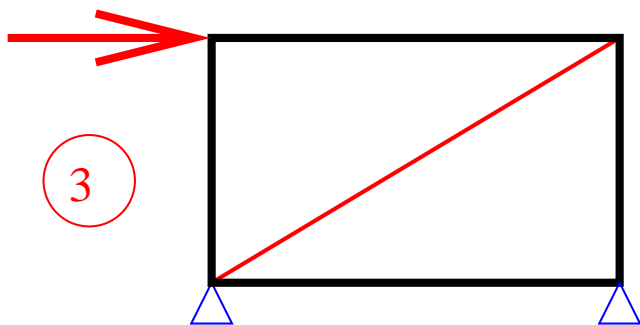
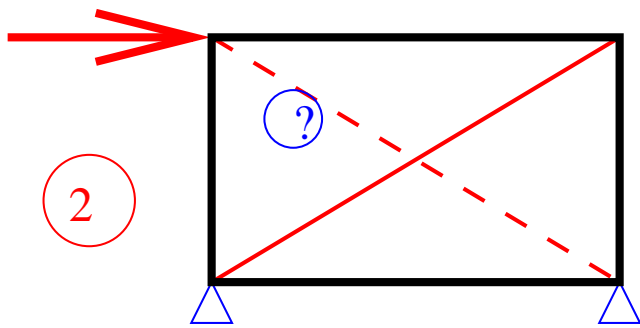
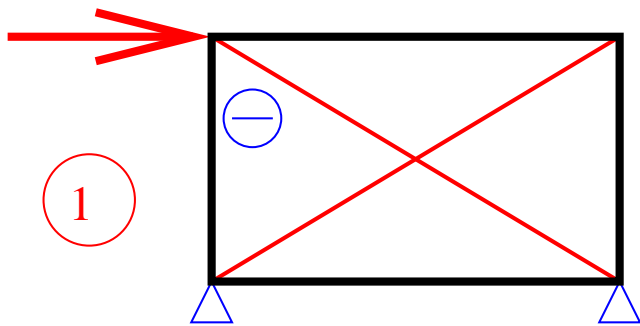


Metody pro řešení nelineárních úloh

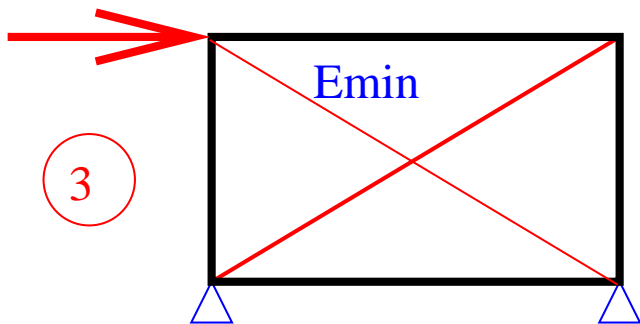
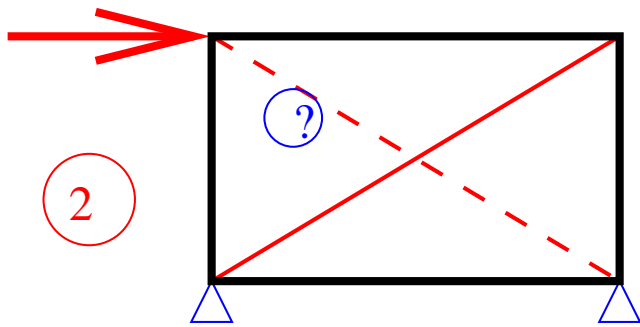
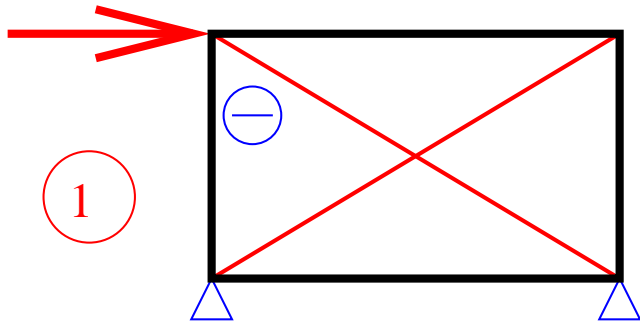
- Iterační řešení
- Přírůstkové řešení (Eulerova metoda)
- Přírůstkově–iterační metody (Newton-Raphson,...)

Iterační řešení (1)



- Vhodné pro úlohy konstrukční nelinearity (příp. další - některé úlohy geom. nelinearity):
 - Ztužidla nebo lana působící jen v tahu
 - Jednostranné vazby – modely podloží
- **Postup:**
 1. Linární výpočet
 2. Provedení změn v závislost na napětích a deformacích
 3. Lineární výpočet změněné konstrukce
 4. Pokud jsou změny (napětí, deformace) větší než stanovená mez, proces se opakuje
- Při větším počtu jednostranně působících prvků může být iterační proces pomalý.

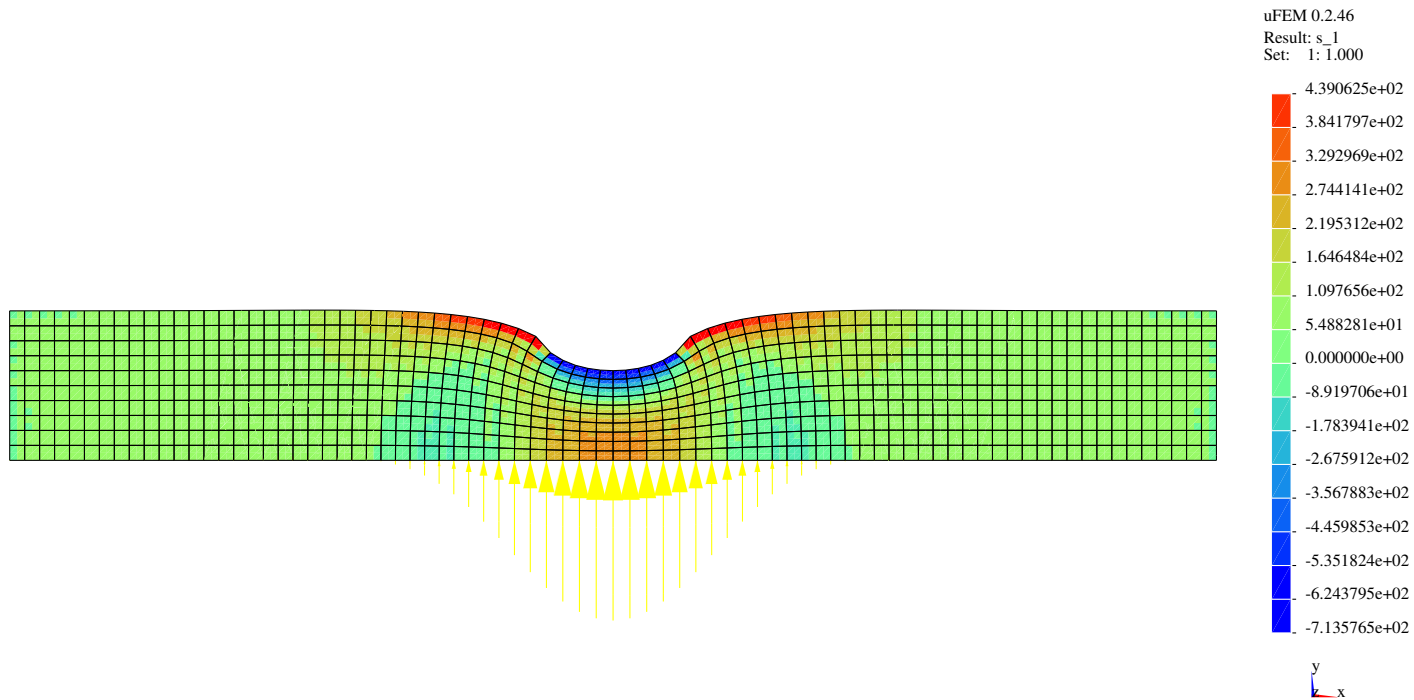
Iterační řešení (2)



- Jak zjišťovat, zda se stav nezměnil (vyloučený prut by měl působit opět v tahu apod):
 - Sledování deformací (komplikované, nepraktické)
 - „Vyloučený“ prut ponechat v konstrukci s velmi malou tuhostí
 - Velmi malá tuhost: cca $\frac{1}{1000}$ původní
 - V případě změny stavu vrátit původní hodnotu tuhosti

Iterační metoda – ukázka (1)

Deformovaný tvar (klasické vazby):

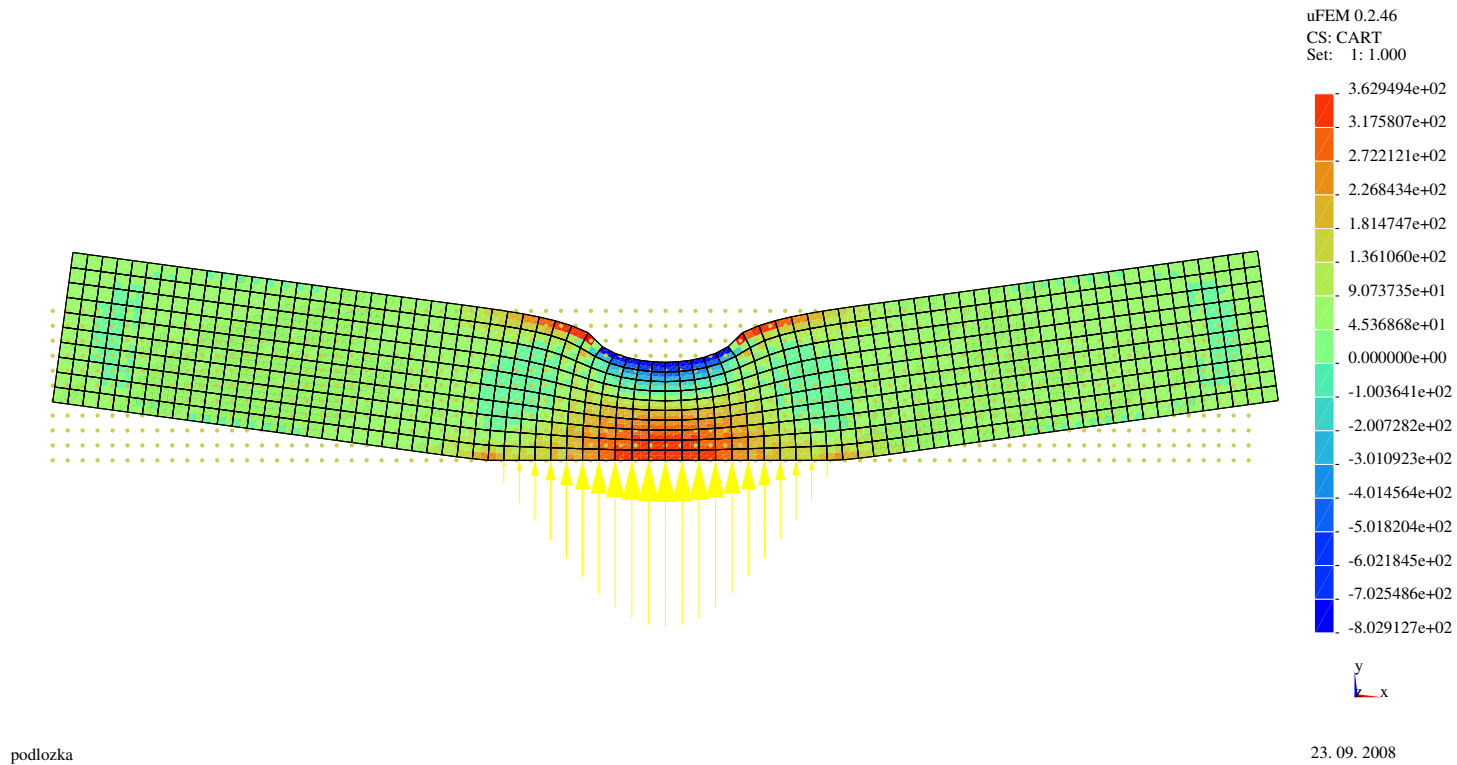


podložka

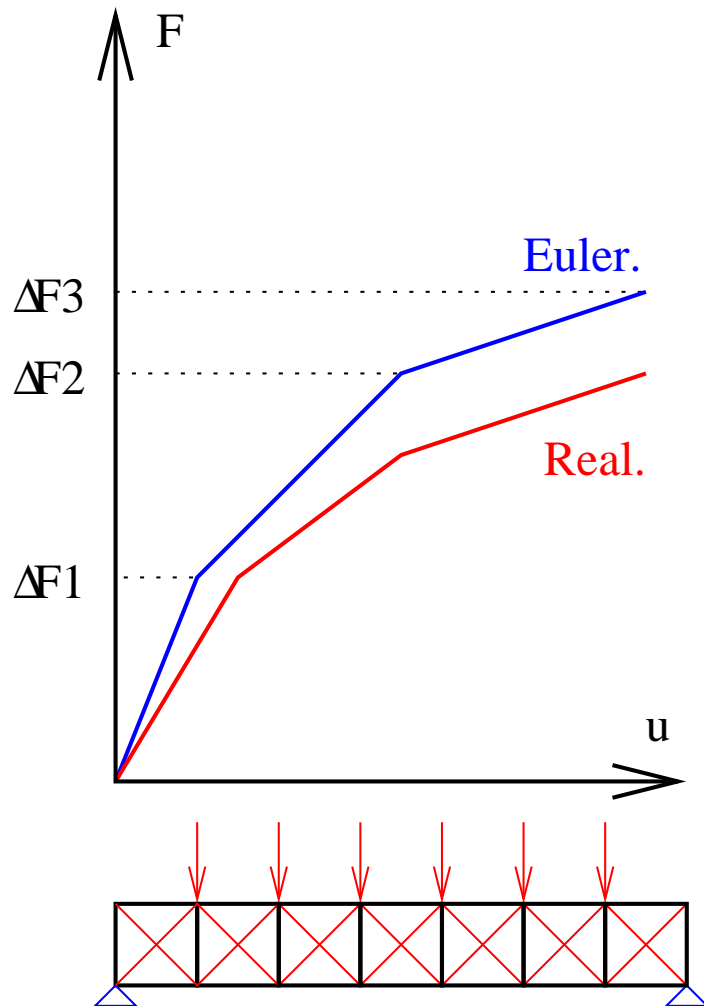
23. 09. 2008

Iterační metoda – ukázka (2)

Deformovaný tvar (jednostranné vazby):

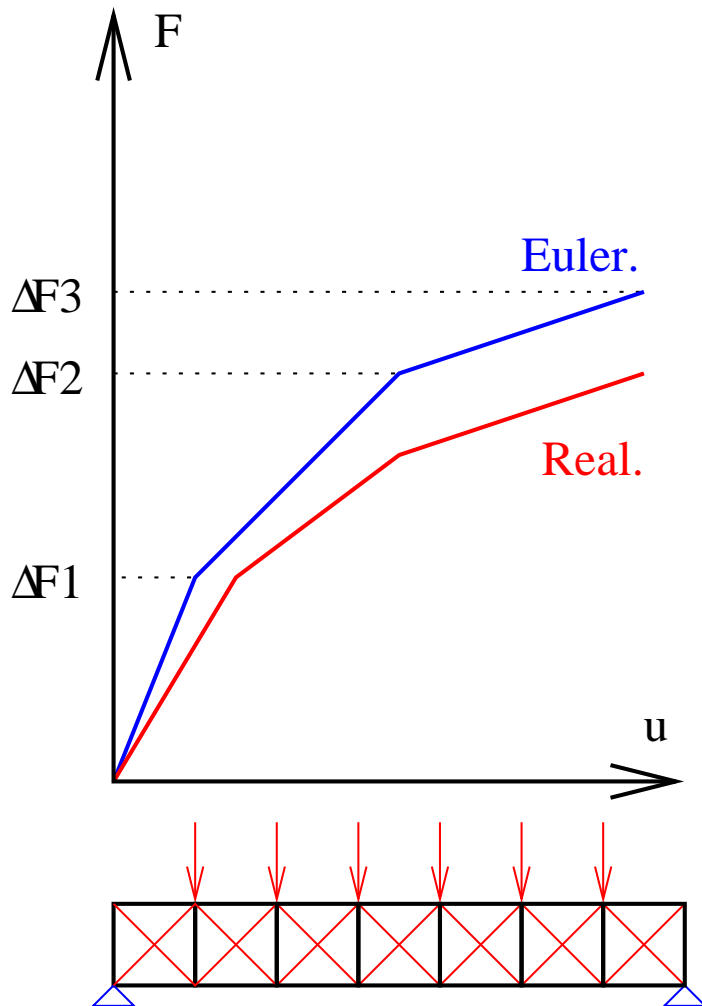


Přírůstkové řešení (1)



- „Eulerova metoda“
- Zatížení F se přikládá po částech ΔF
- Neprovádí se iterace
- **Postup:**
 1. Zatížení konstrukce zatížením ΔF_1
 2. Vyhodnocení změn v konstrukci (vy-loučení prutů,...)
 3. Zatížení konstrukce zatížením ΔF_2
 4. Přičtení výsledků od ΔF_2 k předchozím
 5. Vyhodnocení změn v konstrukci (vy-loučení prutů,...)
 6. Zatížení konstrukce zatížením ΔF_3
 7. ...
 8. Po dosažení $F = \sum_{i=1}^n \Delta F_i$ se výpočet ukončí

Přírůstkové řešení (2)



- „Eulerova metoda“
- Problémy:
 1. V jednotlivých krocích se už neprovádí iterace
 2. Přesnost řešení závisí na velikosti zatěžovacího kroku (ΔF_i)
- Metoda se v uvedené podobě prakticky nepoužívá

Přírůstkové řešení (3)

Formální zápis:

$$\mathbf{K}(\mathbf{u}) \times \mathbf{u} = \mathbf{F}$$

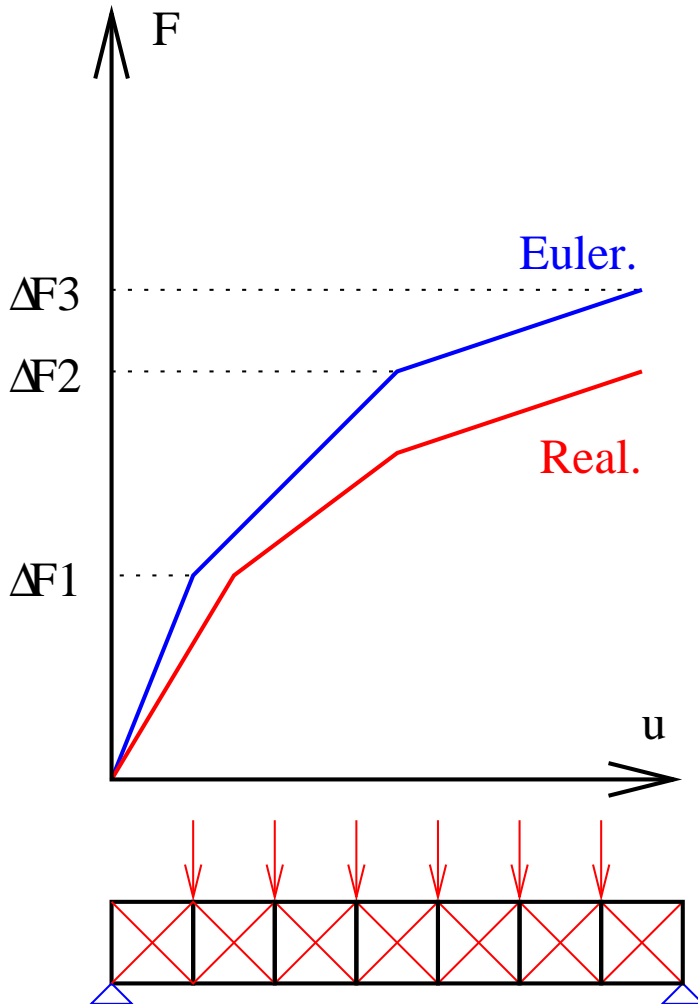
kde \mathbf{K} je funkcí posunutí \mathbf{u} , případně zatížení \mathbf{F} .

Jednotlivý krok výpočtu:

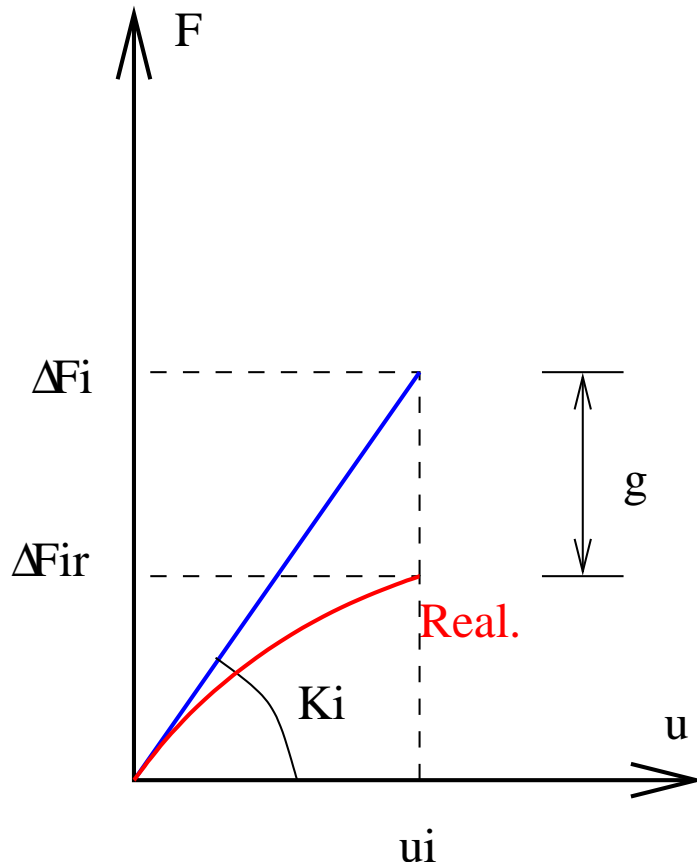
$$\mathbf{K}_i(\mathbf{u}) \times \Delta \mathbf{u}_i = \Delta \mathbf{F}_i$$

Celková deformace:

$$\mathbf{u} = \sum_{i=1}^n \Delta \mathbf{u}_i$$



Přírůstkově-iterační řešení (1)



- „Newtonova–Raphsonova metoda“
- Zatížení F se přikládá po částech ΔF (krocích)
- Po každém přírůstku zatížení se iteruje
- Iterace: minimalizace **vektoru nevyvážených sil g**
- g : rozdíl mezi zatížením vypočítaným pro aktuální tuhost E_i a skutečně přeseseným zatížením $\Delta F_{i,r}$
- Stanovení g : např. určením rovnováhy ve styčnicích

Přírůstkově-iterační řešení (2)

- „Newtonova–Raphsonova metoda“

- **Postup:**

1. Zatížení konstrukce zatížením ΔF_1

$$\mathbf{K}_i(\mathbf{u}) \times \Delta \mathbf{u}_i = \Delta \mathbf{F}_i$$

2. Vyhodnocení změn v konstrukci (vyloučení prutů,...)

3. Výpočet vektoru nevyvážených sil \mathbf{g}_j

4. Výpočet změn deformace od \mathbf{g}_j

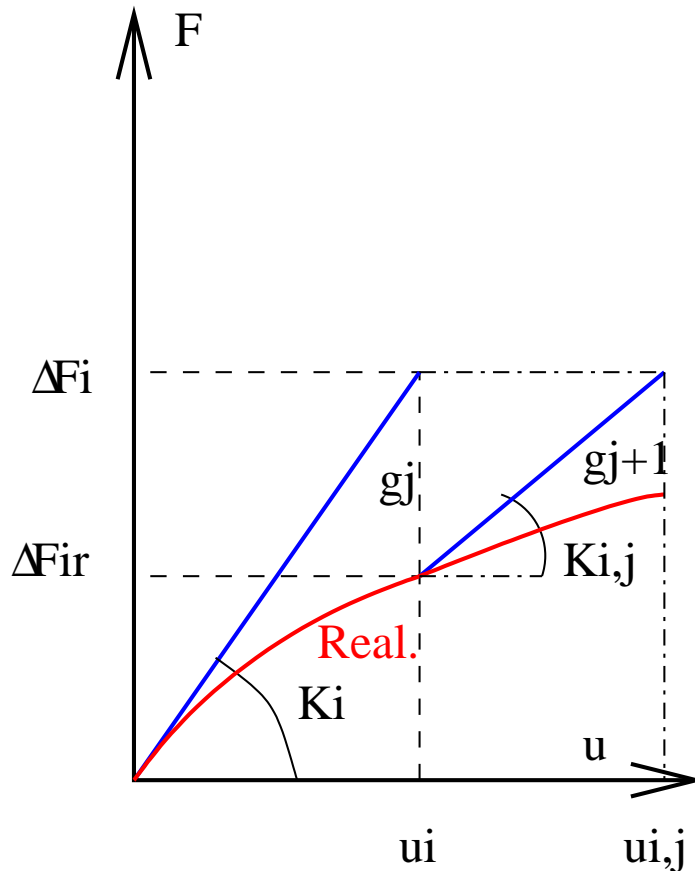
$$\mathbf{K}_{i,j}(\mathbf{u}) \times \Delta \mathbf{u}_{i,j} = \mathbf{g}_j$$

