

Nelineární mechanika a mechanika materiálu

- typy nelinearit:
 - konstrukční,
 - geometrická,
 - **fyzikální** – mechanika materiálu.
- Zpravidla platí, že uvedené nelinearity se vyskytují v kombinaci (často fyzikální a geometrická).

Typy nelinearit

- konstrukční nelinearita – např. jednostranné vazby nebo prvky působící jen za určitých podmínek (jen v tahu/tlaku, po dosažení určité deformace, . . .),
- geometrická nelinearita – velká posunutí, pootočení.
- **fyzikální nelinearita** – vlastnosti materiálu nejsou lineární pružné (nelineární pružnost, plasticita, lomová mechanika, . . .) a mohou být i proměnné v čase,

Mechanika materiálu

Během výkaldu se omezíme na tyto problémy

- Časově závislé chování – viskolelasticita.
- Pružně–plastické chování.
- Lomová mechanika.
- Mechanika poškození.

- =Unava materiálu.

Časově závislé chování materiálu

- Změny deformací a napjatosti materiálu v čase (dny, týdny, roky, desetiletí,...)
- Materiály: **beton**, dřevo
- Jevy: dotvarování, smršťování apod.
- Teorie:
 - **viskoelastická** (vazkopružnost): beton
 - viskoplasticita: dřevo, *kovy za vysokých teplot*

Dotvarovací zkouška

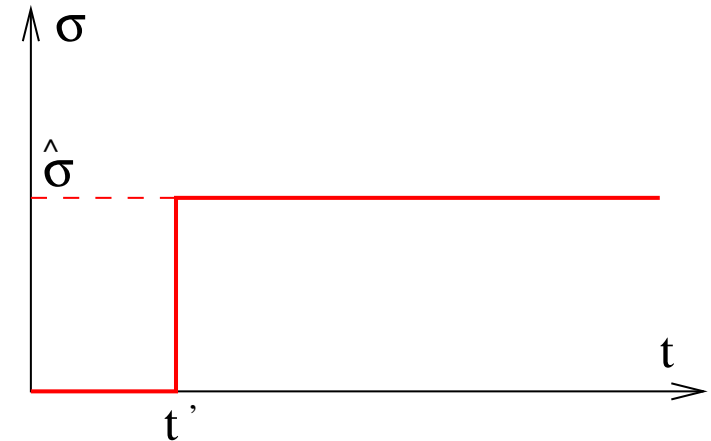
- Laboratorní zkouška
- Zatížení vyvolávající napětí $\hat{\sigma}$ se přiloží v čase t'

- $\sigma(t) = \hat{\sigma} H(t - t')$

- Heavidisova funkce:

$$H(x) = \begin{cases} 0 & \dots & x < 0 \\ 1 & \dots & x \geq 0 \end{cases}$$

- Potom: $\varepsilon(t) = \hat{\sigma} J(t, t')$
- $J(t, t')$... **funkce poddajnosti** materiálu



Funkce poddajnosti materiálu

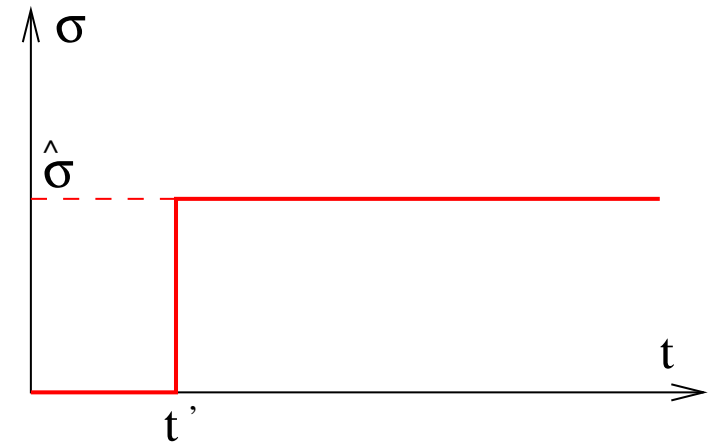
- Analogie poddajnosti v pružnosti
- Pro lineárně pružný materiál:

$$J(t, t') = \frac{1}{E} H(t - t')$$

- Pro materiál neměící vlastnosti v čase:

$$J(t, t') = J_0(t - t')$$

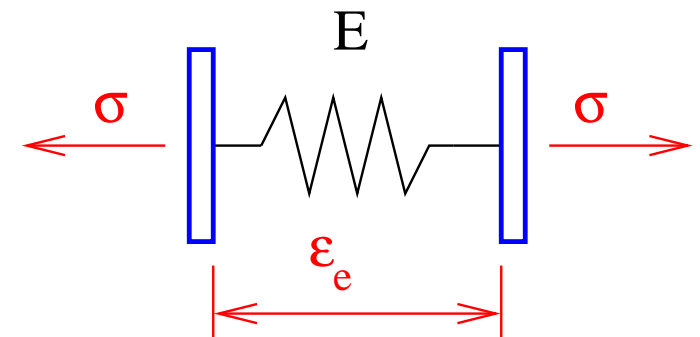
- Funkce poddajnosti: $J_0(t - t')$



Základní modely pro viskoelastický materiál (1)

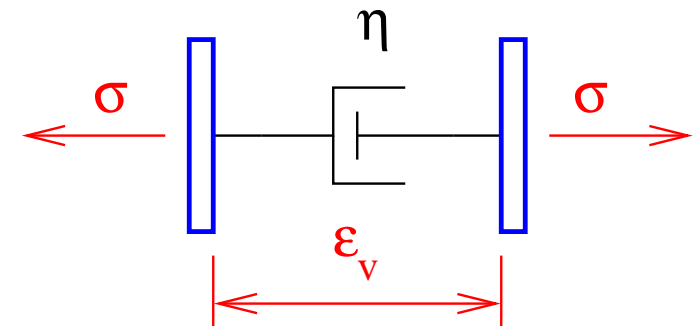
- **Pružina** (pružný článek):

- Modul pružnosti E
- Pružná deformace ϵ_e
- Napětí σ



- **Viskózní tlumič** (viskózní článek):

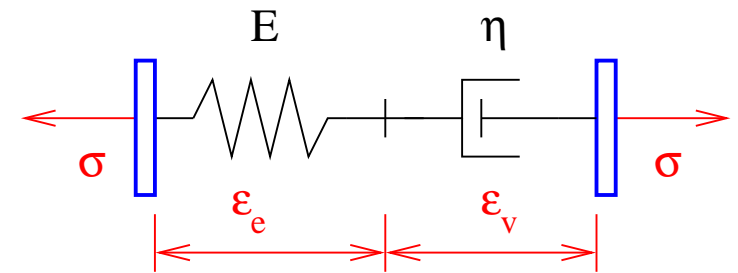
- Viskozita η
- Viskózní deformace ϵ_v
- Napětí σ



Základní modely pro viskoelastický materiál (2)

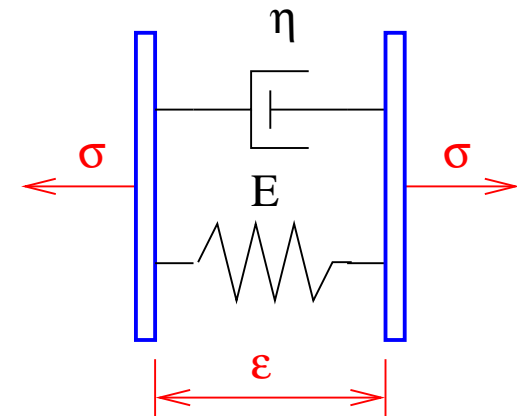
- **Maxwellův model:**

- Seriové zapojení pružiny a tlumiče
- V obou článích stejné napětí σ



- **Kelvinův model:**

- Paralelní zapojení pružiny a tlumiče
- V obou článích stejná deformace ϵ



Maxwellův model (1)

- Seriové zapojení pružiny a tlumiče
- V obou člancích stejné napětí:

$$\sigma_e = E \varepsilon_e$$

$$\sigma_v = \eta \dot{\varepsilon}_v$$

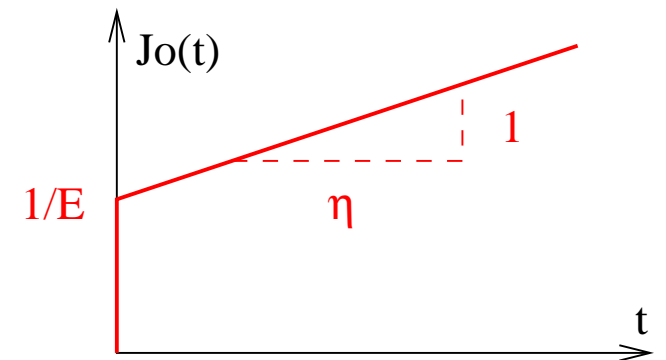
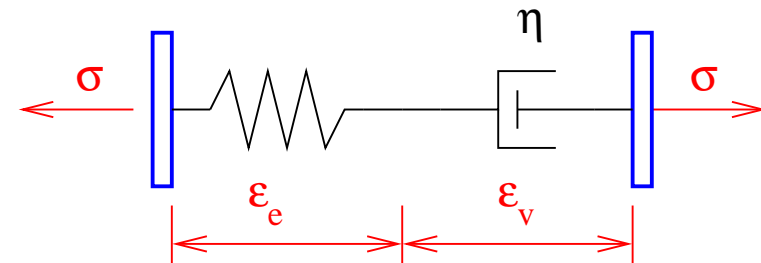
$$\sigma = \sigma_e = \sigma_v = \hat{\sigma}$$

- Celková poměrná deformace:

$$\varepsilon = \varepsilon_e + \varepsilon_v$$

- Derivace poměrné deformace po-

$$\text{dle času: } \dot{\varepsilon}_v = \frac{\partial \varepsilon_v}{\partial t}$$



