

VYSOKÁ ŠKOLA BÁŇSKÁ – TECHNICKÁ UNIVERZITA OSTRAVA
FAKULTA STAVEBNÍ

**ZÁKLADY
METODY KONEČNÝCH PRVKŮ**
Cvičení

Jiří Brožovský

Kancelář: LP – H 406/3
Telefon: 597 321 321
E-mail: jiri.brozovsky@vsb.cz

Náplň cvičení

1. Opakování: deformační metoda
2. Variační metody, Ritzova metoda
3. Řešení příhradové konstrukce MKP
4. Řešení stěn MKP
 - Homogenní a nehomogenní okrajové podmínky
 - Výpočet napětí na stěně
 - ...
5. Semestrální práce

Zápočet

- Aktivní účast na cvičení (minimálně 70%)
- Odevzdání vytvořených programů (*.m) ke všem tématům (bude upřesněno):
 1. Příhradovina deformační metodou
 2. Příhradovina MKP
 3. Stěna MKP
 4. Semestrální práce
- Úspěšná obhajoba semestrálního projektu (principy, obsah práce, výsledky)

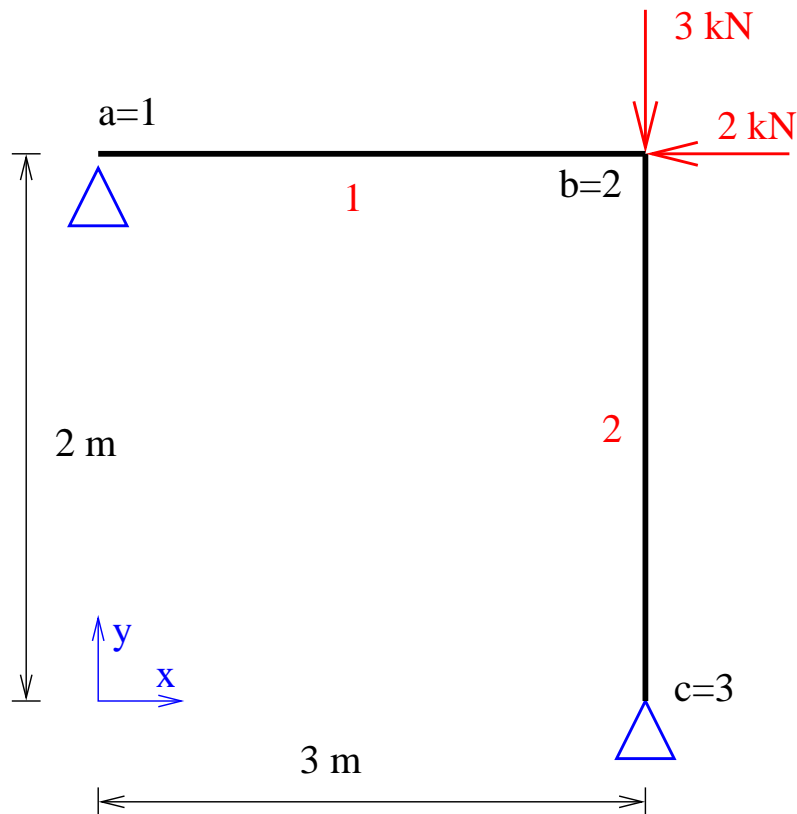
Doporučená literatura

- Teplý, B. – Šmiřák, S.: Pružnost a plasticita 2., VUT v Brně, Brno, 1992 (skriptum)
- Kolář, V., Kratochvíl, J., Leitner, F., Ženíšek, A. Výpočet plošných a prostorových konstrukcí metodou konečných prvků, SNTL, Praha, 1979
- Kolář V., Němec I., Kanický V. FEM Principy a praxe metody konečných prvků, Computer Press, Praha, 1997
- **<http://mi21.vsb.cz/modul/metoda-konecnych-prvku-ve-stavebni-mechanice>**
- <http://mi21.vsb.cz/modul/zaklady-matematicke-teorie-pruznosti>