5. Vyhodnocení změn v konstrukci (vyloučení prutů,...)

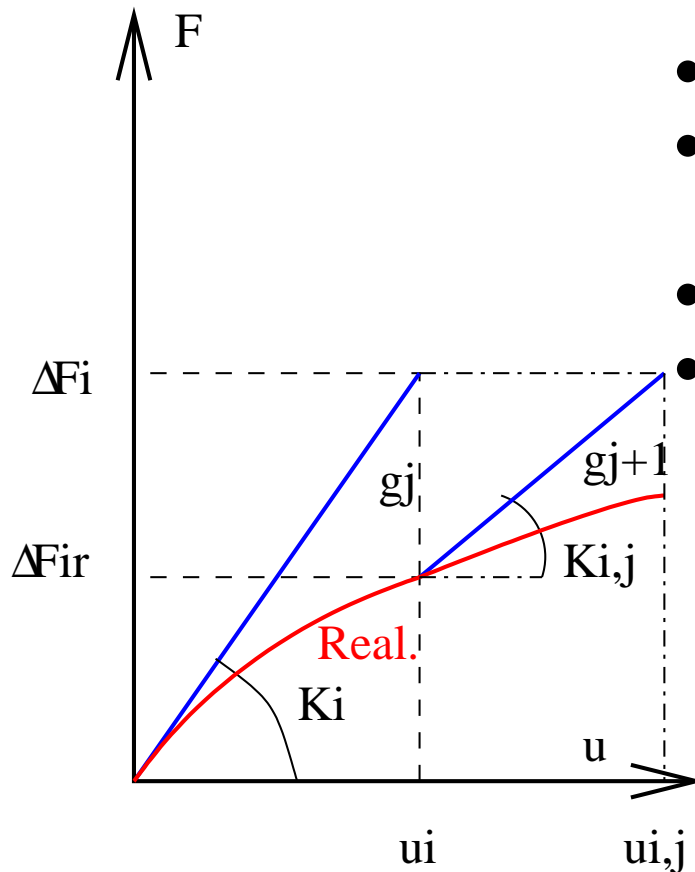
6. Výpočet vektoru nevyvážených sil \mathbf{g}_{j+1}

7. Výpočet změn deformace od \mathbf{g}_{j+1}

8. Opakování dokud \mathbf{g}_{j+x} není dostatečně malé ...



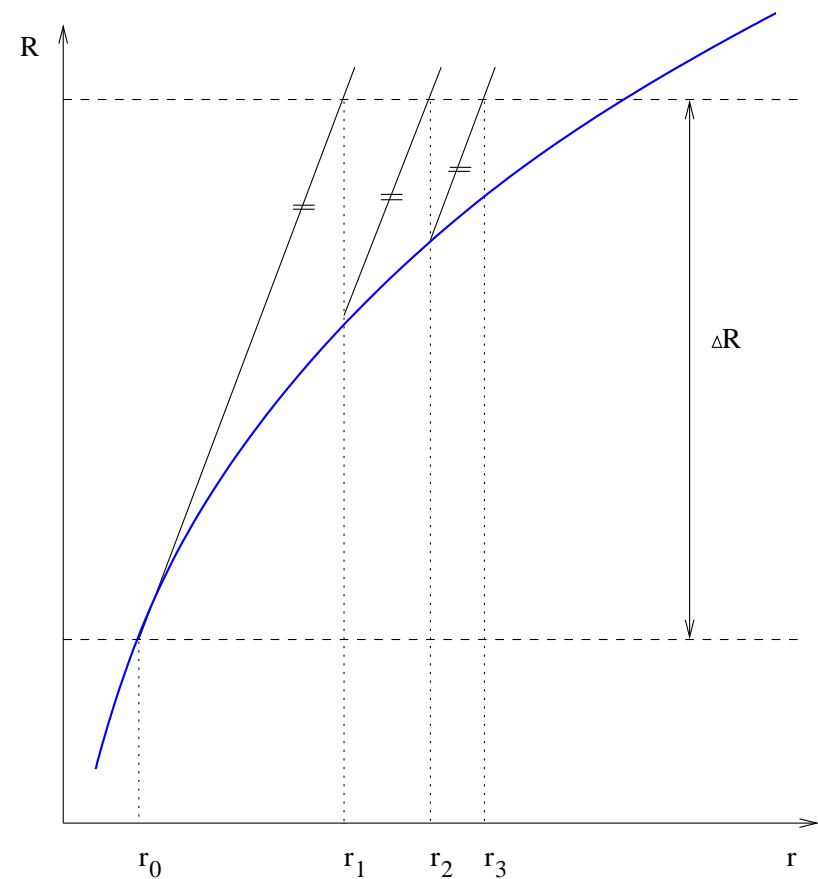
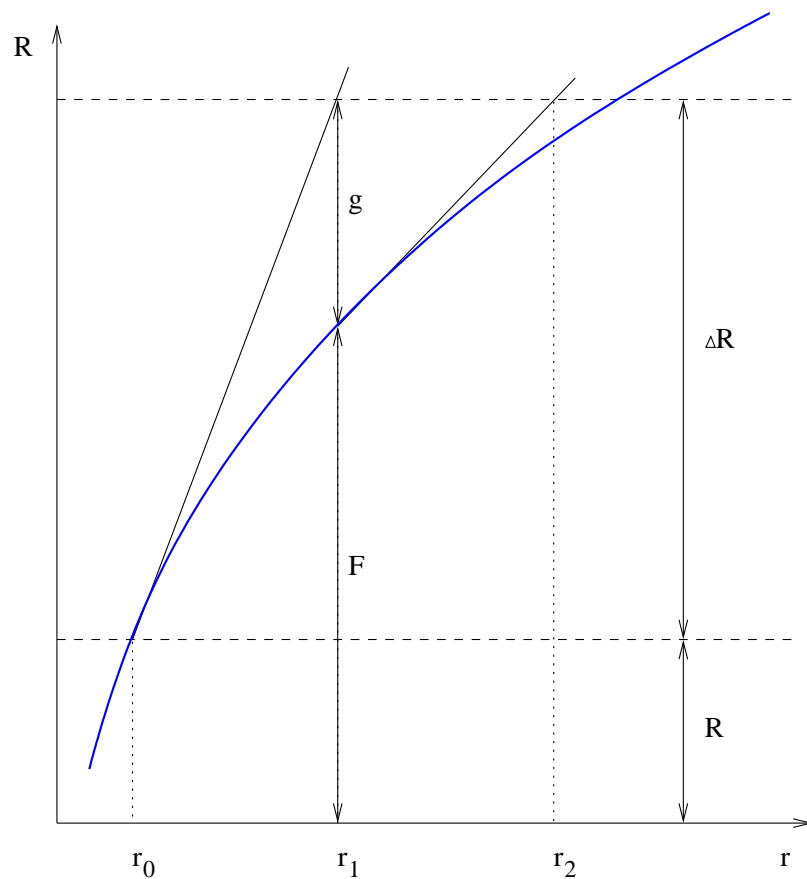
Přírůstkově-iterační řešení (3)



- „Newtonova–Raphsonova metoda“
 - Konstrukci zatěžujeme silami F nebo předepsanými deformacemi u
 - Velikost kroků ΔF_i libovolná
 - **Změna matice tuhosti** (uplatnění jendostr. vazeb. apod.):
 - V každé iteraci
 - V každém kroku (přírůstku zatížení)
 - Konstantní během výpočtu \Rightarrow
- Zjednodušená Newtonova–Raphsonova metoda**

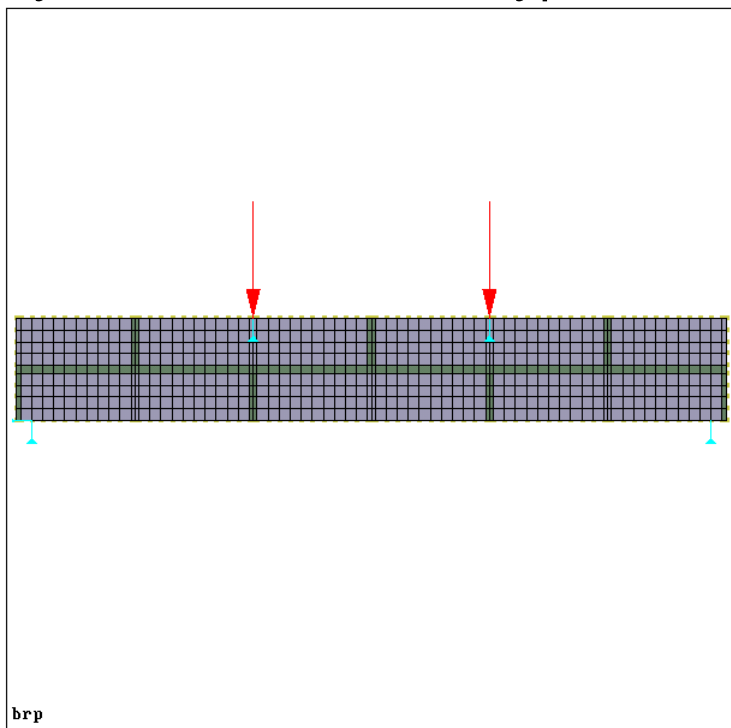
Přírůstkově-iterační řešení (4)

Newtonova–Raphsonova metoda a zjednodušená Newtonova–Raphsonova metoda



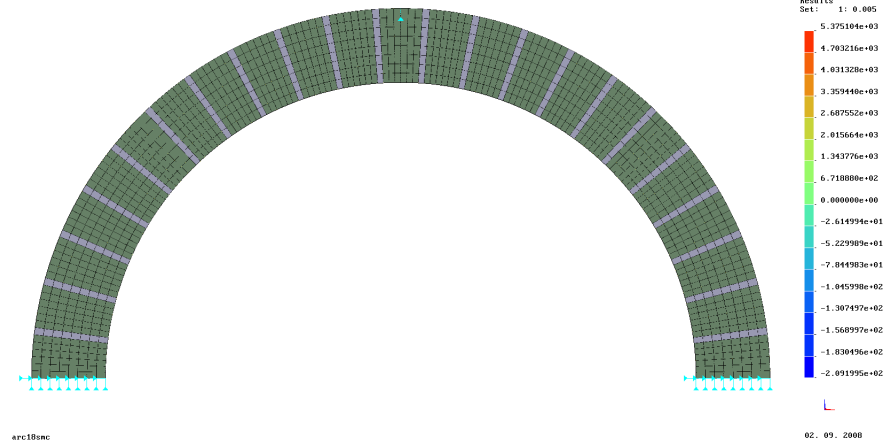
Ukázka výpočtu NRM (1)

Fyzikálně nelineární výpočet zděného nosníku a oblouku



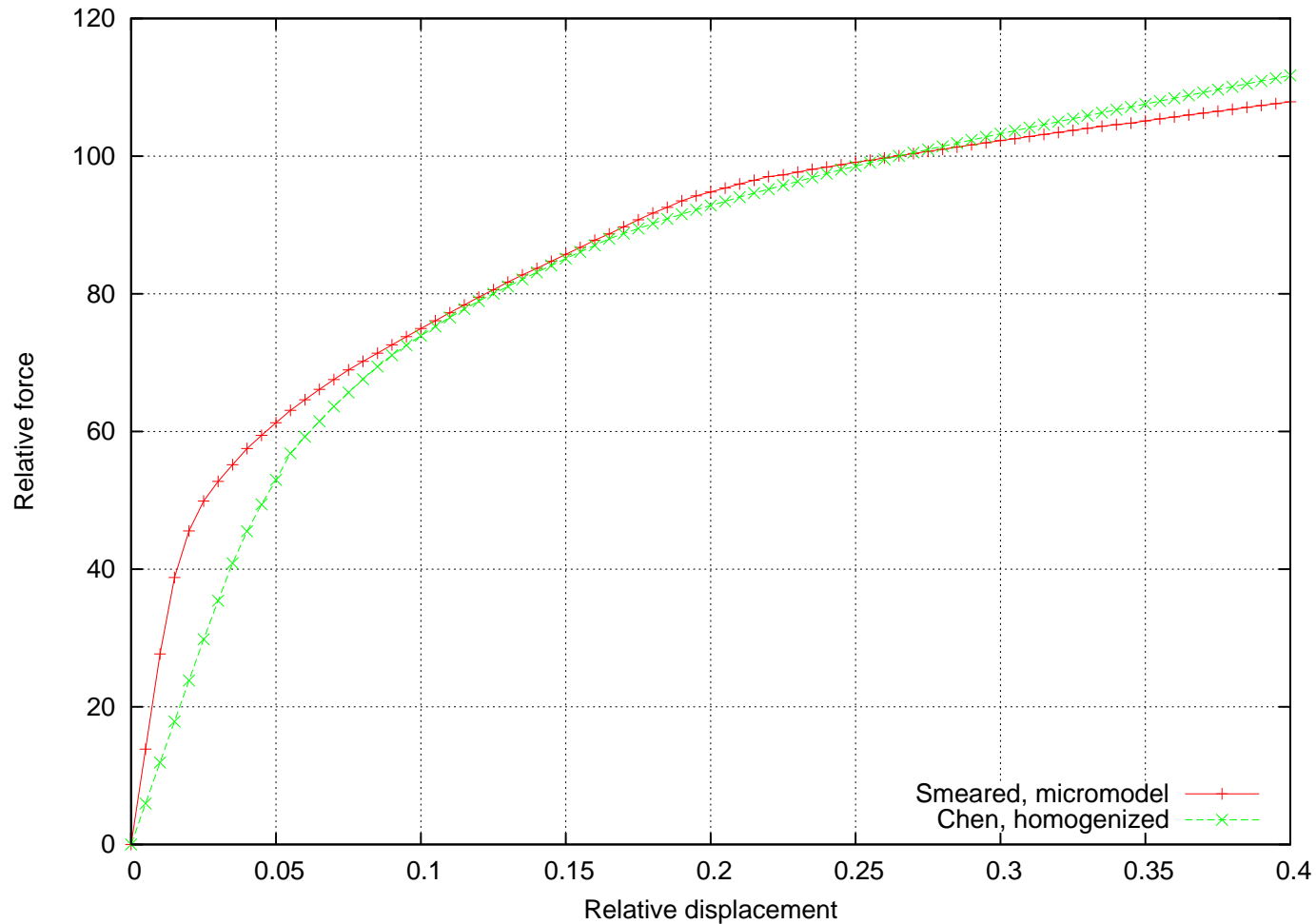
uFEM 0.2.45
CS: CART
Time: 1

31. 08. 2008



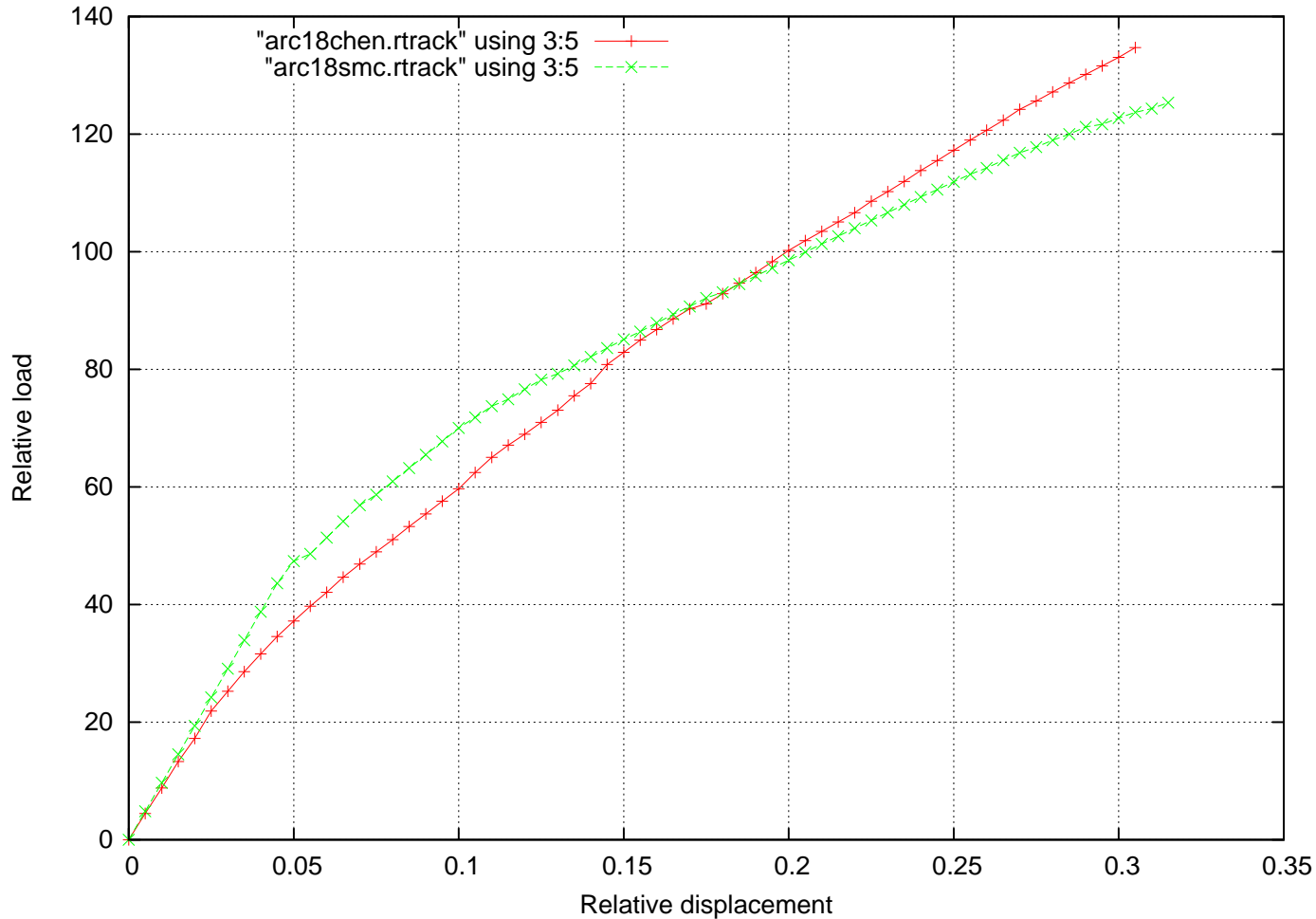
Ukázka výpočtu NRM (2)

Fyzikálně nelineární výpočet zděného nosníku



Ukázka výpočtu NRM (3)

Fyzikálně nelineární výpočet zděného nosníku



Posuzování konvergence

- Potřebné pro ukončení iterace (např. velikost g)
- Nestačí sledovat jen v jednom bodě \Rightarrow použití norem vektorů
- Kritérium velikosti vektoru nevyvážených sil:

$$\frac{\|g\|}{\|\Delta F_i\|} < \varepsilon$$

- Kritérium přírůstku deformací v iteraci:

$$\frac{\|\Delta u_{i,j}\|}{\|\Delta u_i\|} < \varepsilon$$

Kde ε je číslo vyjadřující požadovanou přesnost (např. $\varepsilon = 0,00001$).

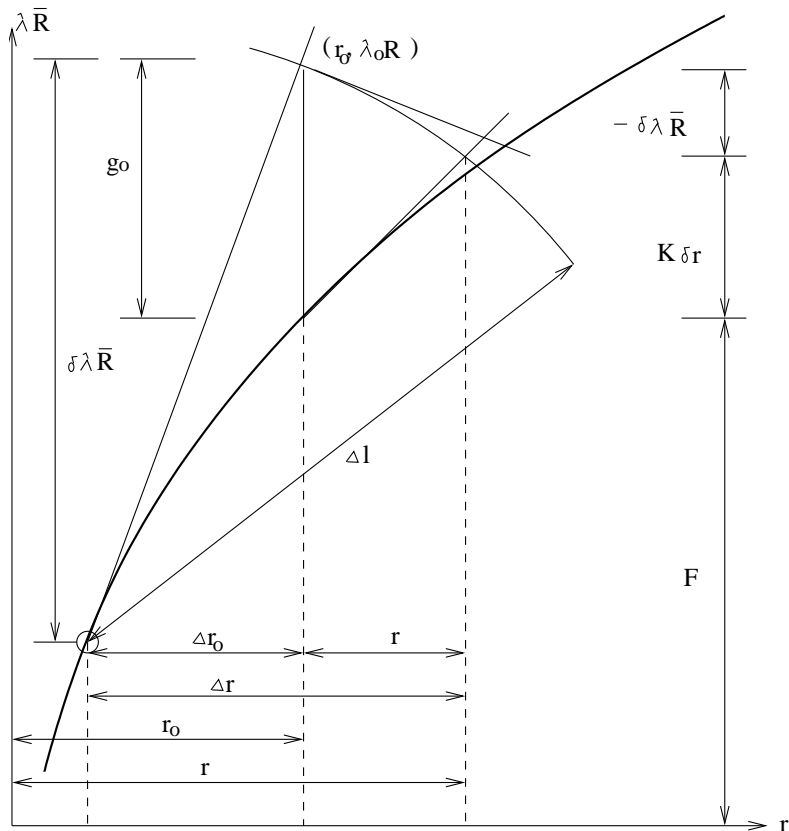
Norma vektoru (opakování z matematiky): funkce přiřazující nenulovému vektoru kladné reálné číslo. Například **Euklidovská norma** vektoru u :

$$\|u\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n u_i^2}$$

Metoda délky oblouku (1)

- Přírůstkově–iterační metoda
- Umožňuje vyšetřovat konstrukce **po dosažení** maximální únosnosti:
 - Geometricky nelineární úlohy
 - Porušování betonu
 - ...
- Výpočet je řízen na základě vztahu norem vektorů zatížení F a deformace u
- Varianta (vylepšení) Newtonovy–Raphsonovy metody

Metoda délky oblouku (2)

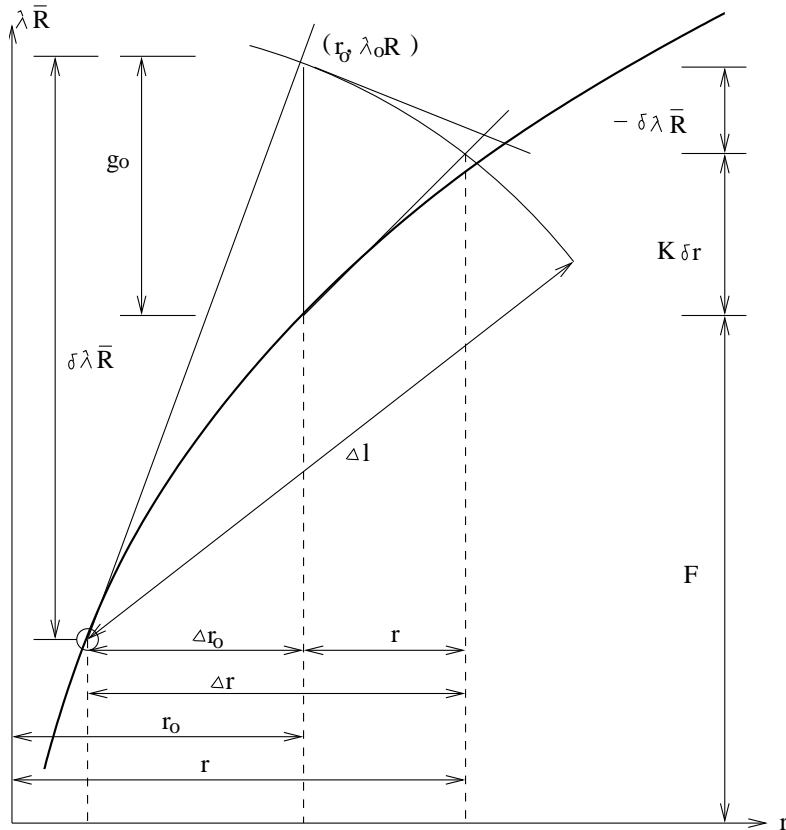


- Používá se silové zatížení F
- automatické určování velikosti násobitele zatížení v závislosti na aktuální deformaci:

$$\Delta F_i = \lambda \times F$$

- Pokud se λ automaticky zvyšuje, je výpočet řízen přírůstkou zatížení, jde tedy o Newtonovu–Raphsonovu metodu. Pak ovšem může dojít k tomu, že při určité úrovni zatížení se hladina $\lambda\bar{R}$ neprotne se zatěžovací dráhou.
- V další textu bude u značeno jako r a F bude R

Metoda délky oblouku (3)



- Řízení výpočtu pomocí přírůstků délky oblouku zatěžovací dráhy $s = \int ds$. Diferenciál délky oblouku:

$$ds = \sqrt{dr^T dr + d\lambda^2 \psi^2 \bar{\mathbf{R}}^T \bar{\mathbf{R}}}, \quad (1)$$

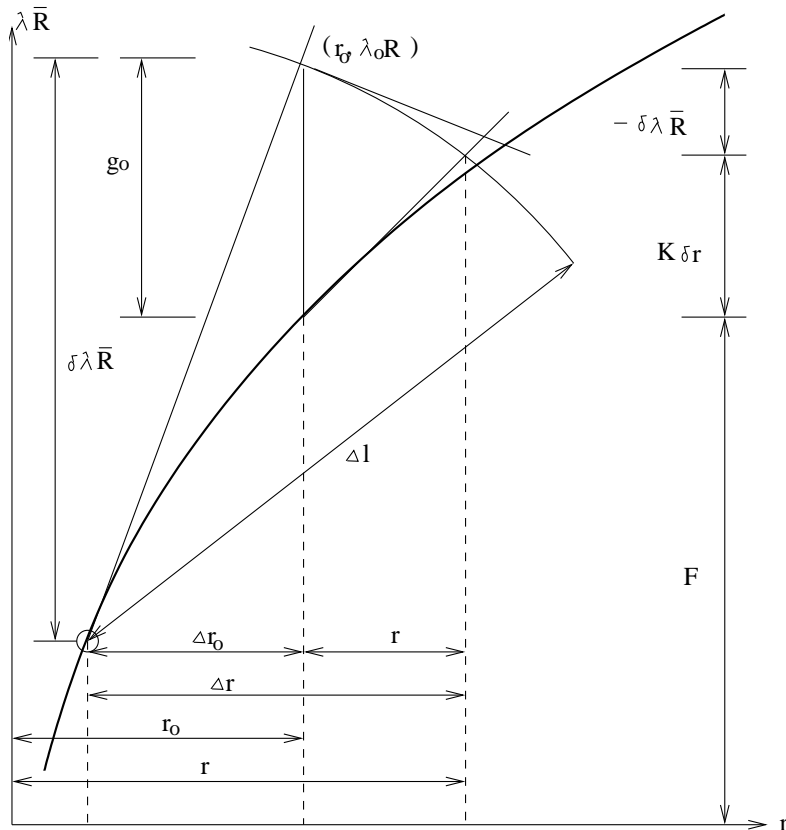
kde ψ je parametr určující poměr vlivu vektoru deformací r a vektoru zatížení $\bar{\mathbf{R}}$ na řízení výpočtu.