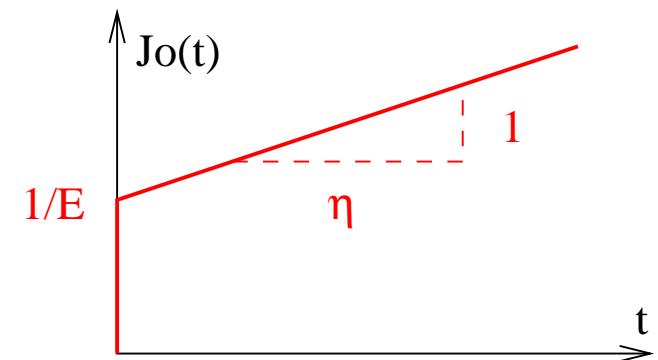
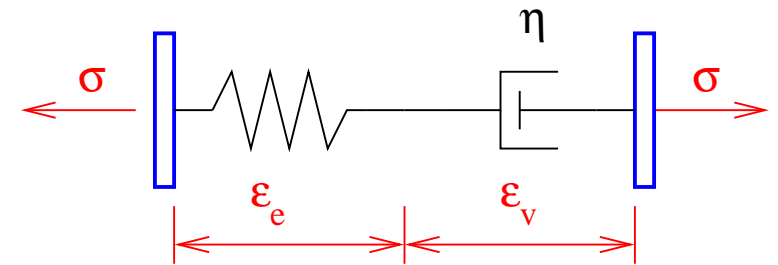
Maxwellův model (2)

- Poměrné deformace:

$$\varepsilon_e(t) = \frac{\sigma_e(t)}{E} = \frac{\hat{\sigma}}{E}$$
$$\dot{\varepsilon}_v(t) = \frac{\sigma_v(t)}{\eta} = \frac{\hat{\sigma}}{\eta}$$

- Určení poměrné deformace viskózního článku ε_v :

$$\varepsilon_v(t) = \int_t \dot{\varepsilon}_v dt' \Rightarrow \varepsilon_v(t) = \frac{\hat{\sigma}}{\eta} t + C$$



Maxwellův model (3)

- Poměrná deformace viskózního článku $\varepsilon_v(t) = \frac{\hat{\sigma}}{\eta} t + C$
- Počáteční podmínka $\varepsilon_v(0) = 0 \Rightarrow C = 0$:

$$\varepsilon_v(t) = \frac{\hat{\sigma}}{\eta} t$$

- **Celková poměrná deformace** Maxwellova modelu:

$$\varepsilon(t) = \frac{\hat{\sigma}}{E} + \frac{\hat{\sigma}}{\eta} t = \hat{\sigma} \left(\frac{1}{E} + \frac{t}{\eta} \right)$$

- **Funkce poddajnosti** materiálu:

$$J_o(t) = \left(\frac{1}{E} + \frac{t}{\eta} \right)$$

Kelvinův model (1)

- Paralelní zapojení pružiny a tlumiče ($\varepsilon = \varepsilon_e = \varepsilon_v$)
- Napětí a deformace:

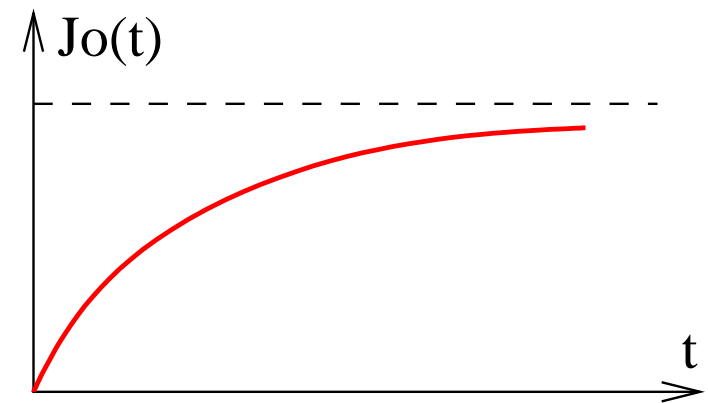
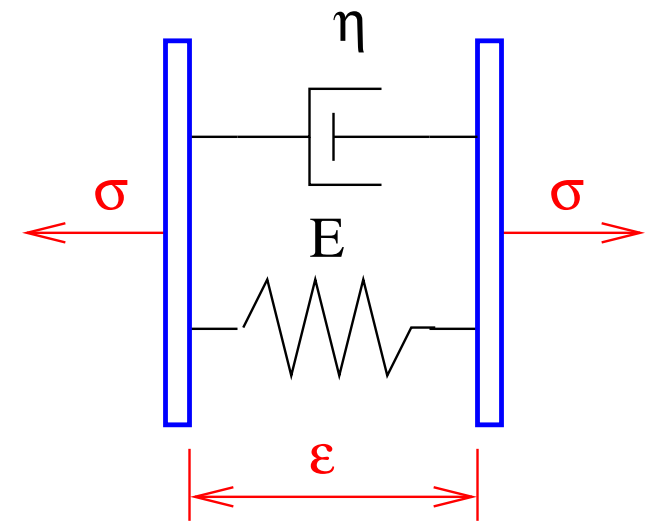
$$\sigma = \sigma_e + \sigma_v = \hat{\sigma}$$

$$\varepsilon = \varepsilon_e + \varepsilon_v$$

$$\sigma_e = E \varepsilon_e$$

- Tedy:

$$\hat{\sigma} = E \varepsilon_e(t) + \eta \dot{\varepsilon}_v(t)$$



Kelvinův model (2)

- Obecné řešení diferenciální rovnice $\hat{\sigma} = E \varepsilon_e(t) + \eta \dot{\varepsilon}_v(t)$:

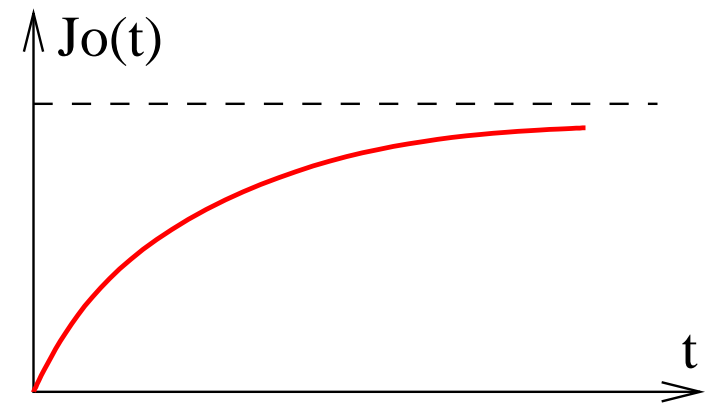
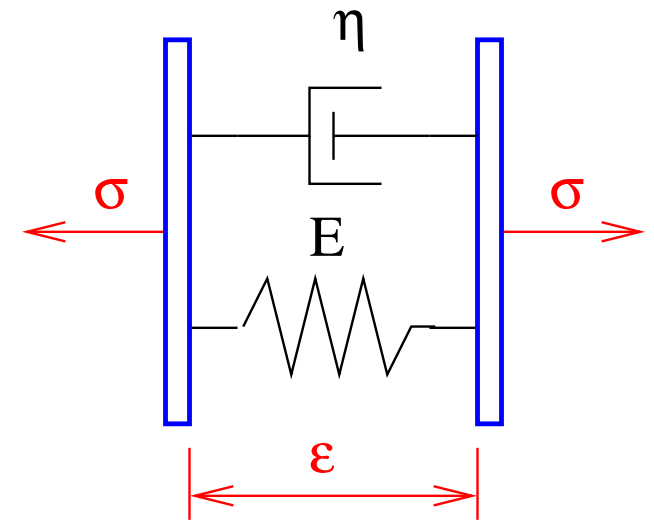
$$\varepsilon(t) = \frac{\hat{\sigma}}{E} C e^{\left(-\frac{E}{\eta} t\right)}$$

- Počáteční podmínka $\varepsilon(0) = 0 \Rightarrow C = \frac{\hat{\sigma}}{E} \Rightarrow$ **poměrná deformace:**

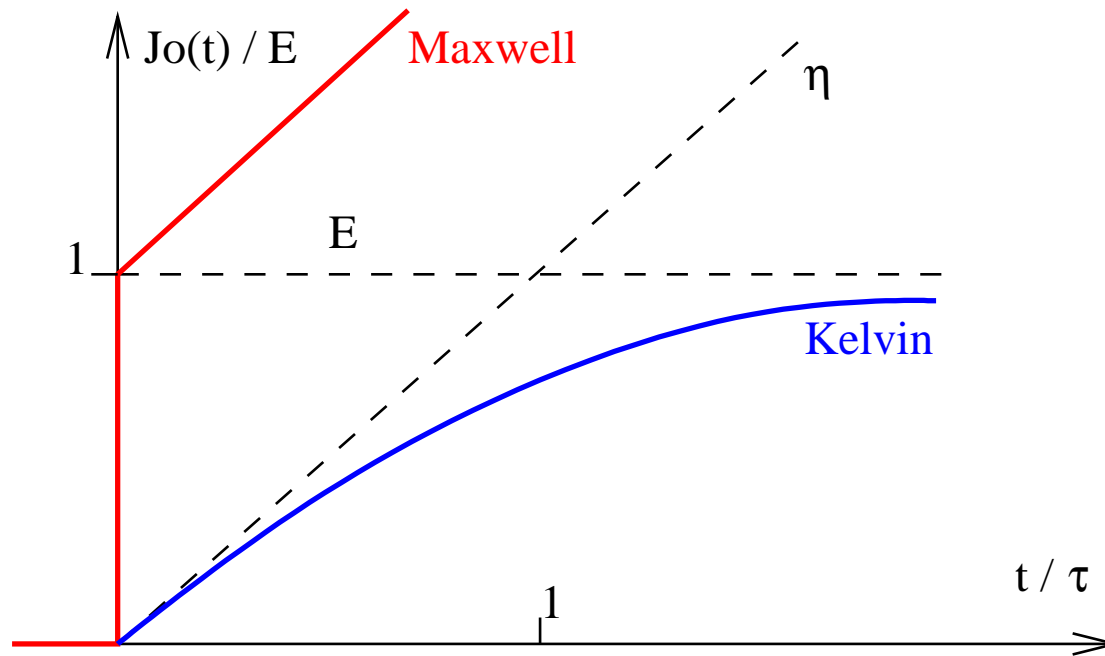
$$\varepsilon(t) = \frac{\hat{\sigma}}{E} \left[1 - e^{\left(-\frac{E}{\eta} t\right)} \right]$$

- **Funkce poddajnosti** materiálu:

$$J_o(t) = \frac{1}{E} \left[1 - e^{\left(-\frac{E}{\eta} t\right)} \right] H(t)$$



