VYSOKÁ ŠKOLA BÁŇSKÁ – TECHNICKÁ UNIVERZITA OSTRAVA

FAKULTA STAVEBNÍ

Mechanika materiálu

Navazující magisterské studium, 1. ročník

Jiří Brožovský

Kancelář: LP – H 406/3
Telefon: 597 321 321

E-mail: jiri.brozovsky@vsb.cz

Náplň předmětu

1. opakování teorie pružnosti:
   - základní vztahy a veličiny v prostoru,
   - plošné konstrukce: stěny, desky, skořepiny,
2. modely nelineárního chování materiálů:
   - časové závislé jevy (dotvarování),
   - pružně–plastické chování
   - lineární lomová mechanika (křehké materiály),
   - nelineární lomová mechanika (kvazikřehké materiály),
   - únava materiálu.

Doporučená literatura (1)

- Teplý, B. – Šmiřák, S.: Pružnost a plasticita 2., VUT v Brně, Brno, 1992 (skriptum)

- Šmiřák, S.: Energetické principy a variační metody v teorii pružnosti, VUT v Brně, Brno, 1998 (skriptum)

- Servít a kol.: Teorie pružnosti a plasticity I., SNTL, Praha, 1981 (celostátní učebnice)

Doporučená literatura (2)

- Servít a kol.: Teorie pružnosti a plasticity II., SNTL, Praha, 1984 (celostátní učebnice)
- Timoshenko. S. – Gere, J.: Mechanics of Materials, Van Nostrand Company, New York, 1972
- Boresi, A. – Schmidt, R.: Advanced Mechanics of Materials, John Wiley & Sons, 2003

Doplňková literatura

- Dický, J., Mistríková, Z., Sumec, J.: Pružnost a plasticita v stavebníctve 2, STU, Bratislava, 2005
- Ravinger, J., Koleková, Y.: Pružnosť II., STU, Bratislava, 2002
- Ravinger, J., Psotný, M.: Analýza konštrukcií, Nelineárne úlohy, STU, Bratislava, 2006
- Kolář, V., Kratochvíl, J., Leitner, F., Ženíšek, A. Výpočet plošných a prostorových konstrukcí metodou konečných prvků, SNTL, Praha, 1979
- Kolář V., Němec I., Kanický V. FEM Principy a praxe metody konečných prvků, Computer Press, Praha, 1997

Základní předpoklady – lin. mech.

- látka studovaného tělesa je **spojitá**
- látka je **homogenní** (ve všech místech stejné vlastnosti)
- látka je **isotropní** (ve všech směrech stejné vlastnosti)
- látka se chová **lineárně pružně** (tzv. Hookeův zákon)
- těleso je vystaveno jen **malým deformacím**

Isotropní a anisotropní materiál

- **isotropní**: ve všech směrech stejné vlastnosti

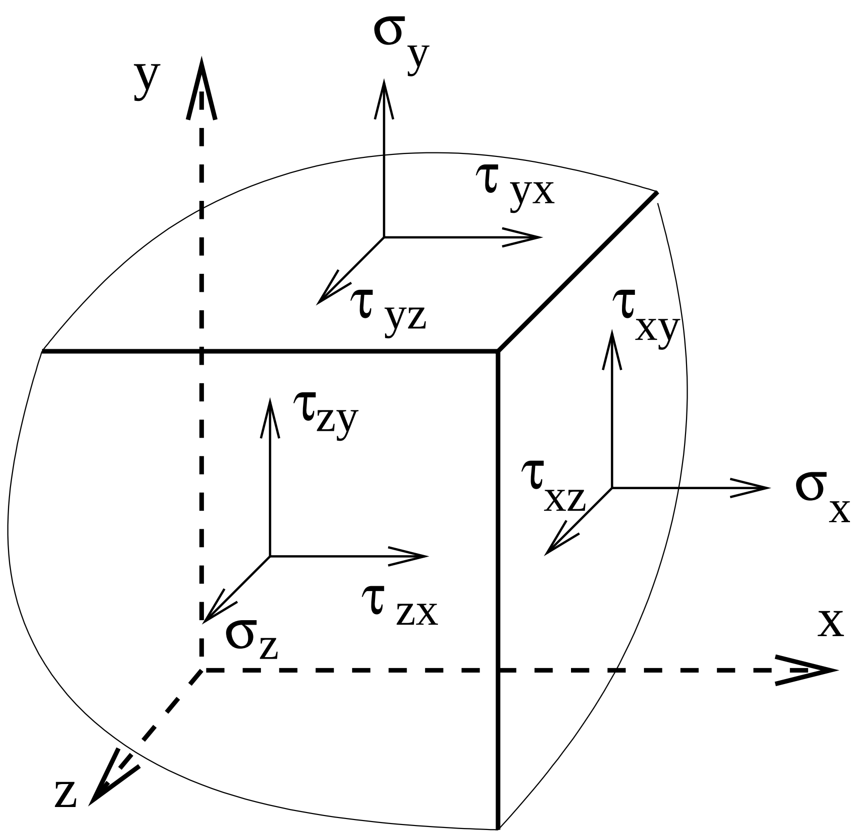
- **anisotropní**: v různých směrech různé vlastnosti