Doplňková literatura

- Šmiřák, S.: Energetické principy a variační metody v teorii pružnosti, VUT v Brně, Brno, 1998 (skriptum)
- Dický, J., Mistríková, Z., Sumec, J.: Pružnost a plasticita v stavebníctve 2, STU, Bratislava, 2005
- Ravinger, J., Koleková, Y.: Pružnosť II., STU, Bratislava, 2002
- Servít a kol.: Teorie pružnosti a plasticity II., SNTL, Praha, 1984 (celostátní učebnice)
- Cook, R. D., Malkus, D. S., Plesha, M. E., Witt, R. J.: Concepts and Applications of Finite Element Analysis, John Wiley and Sons, 1995

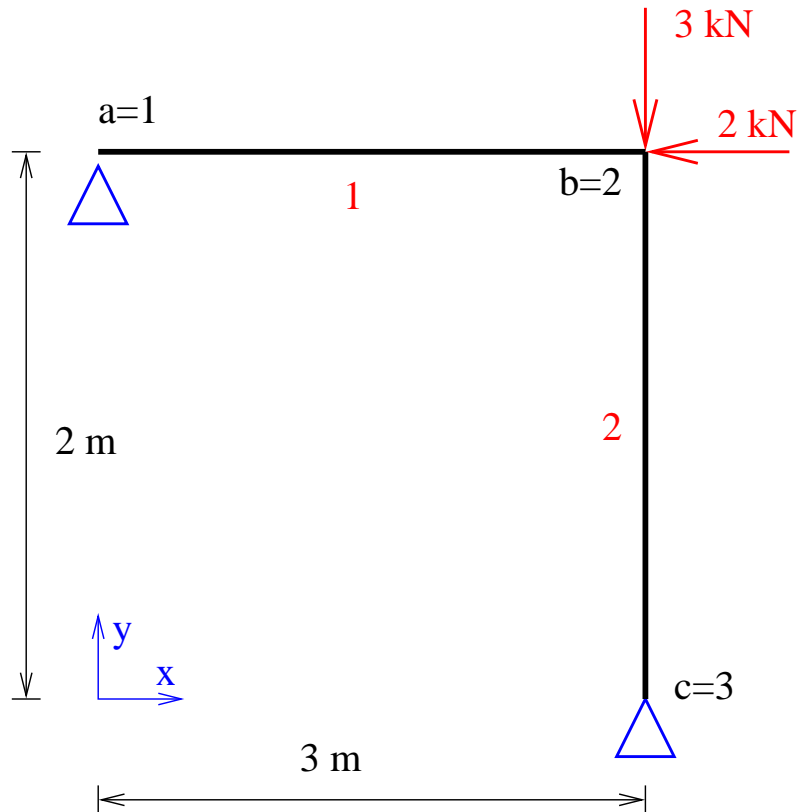
Rovinná příhradová konstrukce (1)



Deformační metodou stanovte vnitřní síly.

- $A_1 = A_2 = 0,01\text{ m}^2$
- $E_1 = E_2 = 20\text{ GPa}$

Rovinná příhradová konstrukce (2)



Ručně:

- $N_1 = -2 \text{ kN}$
- $N_2 = -3 \text{ kN}$

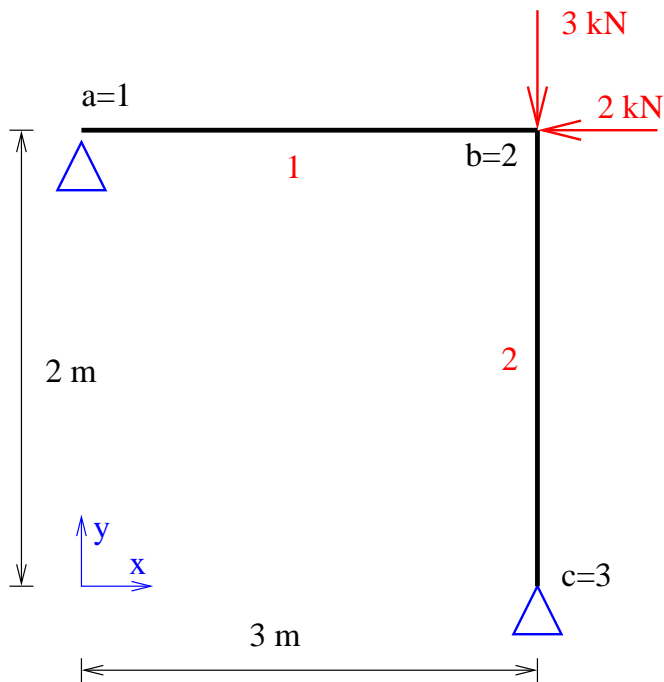
Změna délky prutu 1:

$$\Delta l_1 = \frac{N_1 l_1}{EA}$$

Změna délky prutu 2:

$$\Delta l_2 = \frac{N_2 l_2}{EA}$$

Rovinná příhradová konstrukce (3)



změna délky:

$$\Delta = \sqrt{\Delta l_1^2 + \Delta l_2^2}$$

Na počítači:

$$N1 = -2e3$$

$$N2 = -3e3$$

$$E = 20e9$$

$$A = 0.01$$

$$l1 = 3$$

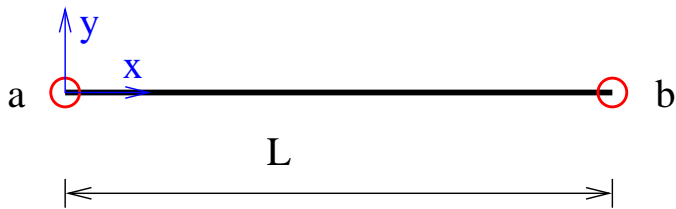
$$l2 = 2$$

Celková

$$d11 = N1 * l1 / (E * A)$$

$$d12 = N2 * l2 / (E * A)$$

Rovinná příhradová konstrukce (4)



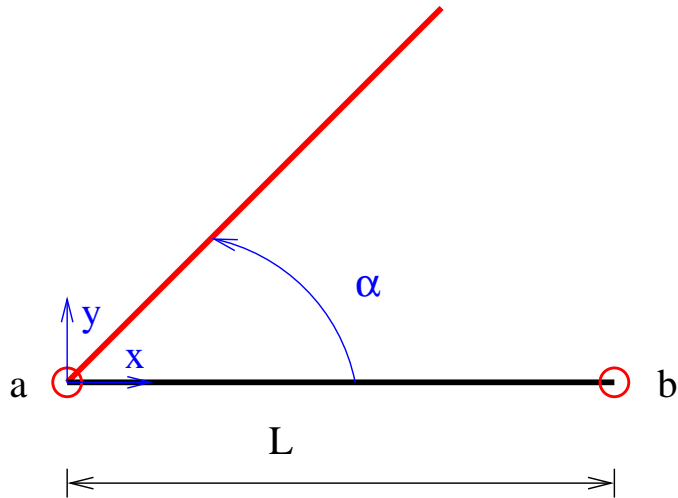
Matice tuhosti v lokálních souřadnicích:

$$K = \frac{E A}{L} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Na počítači:

$$K1 = E * A / l1 * \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Rovinná příhradová konstrukce (5)



Transformační matice:

$$T = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \alpha & \sin \alpha \\ 0 & 0 & -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}$$

$$K_{2g} = T^T K_2 T$$

Na počítači:

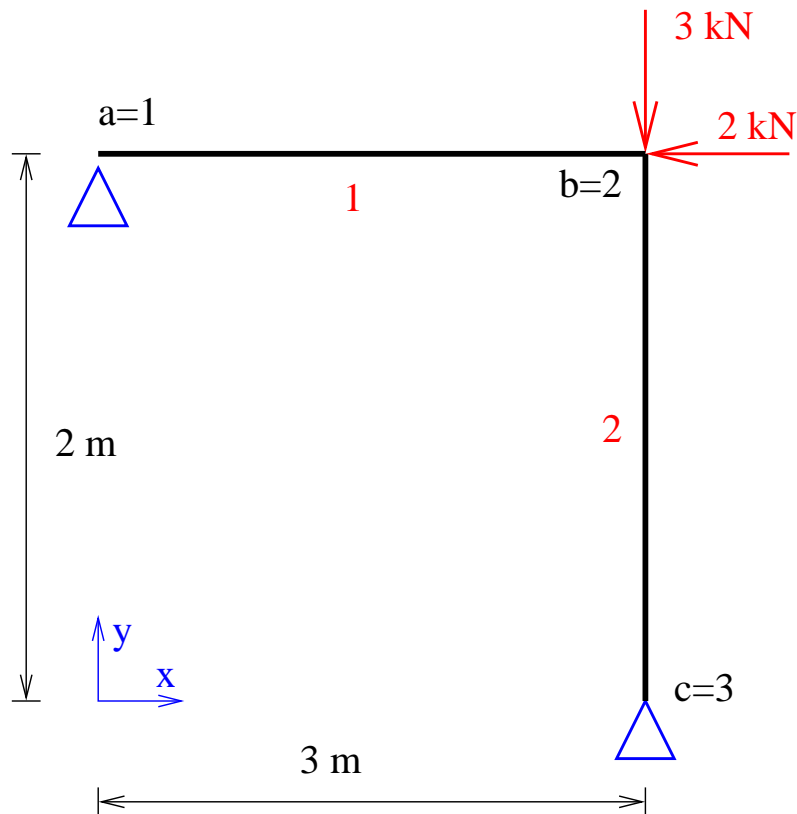
$$K_{21} = E \cdot A / 12 * \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & ; & 0 & 0 & 0 & 0 & ; \\ -1 & 0 & 1 & 0 & ; & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$a = \text{pi} / 2$$