Maxwellův vs. Kelvinův model



- Retardační čas: $\tau = \frac{\eta}{E}$
- Funkce poddajnosti:
 - Maxwell: $J_o(t) = \frac{1}{E} \left(1 + \frac{t}{\tau}\right) H(t)$
 - Kelvin: $J_o(t) = \frac{1}{E} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) H(t)$

Postupné změny napětí

- Zavedení postupných změn napětí:

$$\sigma(t) = \Delta\sigma_1 H(t - t_1) + \Delta\sigma_2 H(t - t_2) + \dots$$

- Příslušná poměrná deformace:

$$\varepsilon(t) = \Delta\sigma_1 J(t, t_1) + \Delta\sigma_2 J(t, t_2) + \dots$$

- Obecný výraz pro $\varepsilon(t)$:

$$\varepsilon(t) = \int_0^t J(t, t') \dot{\sigma}(t') dt'$$

Numerický výpočet deformace (1)

- Obecný výraz pro $\varepsilon(t)$: $\varepsilon(t) = \int_0^t J(t, t') \dot{\sigma}(t') dt'$
- Často nelze řešit analyticky
- Obdélníkové pravidlo:

$$\varepsilon(t) \approx \sum_{i=1}^k J(t, t_{i-1/2}) \dot{\sigma}(t_{i-1/2}) \Delta t_i$$

- Po vyjádření $\dot{\sigma}_{i-1/2} = \sigma_i - \sigma_{i-1}$:

$$\varepsilon(t) \approx \sum_{i=1}^k J(t, t_{i-1/2}) (\sigma_i - \sigma_{i-1})$$

Numerický výpočet deformace (2)

- Obdélníkové pravidlo: $\varepsilon(t) \approx \sum_{i=1}^k J(t, t_{i-1}/2) (\sigma_i - \sigma_{i-1})$
- **Nevýhody:**
 - Výpočetní náročnost (zejména u MKP modelů – mnoho materiálových bodů)
 - Přesnost (přibližné řešení – náhrada derivací diferencemi)
- Zrychlení: řešením diferenciální rovnice (vede na tzv. exponenciální algoritmus)

Numerický výpočet deformace (3)

- Pro Kelvinův model: $E \varepsilon(t) + \eta \dot{\varepsilon}(t) = \sigma(t)$
- Dosadíme napětí pro i-tý krok $\sigma^{i-1/2} = \frac{1}{2} [\sigma(t_i) - \sigma(t_{i-1})]$
a upravíme:

$$\varepsilon^i = \varepsilon^{i-1} e^{-\frac{t-t_{i-1}}{\tau}} + \frac{\sigma^{i-1/2}}{E} \left[1 - e^{-\frac{t-t_{i-1}}{\tau}} \right]$$

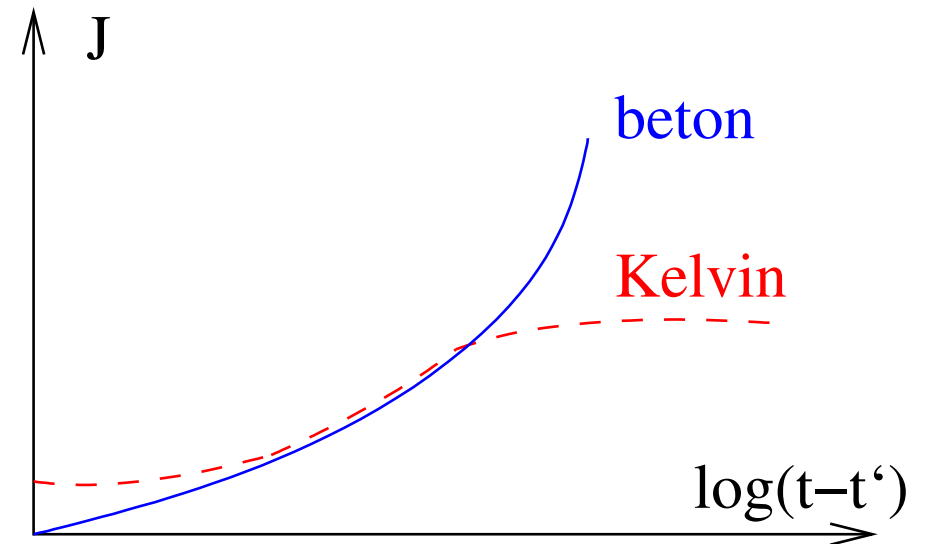
- Jednoduchý **exponenciální algoritmus**:

$$\varepsilon^i = \beta_i \varepsilon^{i-1} + (1 - \beta_i) \frac{\sigma^{i-1/2}}{E}$$

- kde $\beta_i = e^{-\frac{\Delta t_i}{\tau}}$

Kelvinův řetězec (1)

- Jednoduché modely (Maxwellův, Kelvinův) obtížně popisují chování skutečných materiálů
- **Kelvinův řetězec:** seriové spojení několika Kelvinových článků s různými retardačními časy
- Možno přidat seriově připojené pružné články



Kelvinův řetězec (2)

- Celková poměrná deformace:

$$\varepsilon(t) = \sum_{j=0}^n \varepsilon_j(t)$$

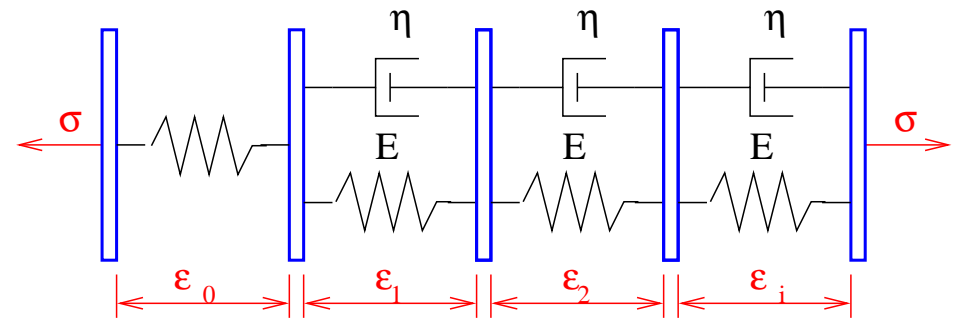
- Napětí v i -tém článku:

$$\sigma(t) = \sigma_{ie}(t) + \sigma_{iv}(t)$$

- Soustava n rovnic:

$$E_0 \varepsilon_0 = \sigma(t)$$

$$E_i \varepsilon_i(t) + \eta_i \dot{\varepsilon}_i(t) = \sigma(t) \quad \dots \quad i > 0$$



Kelvinův řetězec (3)

- Při zatížení konstantním napětím $\hat{\sigma}$ v $t = 0$:

$$E_0 \varepsilon_0 = \hat{\sigma}, \quad E_i \varepsilon_i(t) + \eta_i \dot{\varepsilon}_i(t) = \hat{\sigma} \quad \dots \quad i > 0$$

- První rovnice: $\varepsilon_0(t) = \frac{\hat{\sigma}}{E_0}$
- Obecné řešení rovnic pro $i > 0$: $\varepsilon_i(t) = \frac{\hat{\sigma}}{E_i} + C_i e^{-\frac{E_i}{\eta_i} t}$
- Počáteční podmínka $\varepsilon_i(0) = 0 \Rightarrow C_i = -\frac{\hat{\sigma}}{E_i}$, tedy:

$$\varepsilon(t) = \frac{\hat{\sigma}}{E_0} + \sum_{i=1}^n \frac{\hat{\sigma}}{E_i} e^{-\frac{t}{\tau_i}}, \quad \tau_i = \frac{\eta_i}{E_i}$$

- Funkce poddajnosti:

$$J_0(t) = \left[\frac{1}{E_0} + \sum_{i=1}^n \frac{1}{t_i} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau_i}} \right) \right] H(t)$$

Vliv stárnutí (1)

- Veličiny E , η mohou být funkcemi stáří materiálu
- **Změna tuhosti** se projeví jen při **změně deformace** materiálu: viz například postupný vývoj hydratačních produktů v betonu: $\dot{\sigma}(t) = E(t) \dot{\epsilon}(t)$

- Pro *Kelvinův článek* je možné psát:

$$\sigma_v(t) = \eta(t) \dot{\epsilon}(t) \Rightarrow \dot{\sigma}(t) = \dot{\eta}(t) \dot{\epsilon}(t) + \eta(t) \ddot{\epsilon}(t), \quad \dot{\sigma} = \dot{\sigma}_e + \dot{\sigma}_v$$

- A potom:

$$\dot{\sigma}(t) = [E(t) + \dot{\eta}(t)] \dot{\epsilon}(t) + \eta(t) \ddot{\epsilon}(t)$$

Vliv stárnutí (2)

- Stanovení funkce poddajnosti stárnoucího Kelvinova članku - označme $D(t) = E(t) + \eta(t)$:

$$D(t) \dot{\varepsilon}(t) + \eta(t) \ddot{\varepsilon}(t) = \dot{\sigma}(t)$$

- Počáteční podmínky: $\varepsilon(t') = 0$, $\dot{\varepsilon}(t') \neq 0$
- Při vnesení zatížení přenáší počáteční napětí jen viskózní článek: $\hat{\sigma} = \eta(t') \dot{\varepsilon}(t) \Rightarrow \dot{\varepsilon}(t) = \frac{\hat{\sigma}}{\eta(t')}$
- Předpoklad:

$$\tau = \frac{\eta(t)}{D(t)} = konst.$$

Vliv stárnutí (3)

- Rovnice: $\dot{\varepsilon}(t) + \tau \ddot{\varepsilon}(t) = 0$
- Obecné řešení:

$$\varepsilon(t) = C_1 + C_2 e^{-\frac{t}{\tau}}$$

- Z počátečních podmínek:

$$C_1 = \frac{\hat{\sigma} \tau}{\eta(t')}, \quad C_2 = -\frac{\hat{\sigma} \tau}{\eta(t')}$$

Po úpravách a vydělení $\hat{\sigma}$:

$$J(t, t') = \frac{1 - e^{-\frac{t-t'}{\tau}}}{D(t')} H(t - t')$$

Vliv stárnutí (4)

- Podobně pro **Kelvinův řetězec** s vlivem stárnutí:

$$J(t, t') = \left(\frac{1}{D_o(t')} + \sum_{i=1}^n \frac{1 - e^{-\frac{t-t'}{\tau_i}}}{D_i(t')} \right)$$

Kelv. řetězec s vlivem stárnutí (1)