- **ortotropní**: různé vlastnosti ve vzájemně kolmých směrech

Téma 1:
Základní úloha teorie pružnosti

- základní veličiny
- geometrické vztahy
- diferenciální podmínky rovnováhy
- fyzikální rovnice (konstitutivní vztahy)
- podmínky kompatibility

Základní veličiny



Vektor napětí

$$\boldsymbol{\sigma} = \{\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}\}^T \tag{1}$$

Vektor deformací

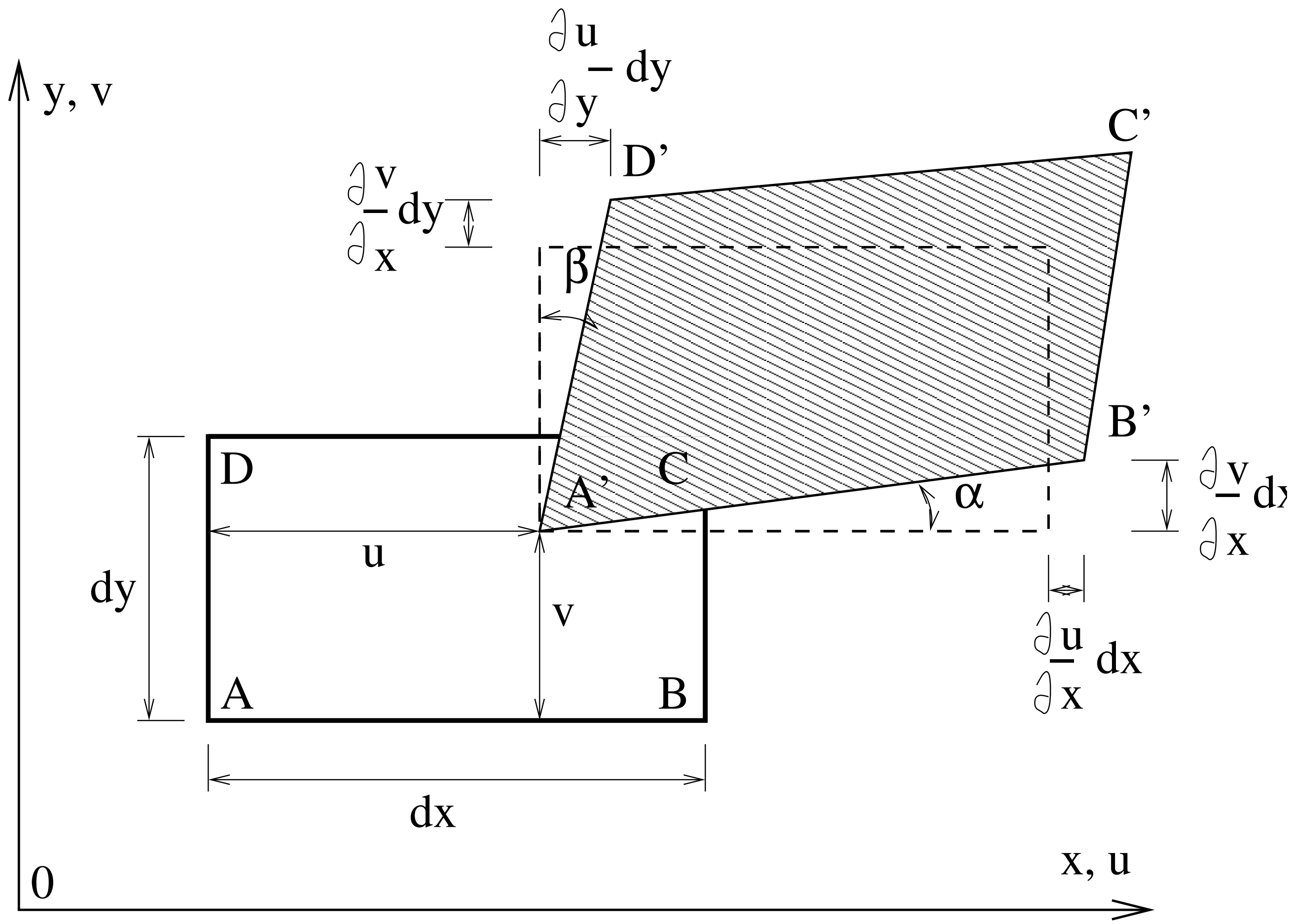
$$\boldsymbol{\varepsilon} = \{\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}\}^T \tag{2}$$