$$T = \begin{bmatrix} \cos(a) & \sin(a) & 0 & 0 \\ -\sin(a) & \cos(a) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos(a) & \sin(a) \\ 0 & 0 & -\sin(a) & \cos(a) \end{bmatrix}$$

$$K_2 = T' * K_{21} * T$$

Rovinná příhradová konstrukce (6)



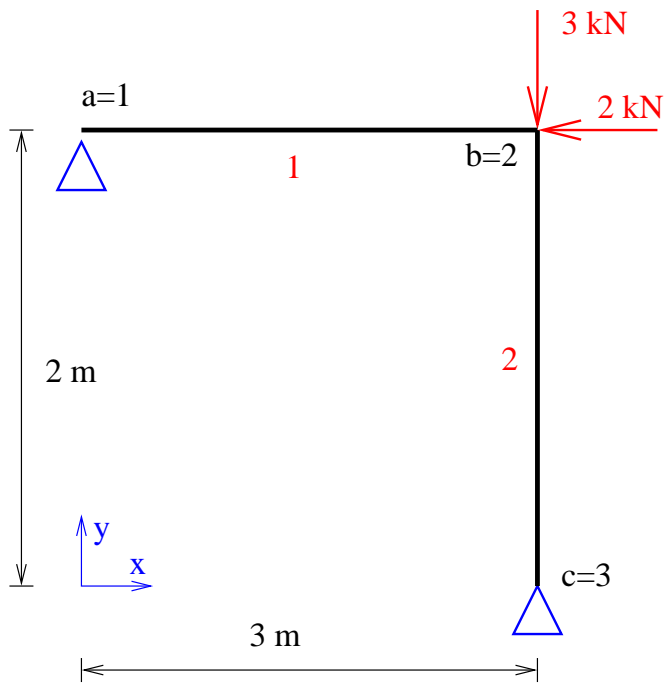
Soustava rovnic:

$$\mathbf{K} \mathbf{u} = \mathbf{F}$$

Nebo:

$$\begin{bmatrix} k_{1,1} & k_{1,2} \\ k_{2,1} & k_{2,2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ w_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_{x2} \\ F_{y2} \end{Bmatrix}$$

Rovinná příhradová konstrukce (7)



Prut 1:

$$K_1 = \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & x1_{1,1} & x1_{1,2} \\ \cdot & \cdot & x1_{2,1} & x1_{2,2} \end{bmatrix}$$

Prut 2:

$$K_2 = \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & x2_{1,1} & x2_{1,2} \\ \cdot & \cdot & x2_{2,1} & x2_{2,2} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} k_{1,1} & k_{1,2} \\ k_{2,1} & k_{2,2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ w_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_{x2} \\ F_{y2} \end{Bmatrix}$$

Rovinná příhradová konstrukce (8)