- Rovnici (1) je možno přepsat do přírůstkového tvaru:

$$a = \Delta r^T \Delta r + \Delta \lambda^2 \psi^2 \bar{\mathbf{R}}^T \bar{\mathbf{R}} - \Delta l^2 = 0. \quad (2)$$

- Oproti Newtonově–Raphsonově metodě je třeba určovat navíc ještě neznámou λ . Je tedy třeba použít jak soustavy n rovnic ($\mathbf{K} r = \lambda \mathbf{R}$), tak rovnice (2).

Metoda délky oblouku (4)



- Vektor deformací \mathbf{r} lze rozvinout do Taylorovy řady:

$$\begin{aligned} \mathbf{g} &\approx \mathbf{g}_0 + \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \lambda} \delta \lambda + \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \mathbf{g}^T \right)^T \delta \mathbf{r} \\ &= \mathbf{g}_0 + \bar{\mathbf{R}} \delta \lambda - \mathbf{K}(\mathbf{r}_0) \delta \mathbf{r} = \mathbf{O}(3) \end{aligned}$$

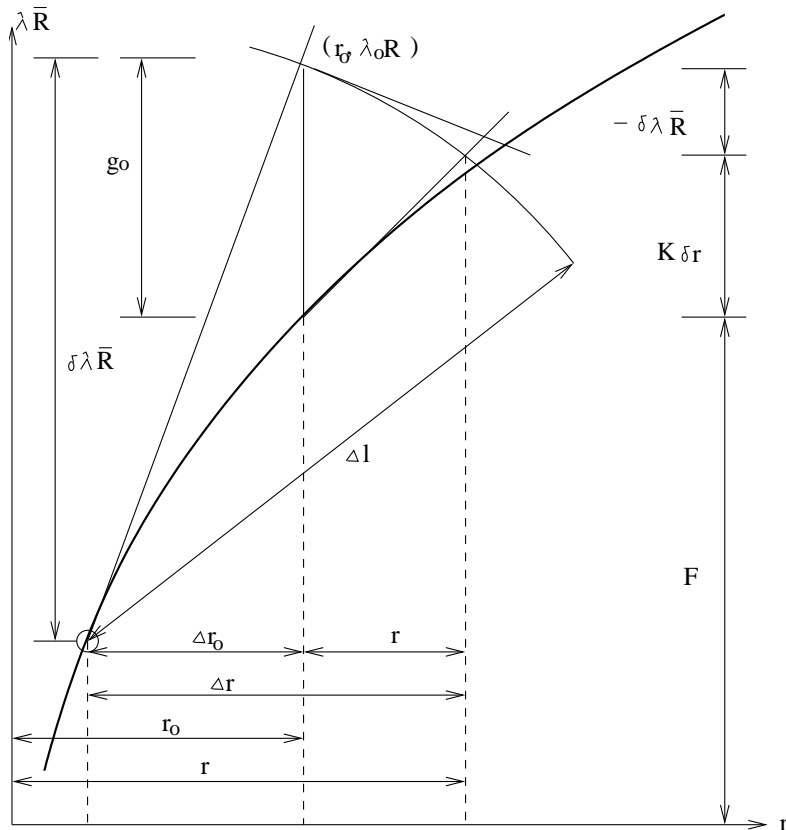
- Stejně lze rozvinout do Taylorovy řady a :

$$a \approx a_0 + 2\Delta \mathbf{r}_0^T \delta \mathbf{r} + 2\Delta \lambda_0 \delta \lambda \psi_2 \bar{\mathbf{R}}^T \bar{\mathbf{R}} = 0, \quad (4)$$

přičemž hodnotu a_0 lze stanovit z (2) dosazením $\Delta \mathbf{r} = \Delta \mathbf{r}_0$ a $\delta \lambda = \delta \lambda_0$:

$$a_0 = \Delta \mathbf{r}_0^T \Delta \mathbf{r}_0 + \Delta \lambda_0^2 \psi_2^2 \bar{\mathbf{R}}^T \bar{\mathbf{R}} - \Delta l^2. \quad (5)$$

Metoda délky oblouku (5)

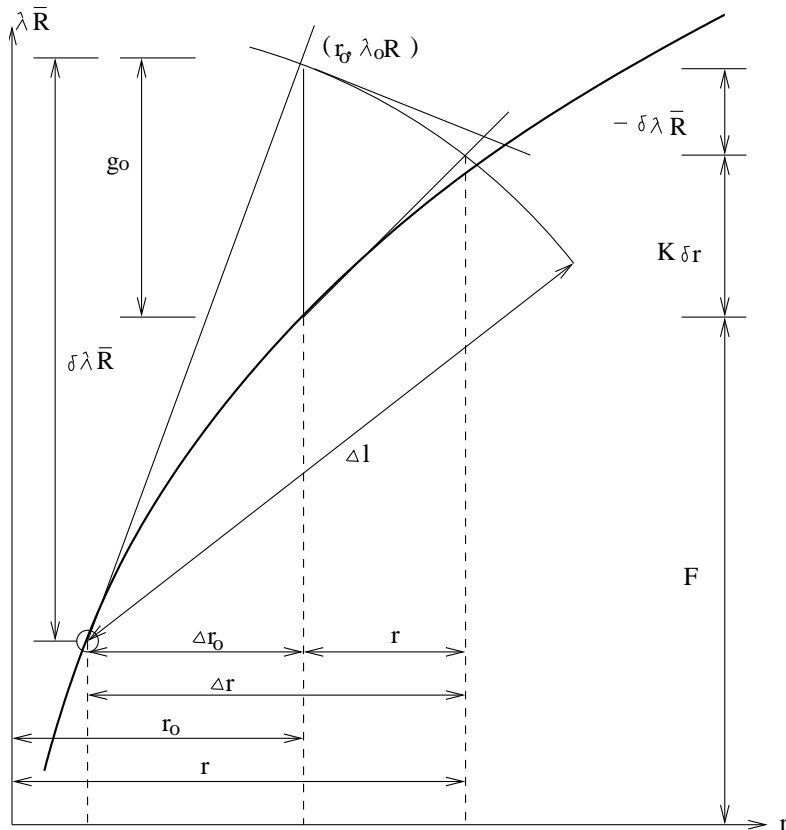


- Rovnice (3) a (4) je možno přepsat do tvaru

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K} & -\bar{\mathbf{R}} \\ -2\Delta\mathbf{r}_0^T & -2\Delta\lambda_0\psi^2\bar{\mathbf{R}}^T\bar{\mathbf{R}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta\mathbf{r} \\ \delta\lambda \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \delta\mathbf{r}_0 \\ \delta\lambda_0 \end{Bmatrix} \quad (6)$$

- Z rovnice (6) lze v každé iteraci vypočítat změnu jak r , tak λ .
- Matice soustavy však v uvedené podobě zjevně není pásová a je i nesymetrická. Proto se obvykle uvedený vztah pro řešení nelineárních úloh metodou délky oblouku nepoužívá a raději se přistupuje k různým dalším úpravám, které řešení soustav rovnic (6) převede na řešení soustav rovnic se symetrickou maticí levých stran.

Metoda délky oblouku (6)



- Obvyklým obratem je rozdělení vektoru deformace δr na část reprezentující deformace vyvolané nevyváženými silami, a na deformace vyvolané vnitřními silami v konstrukci:

$$\delta r = \mathbf{K}^{-1} g_o + \delta \lambda \mathbf{K}^{-1} \bar{\mathbf{R}} = \delta \bar{r} + \delta \lambda \delta r_t. \quad (7)$$

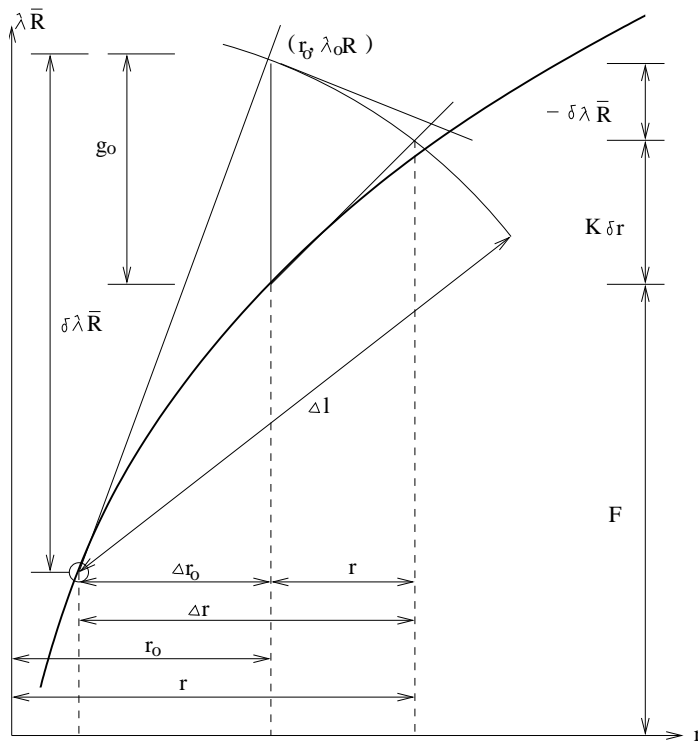
- Násobitel zatížení může být získán z rovnice (8):

$$\lambda = \lambda_o + \delta \lambda. \quad (8)$$

- Velikost změny deformace během kroku výpočtu je možné obdržet z rovnice (9):

$$\Delta r = \Delta r_o + \delta \bar{r} + \delta \lambda \delta r_t. \quad (9)$$

Metoda délky oblouku (7)



- Neznámá $\delta\lambda$ může být na základě předchozích vztahů stanovena z rovnice:

$$a_1 \delta\lambda^2 + a_2 \delta\lambda + a_3 = 0, \quad (10)$$

kde:

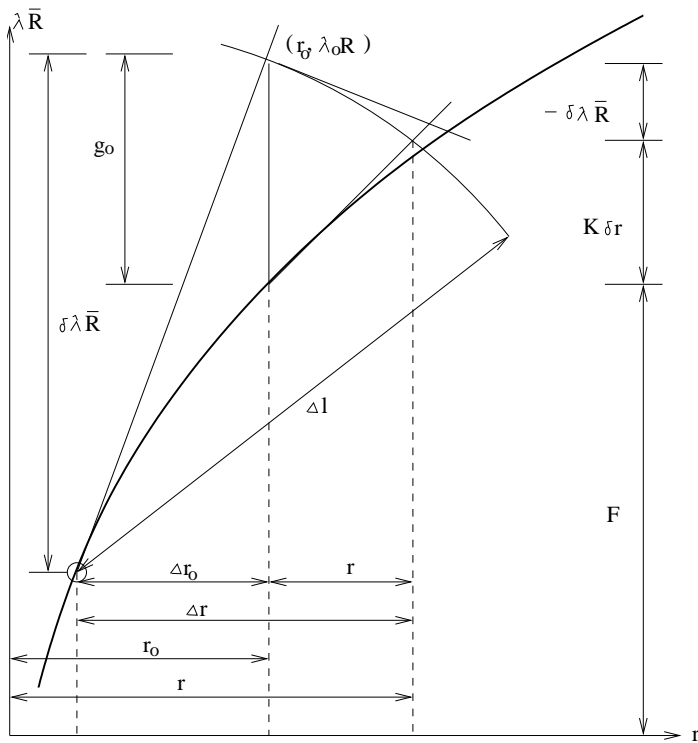
$$a_1 = \delta\mathbf{r}^T \delta\mathbf{r}_t + \psi_2 \bar{\mathbf{R}}^T \bar{\mathbf{R}},$$

$$a_2 = 2\delta\mathbf{r}_t (\Delta\mathbf{r}_0 + \delta\bar{\mathbf{r}}) + 2\psi_2 \bar{\mathbf{R}}^T \bar{\mathbf{R}},$$

$$a_3 = (\Delta\mathbf{r}_0 + \delta\bar{\mathbf{r}})^T (\Delta\mathbf{r}_0 + \delta\bar{\mathbf{r}}) - \Delta l^2 + \Delta\lambda$$

- Tzv. „sférická metoda délky oblouku“
- K získání dvou kořenů rovnice (10) je třeba provádět ještě další zde neuvedené operace pro stanovení *správného kořenu*.
- *Metoda není v některých úlohách stabilní.*

Metoda délky oblouku (8)



- Tzv. „linearizovaná metoda délky oblouku“:

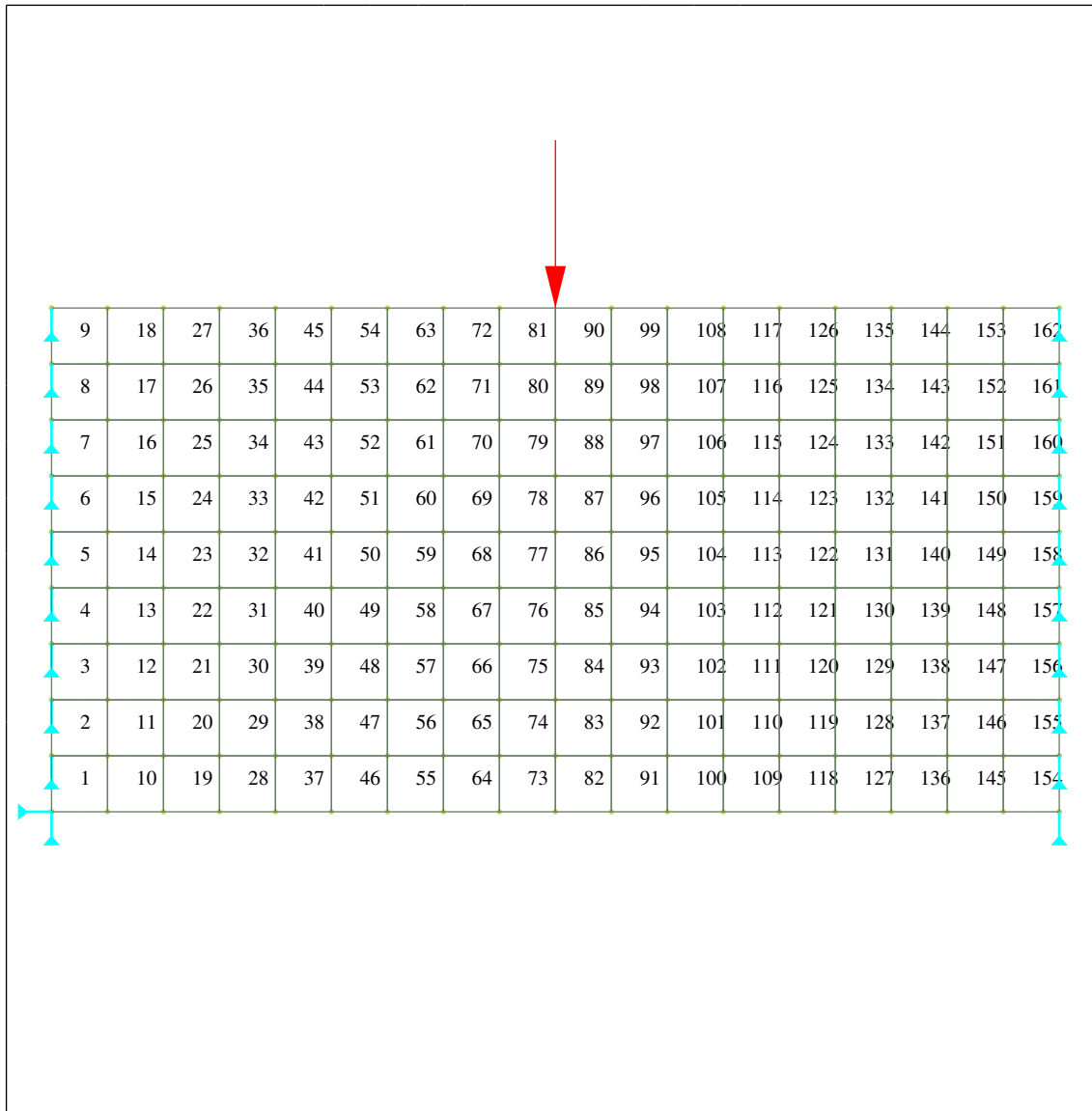
-

$$\delta\lambda = -\frac{\frac{a_0}{2} + \Delta\mathbf{r}_0^T \delta\bar{\mathbf{r}}}{\Delta\mathbf{r}_0 \delta\mathbf{r}_t + \Delta\lambda_0 \psi^2 \bar{\mathbf{R}}^T \bar{\mathbf{R}}}. \quad (12)$$

- Běžně využívaná v komerčních SW (ANSYS, Atena,...)
- Parametr ψ ... vliv zatěžovacího vektoru na řízení přírůstkového výpočtu (u geometricky nelineárních úloh může být výhodné $\psi = 0$).

Ukázka výpočtu (1)

Fyzikálně nelineární výpočet stěny



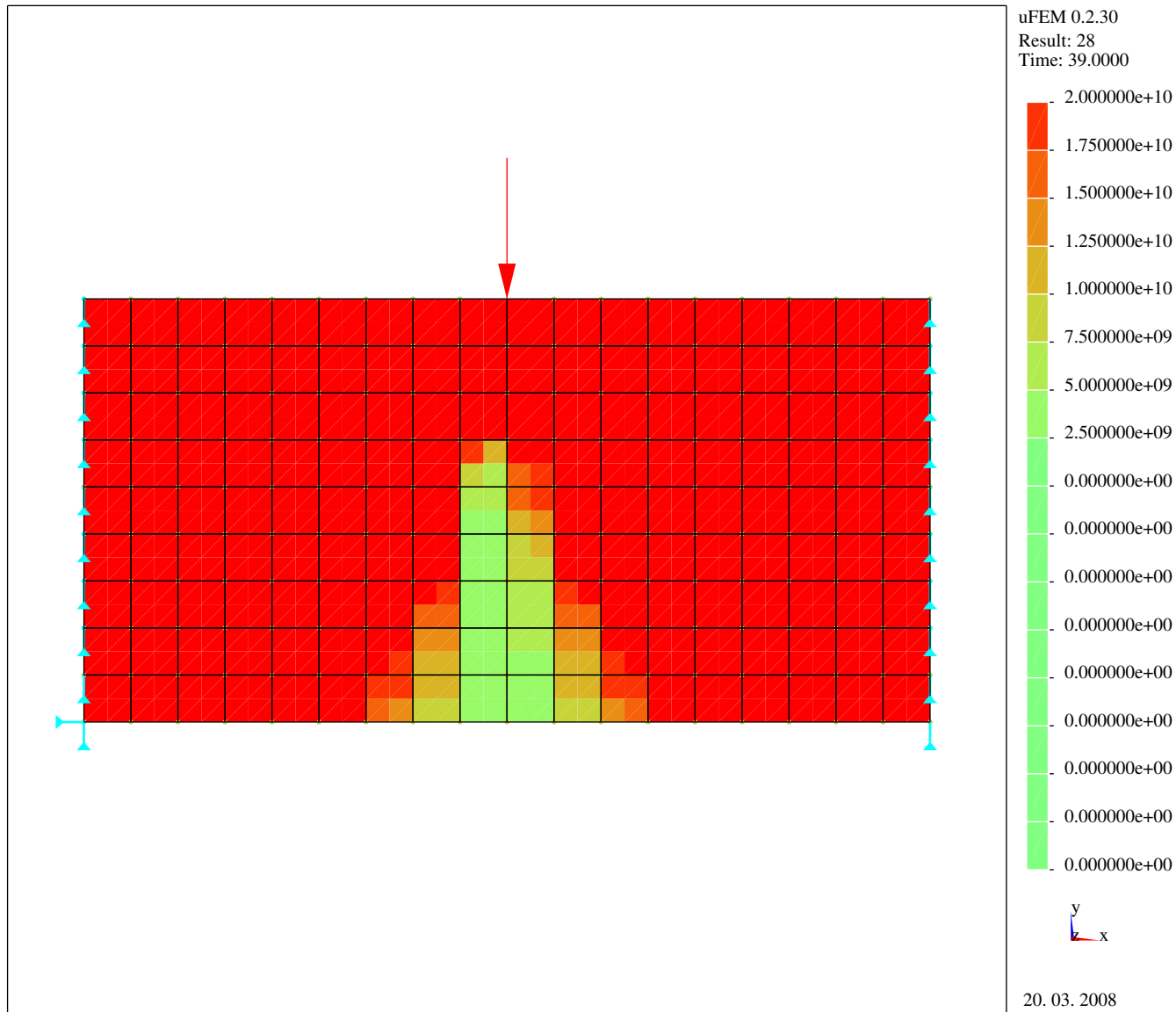
uFEM 0.2.30
CS: CART
Time: 1



20. 03. 2008

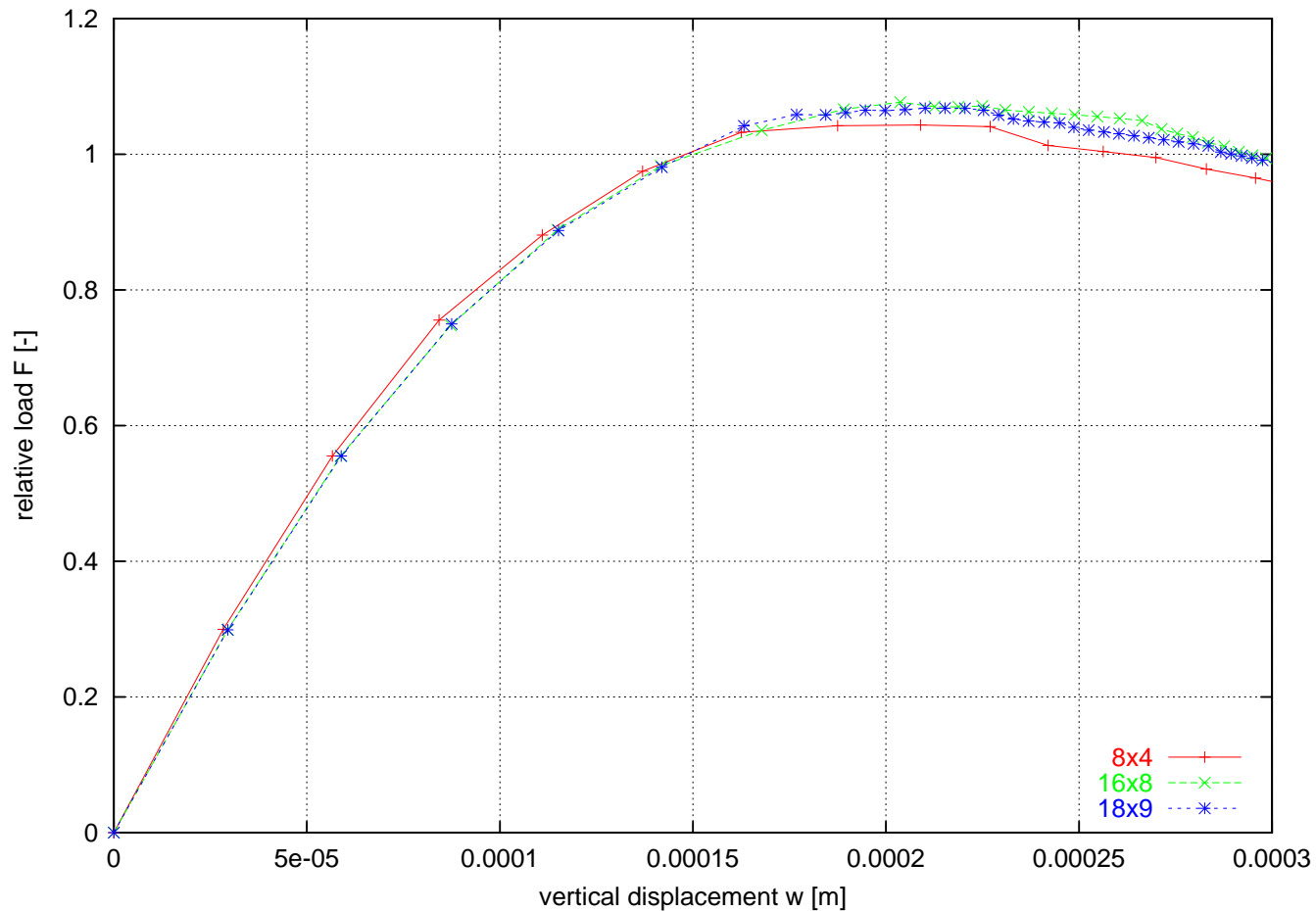
Ukázka výpočtu (2)