Vektor posunutí

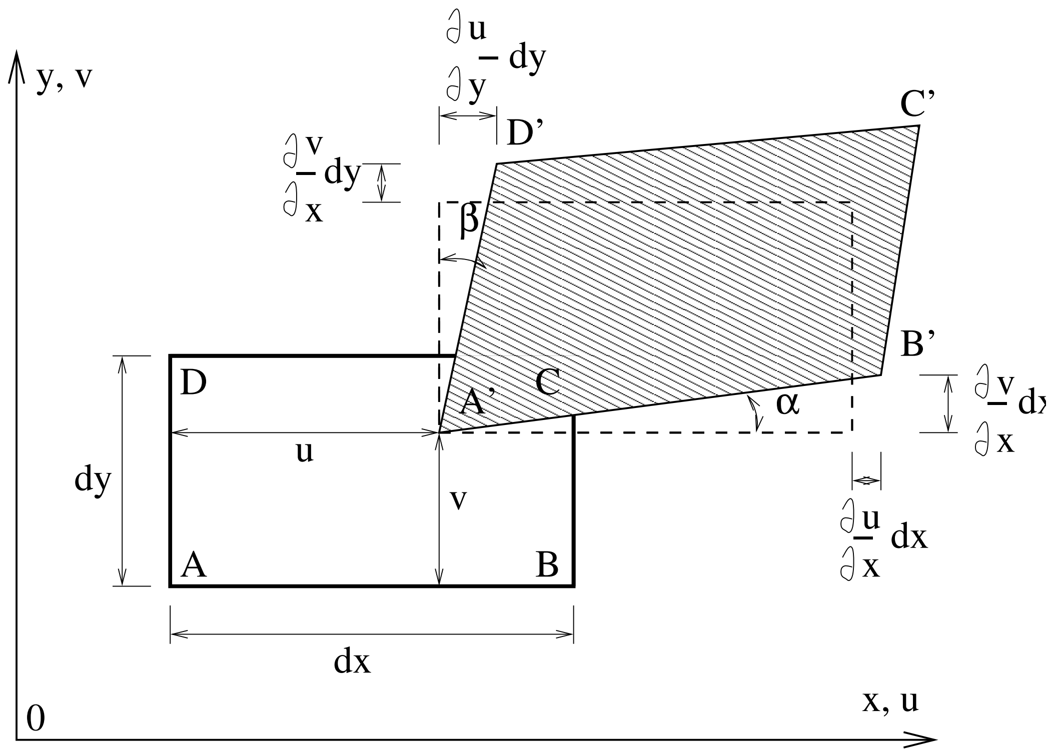
$$\mathbf{u} = \{u_x, u_y, u_z\}^T \tag{3}$$

Geometrické vztahy (1)

Vyjadřují vztahy mezi posunutími a deformacemi.