Exponenciální algoritmus

- Pro i -tý článek řetězce:

$$D_j(t) \dot{\epsilon}(t) + \ddot{\eta}_j(t) = \dot{\sigma}(t)$$

- Pro jednoduchost považujeme D_j, η_j, σ v rámci kroku za konstantní:

$$D_j(t) = D_j(t_i - 1/2) = D_j^{(i-1/2)},$$

$$\eta_j(t) = \tau_j D_j(t) \approx \tau_j D^{(i-1/2)}$$

$$\dot{\sigma}(t) \approx \frac{\Delta\sigma^{(i)}}{\Delta t_i}$$

Kelv. řetězec s vlivem stárnutí (2)

- Pro i -tý článek řetězce: $D_j(t) \dot{\varepsilon}(t) + \ddot{\eta}_j(t) = \dot{\sigma}(t)$ s použitím zjednodušení: $\dot{\varepsilon}_j(t) + \tau_j \ddot{\varepsilon}_j(t) = \frac{\Delta \sigma^{(i)}}{\Delta t_i D_j^{(i-1/2)}}$
- Výsledný algoritmus po vyřešení rovnice:

$$\dot{\varepsilon}_j^{(i)} = \beta_j^{(i)} \dot{\varepsilon}_j^{(i-1)} + \frac{1 - \beta_j^{(i)}}{\Delta t_i D_j^{(i-1/2)}} \Delta \sigma^{(i)}$$

$$\varepsilon_j^{(i)} = \varepsilon_j^{(i-1)} + \Delta t_i \lambda_j^{(i)} \dot{\varepsilon}_j^{(i-1)} + \frac{1 - \lambda_j^{(i)}}{D_j^{(i-1/2)}} \Delta \sigma^{(i)}$$

- Kde (pro přehlednost): $\lambda_j^{(i)} = \frac{\tau_j}{\Delta t_i} \left(1 - \beta_j^{(i)} \right)$, $\beta_j^{(i)} = e^{-\frac{\Delta t_i}{\tau_j}}$

Kelv. řetězec s vlivem stárnutí (3)

- Pro pružný článek: $\eta_o = 0, \tau_o:$

$$\beta_o^{(i)} = 0, \quad \lambda_o^{(i)} = 0.$$

- Celková deformace řetězce:

$$\varepsilon^{(i)} = \sum_{j=0}^n \varepsilon_j^{(i-1)} + \Delta t_i \sum_{j=0}^n \lambda_j^{(i)} \dot{\varepsilon}_j^{(i-1)} + \left(\frac{1}{D_o^{(i-1/2)}} + \sum_{j=0}^n \frac{1 - \lambda_j^{(i)}}{D_j^{(i-1/2)}} \right) \Delta \sigma^{(i)}$$

Kelv. řetězec s vlivem stárnutí (4)

Stručný zápis exponenciálního algoritmu:

$$\begin{aligned}\varepsilon^{(i)} &= \varepsilon^{(i-1)} + \Delta \hat{\varepsilon}^{(i)} + \frac{\Delta \sigma^{(i)}}{\hat{E}^{(i)}} \\ \Delta \hat{\varepsilon}^{(i)} &= \Delta t_i \sum_{j=1}^n \lambda_j^{(i)} \dot{\varepsilon}_j^{(i-1)} \\ \hat{E}^{(i)} &= \left(\frac{1}{D_o^{(i-1/2)}} + \sum_{j=1}^n \frac{1 - \lambda_j^{(i)}}{D_o^{(i-1/2)}} \right)^{-1}\end{aligned}\quad (1)$$

Výpočet napětí:

$$\Delta \sigma^{(i)} = \hat{E}^{(i)} \left(\Delta \varepsilon^{(i)} - \Delta \hat{\varepsilon}^{(i)} \right)$$

Doporučený krok: $\Delta t_1 \leq \frac{\tau}{3}$, $\Delta t_{i+1} = (10 \Delta t_i)^{\frac{1}{3}}$

Funkce poddajnosti pro beton (1)

- Asymptotický modul pružnosti:

$$\frac{1}{J(t', t')}$$

- **Konvenční modul pružnosti**

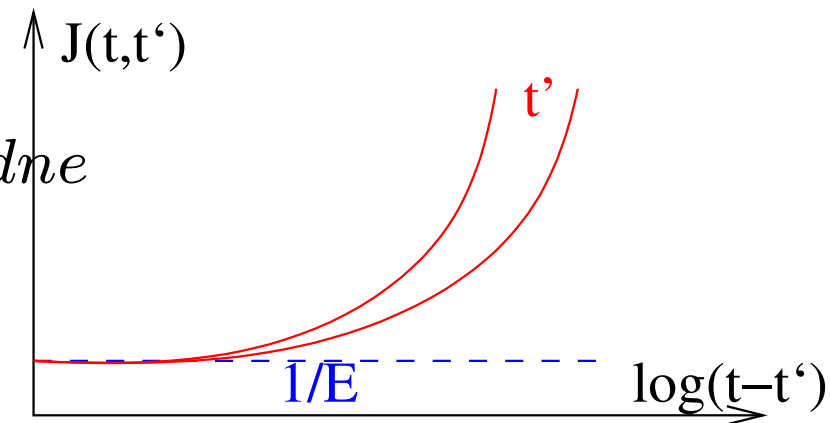
(počáteční sklon prac. diagramu):

$$E \approx \frac{1}{J(t' + \Delta t, t')}, \quad \Delta t = 0,01 dne$$

- Dynamický modul pružnosti:

$$E_{dyn} \approx \frac{1}{J(t' + \Delta t, t')}, \quad \Delta t = 10^{-7} dne$$

- Asymptotický modul je blízký dynamickému



Funkce poddajnosti pro beton (2)

Zkrácená verze **modelu betonu B3** (Bažant a Chern)

- Funkce poddajnosti:

$$J(t, t') = \frac{1}{E_o} + q_s \ln \left[1 + \psi(t'^{-m} + \alpha)(t - t')^n \right]$$

- Typické hodnoty konstant:

$$\psi = 0,3$$

$$m = 0,5$$

$$\alpha = 0,001$$

$$n = 0,1$$

Funkce poddajnosti pro beton (3)

Zkrácená verze **modelu betonu B3** (Bažant a Chern)

- Konveční modul pružnosti po 28 dnech: E_{28}
- Odhad E_o :

$$E_o = \frac{E_{28}}{0,6}$$

- Odhad q_s :

$$q_s = \frac{11,4}{E_{28}}$$

Funkce poddajnosti pro beton (4)

Zkrácená verze **modelu betonu B3** (Bažant a Chern)

Vztah modelu k normovým veličinám:

- Součinitel dotvarování:

$$\phi = E(t') J(t, t') - 1$$

- Funkce dotvarování:

$$J(t, t') = \frac{1 + \phi(t, t')}{E(t')}$$

Relaxace a relaxační funkce (1)

- Relaxační funkce: $R(t, t')$
- Obecně **neplatí**: $R(t, t') = \frac{1}{J(t, t')}$
- Maxwellův model $\varepsilon(t) = \varepsilon_e + \varepsilon_v$:

$$\dot{\varepsilon}(t) = \dot{\varepsilon}_e(t) + \dot{\varepsilon}_v, \quad \dot{\varepsilon}_e(t) = \frac{\dot{\sigma}(t)}{E}, \quad \dot{\varepsilon}_v(t) = \frac{\dot{\sigma}(t)}{\eta} \Rightarrow \dot{\varepsilon} = \frac{\dot{\sigma}(t)}{E} + \frac{\dot{\sigma}(t)}{\eta}$$

- Zatížení konstatní deformací $\hat{\varepsilon}$:

$$\frac{\dot{\sigma}(t)}{E} + \frac{\dot{\sigma}(t)}{\eta} = 0$$

- Obecné řešení:

$$\sigma(t) = C e^{-\frac{E t}{\eta}} = C e^{-\frac{t}{\tau}}$$

Relaxace a relaxační funkce (2)

- Obecné řešení: $\sigma(t) = C e^{-\frac{E t}{\eta}} = C e^{-\frac{t}{\tau}}$
- Počáteční podmínka $\sigma(0) = 0 \Rightarrow \sigma(t) = E \hat{\varepsilon} e^{-\frac{t}{\tau}}$
- Relaxační funkce:

$$R_o(t) = E e^{-\frac{t}{\tau}} H(t)$$

- Pro srovnání – tvar funkce poddajnosti:

$$J_o(t) = \left(\frac{1}{E} + \frac{t}{\eta} \right) H(t) \neq \frac{1}{R_o(t)}$$

- Vztah $J_o(t) = \frac{1}{R_o(t)}$ platí jen v čase ($t = 0$)

Relaxační funkce pro beton

- Přibližný vztah (Bažant a Kim):

$$R(t, t') = \frac{0,992}{J(t, t')} - \frac{0,115}{J(t, t - \Delta t)} \left[\frac{J(t_m, t')}{J(t, t_m)} - 1 \right]$$

- Kde:

$$\Delta t = 1 \text{ den}$$
$$t_m = \frac{t - t'}{2}$$

Upravený efektivní modul (1)

- Age-adjusted effective module (AAEM)
- Přibližný postup pro **odhad** vývoje deformace v čase
- Znalost počáteční hodnoty E a deformací v časech t_1, t_2
- Historie deformace:

$$\varepsilon(t) = \alpha H(t - t') + \beta J(t, t')$$

$$\sigma(t) = \alpha R(t - t') + \beta H(t, t')$$

- Z $\varepsilon(t)$ pro časy t_1, t_2 :

$$\varepsilon_1 = \alpha + \beta J_1, \quad J_1 = J(t_1, t')$$

$$\varepsilon_2 = \alpha + \beta J_2, \quad J_2 = J(t_2, t')$$

Upravený efektivní modul (2)

- Vyjádření α, β :

$$\alpha = \varepsilon_1 - \frac{J_1}{J_2 - J_1} \Delta\varepsilon$$
$$\beta = \frac{\Delta}{J_2 - J_1}$$

- Vyjádření napětí σ_1, σ_2 :

$$\sigma_1 = \alpha R_1 + \beta = R_1 \varepsilon_1 + \frac{1 - R_1 J_1}{J_2 - J_1} \Delta\varepsilon$$
$$\sigma_2 = \alpha R_2 + \beta = R_2 \varepsilon_2 + \frac{1 - R_2 J_2}{J_2 - J_2} \Delta\varepsilon$$

- Kde $R_1 = R(t_1, t')$, $R_2 = R(t_2, t')$

Upravený efektivní modul (3)

- Po zavedení $\Delta\sigma = \sigma(t_2) - \sigma(t_1) = \sigma_2 - \sigma_1$:

$$\Delta\sigma = \alpha (R_2 - R_1) = (R_2 - R_1) \varepsilon_1 + E^{ef} \Delta\varepsilon$$

- Kde **upravený efektivní modul**:

$$E^{ef} = \frac{(R_1 - R_2)J_1}{J_2 - J_1}$$

Upravený efektivní modul (4)

- Při praktických výpočtech (řešíme v t): $t_1 = t' + \Delta t$, $t_2 = t$:

$$R_1 = E, \quad R_2 = R, \quad J_2 = J$$

- A tedy:

$$E^{ef} = \frac{E - R}{E J - 1} = \frac{E - R}{\phi}, \quad \sigma_1 = E \varepsilon_1,$$

$$\Delta \varepsilon = \frac{E - R}{E} \varepsilon_1 + \frac{\Delta \sigma}{E^{ef}}, \quad J_1 = \frac{1}{E}$$

- Uvedený postup vede k **přibližným** výsledkům!