Fyzikálně nelineární výpočet stěny (pokles tuhosti)



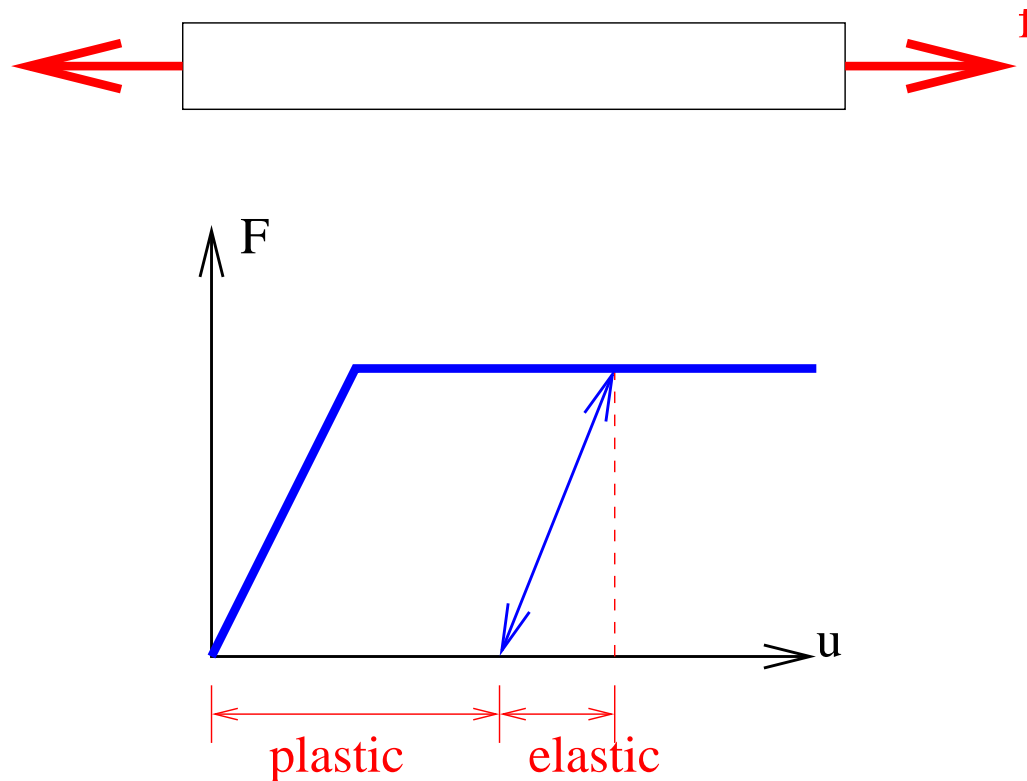
Ukázka výpočtu (3)

Fyzikálně nelineární výpočet stěny (metoda délky oblouku)



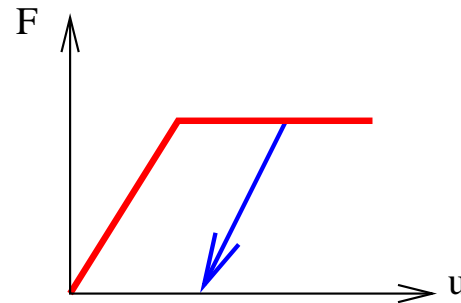
Pružnoplastické chování materiálu (1)

Pracovní diagram pro případ osového namáhání prutu:

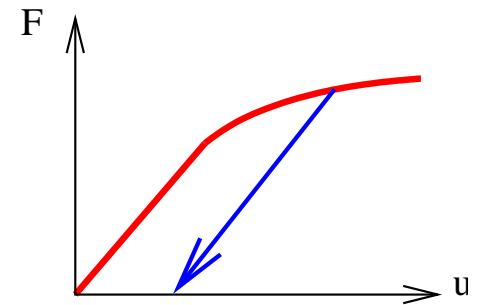
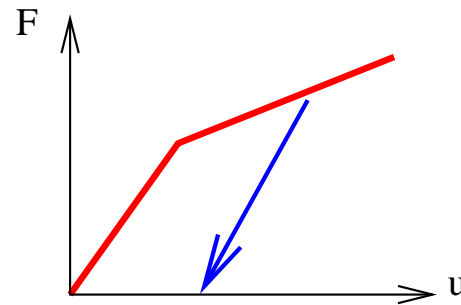


Pružnoplastické chování materiálu (2)

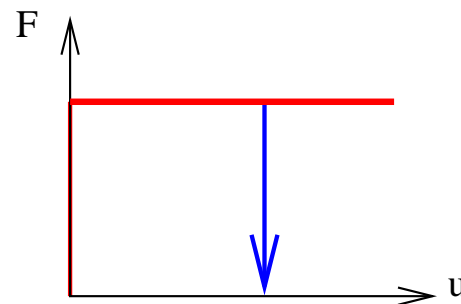
1. Ideálně pružnoplastický



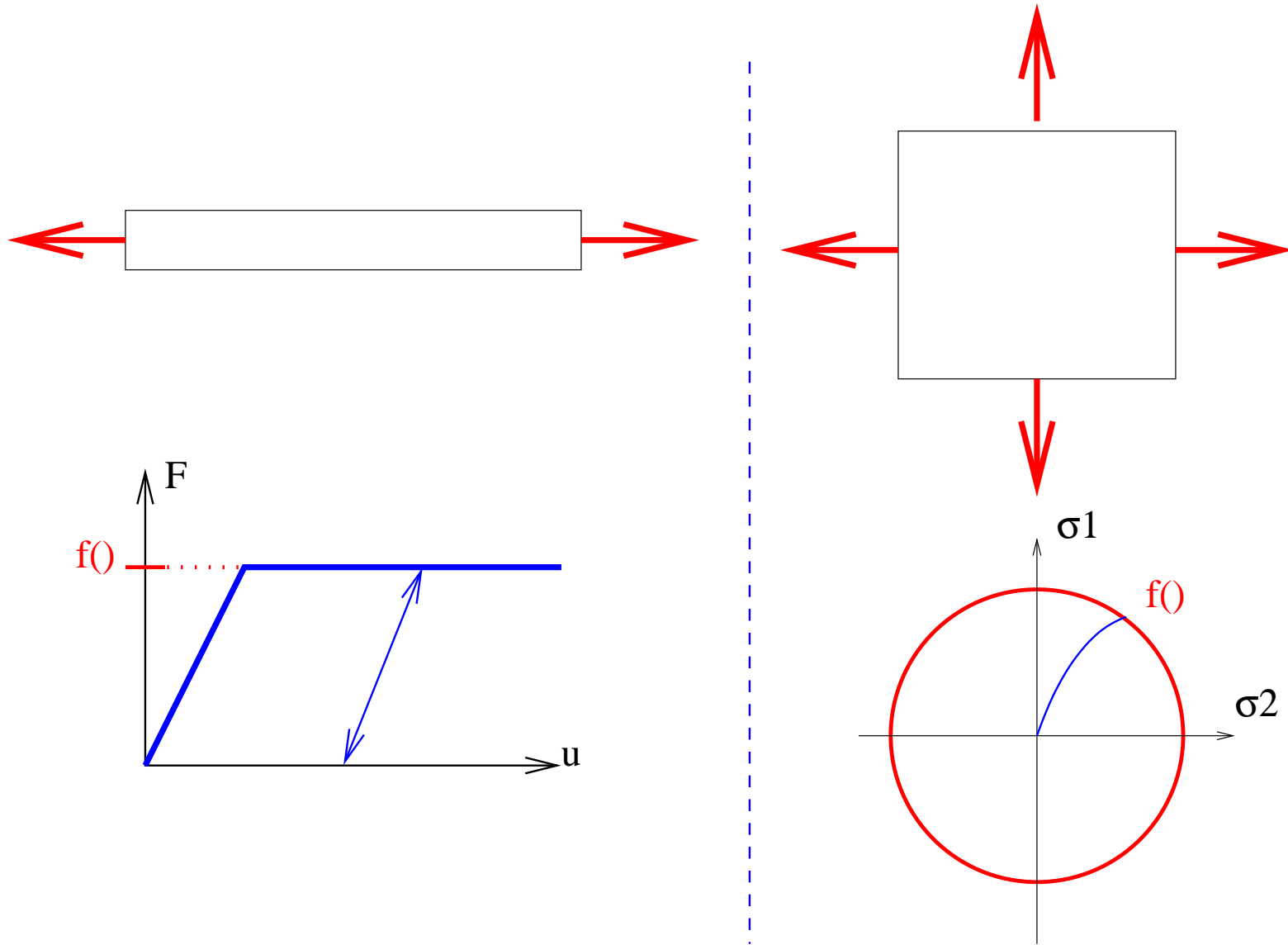
2. Pružnoplastický se zpevněním



3. Tuhoplastický

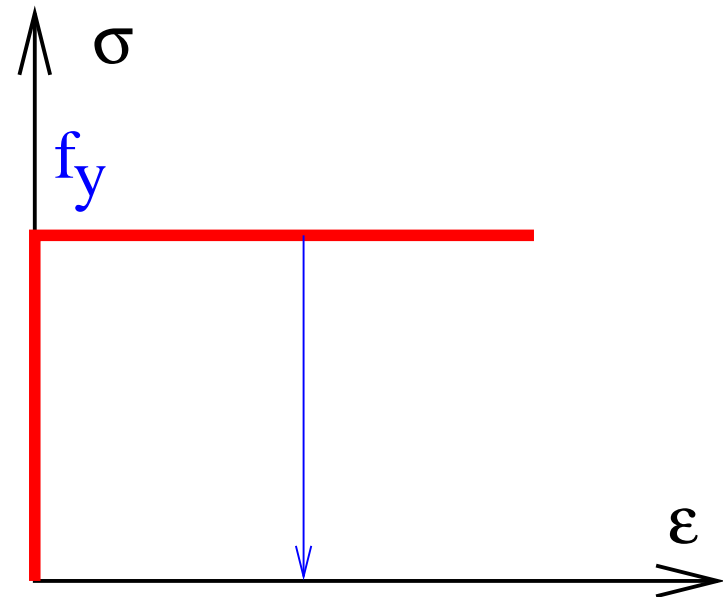


Podmínka plasticity



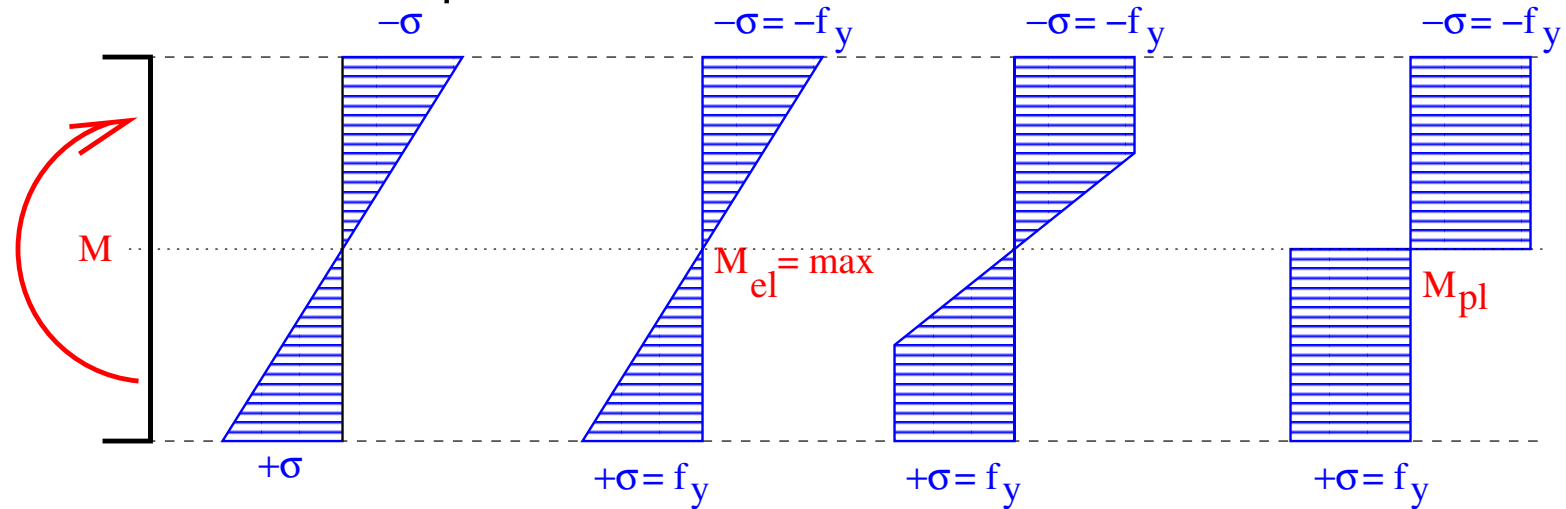
Tuhoplastický materiál

- Teoretický model materiálu
- Materiál nemá pružné deformace: po dosažení meze plasticity se neomezeně plasticky deformuje
- Využívá se ve zjednodušených metodách řešení (rámy)

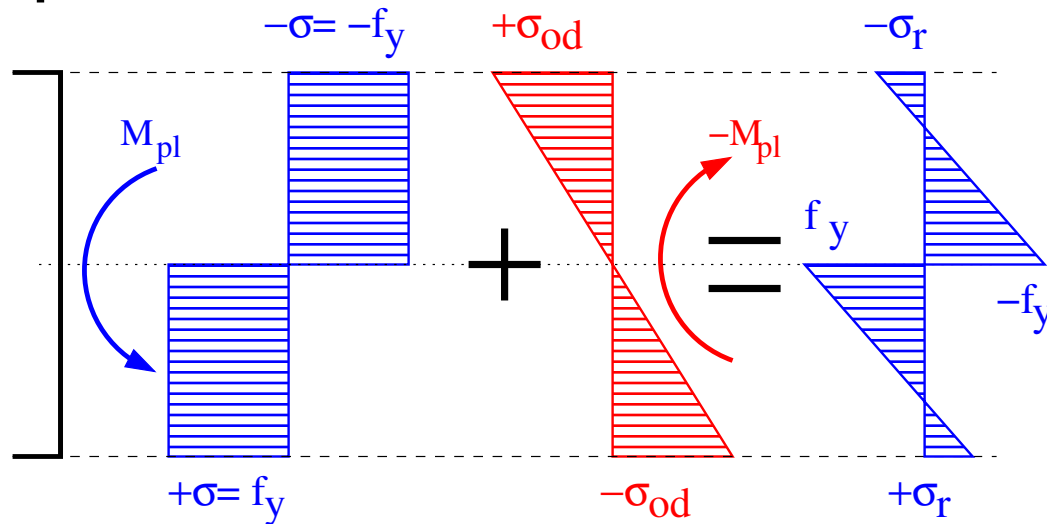


Zjednodušená řešení (1)

Opakování: Plastizace průřezu nosníku



Opakování: Pružné odlehčení nosníku:

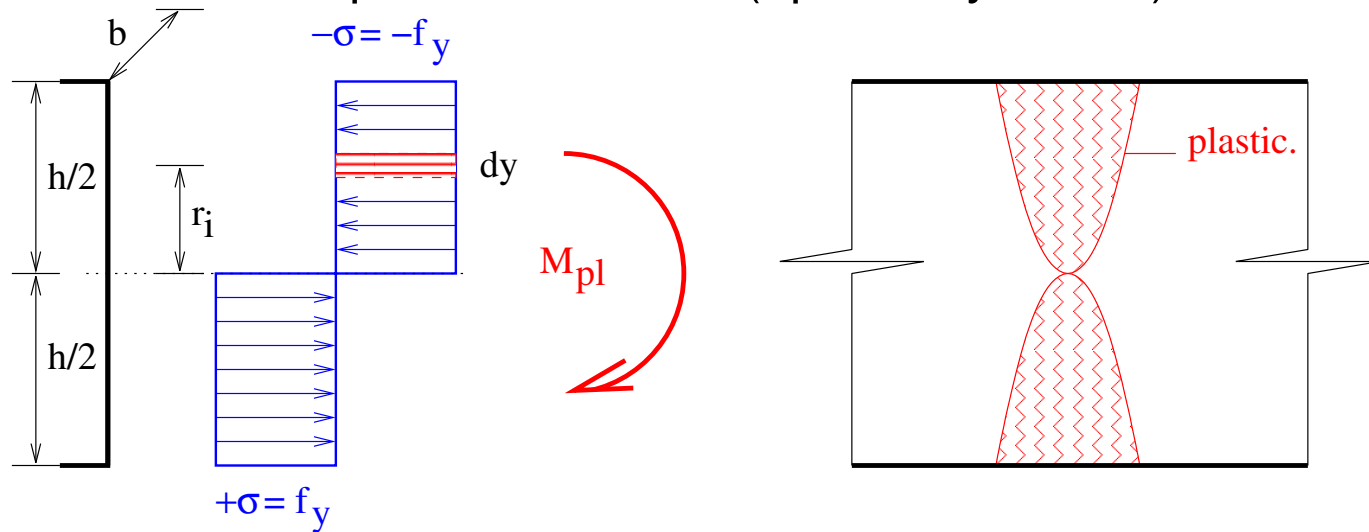


$$\sigma_{od} = \frac{M_{pl}}{W_{el}} \leq f_y$$

$$\sigma_r = f_y - \sigma_{od}$$

Zjednodušená řešení (2)

Opakování: Plastizace průřezu nosníku („plastický kloub“)



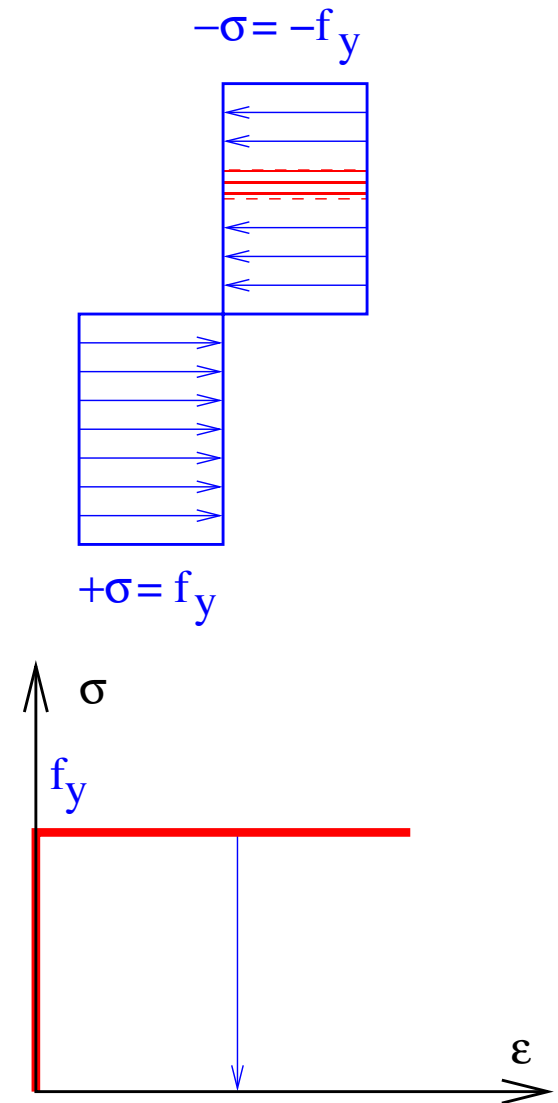
Mezní plastický moment (obdélníkového) průřezu:

$$M_{pl} = \int_0^h \sigma_i r_i dy = \dots$$

Zjednodušená řešení (3)

Pružnoplastický výpočet rámu

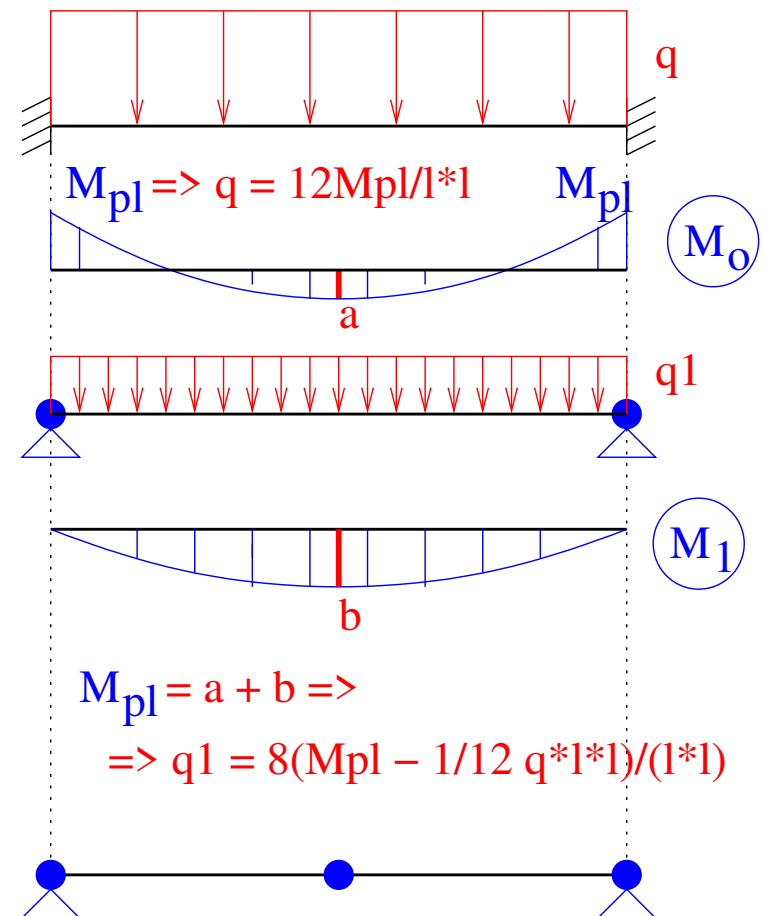
- Zpravidla se vychází z tuhoplastického modelu materiálu
- Zvoleným způsobem (naráz, postupně) se vkládají „plastické klouby“ a studuje se stav konstrukce
- Předpokládá se že moment v „plastickém kloubu“ je právě M_{pl}
- Dále bude použita „metoda postupné plastizace“



Zjednodušená řešení (4)

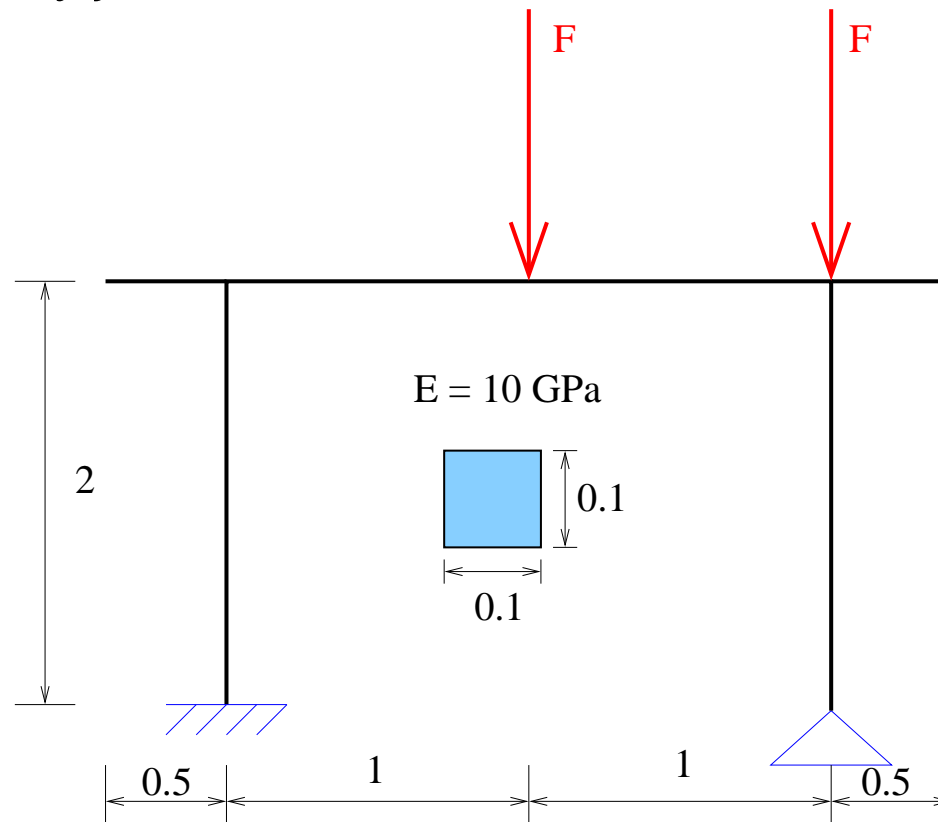
Metoda postupné plastizace:

- Provedeme lineární výpočet
- Největší zjištěný moment položíme roven M_{pl} a podle něj určíme vnitřní síly
- Pro přetížení v dalším kroku považujeme pro výpočet místo s M_{pl} (plastický kloub) za místo kloubu ($\Delta M = 0$)
- Určíme další plastický kloub a postup opakujeme **dokud je konstrukce s klouby staticky neurčitá**



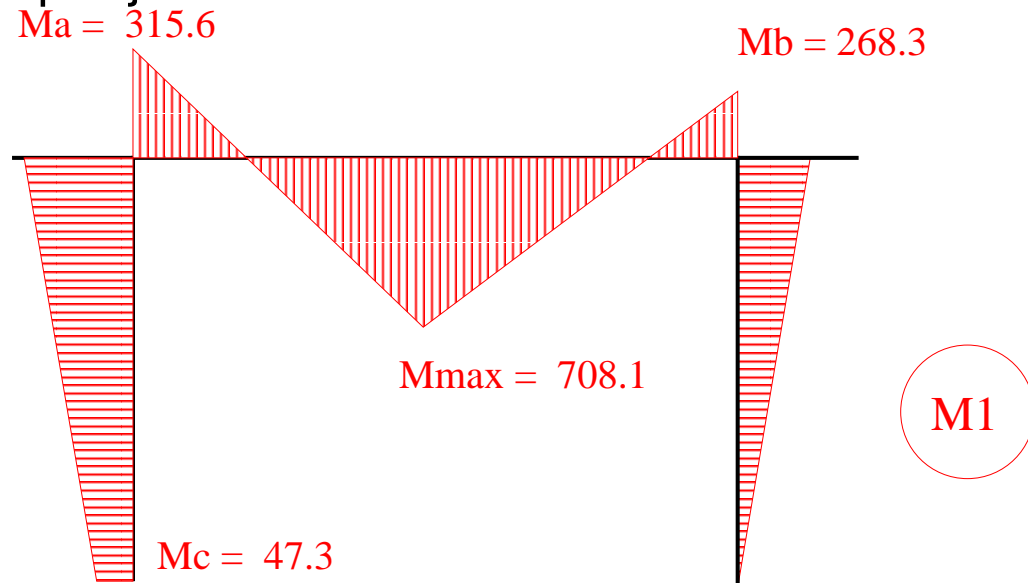
Zjednodušená řešení (5)

Zadání: Stanovte maximální možnou velikost zatížení zadaného rámu, pokud $M_{pl} = 20 \text{ kNm}$. Rám se složen z prutů s konstantním průřezem (čtverec, $b = 0.1 \text{ m}$). Rozměry jsou v metrech.



