

VYSOKÁ ŠKOLA BÁŇSKÁ – TECHNICKÁ UNIVERZITA OSTRAVA
FAKULTA STAVEBNÍ

ZÁKLADY METODY KONEČNÝCH PRVKŮ

Cvičení 2

Ritzova metoda

Ritzova metoda (1)

1. Aproximace řešení volíme ve tvaru:

$$w_n(x) = \sum_{i=1}^n a_i \psi_i, \quad (1)$$

kde a_i ... neznámé konstanty, ψ_i ... aproximační funkce.

2. Vyjádříme Π pomocí $w_n(x)$.

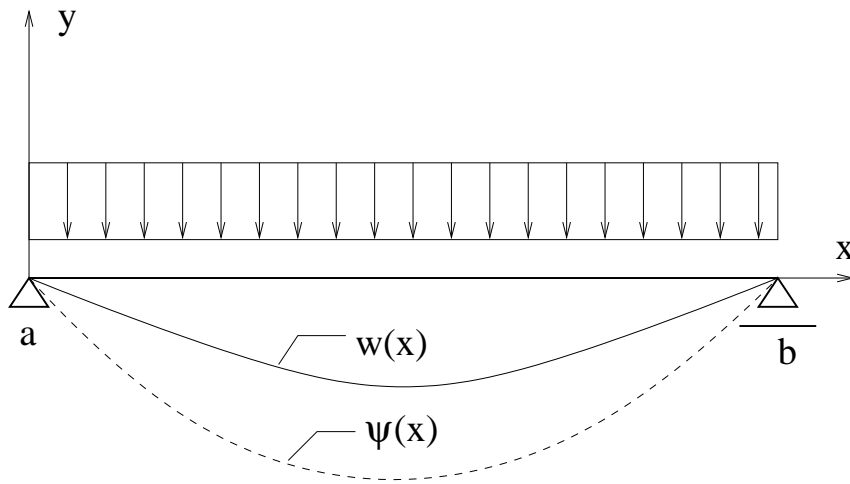
3. Sestavení a vyřešení n rovnic:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial a_i} = 0. \quad (2)$$

4. Dosazení vypočtených a_i do (1).

Rizova metoda (2) – bázové funkce

Bázové (aproximační) funkce ψ musí vyhovovat okrajovým podmínkám úlohy.



Např. při výpočtu průhybu musí platit:

$$\psi(a) = 0 \quad (\text{protože}$$

$$w(a)=0),$$

$$\psi(b) = 0 \quad (\text{protože}$$

$$w(b)=0).$$

Potenciální energie vnitřních sil

Protože platí:

$$N = (E A) \frac{du}{dx}, \quad (3)$$

$$M = -(E I_y) \frac{d^2 w}{dx^2}, \quad (4)$$

tedy potenciální energie vnitřních sil (bez vlivu smyku):

$$\Pi_i = \frac{1}{2} \int_0^L E A u'^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^L E I w''^2 dx. \quad (5)$$

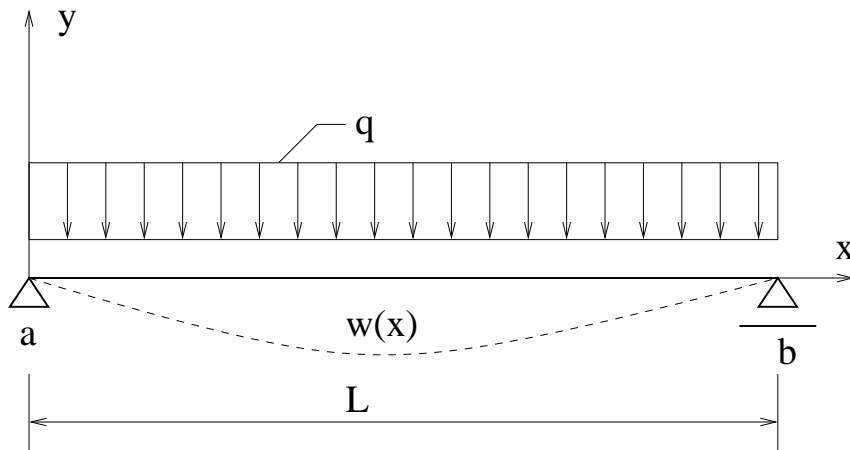
Potenciální energie vnějších sil

Potenciální energie vnějších sil (ohýbaný nosník):

$$\Pi_e = \sum_{i=1}^m F_i w_i + \sum_{i=1}^n M_i \varphi_i + \sum_{i=1}^k \int q_i(x) dx \quad (6)$$

Příklad 1 (1)

Stanovte funkci průhybu prostého nosníku (viz schéma).