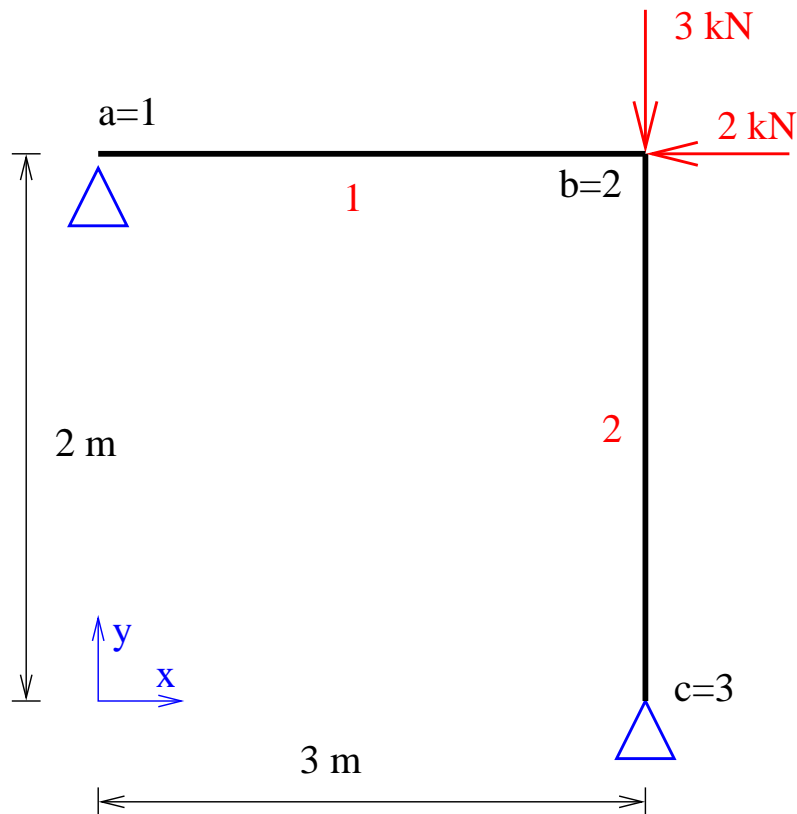
Lokalizace matic tuhosti prutů do matice konstrukce \mathbf{K} :

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} K1(3,3) + K2(3,3) & K1(3,4) + K2(3,4) & ; \\ K1(4,3) + K2(4,3) & K1(4,4) + K2(4,4) &] \end{bmatrix}$$

Alternativně:

```
K=zeros(2);  
for i=1:2;  
    for j=1:2;  
        K(i,j) = K1(i+2,j+2) + K2(i+2,j+2);  
    end;  
end;
```

Rovinná příhradová konstrukce (9)



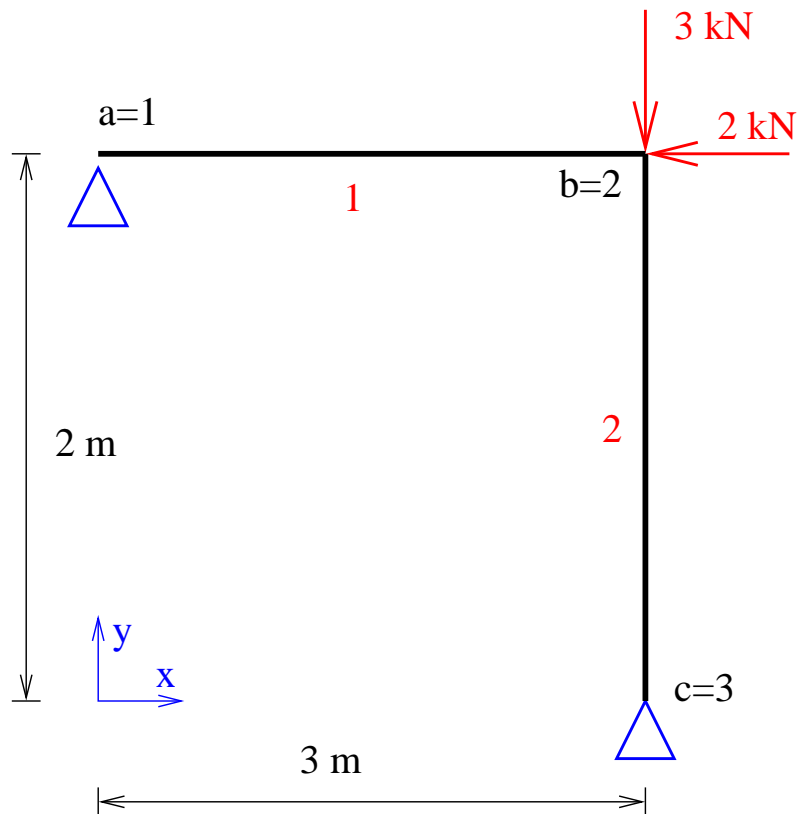
Vektor zatížení:

$$\mathbf{F} = \begin{Bmatrix} F_{x2} \\ F_{y2} \end{Bmatrix} = \mathbf{F} = \begin{Bmatrix} -2000 \\ -3000 \end{Bmatrix}$$