Zjednodušená řešení (6)

Krok 1: Výpočet pro jednotkové zatížení $F = 2kN$:

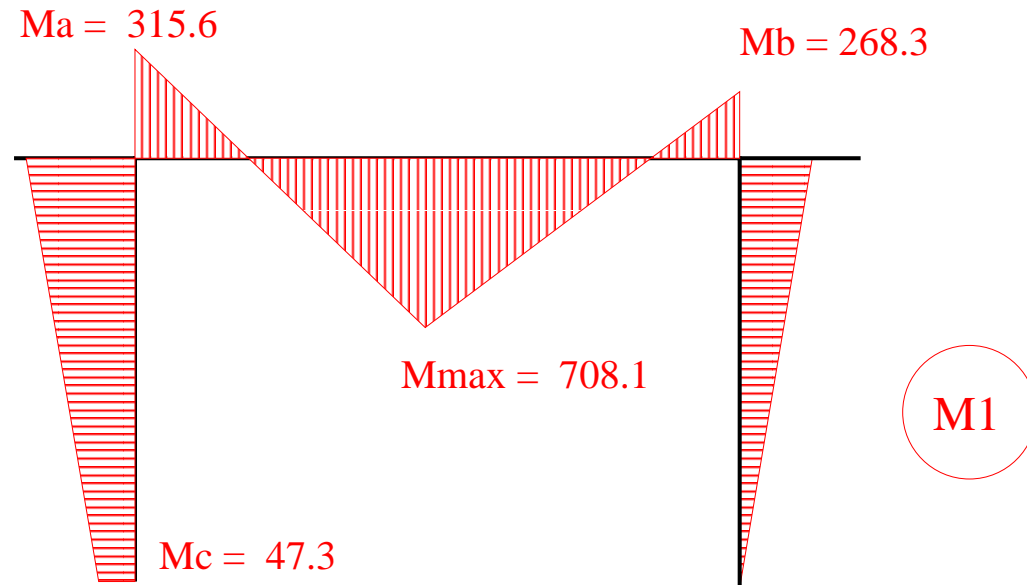


Určení hodnoty zatížení:

$$M_{max}^1 = M_{pl} \Rightarrow F_{real} = \frac{M_{pl}}{M_{max}} F_1 = \frac{20000}{708.1} \times 2000 \approx 56.5 \text{ kN}$$

Zjednodušená řešení (7)

Krok 1: Dopočet ostatních momentů

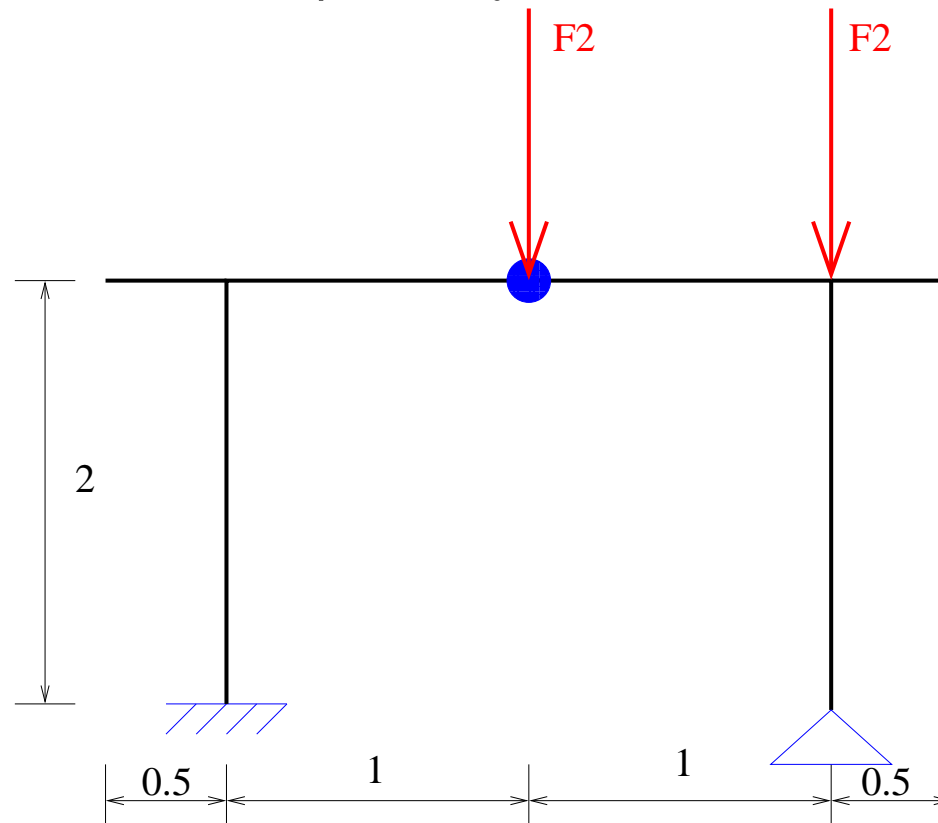


$$M_a^1 = \frac{M_{pl}}{M_{max}} M_a = \frac{20000}{708.1} \times 315.6 \approx 8.91 \text{ kNm}$$

$$M_b^1 = \frac{M_{pl}}{M_{max}} M_b = \frac{20000}{708.1} \times 268.3 \approx 7.58 \text{ kNm}$$

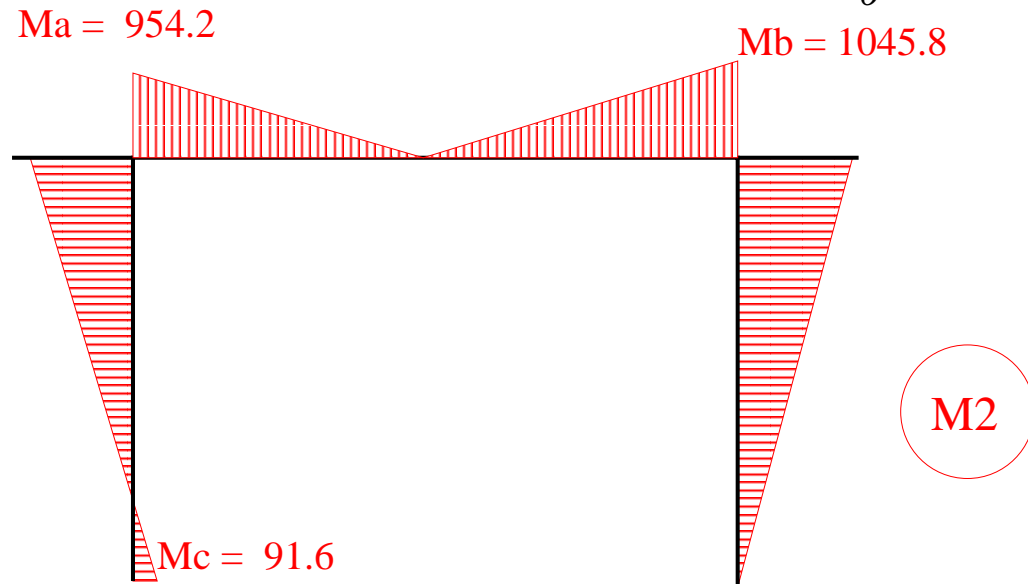
Zjednodušená řešení (8)

Krok 2: Přetížení konstrukce s plastickým kloubem $F_2 = 2kN$



Zjednodušená řešení (9)

Krok 2: Výpočet momentů pro předpoklad $M_a^1 + M_b^2 = M_{pl}$:



$$M_b^2 + M_b^1 = M_{pl} \Rightarrow n \times 954 + 8910 = 20000$$

$$n = \frac{20000 - 954}{8910} \approx 11.62 \Rightarrow$$

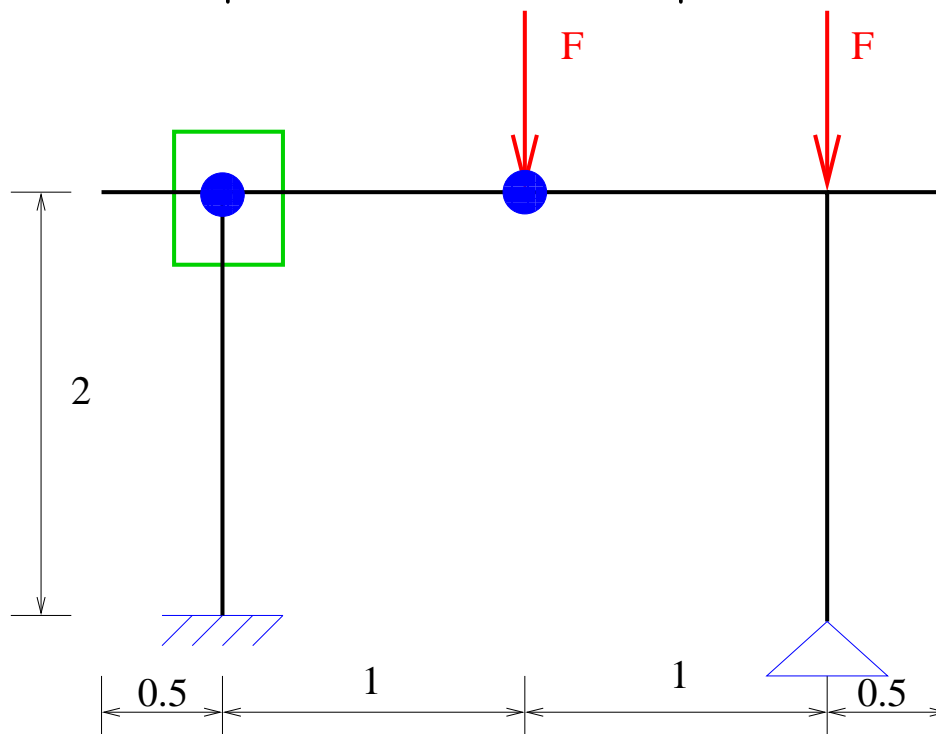
$$\Rightarrow M_b^1 + M_b^2 = 11.62 * 1045.8 + 7580 = 19.7 kNm$$

Zřejmě $M_a^1 + M_a^2 > M_b^1 + M_b^2$, tedy kloub vznikne v místě M_a .

Zjednodušená řešení (10)

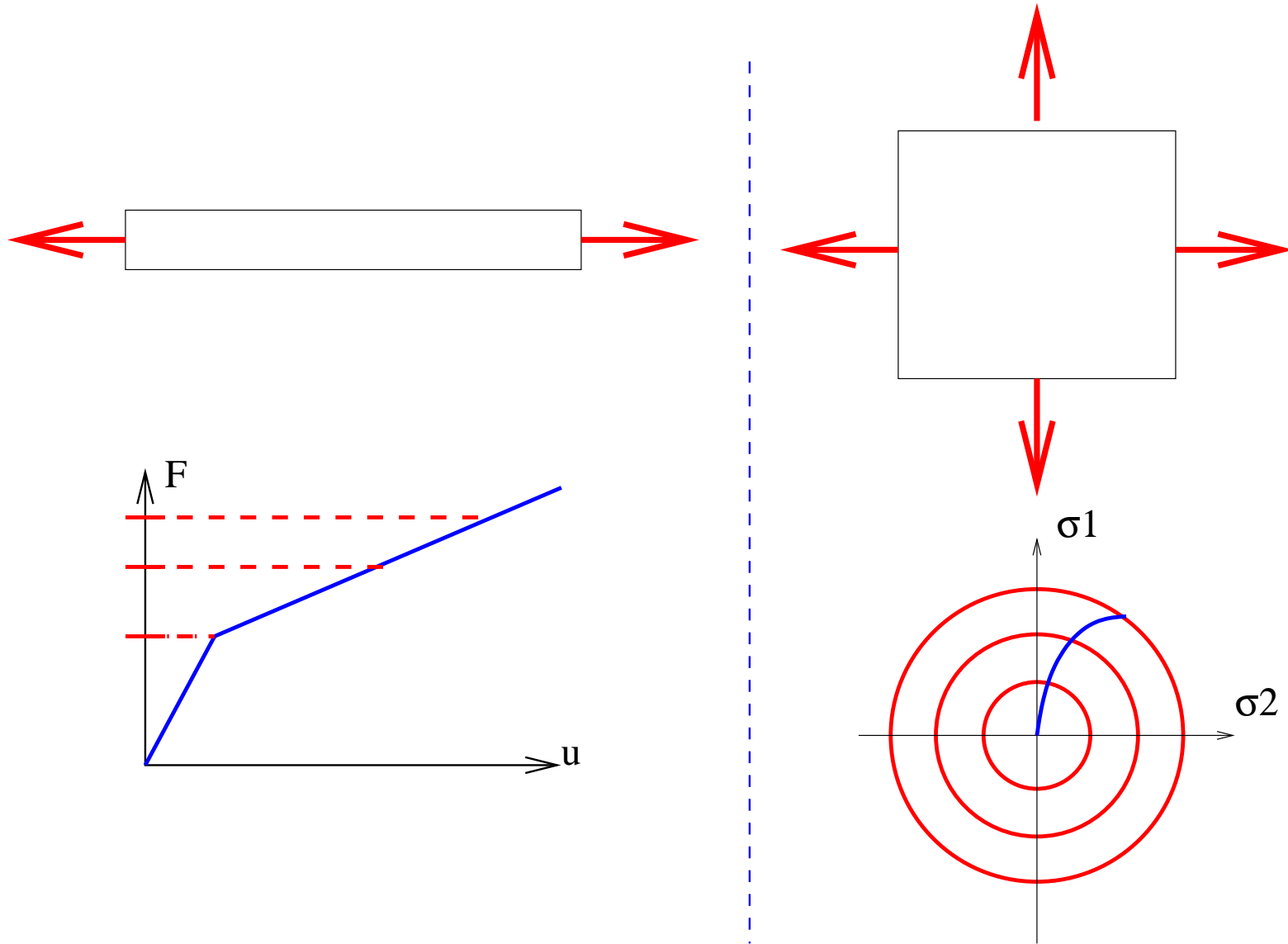
Krok 2: Výpočet momentů pro předpoklad $M_a^1 + M_a^2 = M_{pl}$:

Velikost zatížení: $F = F1 + n \times F2 = 56.5 + 11.62 \times 2 = 79.74kN$



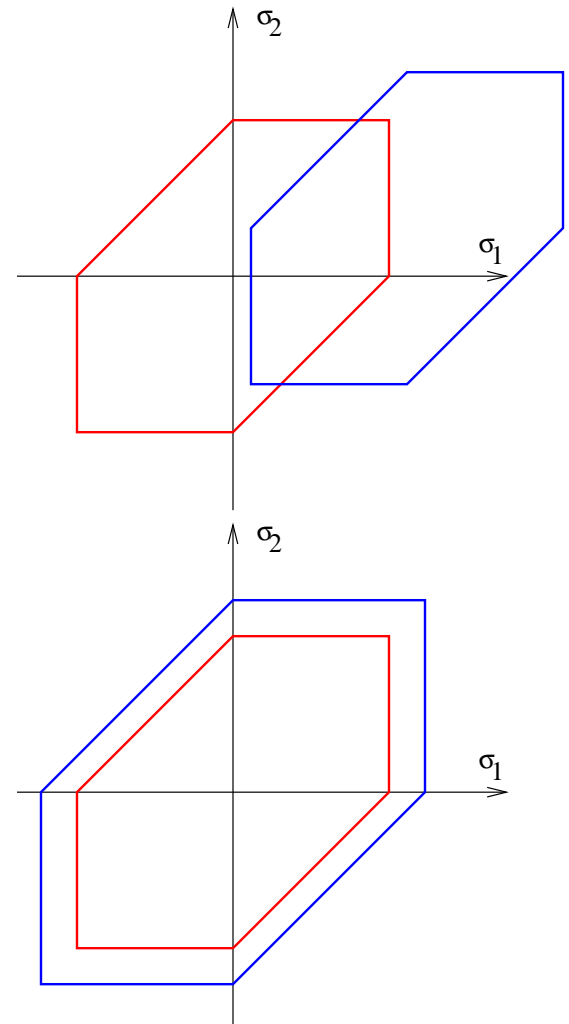
Konstrukce dále nemůže plnit svou funkci (viz obdélník) \Rightarrow **konec výpočtu.**

Zpevnění (1)



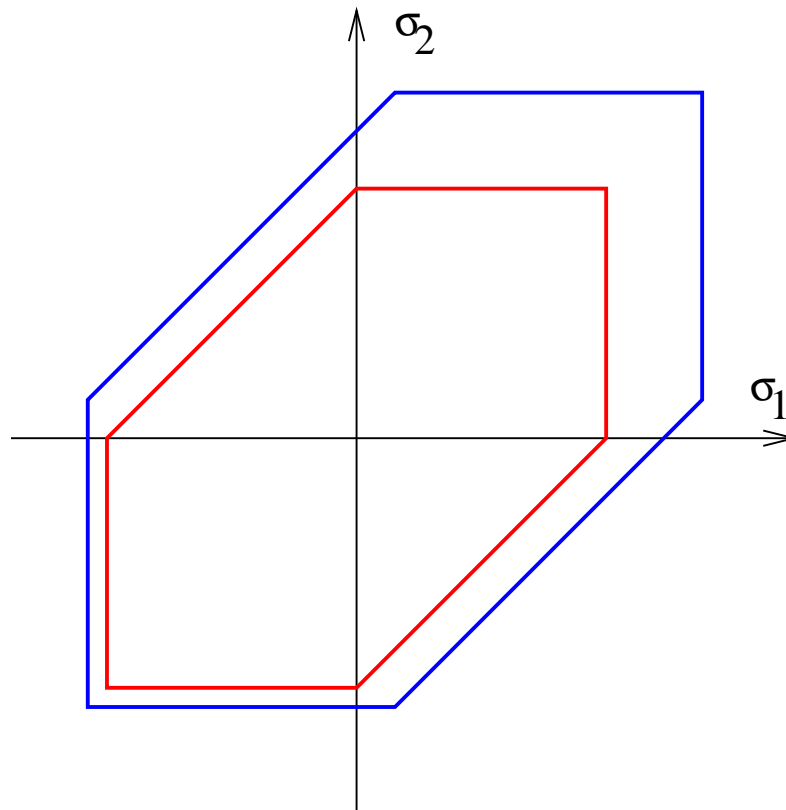
Zpevnění (2)

- Kinematické
 - následné podmínky plasticity mění polohu
 - tvar a velikost se nemění
- Izotropní
 - velikost se proporcionálně zvětšuje
 - následné podmínky plasticity nemění polohu
- Kombinované
 - nejvíce odpovídá skutečným látkám



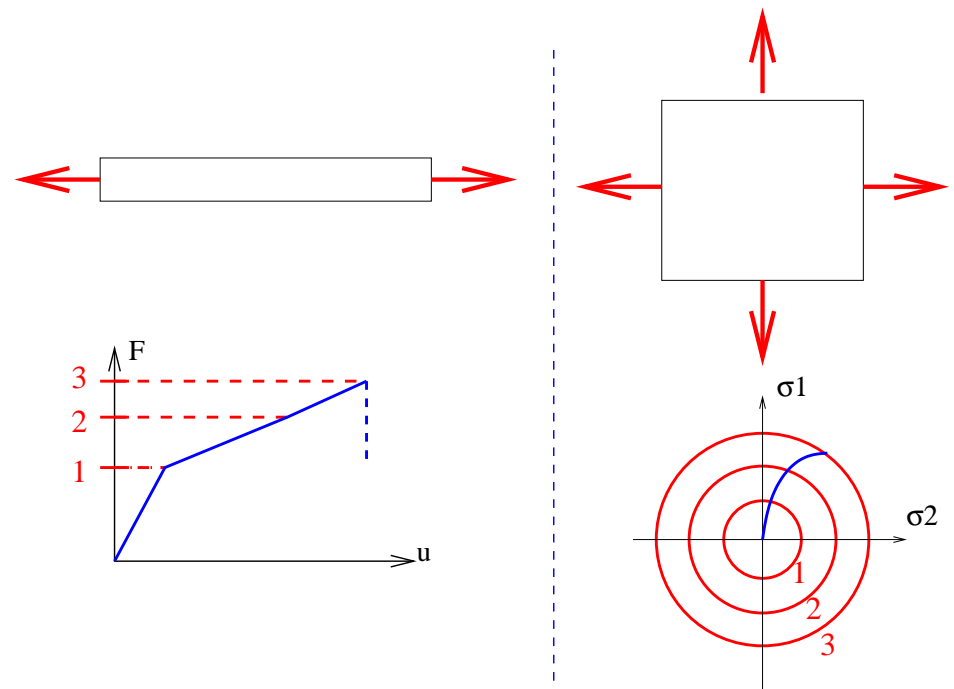
Zpevnění (3)

Kombinované zpevnění



Podmínka plasticity a porušení

1. Počáteční podmínka plasticity
2. Následná podmínka plasticity
3. Podmínka porušení



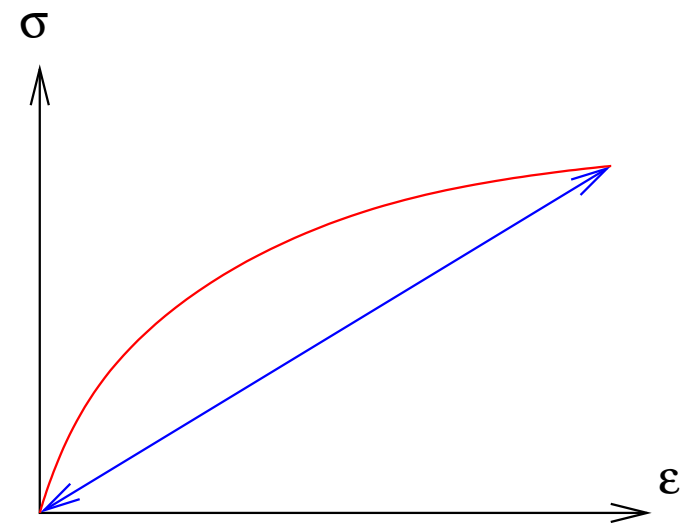
Varianty teorie plasticity (1)

Teorie plastických deformací:

- popisuje vztahy mezi konečnými hodnotami složek vektorů napětí a deformace:

$$\sigma = \mathbf{D}^{\text{EP}} \varepsilon$$

- řešení **nezávisí** na zatěžovací dráze
- (zpravidla) obtížná formulace vztahů



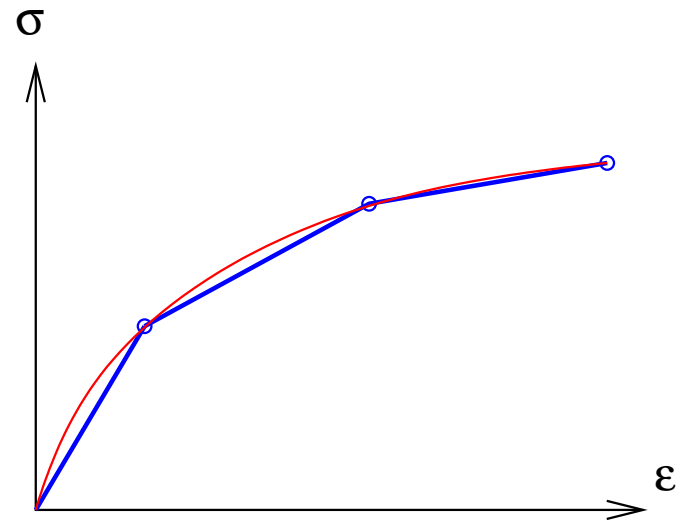
Varianty teorie plasticity (2)

Teorie plastického tečení:

- popisuje vztahy mezi přírůstkami (rychlostmi) napětí a deformace:

$$\dot{\sigma} = D^{\text{ep}} \dot{\epsilon}$$

- výsledky řešení **závisí** na zatěžovací dráze
- řešení je možno provést jako posloupnost přírůstkových kroků



Fyzikální zdůvodnění plasticity (1)

