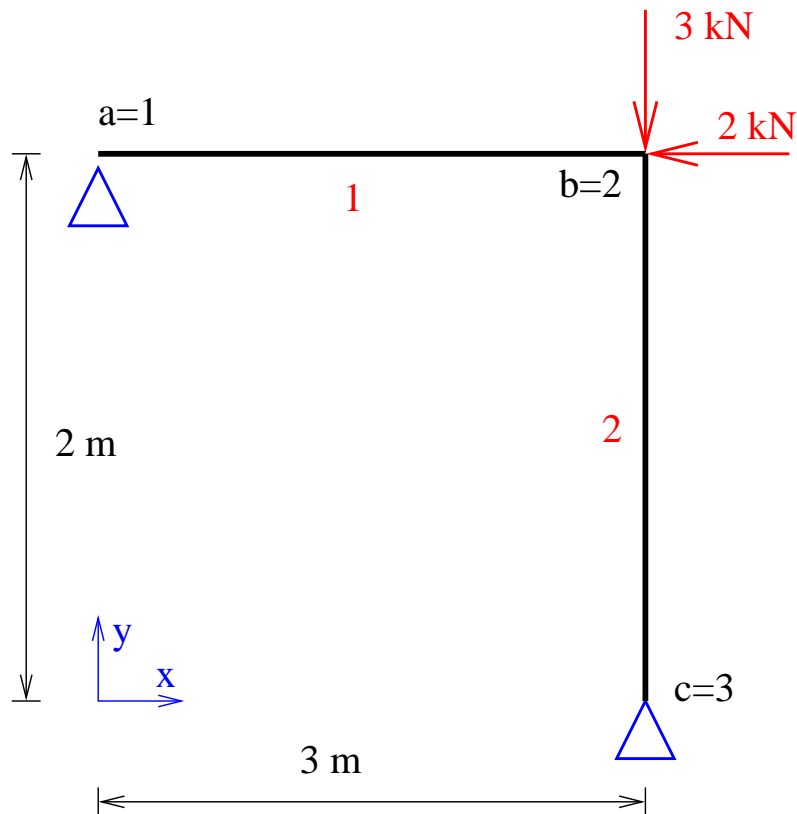
Lokalizace matic tuhosti prutů do matice konstrukce  $\mathbf{K}$ :

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} K1(3,3) + K2(3,3) & K1(3,4) + K2(3,4) & ; \\ K1(4,3) + K2(4,3) & K1(4,4) + K2(4,4) & ] \end{bmatrix}$$

Alternativně:

```
K=zeros(2);  
for i=1:2;  
    for j=1:2;  
        K(i,j) = K1(i+2,j+2) + K2(i+2,j+2);  
    end;  
end;
```

# Rovinná příhradová konstrukce (8)



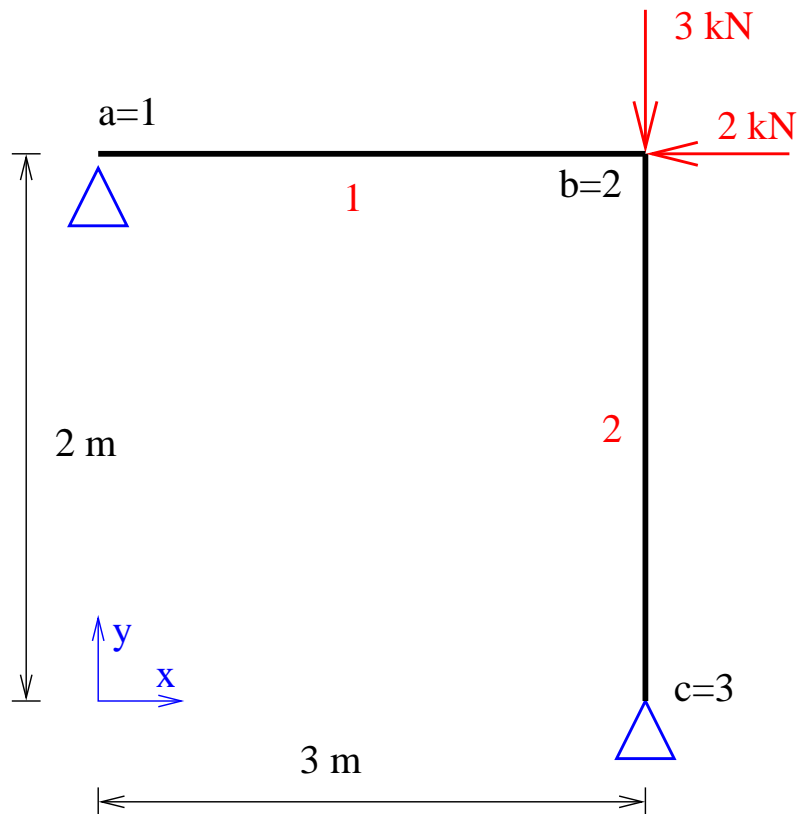
Vektor zatížení:

$$\mathbf{F} = \begin{Bmatrix} F_{x2} \\ F_{y2} \end{Bmatrix} = \mathbf{F} = \begin{Bmatrix} -2000 \\ -3000 \end{Bmatrix}$$