Geometrické vztahy (2)



$$\varepsilon_x = \frac{A'B' - AB}{AB} = \frac{(x + dx + u + \frac{\partial u}{\partial x}dx) - (x + u) - dx}{dx} = \frac{\partial u}{\partial x}$$

Geometrické vztahy (3)

Normálové deformace

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \qquad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}, \tag{4}$$

smykové deformace

$$\gamma_{yz} = \gamma_{zy} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \tag{5}$$

$$\gamma_{zx} = \gamma_{xz} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \tag{6}$$

$$\gamma_{xy} = \gamma_{yx} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}. \tag{7}$$

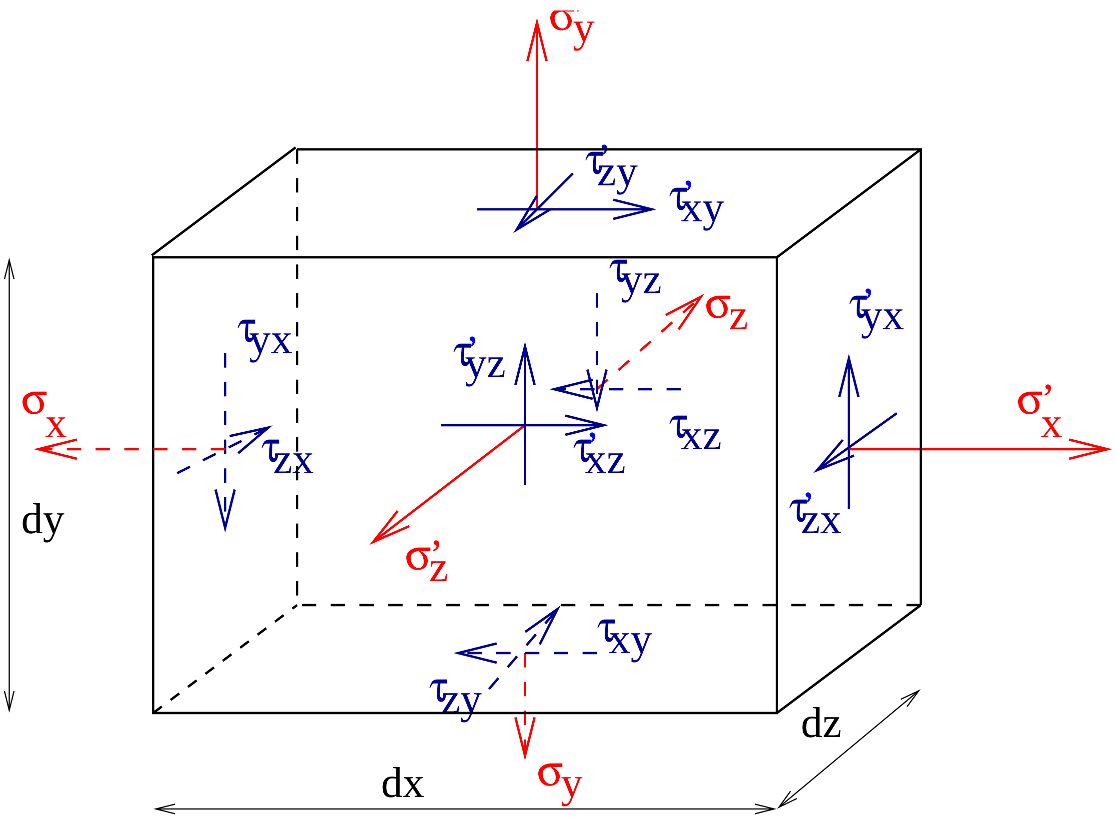
Geometrické vztahy (4)

Uvedené vztahy obecně neplatí:

$$
\begin{aligned}
\gamma_{yz} &= \gamma_{zy}, \\
\gamma_{zx} &= \gamma_{xz}, \\
\gamma_{xy} &= \gamma_{yx}.
\end{aligned}
$$

Předpoklad o vzájemnosti smykových napětí se odvozuje z **přibližného** splnění momentových podmínek rovnováhy na elementu tělesa. Na smykové deformace se pohlíží obdobně.

Diferenciální podmínky rovnováhy (1)



$$\sigma_x` = \sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx, \quad \tau_{xy}` = \tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} dy, \dots \qquad (8)$$

Diferenc. podmínky rovnováhy (2)

$$\sigma_x‘ = \sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx, \quad \tau_{xy}‘ = \tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} dy, ...$$

$$\sum F_{i,y} = (\sigma'_x - \sigma_x)\, dx\, dy + (\tau_{xy} - \tau'_{xy})\, dx\, dz + (\tau_{xz} - \tau_{xz}‘)\, dx\, dy = 0$$

$$(\sigma_x - \sigma_x - \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx)\, dx\, dy + (\tau_{xy} - \tau_{xy} - \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} dy)\, dx\, dz + (\tau_{xz} - \tau_{xz} - \frac{\partial \tau_{xz} z}{d} z)\, dx\, dy =$$