Na počítači:

$$\mathbf{F} = [-2000 \ ; \ -3000 \]$$

Rovinná příhradová konstrukce (10)



Soustava rovnic:

$$\mathbf{K} \mathbf{u} = \mathbf{F}$$

Řešení na počítači:

$$\mathbf{u} = \mathbf{K} \setminus \mathbf{F}$$

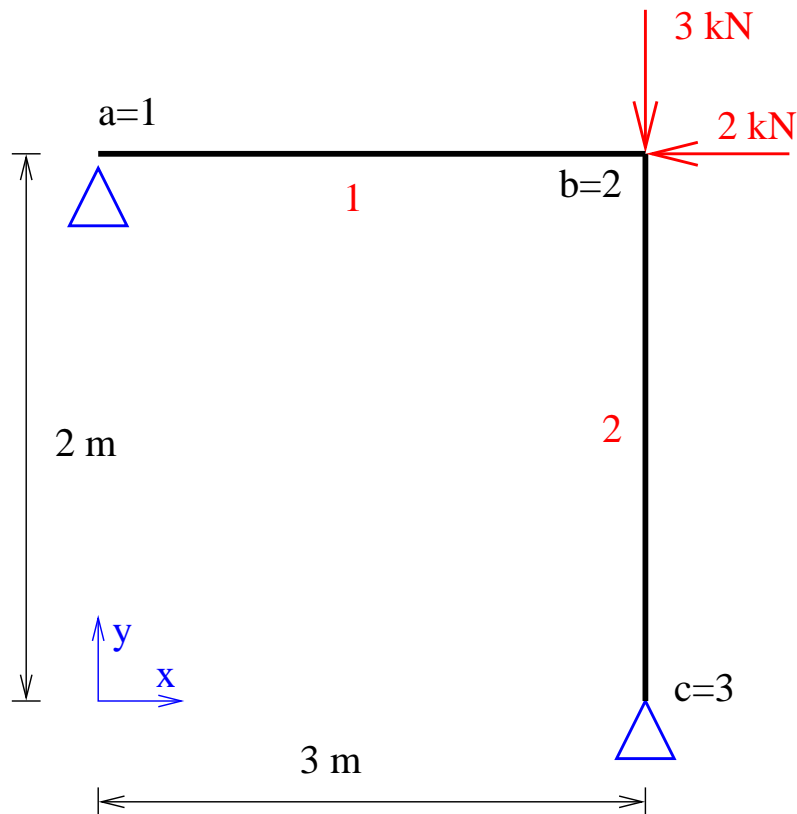
nebo:

$$\mathbf{u} = \text{inv}(\mathbf{K}) * \mathbf{F}$$

Výsledek:

$$\mathbf{u} = \begin{Bmatrix} u_2 \\ w_2 \end{Bmatrix}$$

Rovinná příhradová konstrukce (11)