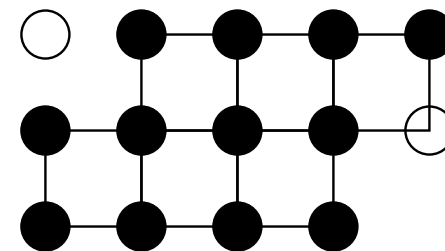
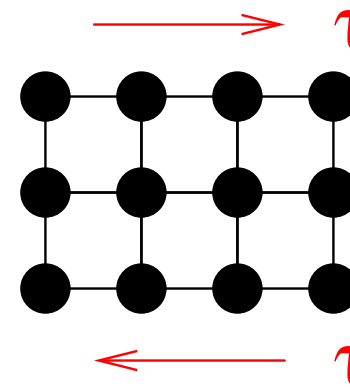
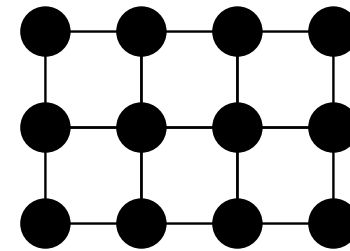
Změny v krystalické mřížce

- „Schmidtův zákon“:

$$\tau \leq \tau_{max} \quad (13)$$

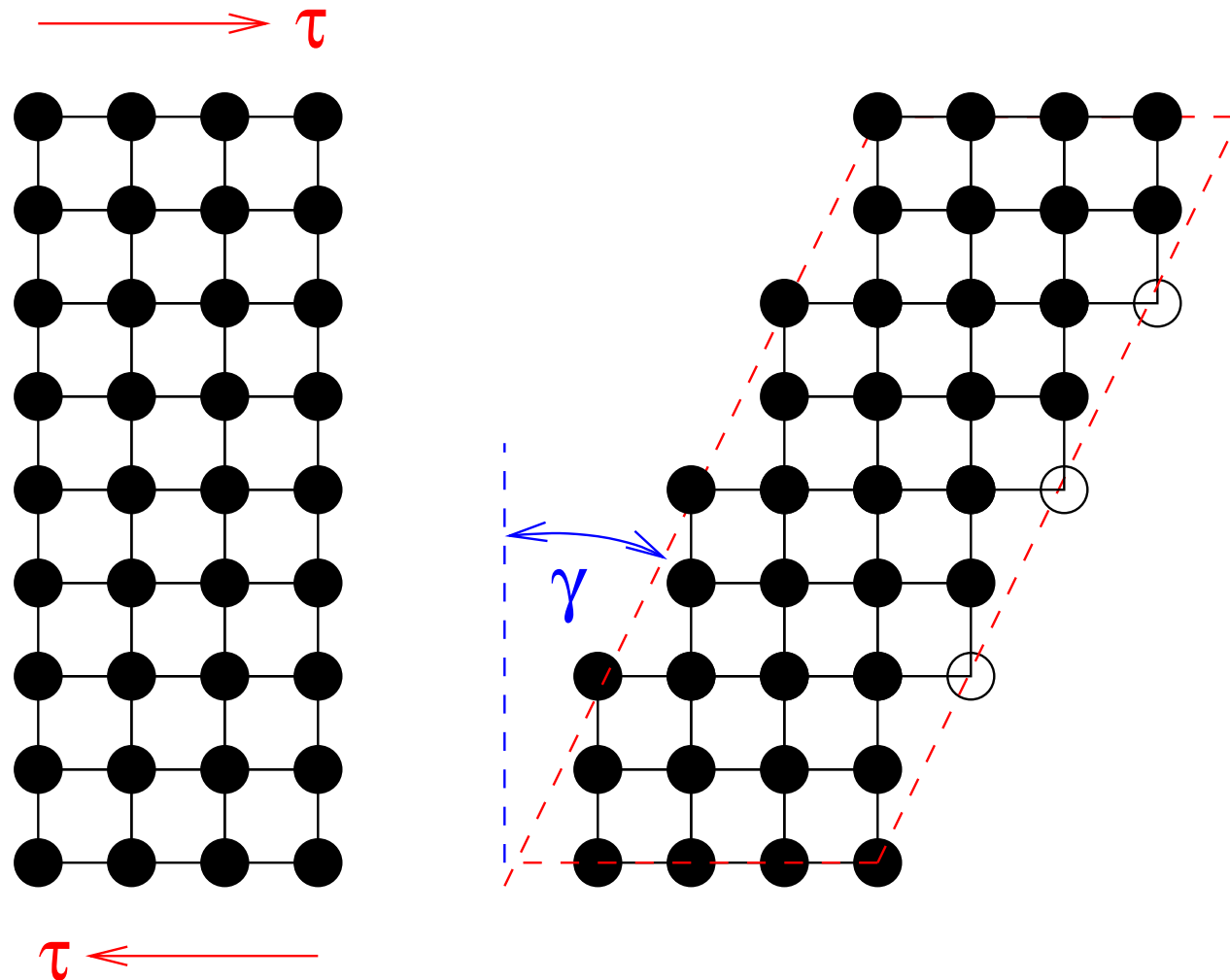
Dosažení napětí τ_{max} vede ke změnám v krystalické mřížce

- **Deformace** krystalické mřížky \Rightarrow pružná deformace
- **Změny** krystalické mřížky \Rightarrow nepružná deformace (plastická)



Fyzikální zdůvodnění plasticity (2)

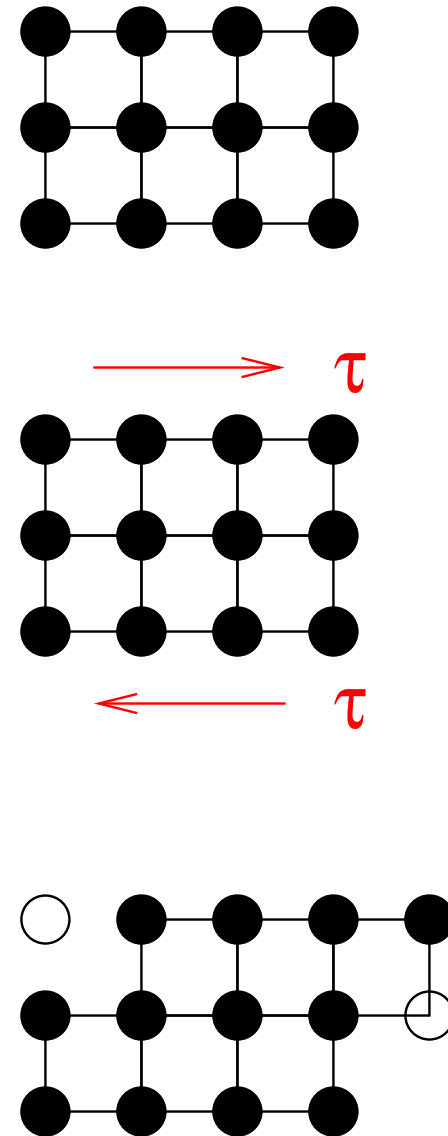
Zkosení γ v důsledku smykových napětí



Fyzikální zdůvodnění plasticity (3)

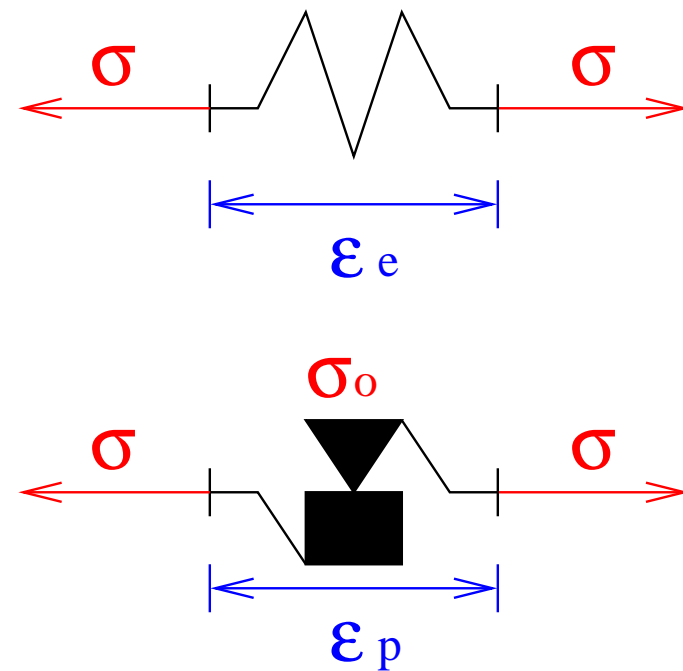
Problémy

- Orientace krystalů v běžných stavebních látkách:
 - Obecná orientace (obvykle není jeden zřejmý hlavní systém)
 - Makroskopická anizotropie („velmi mnoho kluzných rovin“)
 - V praktických úlohách (stavební mechanika) nelze Schmidův zákon přímo použít
- Využití jednodušších modelů na makroskopické úrovni (tuhoplastický aj.)



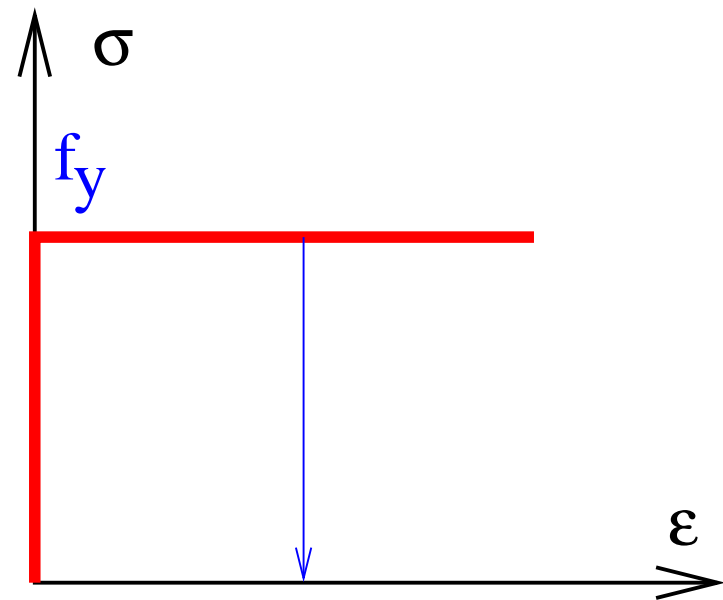
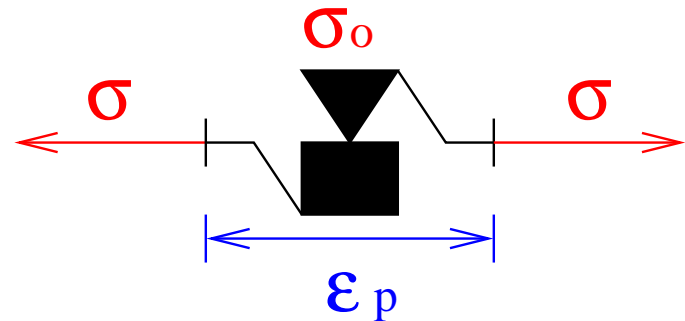
Modely pro plasticitu v 1D

- Představa: soustava různě zapojených jednoduchých prvků (jako v elektřině):
- Pružina (s pružnou deformací ε_e)
- Ideálně plastický článek (s plastickou deformací ε_p)



Tuhoplastický model (1)

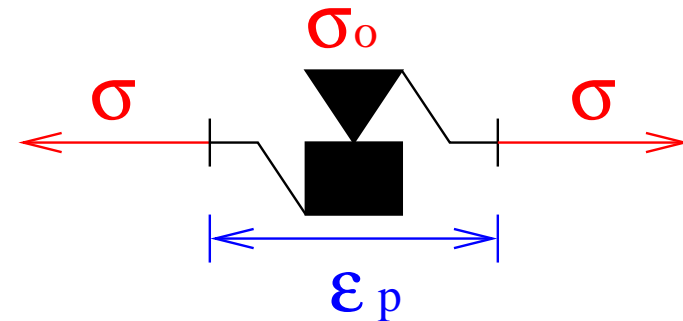
- Ideálně tuhoplastický model (bez zpevnění): Tresca, Saint-Venant
- Při napětí menším než σ_o je deformace nulová
- Při napětí právě rovném σ_o je deformace plastická (narůstá bez další změny napětí)



Tuhoplastický model (2)

Přírůstek poměrné deformace $\dot{\epsilon} = \Delta\epsilon$

- Pro $\sigma < \sigma_o \dots \dot{\epsilon} = 0$
- Pro $\sigma = \sigma_o \dots \dot{\epsilon} \geq 0$
- Pro $\sigma > \sigma_o \dots$ nemůže nastat



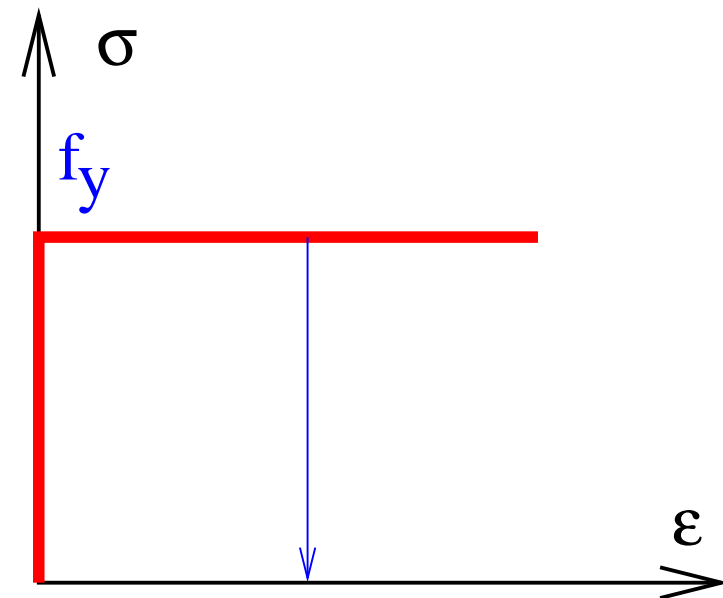
Zápis v podobně funkce:

$$\sigma - \sigma_o \leq 0, \quad \dot{\epsilon} \geq 0, \quad (\sigma - \sigma_o) \dot{\epsilon} \leq 0 \quad (14)$$

Zřejmě směr $\dot{\epsilon}$ a σ musí být shodný:

$$\dot{\epsilon} = \dot{\lambda} \operatorname{sgn}(\sigma), \quad \dot{\lambda} \geq 0 \quad (15)$$

kde $\dot{\lambda} \dots$ plastický násobitel.



Tuhoplastický model (3)

Pojmy:

- Funkce plasticity: $f(\sigma) = |\sigma| - \sigma_o$
- Podmínka plastické přípustnosti: $f(\sigma) \leq 0$
- Zákon plastického přetváření: $\dot{\varepsilon} = \dot{\lambda} \operatorname{sgn}(\sigma)$, $\dot{\lambda} \leq 0$
- Podmínka komplementarity: $\dot{\lambda} f(\sigma) = 0$

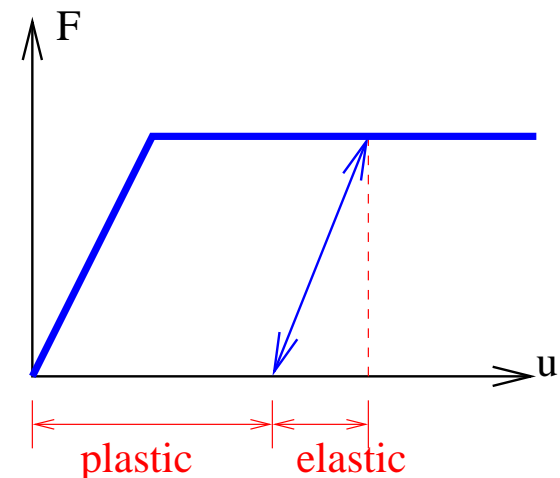
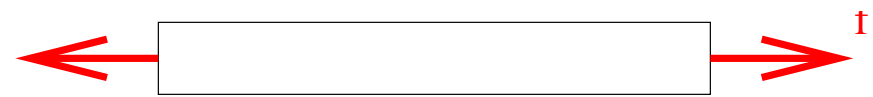
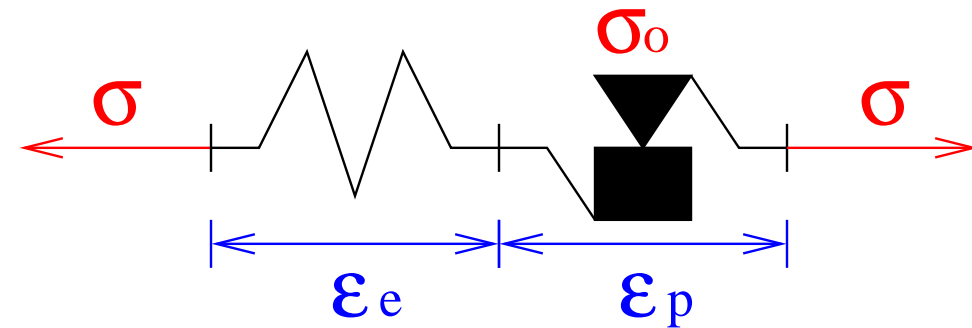
Podmínka komplementarity zajišťuje, že případy $f(\sigma) < 0$ (*tuhé chování*) a $\dot{\lambda} > 0$ (*plastické chování*) nemohou nastat současně.

Ideálně pružnoplastický model (1)

- Ideálně pružnoplastický model (bez zpevnění)
- Seriové zapojení pružného článku a tuhého článku
- Pružný článek – Hookeův zákon:

$$\sigma = E \varepsilon \quad (16)$$

- Při napětí menším než σ_0 je deformace pružná
- Při napětí právě rovném σ_0 je deformace plastická (narůstá bez další změny napětí)



Ideálně pružnoplastický model (2)

Celková poměrná deformace

Pokud L_o ...původní délka, $L = L_e + L_p$...délka po úplném odlehčení.

- Celková poměrná deformace

$$\varepsilon = \frac{L - L_o}{L_o} = \frac{L}{L_o} - 1 \quad (17)$$

- Pružná část

$$\varepsilon_e = \frac{L - L_e}{L_e} = \frac{L}{L_e} - 1 \quad (18)$$

- Plastická část

$$\varepsilon_p = \frac{L - L_p}{L_p} = \frac{L}{L_p} - 1 \quad (19)$$

- Tedy **celková poměrná deformace pružnoplastického materiálu:**

$$\varepsilon = \frac{L - L_o}{L_o} = \frac{L}{L_p} \frac{L_p}{L_o} - 1 = (1 + \varepsilon_e)(1 + \varepsilon_p) - 1 = \varepsilon_e + \varepsilon_p + \varepsilon_e \varepsilon_p \quad (20)$$

Ideálně pružnoplastický model (3)

Pojmy:

- Poměrná deformace: $\varepsilon = \varepsilon_e + \varepsilon_p$ (člen $\varepsilon_e \varepsilon_p$ zanedbáme)
- Funkce plasticity: $f(\sigma) = |\sigma| - \sigma_o$
- Podmínka plastické přípustnosti: $f(\sigma) \leq 0$
- Zákon plastického přetváření: $\dot{\varepsilon} = \dot{\lambda} \operatorname{sgn}(\sigma)$, $\dot{\lambda} \leq 0$
- Podmínka komplementarity: $\dot{\lambda} f(\sigma) = 0$

Tuhoplastický model s lineárním kinematickým zpevněním (1)

- Paralelní zapojení tuhého a pružného článku
- Při napětí menším než σ_o je deformace nulová
- Při napětí větším nebo rovném σ_o je deformace pružno–plastická:

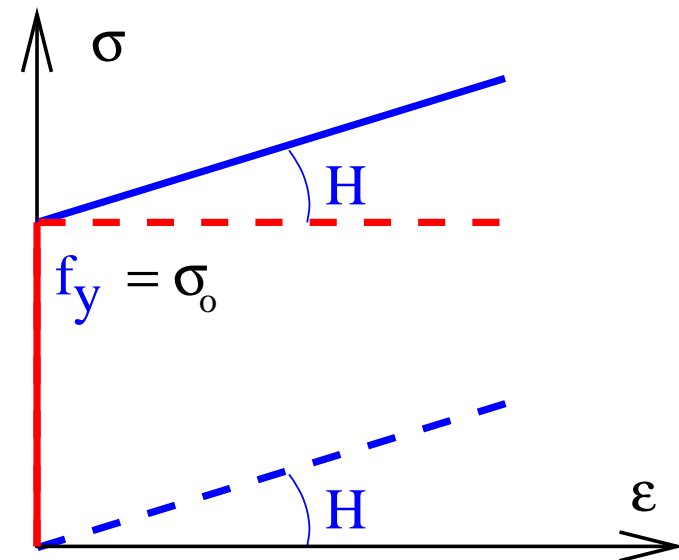
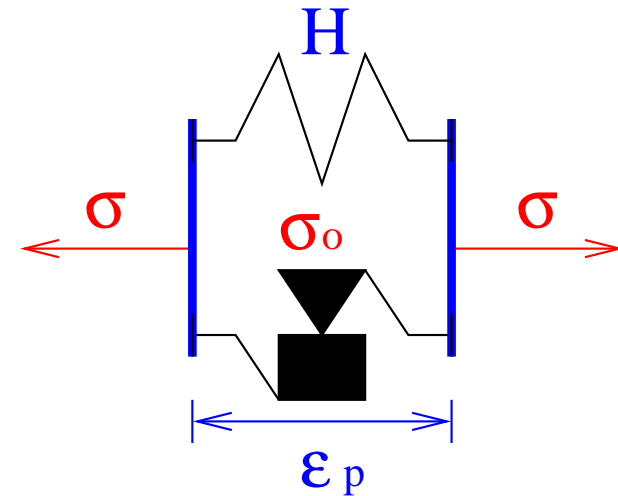
$$\varepsilon = \varepsilon_p \quad (21)$$

- Celkové napětí:

$$\sigma = \sigma_o + H \varepsilon_p \quad (22)$$

- H ...modul zpevnění, plastický modul
- „Zpětné napětí“ (ve zpevnění):

$$\sigma_b = H \varepsilon_p \quad (23)$$



Tuhoplastický model s lineárním kinematickým zpevněním (2)

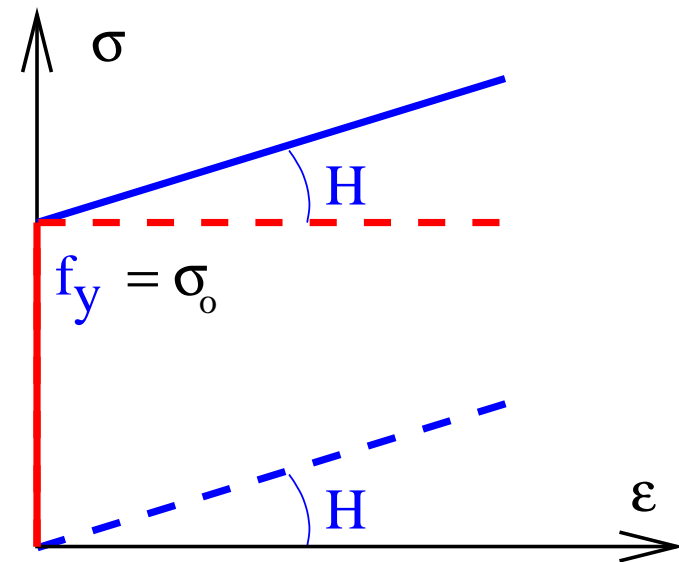
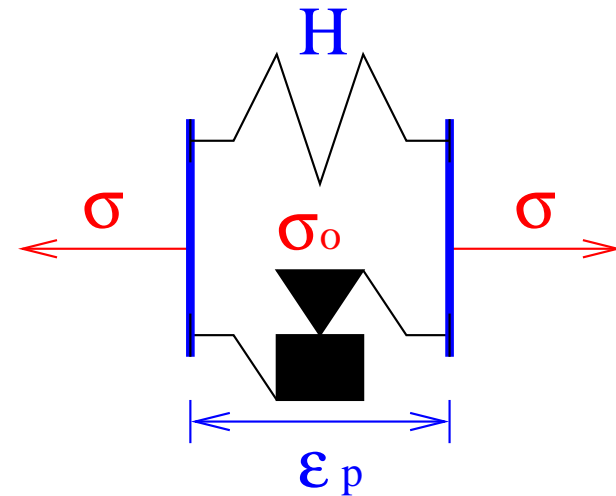
- „Zpětné napětí“ (zákon plastického zpevnění):

$$\sigma_b = H \varepsilon_p$$

- Zákon plastického přetváření:

$$\dot{\varepsilon}_p = \dot{\lambda} \operatorname{sgn}(\sigma - \sigma_b) \quad (24)$$

- **Kinematické zpevnění:** zpětné napětí ovlivňuje hodnotu napětí nutného k pokračování plastické deformace („posouvá“ okamžitou mez kluzu)



Tuhoplastický model s lineárním kinematickým zpevněním (3)

Pojmy:

- Funkce plasticity: $f(\sigma) = |\sigma| - \sigma_o$
- Modul zpevnění: H
- Okamžitá mez kluzu: $\sigma_{pl} = \sigma_o + H \varepsilon_p$
- Podmínka plastické přípustnosti: $f(\sigma) \leq 0$
- Zákon plastického přetváření: $\dot{\varepsilon} = \dot{\lambda} \operatorname{sgn}(\sigma - \sigma_b)$, $\dot{\lambda} \leq 0$
- Podmínka komplementarity: $\dot{\lambda} f(\sigma) = 0$

Pružnoplastický model s lineárním kinematickým zpevněním (1)