Na počítači:

$$\mathbf{F} = [ -2000 \ ; \ -3000 \ ]$$

# Rovinná příhradová konstrukce (9)



Soustava rovnic:

$$\mathbf{K} \mathbf{u} = \mathbf{F}$$

Řešení na počítači:

$$\mathbf{u} = \mathbf{K} \setminus \mathbf{F}$$

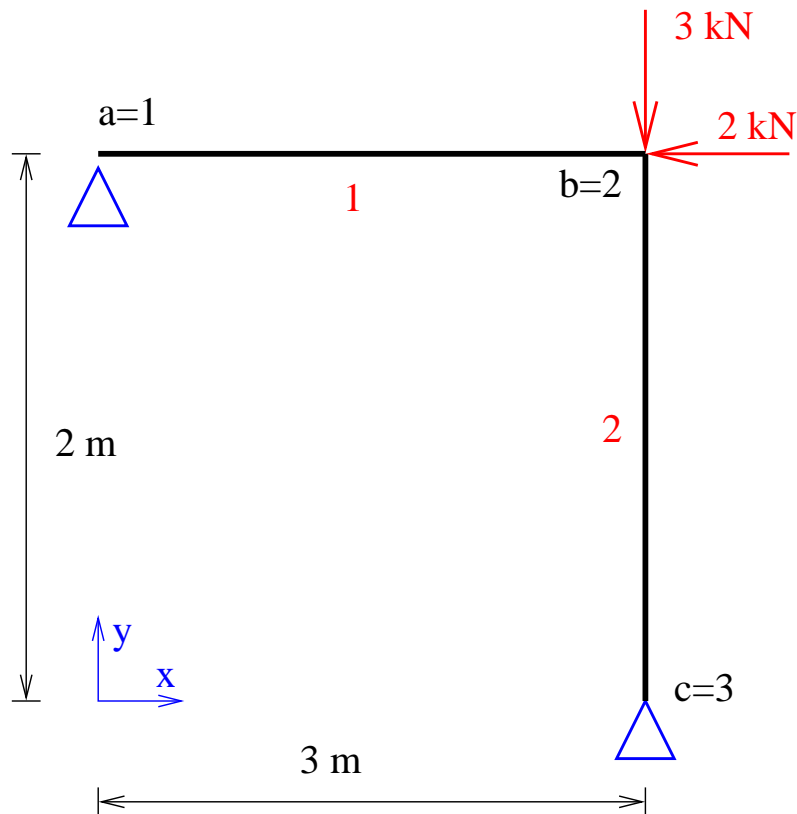
nebo:

$$\mathbf{u} = \text{inv}(\mathbf{K}) * \mathbf{F}$$

Výsledek:

$$\mathbf{u} = \begin{Bmatrix} u_2 \\ w_2 \end{Bmatrix}$$

# Rovinná příhradová konstrukce (10)



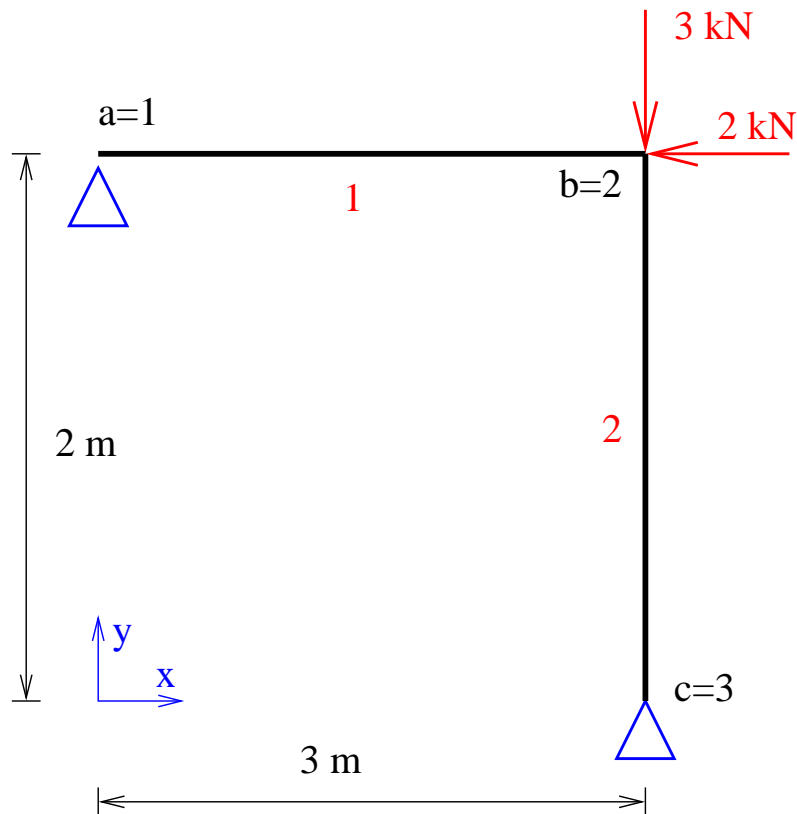
Deformace prutu 1:

$$\mathbf{u1} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ w_1 \\ u_2 \\ w_2 \end{Bmatrix}$$

Řešení na počítači:

$$\mathbf{u1} = [0; 0; u(1); u(2)]$$

# Rovinná příhradová konstrukce (11)



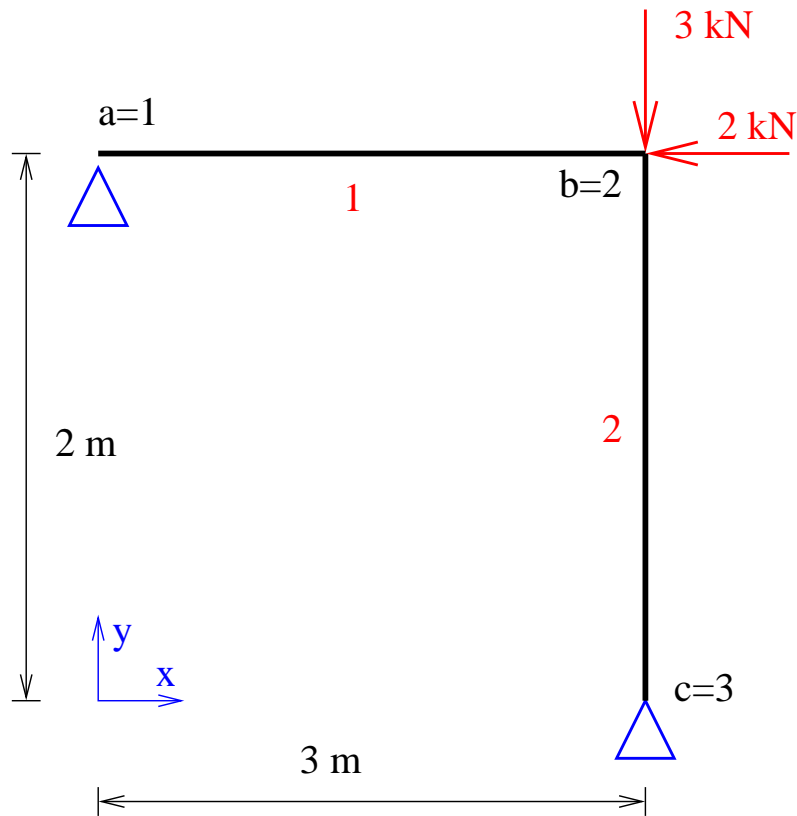
Deformace prutu 2:

$$\mathbf{u}_2 = \begin{Bmatrix} u_2 \\ w_2 \\ u_3 \\ w_3 \end{Bmatrix}$$

Řešení na počítači:

$$\mathbf{u}_{2g} = [0; 0; u(1); u(2)]$$

# Rovinná příhradová konstrukce (12)



Samostatně spočítejte:

- $u_2$  v lokálních souřadnicích
- vektory koncových sil obou prutů
- normálové síly
- reakce

Porovnejte s řešením z prvního cvičení!



# Pomůcka

$$u_2 = T * u_2 g$$

$$R_1 = K_1 * u_1$$

$$R_2 = K * u_2$$

$$N_1 = -R_1 (1)$$

$$N_2 = -R_2 (1)$$

$$H_a = -R_1 (1)$$

$$R_a = -R_1 (2)$$

$$H_c = -R_2 (4) = -2000$$

$$R_c = -R_2 (3) = -3000$$