Příklad: exponenciální algoritmus pro Kelvinův článek (1)

- Jednoduchý **exponenciální algoritmus**:

$$\varepsilon^i = \beta_i \varepsilon^{i-1} + (1 - \beta_i) \frac{\sigma^{i-1/2}}{E}, \quad \beta_i = e^{-\frac{\Delta t_i}{\tau}}$$

- Zadání (viz literatura): $E = 30 \text{ MPa}$, $\tau = 10 \text{ s}$, zatížení se mění lineárně z 0 MPa na $1,5 \text{ MPa}$ po dobu 30 s , poté je konstantní. Proveďte výpočet pro $t = 0 \dots 90 \text{ s}$.
- Proveďte řešení pro délku kroku 2, 10 a 30 sekund.
- Řešení v *Matlab/Octave*

Příklad: exp. alg. pro Kelv. čl. (2)

Zadání příprava dat pro délku kroku 2 s:

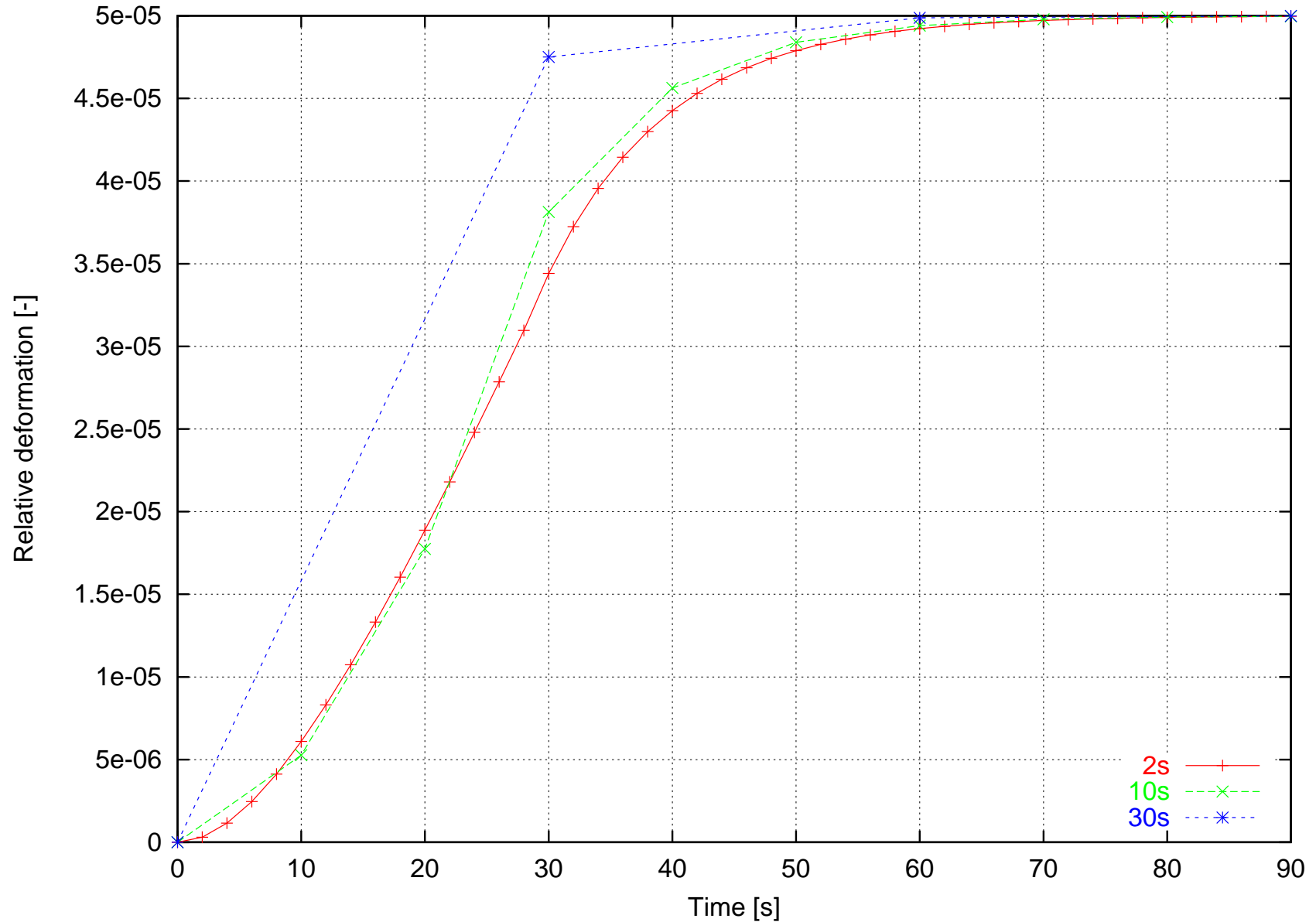
```
dt      = 2 ;      % casovy krok (s) :
kroku   = 90/dt;  % pocet kroku:
E       = 30e9 ;   % modul pruznosti (Pa) :
tau     = 10;     % retardacni cas (eta/E) (s) :

cas      = zeros(kroku,1);
sigma    = zeros(kroku,1);
epsilon  = zeros(kroku,1);
beta    = exp(-dt/tau) ;
```

Příklad: exp. alg. pro Kelv. čl. (3)

```
for i=1:kroku
    cas(i) = i*dt;
    if cas(i)<30; sigma(i)=((cas(i)-dt*0.5)/30)*1.5e6;
    else ; sigma(i) = 1.5e6;
    end
    if i == 1
        epsilon(i)=(1-beta)*(sigma(i)/E) ; % epsilon(0)=0
    else
        epsilon(i)=beta*epsilon(i-1)+(1-beta)*(sigma(i)/E);
    end
end
end
```

Příklad: exp. alg. pro Kelv. čl. (4)



Příklad: numerická integrace pro Kelvinův článek (1)

- Obdélníkové pravidlo: $\varepsilon(t) \approx \sum_{i=1}^k J(t, t_{i-1/2}) (\sigma_i - \sigma_{i-1})$
- Funkce poddajnosti Kelvinova článku:

$$J_o(t) = \frac{1}{E} \left[1 - e^{\left(-\frac{E}{\eta} t\right)} \right] H(t)$$

- Zadání: $E = 30 \text{ MPa}$, $\tau = 10 \text{ s}$, zatížení se mění lineárně z 0 MPa na $1,5 \text{ MPa}$ po dobu 30 s , poté je konstattní. Proveďte výpočet pro $t = 0 \dots 90 \text{ s}$.
- Proveďte řešení pro délku kroku 2 sekundy.
- Řešení v *Matlab/Octave*

Příklad: num. int. pro Kelv. čl. (2)

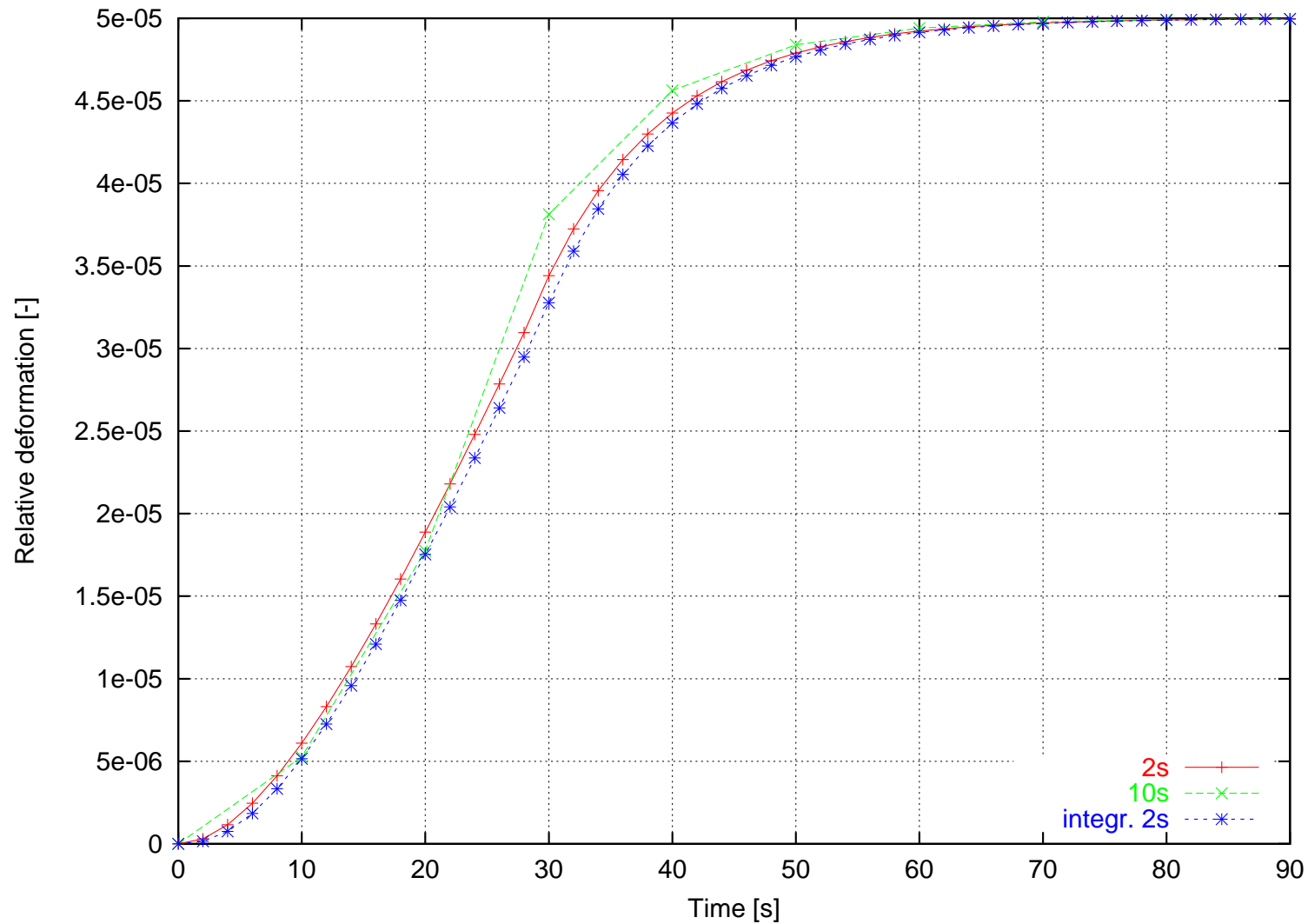
Zadání a datová pole:

```
dt      = 2 ;           % casovy krok (s) :  
kroku  = 90/dt ;      % pocet kroku :  
E      = 30e9 ;       % modul pruznosti (Pa) :  
tau    = 10 ;        % retardacni cas (eta/E) (s) :  
  
cas     = zeros(kroku+1,1) ;  
sigma  = zeros(kroku+1,1) ;  
epsilon = zeros(kroku+1,1) ;  
J      = zeros(kroku+1,1) ;
```