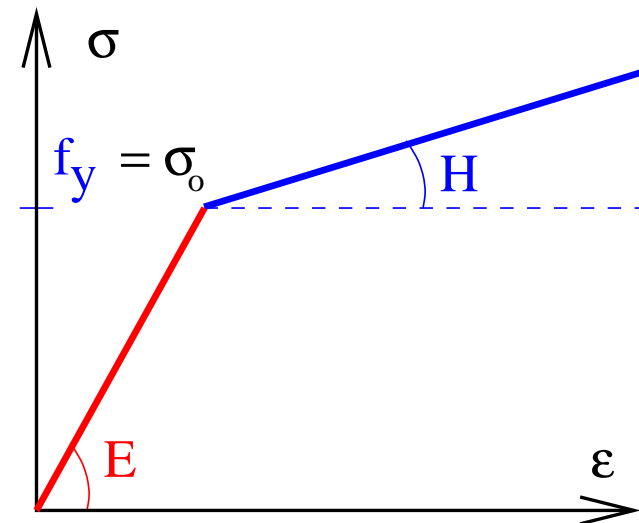
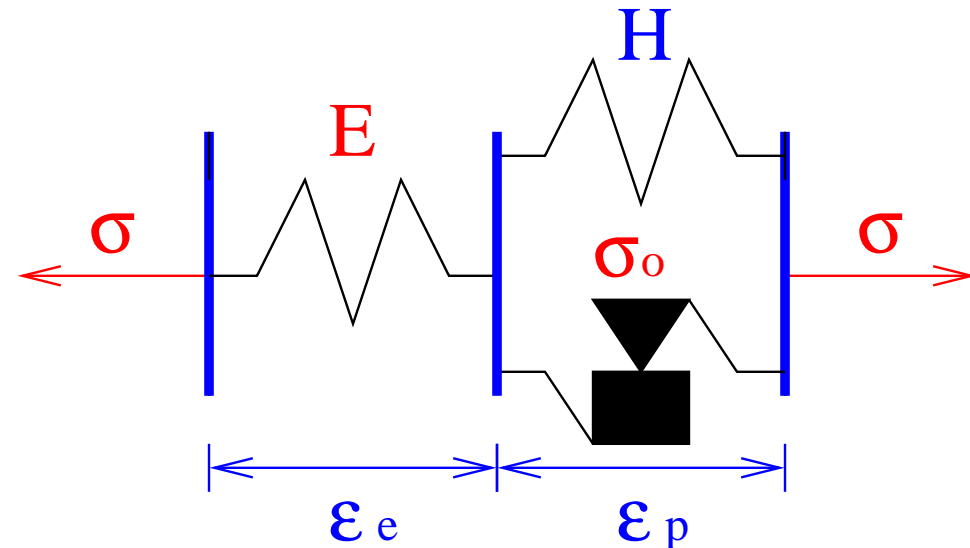
- Paralelní zapojení tuhého a pružného článku (H)
- Seriové připojení pružného článku (E)
- Při napětí menším než σ_o je deformace pružná
- Při napětí větším nebo rovném σ_o je deformace pružno–plastická
- Funkce plasticity:

$$f(\sigma, \sigma_b) = |\sigma - \sigma_b| - \sigma_o, \quad (25)$$

kde $\sigma_b = H \varepsilon$

- Zákon plastického přetváření:

$$\dot{\varepsilon}_p = \dot{\lambda} \operatorname{sgn}(\sigma - \sigma_b) \quad (26)$$



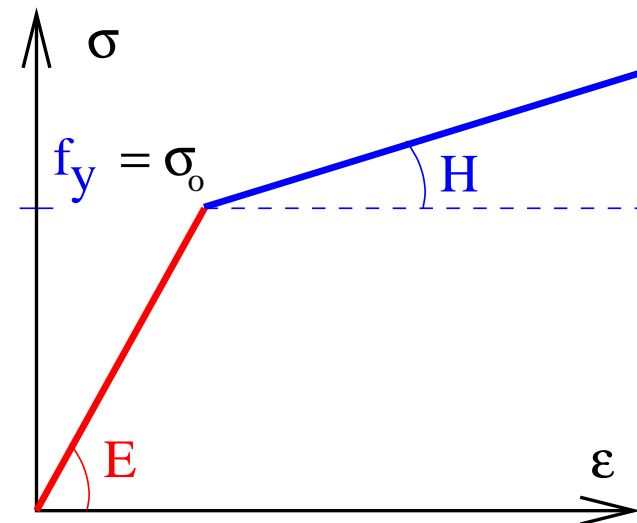
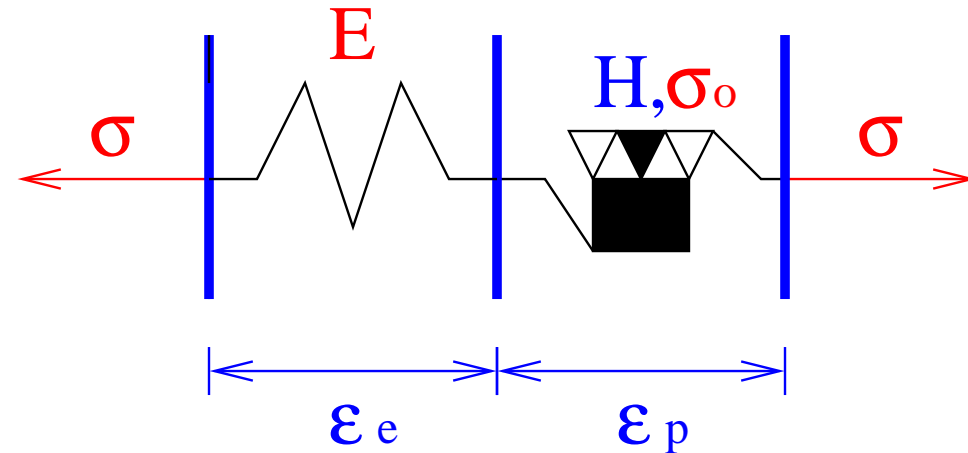
Pružnoplastický model s lineárním kinematickým zpevněním (2)

Pojmy:

- Poměrná deformace: $\varepsilon = \varepsilon_e + \varepsilon_p$ (člen $\varepsilon_e \varepsilon_p$ zanedbáme)
- Okamžitá mez kluzu: $\sigma_{pl} = \sigma_o + H \varepsilon_p$, a $\sigma_b = H \varepsilon_p$
- Funkce plasticity: $f(\sigma) = |\sigma - \sigma_b| - \sigma_o$
- Podmínka plastické přípustnosti: $f(\sigma) \leq 0$
- Zákon plastického přetváření: $\dot{\varepsilon} = \dot{\lambda} \operatorname{sgn}(\sigma - \sigma_b)$, $\dot{\lambda} \leq 0$
- Podmínka komplementarity: $\dot{\lambda} f(\sigma) = 0$

Pružnoplastický model s izotropním zpevněním (1)

- Seriové připojení pružného článku (E) článku s izotropním zpevněním (odpor proti plastické deformaci postupně vzrůstá)
- Izotropní zpevnění: při zatěžování vzrůstá okamžitá mez kluzu v tahu i v tlaku
- Při napětí menším než σ_0 je deformace pružná
- Při napětí větším nebo rovném σ_0 je deformace pružno–plastická



Pružnoplastický model s izotropním zpevněním (2)

- Kumulovaná plastická deformace

κ :

$$d\kappa = |d\varepsilon_p| \quad (27)$$

$$\dot{\kappa} = |d\dot{\varepsilon}_p| \quad (28)$$

- Celková hodnota κ :

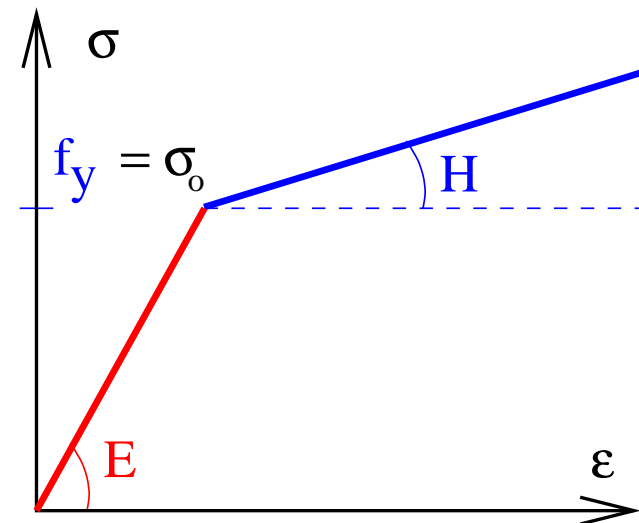
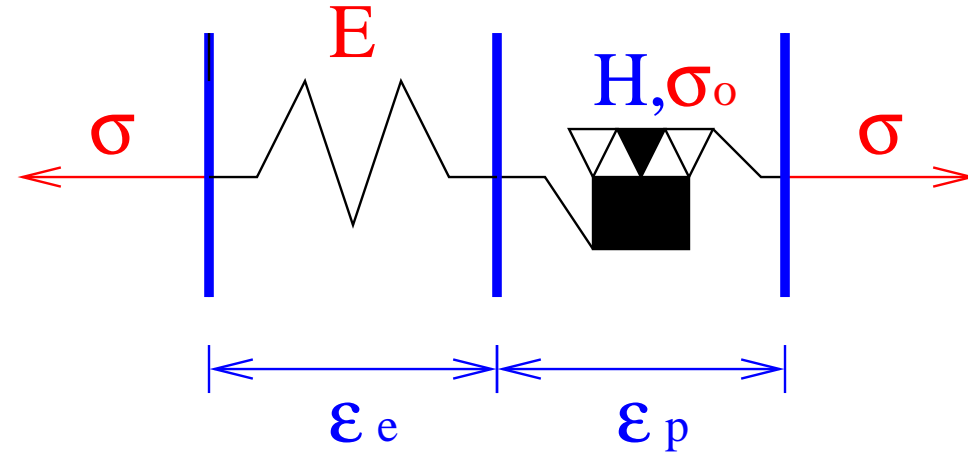
$$\kappa = \int_0^t |\dot{\varepsilon}_p| dt \quad (29)$$

- Okamžitá hodnota meze kluzu:

$$\sigma_Y = \sigma_o + H \kappa \quad (30)$$

- Funkce plasticity:

$$f(\sigma, \sigma_Y) = |\sigma| - \sigma_Y \quad (31)$$



Pružnoplastický model s izotropním zpevněním (3)

Pojmy:

- Poměrná deformace: $\varepsilon = \varepsilon_e + \varepsilon_p$ (člen ε_e ε_p zanedbáme)
- Okamžitá mez kluzu: $\sigma_Y = \sigma_o + H \kappa$
- Funkce plasticity: $f(\sigma, \sigma_Y) = |\sigma| - \sigma_Y$
- Podmínka plastické přípustnosti: $f(\sigma, \sigma_Y) \leq 0$
- Zákon plastického přetváření: $\dot{\varepsilon} = \dot{\lambda} \operatorname{sgn}(\sigma)$, $\dot{\lambda} \leq 0$
- Podmínka komplementarity: $\dot{\lambda} f(\sigma) = 0$
- Kumulovaná plastická deformace: $\kappa = |\dot{\varepsilon}_p|$
- Zpevnění: $\sigma_Y = \sigma_o + H \kappa$

Víceosá napjatost

Pružnoplastický model s izotropním zpevněním:

- Poměrná deformace: $\varepsilon = \varepsilon_e + \varepsilon_p$
- Pružné chování: $\sigma = \mathbf{D}_e \varepsilon$
- Funkce plasticity: $f(\sigma, \sigma)$
- Podmínka plastické přípustnosti: $f(\sigma) \leq 0$
- Zákon plastického přetváření: $\dot{\varepsilon} = \dot{\lambda} \operatorname{sgn}(\sigma)$, $\dot{\lambda} \leq 0$
- Podmínka komplementarity: $\dot{\lambda} f(\sigma) = 0$
- Kumulovaná plastická deformace: $\kappa = |\dot{\varepsilon}_p|$

Další podrobnosti

- Jirásek, M., Zeman, J.: Přetváření a porušování materiálů, ČVUT v Praze, 2006, 2010
- Servít a kol.: Teorie pružnosti a plasticity I., SNTL, Praha, 1981 (celostátní učebnice)

TÉMA: Podmínky plasticity pro stavební materiály

- Rankinova
- Trescova
- von Misesova
- Mohrova – Coulombova
- Chen–Chenova

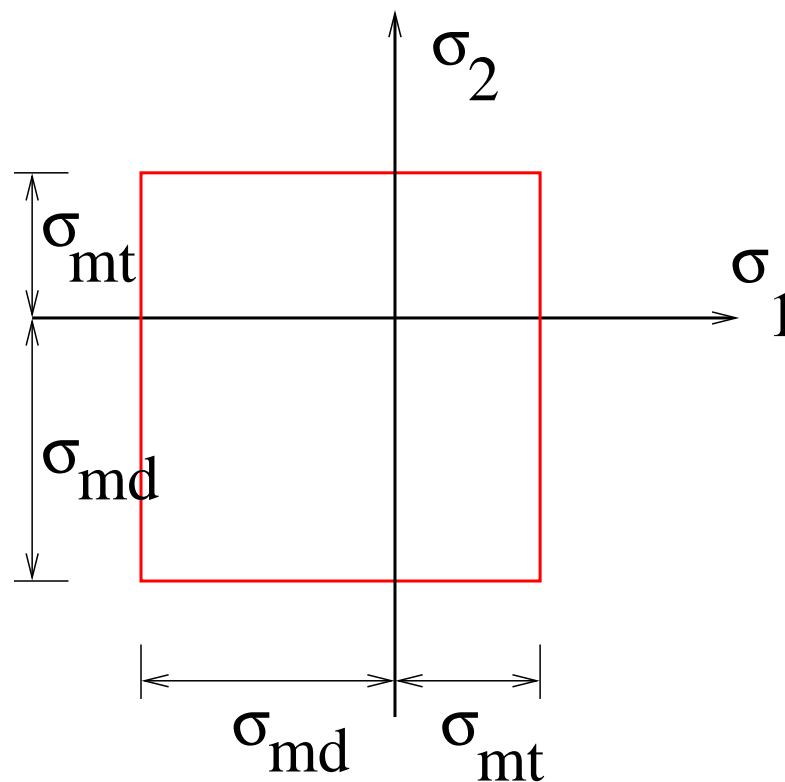
Podmínky plasticity (1)

Teorie maximálních normálových napětí (Rankine):

$$-\sigma_{md} \leq \sigma_1 \leq \sigma_{mt}$$

$$\sigma_1 - \sigma_{mt} = 0$$

$$\sigma_2 - \sigma_{md} = 0$$



Podmínky plasticity (2)

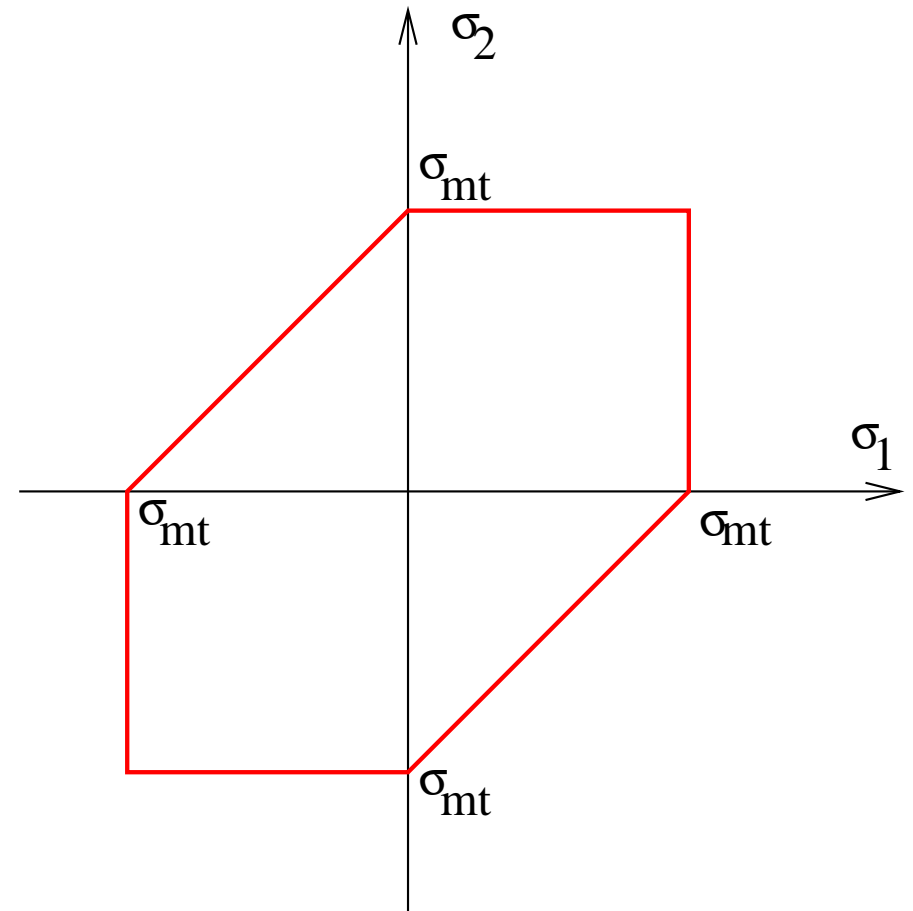
Teorie maximálních smykových napětí (Tresca):

$$\tau_{max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} - \tau_m = 0$$

$$\sigma_1 - \sigma_3 - \sigma_{mt} = 0$$

$$\left(\tau_m = \frac{\sigma_{mt}}{2}\right)$$

$$\sigma_{md} = \sigma_{mt}$$



Podmínky plasticity (3)

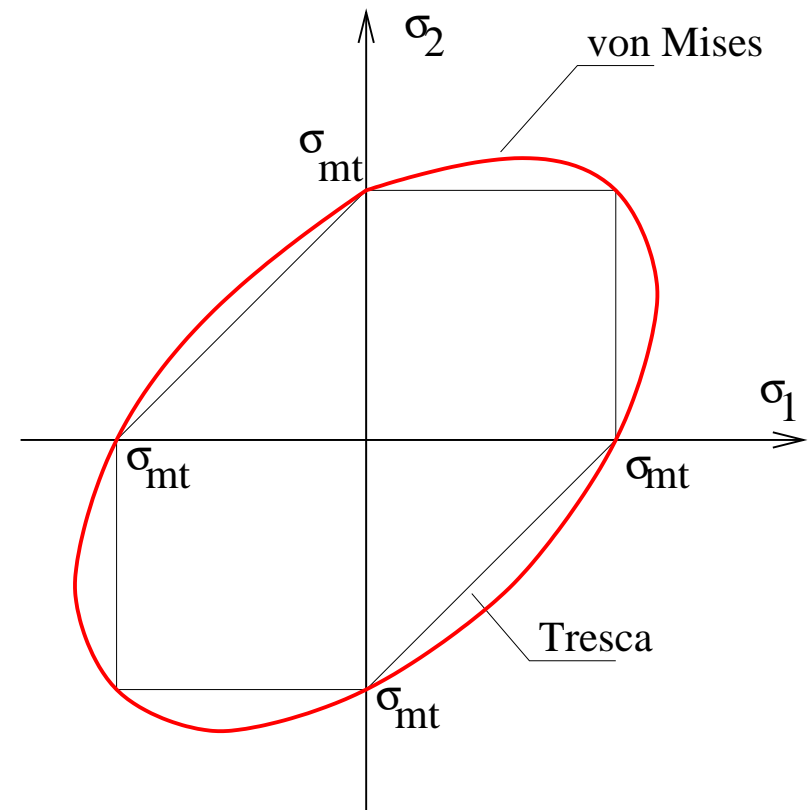
Podmínka měrné energie změny tvaru (von Mises)
(von Mises, Huber, Hencky):

$$(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 = 2\sigma_{mt}^2$$

$$\sigma_{md} = \sigma_{mt}$$

Poznámka: „von Misesovo napětí“:

$$\sqrt{\frac{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2}{2}}$$



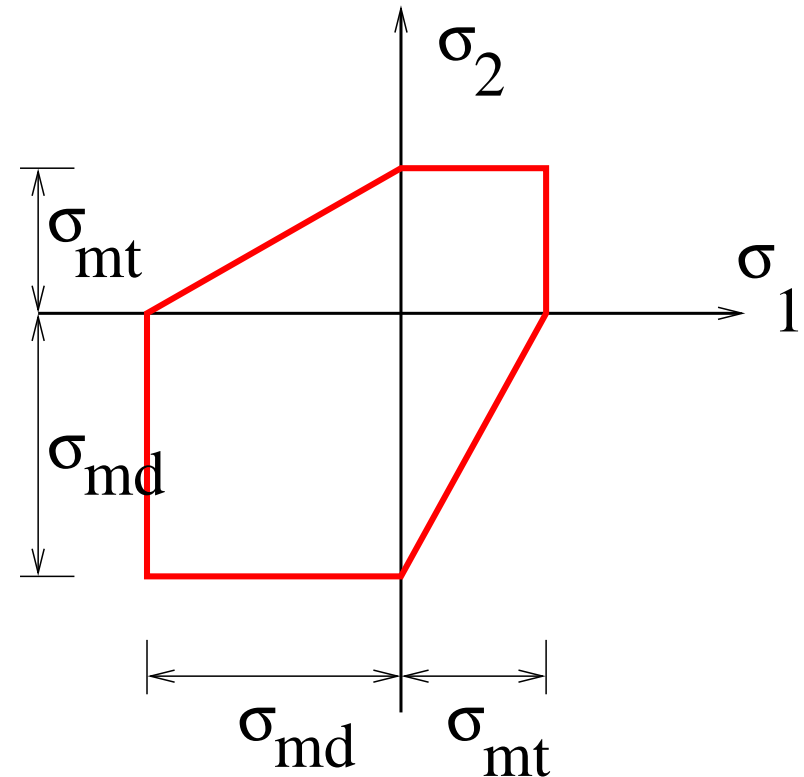
Podmínky plasticity (4)

Mohrova – Coulombova podmínka:

Vhodná pro *materiály s vnitřním třením* – geotechnické.

$$\sigma_1 - \frac{\sigma_{mt}}{\sigma_{md}} \sigma_3 - \sigma_{mt} = 0$$

$$\sigma_{md} \neq \sigma_{mt}$$



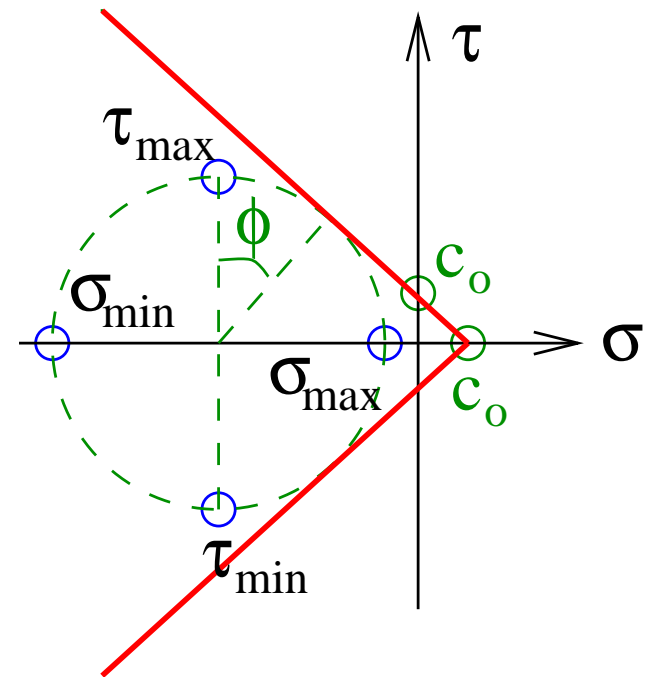
Podmínky plasticity (5)

Druckerova – Pragerova podmínka:

Vhodná pro *materiály s vnitřním třením* – geotechnické.

$$|\tau| + \sigma \tan \phi - c_0 = 0,$$

kde c_0 ...koheze, ϕ ...úhel vnitřního tření.