Výsledek:

$$w(x) = \frac{q}{24 E I} x(L^3 - 2 L x^2 + x^3)$$
$$w_{max} = \frac{5 q l^4}{384 E I}$$

Volba aproximace (jen 1. člen řady):

$$w(x) = a_1 \psi_1 = a_1 \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right), \quad tj. \psi_1 = \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right).$$

Příklad 1 (2)

Okrajové podmínky:

$$w(a) = w(x = 0) = 0 \dots \psi_1(a) = \sin\left(\frac{\pi \cdot 0}{L}\right) = 0$$

$$w(b) = w(x = L) = 0 \dots \psi_1(b) = \sin\left(\frac{\pi L}{L}\right) = 0$$

Vyjádření Π_e :

$$\Pi_e = - \int_0^L q w(x) dx = - \int_0^L q a_1 \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) dx$$

$$\Pi_e = -q a_1 \left[-\frac{L}{\pi} \cos\left(\frac{\pi x}{L}\right) \right]_0^L = -\frac{2 q L}{\pi} a_1$$

Příklad 1 (3)

Vyjádření Π_i :

$$w' = \left[a_1 \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) \right]' = a_1 \frac{\pi}{L} \cos\left(\frac{\pi x}{L}\right)$$

$$w'' = -a_1 \frac{\pi^2}{L^2} \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)$$

$$\Pi_i = \frac{1}{2} \int_0^L E I w''^2 dx = \frac{1}{2} \int_0^L \left(-a_1 \frac{\pi^2}{L^2} \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) \right)^2 dx = \dots$$

$$\dots = \frac{\pi^4 E I}{4 L^3} a_1^2$$

Příklad 1 (4)

Vyjádření Π :

$$\Pi = \Pi_e + \Pi_i = -\frac{2 q L}{\pi} a_1 + \frac{\pi^4 E I}{4 L^3} a_1^2$$

Sestavení rovnic(e) $\frac{\partial \Pi}{\partial a_i} = 0$:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial a_1} = -\frac{2}{\pi} q L + \frac{\pi^4 E I}{4 L^3} 2 a_1 = 0$$

Výpočet a_1 :

$$a_1 = \frac{4 q L^4}{\pi^5 E I}$$

Příklad 1 (5)

Výsledek (dosazením a_i do $w(x)$):

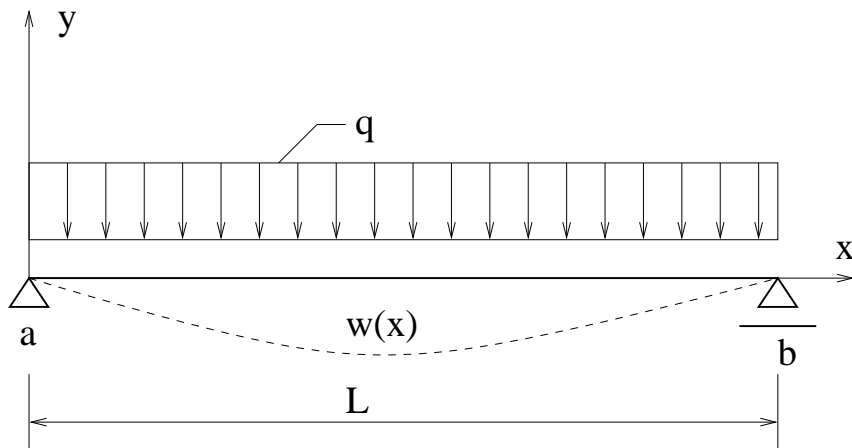
$$w(x) = a_1 \psi_1 = \frac{4 q L^4}{\pi^5 E I} \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)$$

Výpočet vnitřních sil (moment):

$$\begin{aligned} M(x) &= -E I w'' = -E I \left(-a_1 \frac{\pi^2}{L^2} \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) \right) = \\ &= -\frac{4 q L^2}{\pi^3} \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) \end{aligned}$$

Příklad 2 (1)

Stanovte funkci průhybu prostého nosníku (viz schéma).



Volba aproximace:

$$w(x) = a_1 x (x^3 - L^3).$$