Příklad: num. int. pro Kel. čl. (3)

```
for i=2:kroku+1
    cas(i) = (i-1)*dt;
    if cas(i)<30; sigma(i)=((cas(i)-dt*0.5)/30)*1.5e6;
    else ; sigma(i) = 1.5e6;
    end
    for j=2:i
        J(j)=(1/E)*(1.0-exp(-(cas(i)-cas(j)+dt*0.5)/tau));
        epsilon(i)=epsilon(i)+J(j)*(sigma(j)-sigma(j-1));
    end
end
```


Příklad: num. int. pro Kelv. čl. (4)



Příklad: numerická integrace pro Maxwellův článek (1)

- Obdélníkové pravidlo: $\varepsilon(t) \approx \sum_{i=1}^k J(t, t_{i-1/2}) (\sigma_i - \sigma_{i-1})$
- Funkce poddajnosti Maxwellova článku:

$$J_o(t) = \frac{1}{E} \left[1 + \frac{t}{\eta} \right] H(t)$$

- Zadání: $E = 30 \text{ MPa}$, $\tau = 10 \text{ s}$, zatížení se mění lineárně z 0 MPa na $1,5 \text{ MPa}$ po dobu 30 s , poté je konstatntní. Proveďte výpočet pro $t = 0 \dots 90 \text{ s}$.
- Proveďte řešení pro délku kroku 2 sekundy.
- Řešení v *Matlab/Octave*

Příklad: num. int. pro Maxw. čl. (2)

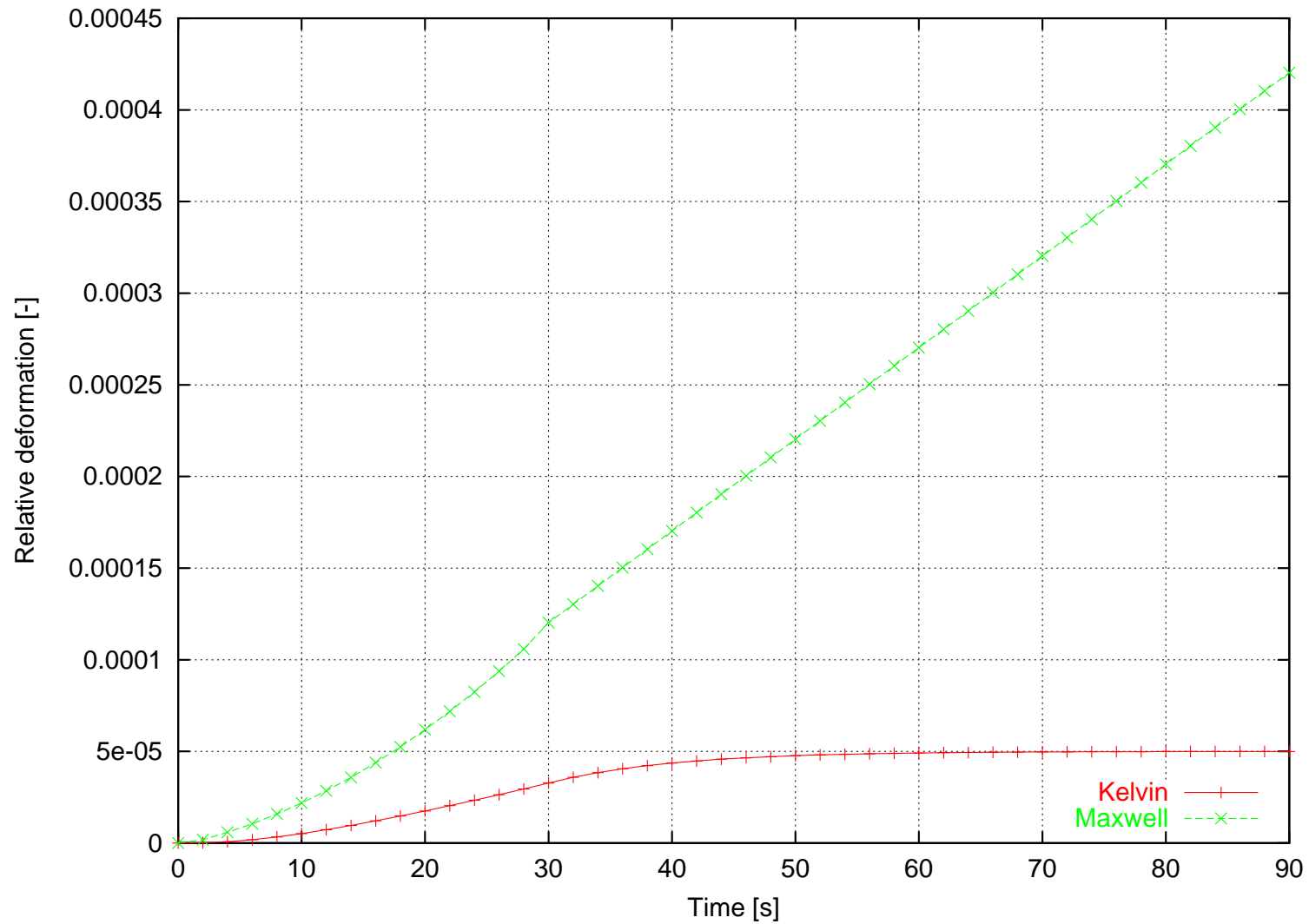
Zadání a datová pole:

```
dt      = 2 ;           % casovy krok (s) :  
kroku  = 90/dt ;       % pocet kroku :  
E      = 30e9 ;        % modul pruznosti (Pa) :  
tau    = 10 ;          % retardacni cas (eta/E) (s) :  
  
cas     = zeros(kroku+1,1) ;  
sigma  = zeros(kroku+1,1) ;  
epsilon = zeros(kroku+1,1) ;  
J      = zeros(kroku+1,1) ;
```

Příklad: num. int. pro M. čl. (3)

```
for i=2:kroku+1
    cas(i) = (i-1)*dt;
    if cas(i)<30; sigma(i)=((cas(i)-dt*0.5)/30)*1.5e6;
    else ; sigma(i) = 1.5e6;
    end
    for j=2:i
        J(j)=(1/E)*(1.0+((cas(i)-cas(j)+dt*0.5)/tau));
        epsilon(i)=epsilon(i)+J(j)*(sigma(j)-sigma(j-1));
    end
end
```

Příklad: num. int. pro Maxw. čl. (4)



Homogenní konstrukce při neměnném zatížení (1)

- Pro libovolnou deformační veličinu $\delta(t)$:

$$\delta(t) = \delta_0 \left(1 + \phi(t, t') \right)$$

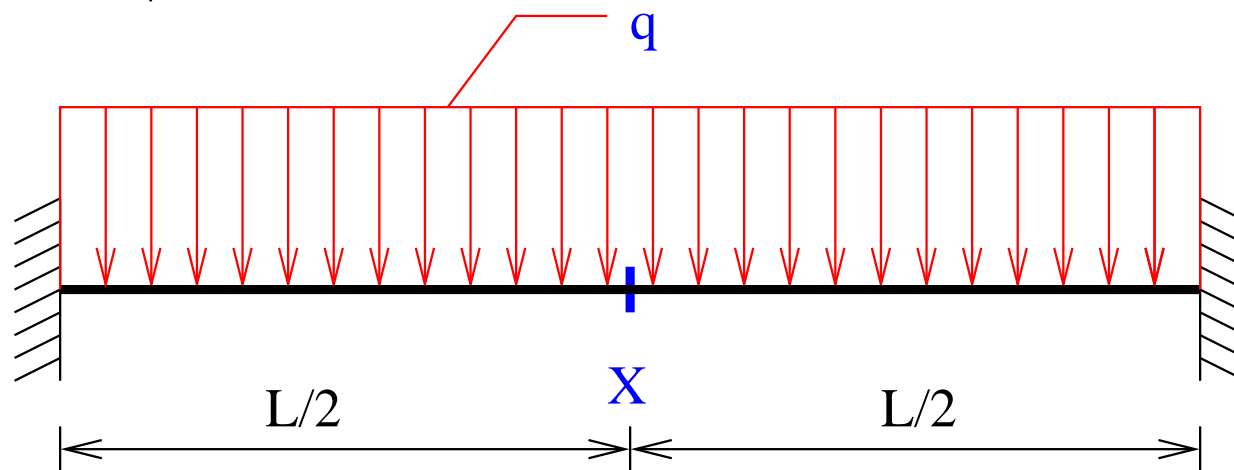
- kde δ_0 je počáteční deformace a:

$$\phi(t, t') = E(t')J(t, t') - 1$$

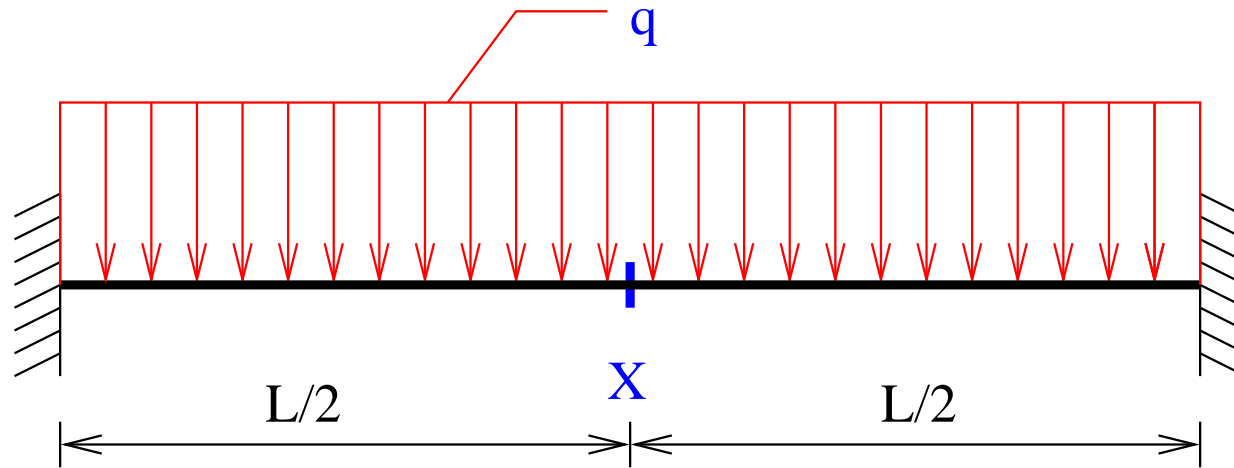
- Při nehomogenní konstrukci a/nebo při proměnném zatížení se situace podstatně **komplikuje**.

Homogenní konstrukce při neměnném zatížení (2)

- Stanovte svislou deformaci v místě X zadaného prutu, pokud je chování použitého materiálu popsáno Kelvinovým modelem ($\tau_1 = 500\text{ s}$, $\tau_2 = 1000\text{ s}$).
- Zadání: $E = 30\text{ MPa}$, průřez je obdélníkový o rozměrech $b = 0.2\text{ m}$, $h = 0.3\text{ m}$, rozpětí je $L = 3\text{ m}$ a zatížení $q = 10\text{ kN/m}$.



Homogenní konstrukce... (3)



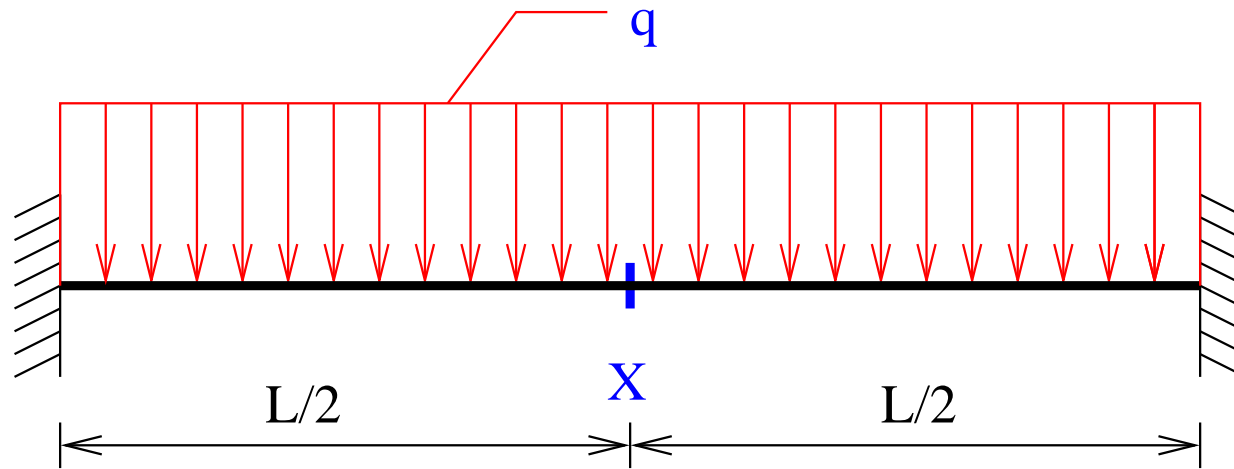
Svislá deformace v bodě X (viz SSKI):

$$w_X = \frac{5 q L^4}{384 E I}$$

Svislá deformace v bodě X v čase t :

$$w_X(t) = \frac{5 q L^4}{384 E I} \left[E(t') J(t, t') - 1 \right]$$

Homogenní konstrukce... (4)



- Funkce poddajnosti Kelvinova článku:

$$J(t, t') = J_o(t - t') = \frac{1}{E} \left[1 - e^{\left(-\frac{E}{\eta} (t-t')\right)} \right] H(t, t')$$

- Řešení pomocí *Octave/Matlab*
- Výpočet pro čas $0 - 9000$ s

Homogenní konstrukce... (5)

```
dt      = 2; % casovy krok (s):  
kroku  = 9000/dt ; % pocet kroku:  
E      = 30e9; % modul pruznosti (Pa):  
tau    = 1000; % tau -retardacni cas (eta/E) (s):  
I      = 1/12*0.2*0.3^3 ; % Moment setrvacnosti:  
L      = 3 ; % delka prutu  
q      = 10e3 ; % spojite zatizeni  
cas    = zeros(kroku+1,1);  
w      = zeros(kroku+1,1);  
J      = zeros(kroku+1,1);
```

Homogenní konstrukce... (6)

$$w_0 = (5/384) * (q * L^4) / (E * I) ;$$

$$w(1) = 0 ;$$

$$\text{cas}(1) = 0 ;$$

```
for i=2:kroku+1
```

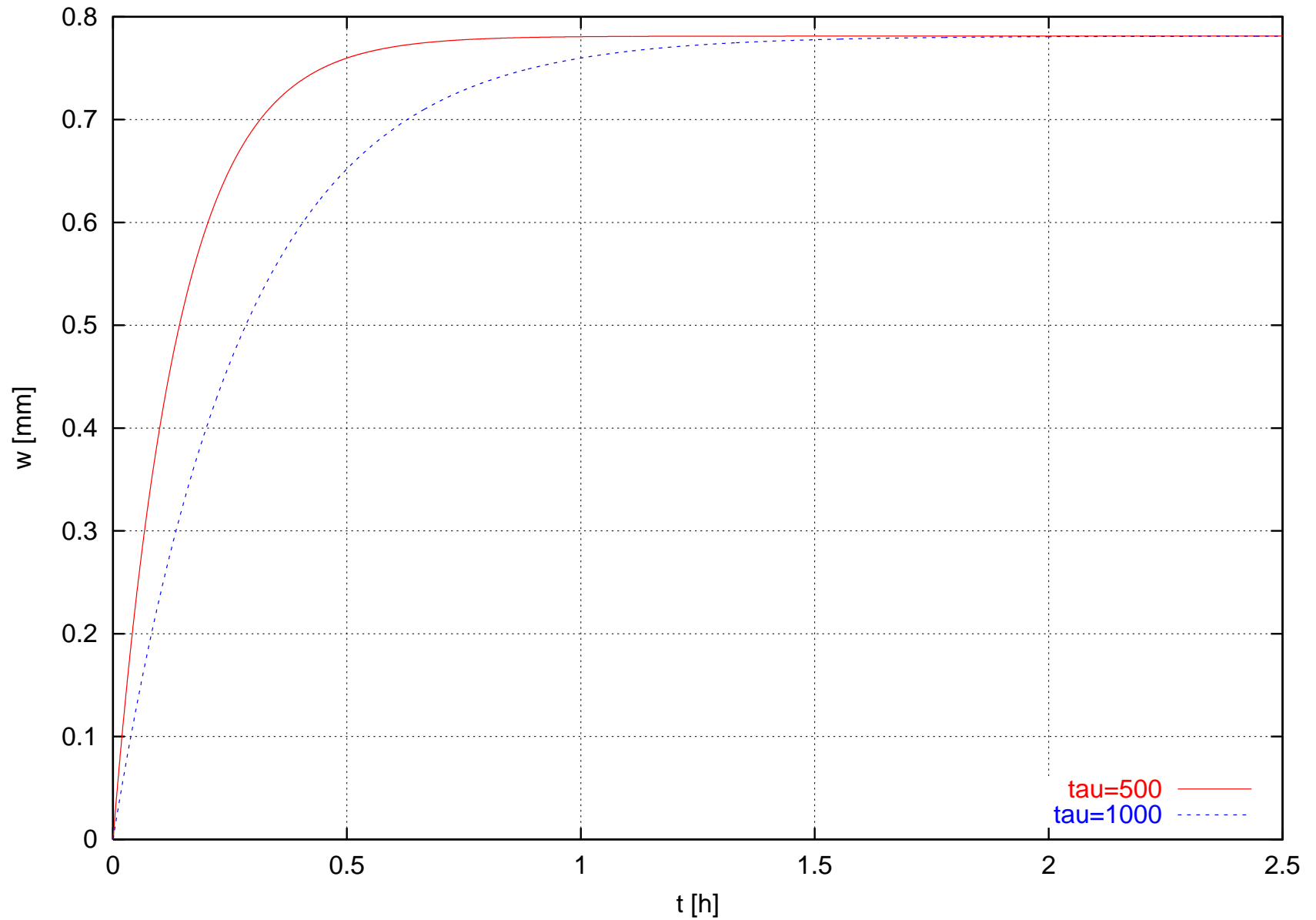
$$\text{cas}(i) = (i-1) * dt ;$$

$$J(i) = (1/E) * (1.0 - \exp(-(\text{cas}(i) / \tau))) ;$$

$$w(i) = w_0 * (1 + (E * J(i) - 1)) ;$$

```
end
```

Homogenní konstrukce... (7)



Maticová forma AAEM (1)

- **Podle:** Bažant, Z. P.: Matrix Force-Displacement Relation in Aging Viscoelasticity, *Journal of Engineering Mechanics*, Vol. 113, No, 8, ASCE, 1987

- V maticovém tvaru – vektor přírůstků vnějších sil:

$$\Delta F = (\mathbf{R}_o - \mathbf{R}) \left[\mathbf{J}_o (\mathbf{J} - \mathbf{J}_o)^{-1} \Delta \mathbf{u} - \mathbf{u}_o \right]$$

- V maticovém tvaru – vektor přírůstků deformací:

$$\Delta \mathbf{u} = (\mathbf{J} - \mathbf{J}_o) \left[\mathbf{R}_o (\mathbf{R}_o - \mathbf{R})^{-1} \Delta \mathbf{u} - \mathbf{u}_o \right]$$

- Uvedený postup vede k **přibližným** výsledkům!