Podmínky plasticity (6)

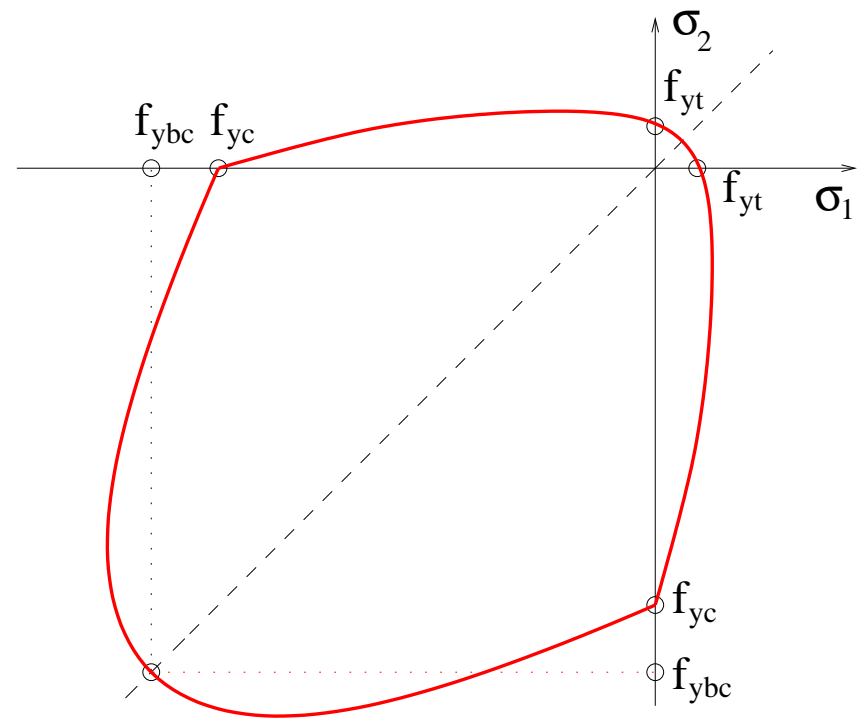
Chen – Chenova podmínka:

Tvar podmínky pro oblast tlak–tlak
($\sigma_1 < 0$ a $\sigma_2 < 0, \sigma_3 < 0$):

$$J_2 + \frac{A_{yc}}{3} I_1 - \tau_{yc}^2 = 0$$

Tvar pro ostatní oblasti:

$$J_2 - \frac{1}{6} I_1^2 + \frac{A_{yt}}{3} I_1 - \tau_{yt}^2 = 0$$

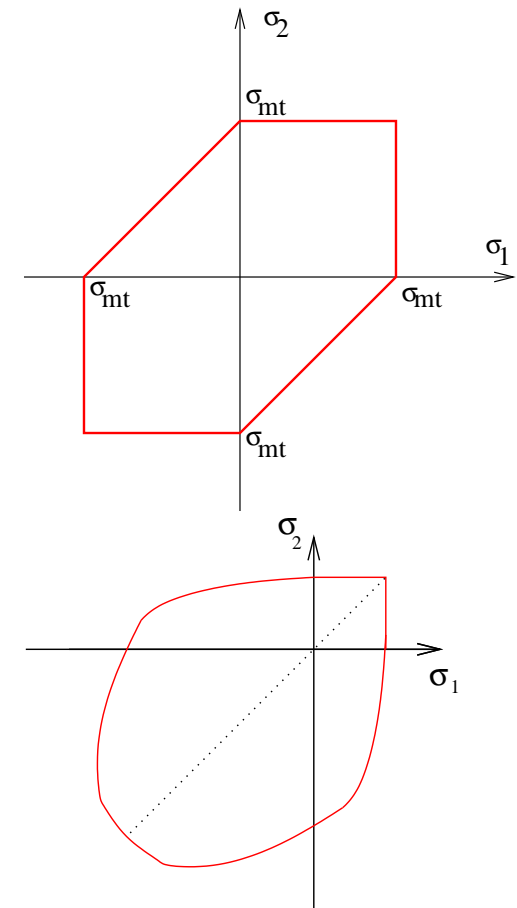


Chen – Chenova podmínka plasticity (1)

- Klasické podmínky plasticity (von Mises, Tresca) pro beton nevyhovují
- Experimentální výzkum betonových vzorků ve stavu rovinné napjatosti (prof. Kupfer, Německo)
- Řada aproximací experimentálně zjištěných dat (Kupfer, Chen a Chen, Willam a Warnke,...)

Chen a Chen:

- Aproximace Kupferových dat pomocí kuželoseček
- Funkce navržena jako podmínka plasticity i podmínka porušení betonu



Chen – Chenova podmínka pl. (2)

Tvar podmínky pro oblast tlak–tlak
($\sigma_1 < 0$ a $\sigma_2 < 0, \sigma_3 < 0$):

$$J_2 + \frac{A_{yc}}{3} I_1 - \tau_{yc}^2 = 0$$

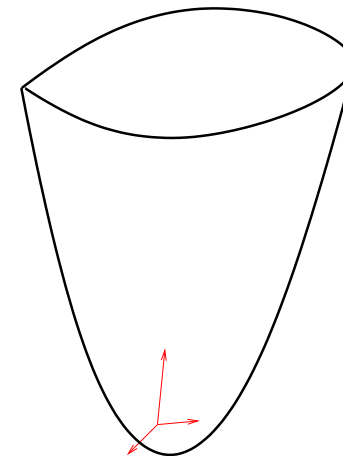
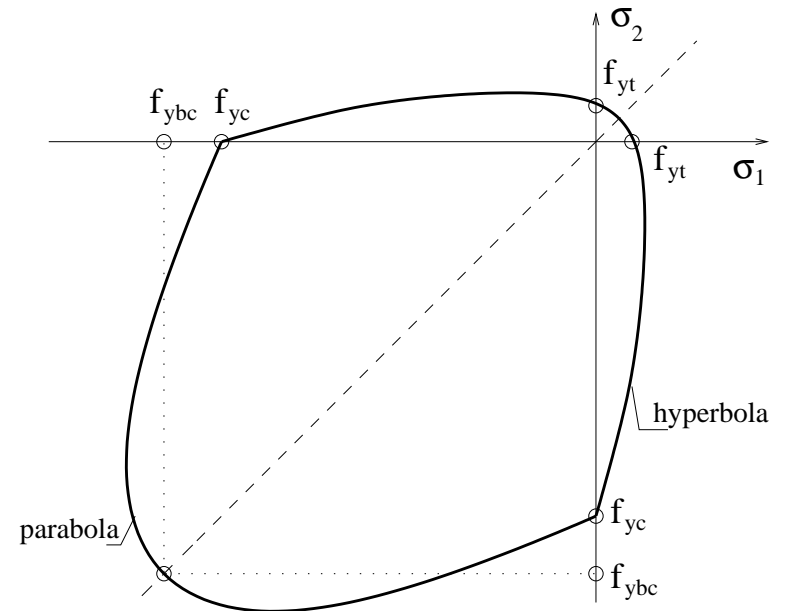
Tvar pro ostatní oblasti:

$$J_2 - \frac{1}{6} I_1^2 + \frac{A_{yt}}{3} I_1 - \tau_{yt}^2 = 0$$

kde:

$$I_1 = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3$$

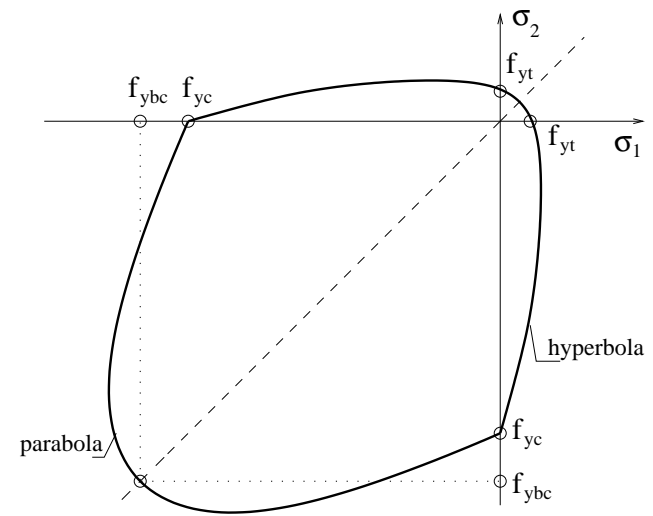
$$J_2 = \frac{1}{2} (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2)$$



Chen – Chenova podmínka pl. (3)

Vyjádření konstant A_{yx}, τ_{yx} pomocí úměrnosti materiálu:

$$A_{yc} = \frac{f_{ybc}^2 - f_{yc}^2}{2f_{ybc} - f_{yc}}$$
$$\tau_{yc}^2 = \frac{f_{ybc}f_{yc}(2f_{yc} - f_{ybc})}{3(2f_{ybc} - f_{yc})}$$
$$A_{yt} = \frac{f_{yc} - f_{yt}}{2}$$
$$\tau_{yt}^2 = \frac{f_{yc}f_{yt}}{6}$$



Chen – Chenova podmínka porušení (3)

Podmínka porušení materiálu může být definována stejným postupem pomocí mezí pevnosti materiálu:

$$J_2 + \frac{A_{uc}}{3} I_1 - \tau_{uc}^2 = 0$$

$$J_2 - \frac{1}{6} I_1^2 + \frac{A_{ut}}{3} I_1 - \tau_{ut}^2 = 0$$

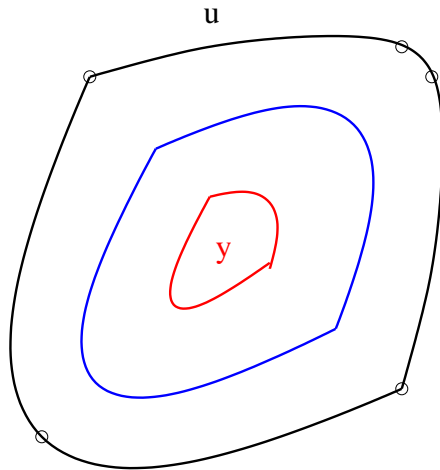
$$A_{uc} = \frac{f_{ubc}^2 - f_{uc}^2}{2f_{ubc} - f_{uc}}$$
$$\tau_{yc}^2 = \frac{f_{ubc} f_{yc} (2f_{uc} - f_{ubc})}{3(2f_{ubc} - f_{uc})}$$
$$A_{ut} = \frac{f_{uc} - f_{ut}}{2}$$
$$\tau_{ut}^2 = \frac{f_{uc} f_{ut}}{6}$$

Chen – Chenova podmínka porušení (4)

Mezilehlé podmínky (pro stavy ležící mezi podmínkou plasticity a podmínkou porušení):

$$A_c = \alpha_c \tau_c^2 + \beta_c$$

$$A_t = \alpha_t \tau_t^2 + \beta_t$$



$$\alpha_c = \frac{A_{uc} - A_{yc}}{\tau_{uc}^2 - \tau_{yc}^2}$$

$$\beta_c = \frac{A_{yc}\tau_{uc}^2 - A_{uc}\tau_{yc}^2}{\tau_{uc}^2 - \tau_{yc}^2}$$

$$\alpha_t = \frac{A_{ut} - A_{yt}}{\tau_{ut}^2 - \tau_{yt}^2}$$

$$\beta_t = \frac{A_{yt}\tau_{ut}^2 - A_{ut}\tau_{yt}^2}{\tau_{ut}^2 - \tau_{yt}^2}$$

Příbuzné podmínky

Kupferova podmínka porušení:

- definována pro 2D napjatost
- používá data ze standardizovaných zkoušek (válcová pevnost betonu)

Podmínka **Willama–Warnkeho**:

- definována pro 3D
- tvarově a vstupními daty velmi podobná Chen–Chenově p.:

$$f = \frac{1}{3z} \frac{I_1}{\sigma_c} + \sqrt{\frac{2}{5}} \frac{1}{r(\theta)} \frac{J_2}{\sigma_c} - 1 = 0$$

- v minulosti dostupná např. v software ANSYS (www.ansys.com)

Parameter zpevnění (1)

Vztah mezi přírůsky napětí a deformace:

$$\dot{\sigma} = \mathbf{D}_{ep} \dot{\epsilon},$$

Pružnoplastická matice tuhosti materiálu:

$$\mathbf{D}_{ep} = \mathbf{D}_e - \frac{\mathbf{D}_e \left\{ \frac{\partial f}{\partial \sigma} \right\} \left\{ \frac{\partial f}{\partial \sigma} \right\}^T \mathbf{D}_e}{\left\{ \frac{\partial f}{\partial \sigma} \right\}^T \mathbf{D}_e \left\{ \frac{\partial f}{\partial \sigma} \right\} - \frac{\partial f}{\partial \epsilon_p} \sqrt{\left\{ \frac{\partial f}{\partial \sigma} \right\}^T \left\{ \frac{\partial f}{\partial \sigma} \right\}}}$$

Parametr zpevnění ψ :

$$\psi = \frac{\partial f}{\partial \epsilon_p}$$

Parameter zpevnění (2)

Parametr zpevnění (funkce) ψ :

$$\psi = \frac{\partial f}{\partial \varepsilon_p}$$

Přepis například do tvaru:

$$\psi = \left\{ \frac{\partial f}{\partial \sigma} \right\}^T \left\{ \frac{\partial \sigma}{\partial \varepsilon_p} \right\}, \quad (32)$$

ve zkráceném tvaru:

$$\psi = Q \times H. \quad (33)$$

H vyjadřuje derivaci funkce závislosti napětí na ekvivalentní plastické deformaci.

H je možno získat ze zkoušek příslušného materiálu.

Parameter zpevnění (3)

Aproximace H Rambergovou–Osgoodovou funkcí

H vyjadřuje derivaci funkce závislosti napětí na ekvivalentní plastické deformaci \Rightarrow derivace aproximace této závislosti (lze použít *jakoukoli vhodnou funkci*).

Aproximace Rambergovou – Osgoodovou funkcí:

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E_o} + k \left(\frac{\sigma}{E_o} \right)^n, \quad (34)$$

kde k a n jsou vhodně určené parametry a E_o je počáteční modul pružnosti.

Křivka popsaná rovnicí (34) je parabola n -tého stupně.

Parameter zpevnění (4)

Rozklad poměrné deformace ε na složku pružnou

ε_e a plastickou ε_p :

$$\varepsilon = \varepsilon_e + \varepsilon_p. \quad (35)$$

Pružná složka deformace z rovnice (34) $\varepsilon = \frac{\sigma}{E_0} + k \left(\frac{\sigma}{E_0} \right)^n$:

$$\varepsilon_e = \frac{\sigma}{E_0}. \quad (36)$$

Tedy vztah pro plastickou deformaci:

$$\varepsilon_p = k \left(\frac{\sigma}{E_0} \right)^n. \quad (37)$$

Parameter zpevnění (5)

Při označení

$$H = \frac{\partial \sigma}{\partial \varepsilon_p} = \Phi'(\varepsilon_p), \quad (38)$$

je možné psát

$$\varepsilon_p = k \left(\frac{\sigma}{E_o} \right)^n = \Phi^{-1}(\sigma) \quad (39)$$

a ze vztahu pro derivaci inverzní funkce plyne:

$$H = \Phi' = \frac{1}{\Phi^{-1}} = \frac{E_o}{k n} \left(\frac{\sigma}{E_o} \right)^{1-n}. \quad (40)$$

Parameter zpevnění (6)

Pro určení parametrů k , n v rovnici $H = \Phi' = \frac{1}{\Phi^{-1}} = \frac{E_o}{k n} \left(\frac{\sigma}{E_o}\right)^{1-n}$ je potřebná znalost dvou bodů křivky $A [\varepsilon_a, \sigma_a]$ a $B [\varepsilon_b, \sigma_b]$.

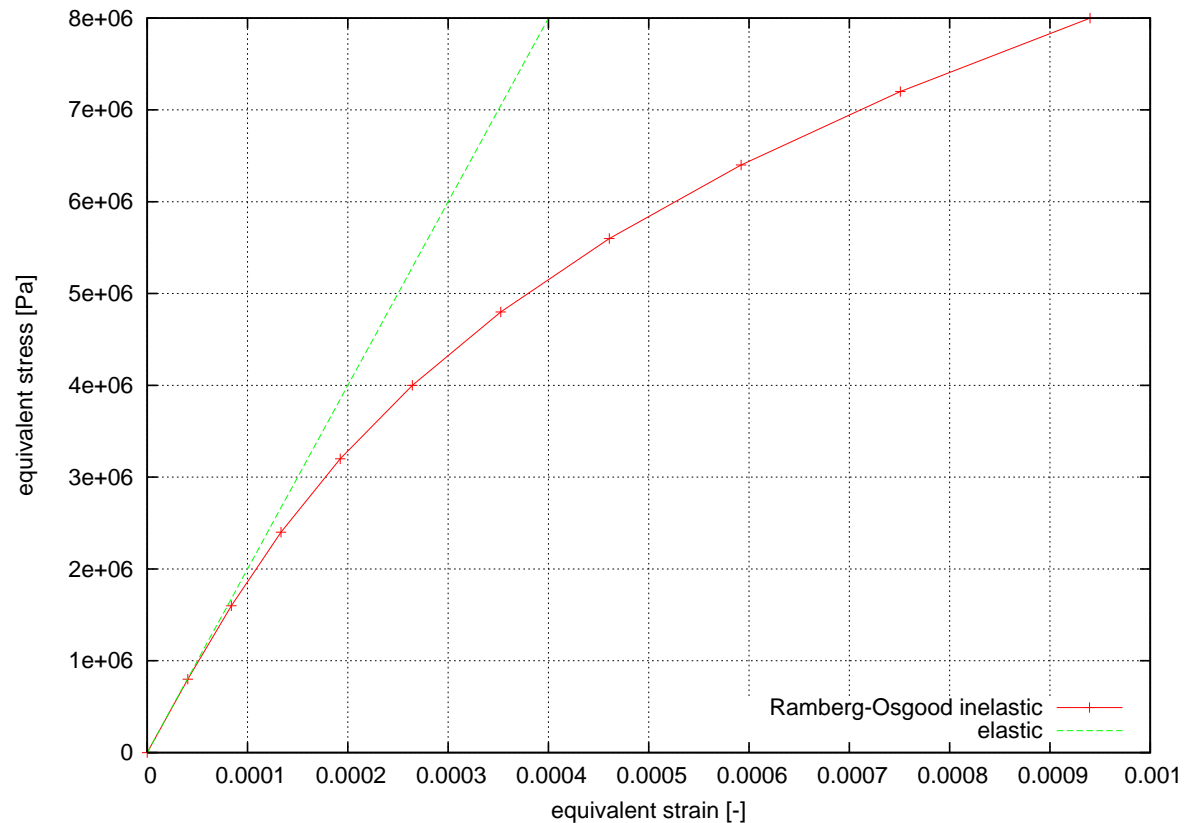
Dosazením jejich souřadnic do (34), tj. $\varepsilon = \frac{\sigma}{E_o} + k \left(\frac{\sigma}{E_o}\right)^n$ vyplyne:

$$n = \frac{\ln \left(\frac{E_o \varepsilon_a - \sigma_a}{E_o \varepsilon_b - \sigma_b} \right)}{\ln \left(\frac{\sigma_a}{\sigma_b} \right)}, \quad (41)$$

$$k = \left(\frac{\sigma_a}{E_o} \right)^{1-n} \left(\frac{E_o \varepsilon_a}{\sigma_a} - 1 \right). \quad (42)$$

Parameter zpevnění (7)

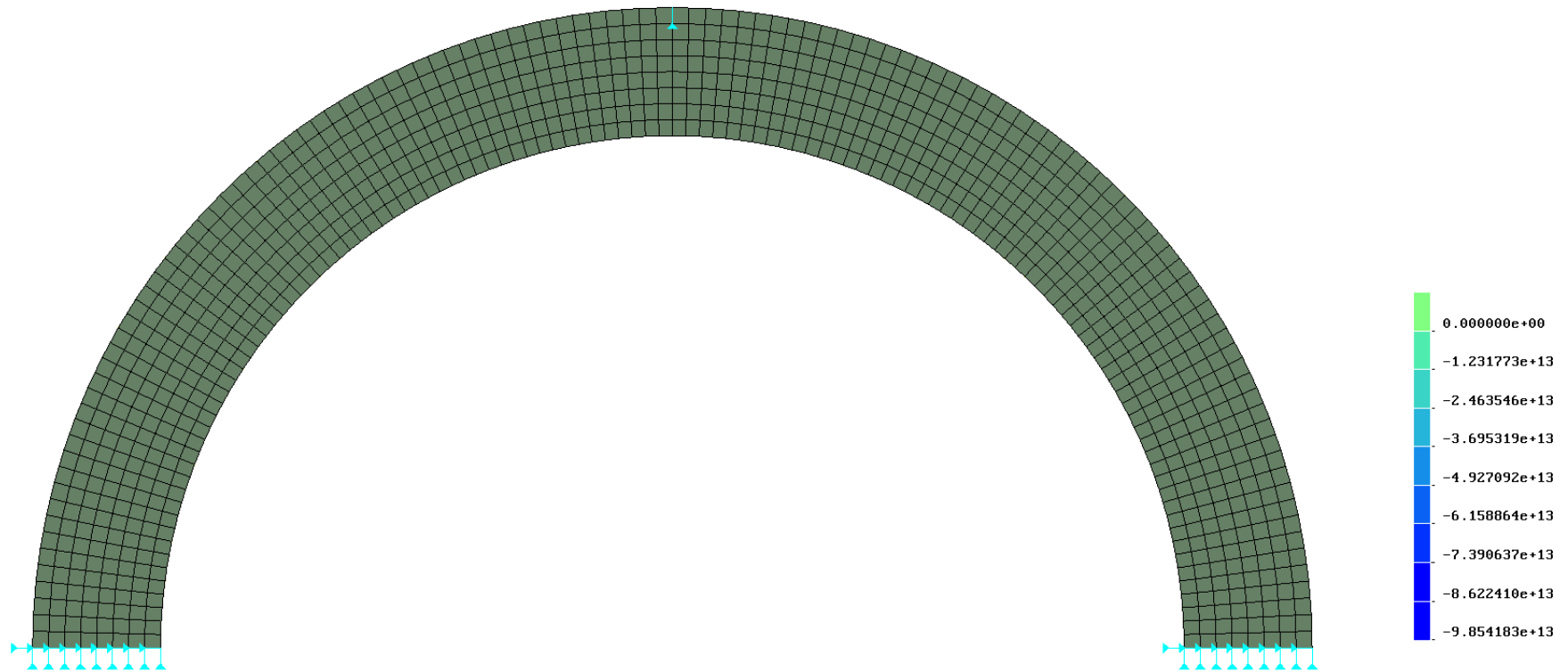
Příklad aproximace Rambergovou–Osgoodovou funkcí



Bod	poměrná deformace [–]	napětí [MPa]
1	0.00094	8.0
2	0.01000	20.0

Příklad – konečněprvkový model oblouku

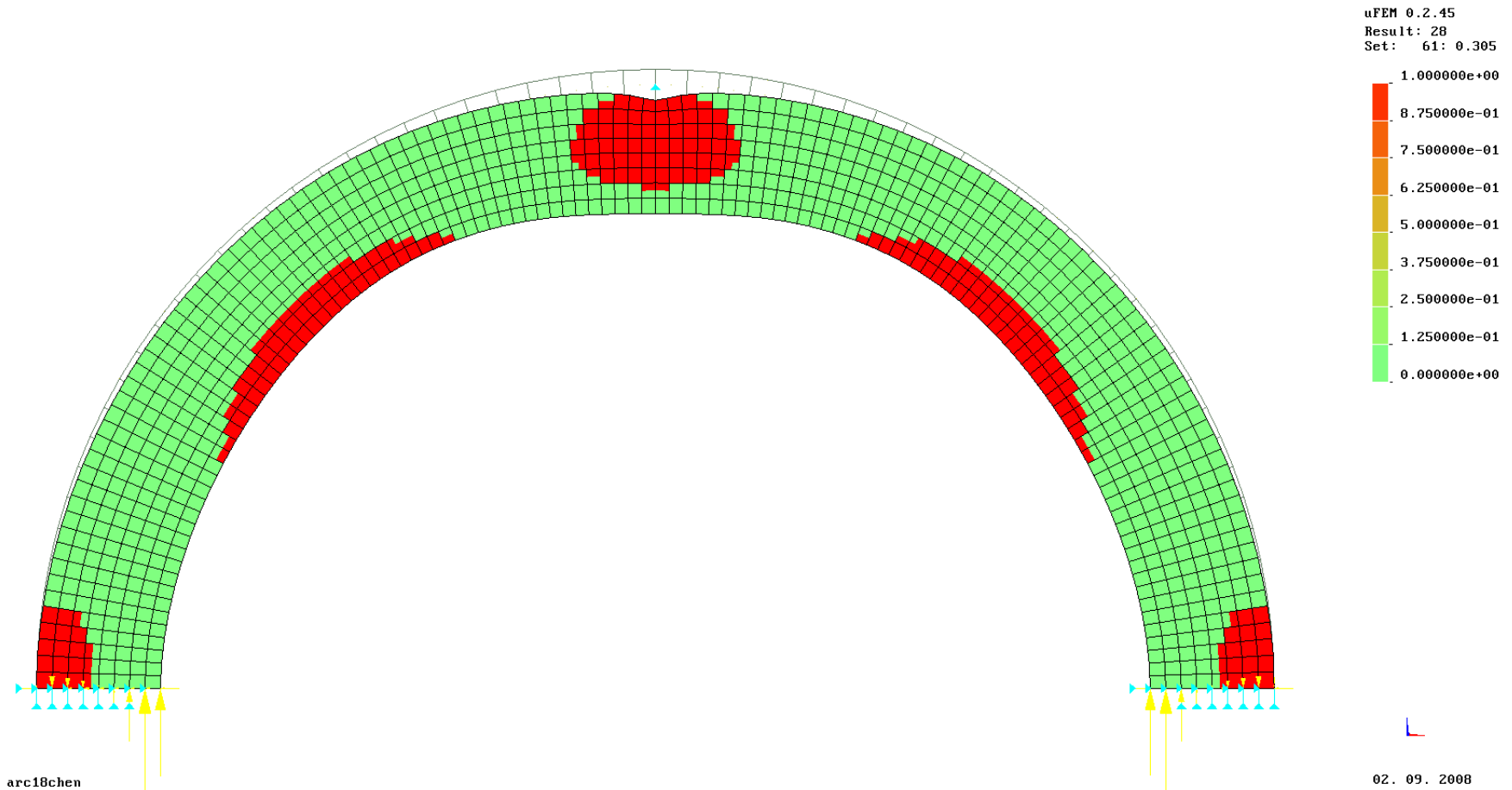
uFEM 0.2.45
Results
Set: 61: 0.305



arc18chen

02. 09. 2008

Příklad – plastické oblasti na oblouku



Příklad – pracovní diagram (závislost $F - w$)