A po úpravě:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = 0 \qquad (9)$$

Diferenc. podmínky rovnováhy (3)

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\tau_{xz}}{\partial z} + X &= 0 \\
\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\sigma_y}{\partial y} + \frac{\tau_{yz}}{\partial z} + Y &= 0 \\
\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\sigma_z}{\partial z} + Z &= 0
\end{aligned}
\tag{10}
$$

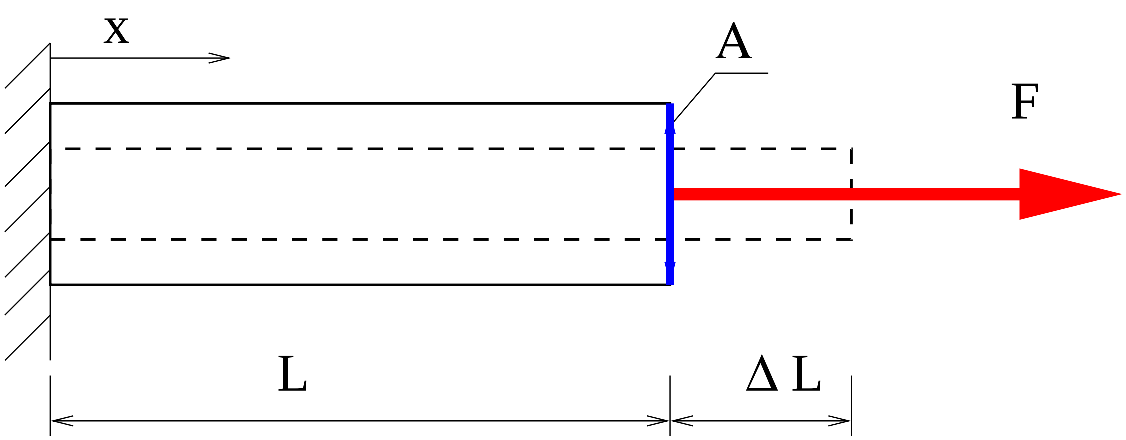
kde X,Y, Z jsou objemové síly.

Fyzikální rovnice (1)

Vyjadřují vztahy mezi napětími a deformacemi.

Hookeův zákon v 1D (tah/tlak):

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E}$$



$$\varepsilon_x = \frac{\Delta L}{L} = \frac{\partial L}{\partial x}$$

$$\sigma_x = \frac{F}{A} = E\,\varepsilon_x$$

Fyzikální rovnice (2)

Hookeův zákon v prostoru:

$$
\begin{aligned}
\varepsilon_x &= \frac{1}{E}\left[\sigma_x - \nu\left(\sigma_y + \sigma_z\right)\right], \quad \gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{2\,G} \\
\varepsilon_y &= \frac{1}{E}\left[\sigma_y - \nu\left(\sigma_x + \sigma_z\right)\right], \quad \gamma_{xz} = \frac{\tau_{xz}}{2\,G} \\
\varepsilon_z &= \frac{1}{E}\left[\sigma_z - \nu\left(\sigma_x + \sigma_y\right)\right], \quad \gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{2\,G}
\end{aligned}
\tag{11}
$$

Shrnutí

15 neznámých veličin:

3 složky posunutí $\mathbf{u}$

6 složek deformací $\boldsymbol{\varepsilon}$

6 složek napětí $\boldsymbol{\sigma}$

15 rovnic:

6 geometrických rovnic

6 fyzikálních rovnic

3 podmínky rovnováhy

Podmínky kompatibility (1)

Vyjadřují spojitost deformací – těleso spojitě vyplněné látkou zůstane spojité i po deformaci.

Rovnice kompatibility se získají eleminací složek posunutí u v geometrických rovnicích.