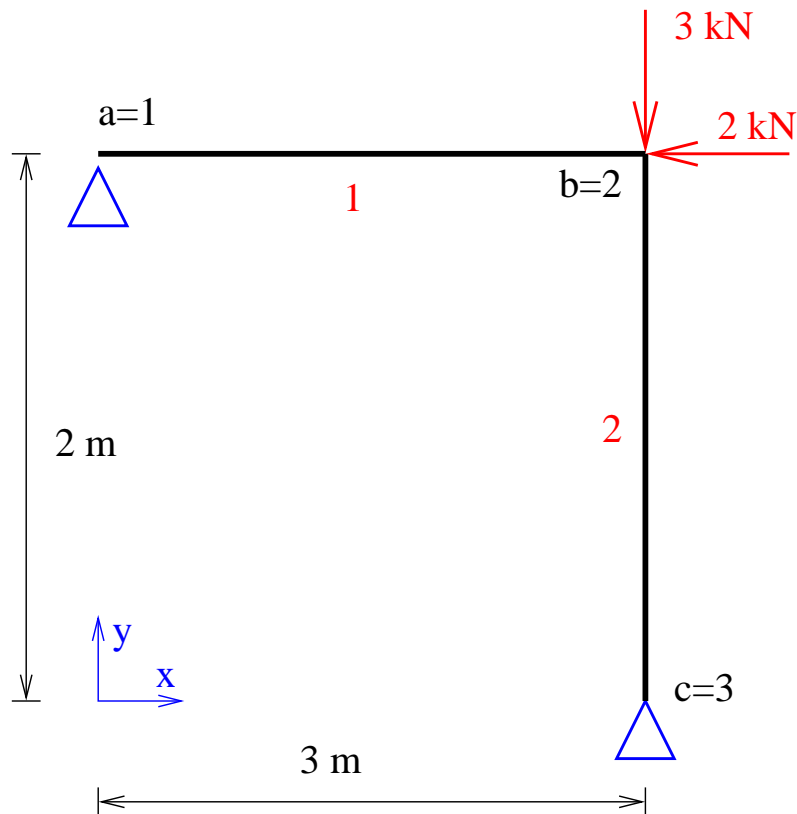
Deformace prutu 1:

$$\mathbf{u1} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ w_1 \\ u_2 \\ w_2 \end{Bmatrix}$$

Řešení na počítači:

$$\mathbf{u1} = [0; 0; u(1); u(2)]$$

Rovinná příhradová konstrukce (12)



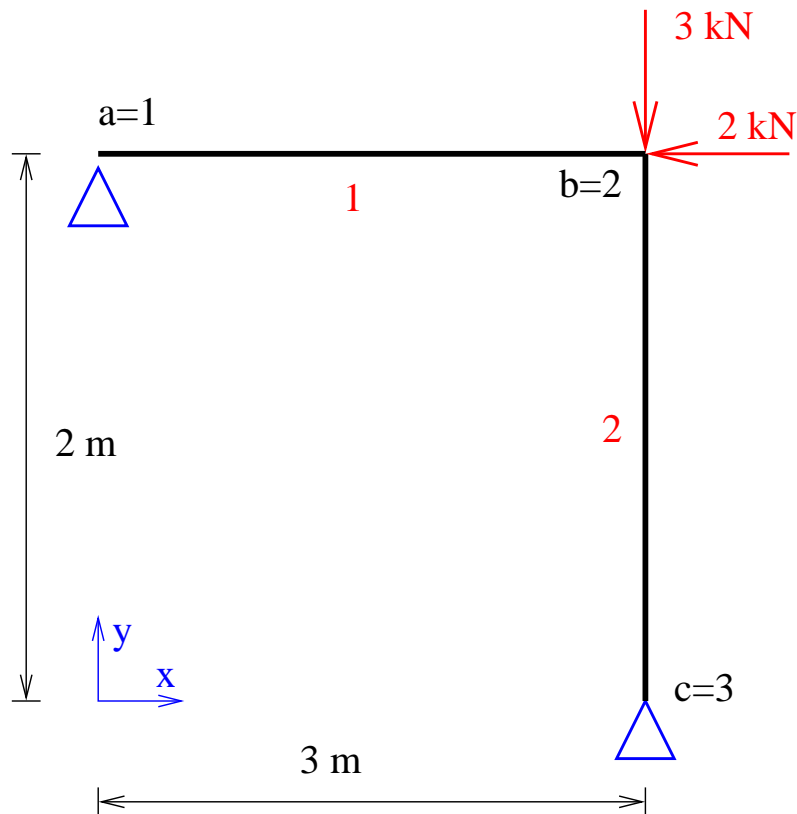
Deformace prutu 2:

$$\mathbf{u1} = \begin{Bmatrix} u_2 \\ w_2 \\ u_3 \\ w_3 \end{Bmatrix}$$

Řešení na počítači:

$$\mathbf{u2g} = [0; 0; u(1); u(2)]$$

Rovinná příhradová konstrukce (13)



Samostatně spočítete:

- u_2 v lokálních souřadnicích
- vektory koncových sil obou prutů
- normálové síly
- reakce