Maticová forma AAEM (2)

- Použijeme:

$$\Delta \mathbf{u} = (\mathbf{J} - \mathbf{J}_0) [\mathbf{R}_0 (\mathbf{R}_0 - \mathbf{R})^{-1} \Delta \mathbf{u} - \mathbf{u}_0]$$

- kde \mathbf{R} je matice relaxace materiálu:

$$\mathbf{R}(t, t') = R(t, t') \mathbf{K}$$

- kde \mathbf{R} je matice poddajnosti materiálu:

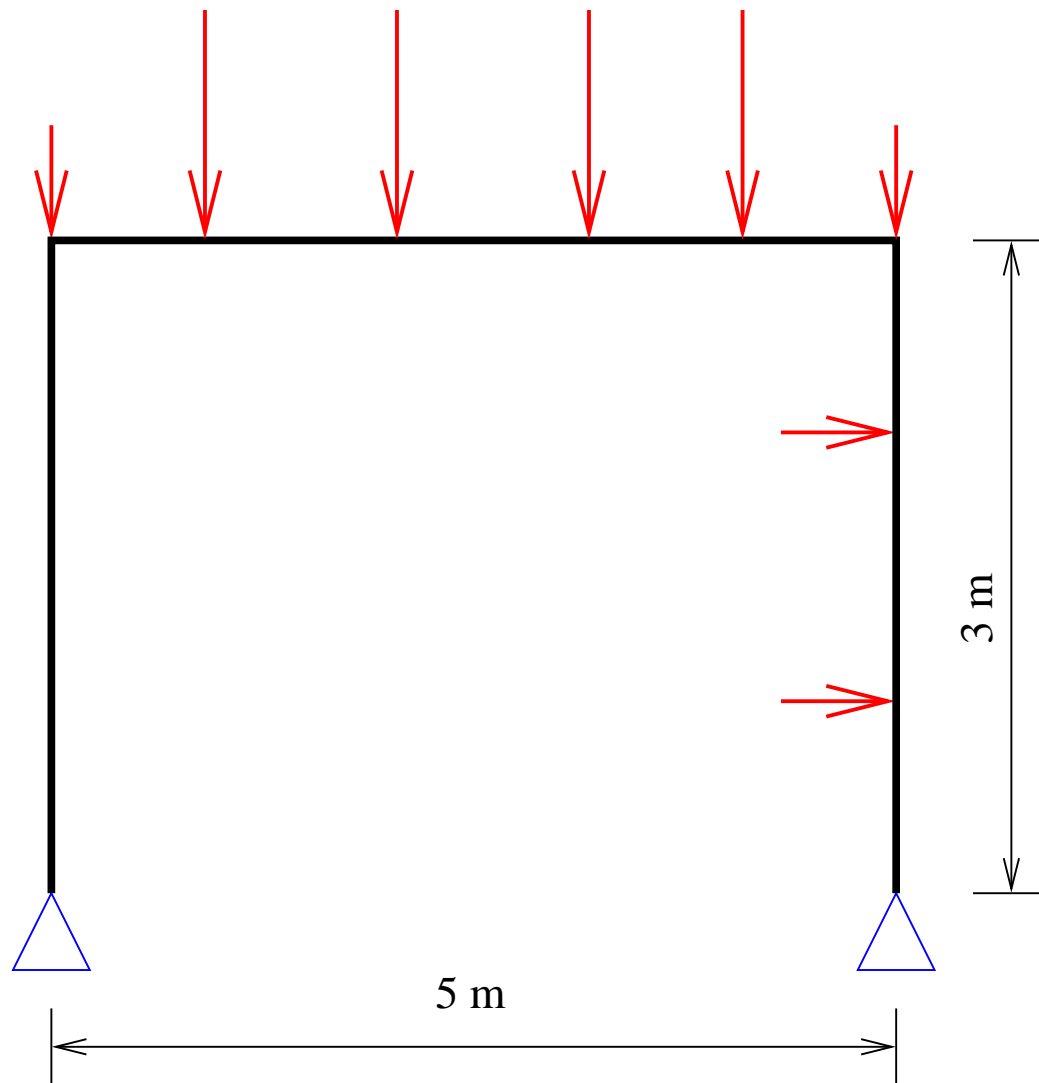
$$\mathbf{J}(t, t') = J(t, t') \mathbf{K}^{-1}$$

- \mathbf{K} je sestaveno pro jednotkový modul pružnosti ($E = 1$) a může být pro každý prut sestavena jinak (jiné E, J, R).

Maticová forma AAEM (3)

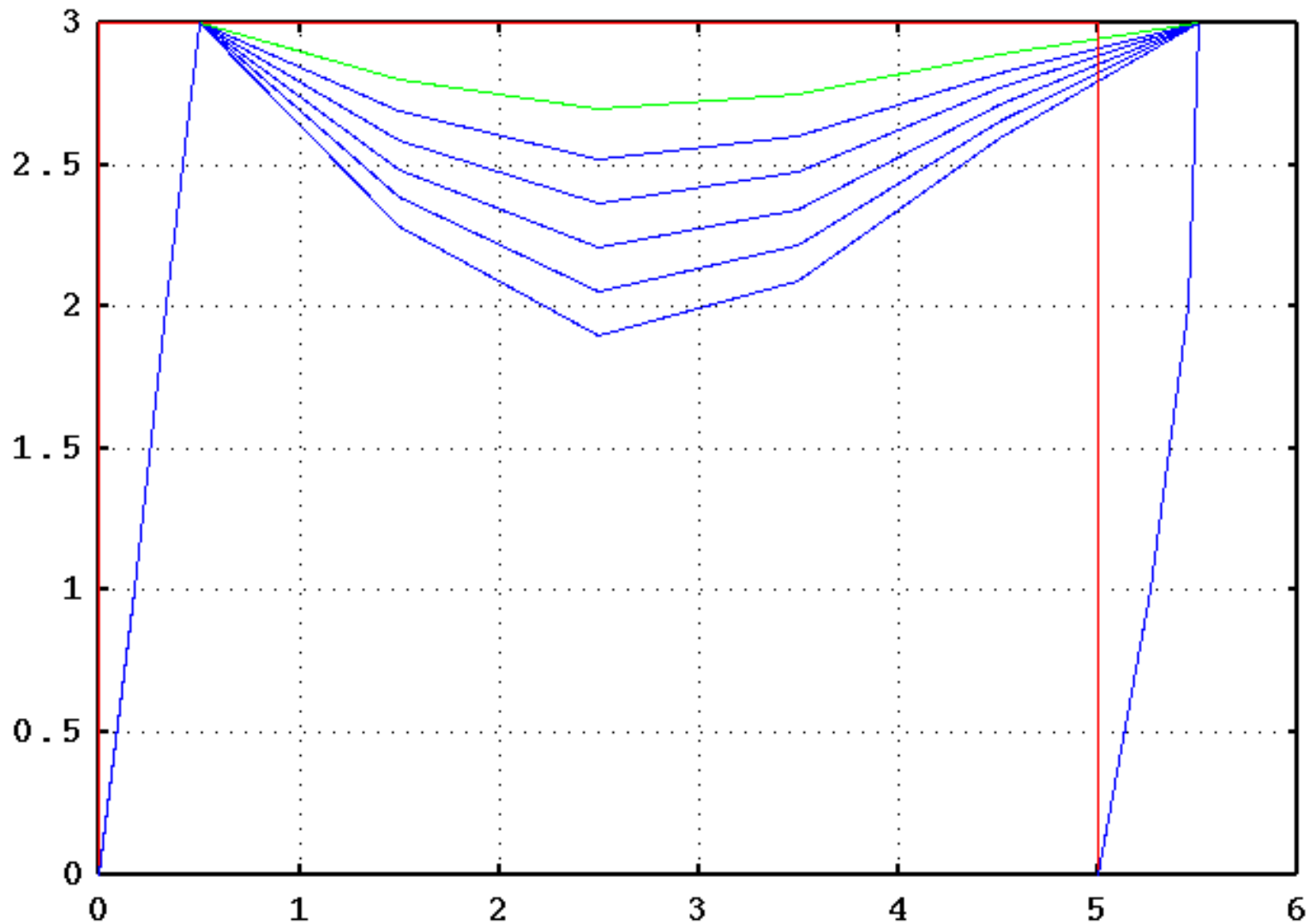
- **Příklad:** Stanovte a vykreslete deformace na homogenním rámu, vlastnosti materiálu jsou popsány Maxwellovým článkem, v prvních pěti letech, je-li dáno: $E = 30 \text{ GPa}$, $\tau = 5 \text{ let}$, $b \times h = 0.3 \times 0.4 \text{ m}$
- Zatížení $F = 1 \text{ kN}$ (menší síly mají poloviční velikost) se zvětšuje o 5% za rok.
- Schéma rámu je na dalším snímku

Maticová forma AAEM (4)



Maticová forma AAEM (5)

Výsledné deformace:



Maticová forma AAEM (6)

Program v *Octave/Matlab* (algoritmus):

$$J_{of} = 1/E ;$$

$$R_{of} = E ;$$

$$J_f = (1/E) * (1 + t1/tau)$$

$$R_f = E * \exp (-t1/tau)$$

$$J_o = J_{of} * D ;$$

$$R_o = R_{of} * K ;$$

$$J = J_f * D ;$$

$$R = R_f * K ;$$

$$du = (J - J_o) * ((R_o * \text{inv}(R_o - R)) * (F * ff) + F) ;$$

Další (po)drobnosti

Podrobnější popis, příklady aj.:

- Jirásek, M., Zeman, J.: Přetváření a porušování materiálů, ČVUT v Praze, 2006, 2010