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} + &= \frac{\partial^2 \varepsilon_{xy}}{\partial x \partial y} \\
\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y^2} + &= \frac{\partial^2 \varepsilon_{yz}}{\partial y \partial z} \\
\frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial z^2} + &= \frac{\partial^2 \varepsilon_{zx}}{\partial z \partial x}
\end{aligned}
\qquad (12)
$$

Podmínky kompatibility (2)

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y \partial z} &= \frac{1}{2}\left(-\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial_x} + \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial_y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial_z}\right) \\
\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z \partial x} &= \frac{1}{2}\left(+\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial_x} - \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial_y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial_z}\right) \\
\frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x \partial y} &= \frac{1}{2}\left(+\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial_x} + \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial_y} - \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial_z}\right)
\end{aligned} \tag{13}
$$

Pro úlohu rovinné napjatosti (viz dále) se redukují na tvar:

$$
\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} \tag{14}
$$

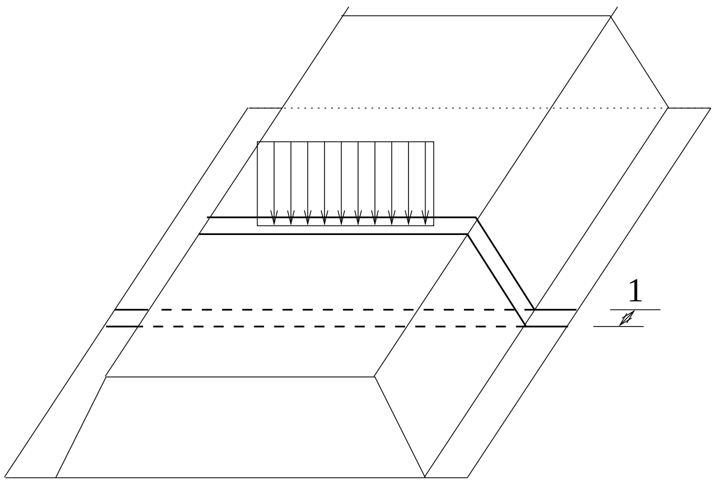
Téma 2: Rovinný problém

Řešíme plošné konstrukce zatížené a uložené v jejich střednicové rovině.

Dvě varianty rovinného problému:

- rovinná deformace
- rovinná napjatost

Rovinná deformace



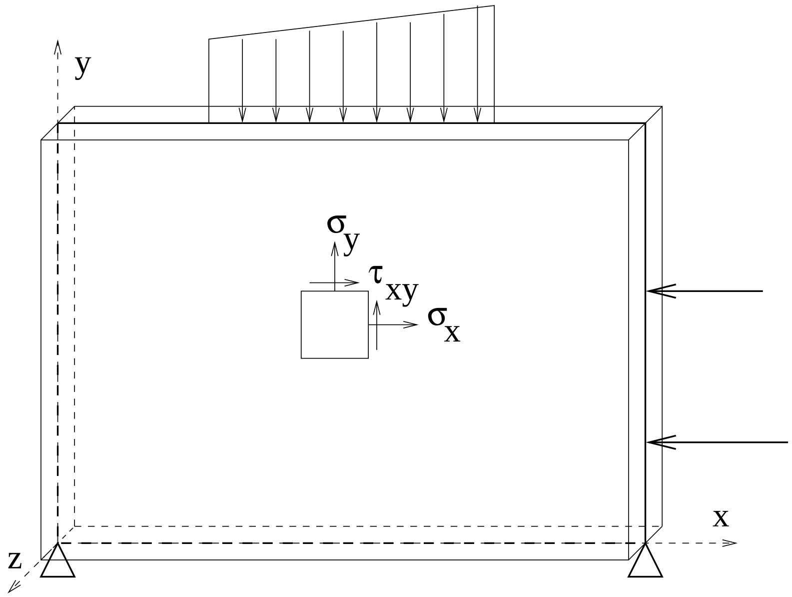
Obsahuje složky **deformace** ležící pouze v rovině ($x - y$):

$$\varepsilon = \{\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}\}^T \qquad (15)$$

Konstrukce se **nemůže** volně deformovat ve směru osy z, a proto v ní existuje nenulové napětí σ_z:

$$\sigma = \{\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}\}^T \qquad (16)$$

Rovinná napjatost



Obsahuje složky **napětí** ležící pouze v rovině $(x - y)$:

$$\sigma = \{\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}\}^T \qquad (17)$$

Stěna se **může** volně deformovat ve směru osy z, složka deformace ε_z je proto nenulová:

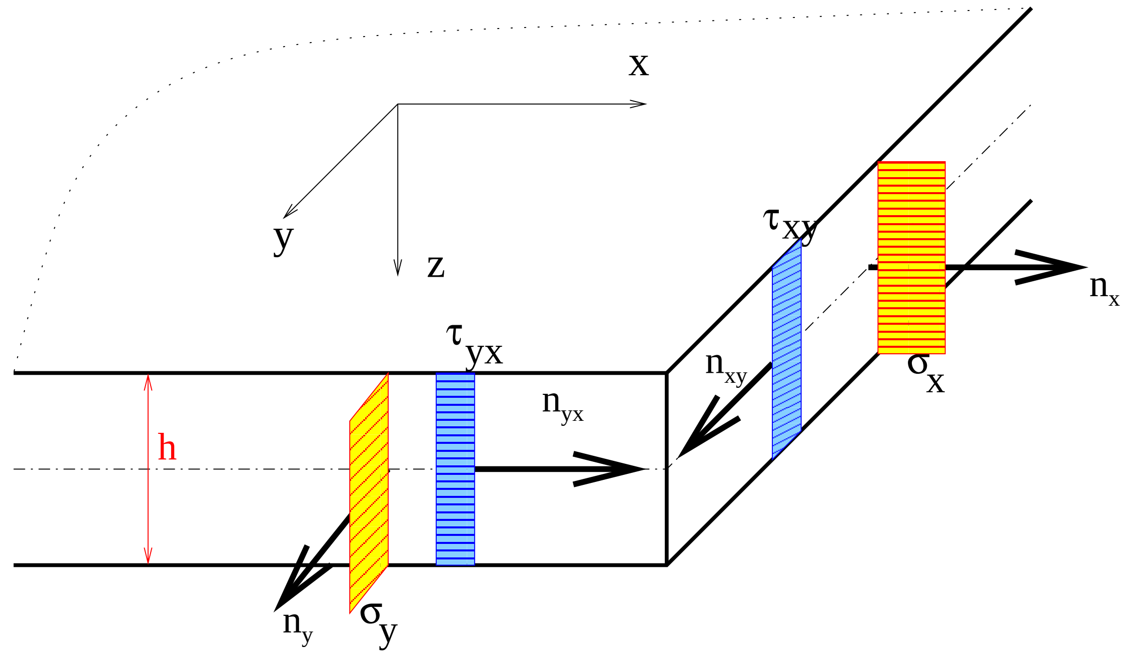
$$\varepsilon = \{\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}\}^T \qquad (18)$$

Měrné stěnové síly

$$N_x = \sigma_x \, h \quad [\frac{N}{m}]$$

$$N_y = \sigma_y \, h \quad [\frac{N}{m}]$$

$$N_{xy} = \tau_{xy} \, h \quad [\frac{N}{m}]$$



Rovinný problém – shrnutí (1)

Podmínky rovnováhy

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + X &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + Y &= 0 \end{aligned} \tag{19}$$

Geometrické rovnice

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \gamma_{xy} = \gamma_{yx} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}. \tag{20}$$

Rovinný problém – shrnutí (2)

Fyzikální rovnice: prostor

$$\begin{aligned}
\varepsilon_x &= \frac{1}{E}\left[\sigma_x - \nu\left(\sigma_y + \sigma_z\right)\right], \quad \gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{2\,G} \\
\varepsilon_y &= \frac{1}{E}\left[\sigma_y - \nu\left(\sigma_x + \sigma_z\right)\right], \quad \gamma_{xz} = \frac{\tau_{xz}}{2\,G} \\
\varepsilon_z &= \frac{1}{E}\left[\sigma_z - \nu\left(\sigma_x + \sigma_y\right)\right], \quad \gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{2\,G}
\end{aligned} \tag{21}$$

Rovinný problém – shrnutí (3)

Fyzikální rovnice: rovinná napjatost

$$
\begin{aligned}
\varepsilon_x &= \frac{1}{E}\left[\sigma_x - \nu\left(\sigma_y\right)\right] \\
\varepsilon_y &= \frac{1}{E}\left[\sigma_y - \nu\left(\sigma_x + \sigma_z\right)\right] \\
\gamma_{xy} &= \frac{\tau_{xy}}{2\,G} \\
\varepsilon_z &= \frac{1}{E}\left(-\mu\sigma_x - \mu\sigma_y\right)
\end{aligned}
\qquad (22)
$$

Rovinný problém – shrnutí (4)

Fyzikální rovnice: rovinná napjatost (inverzní tvar)

$$
\begin{aligned}
\sigma_x &= \frac{E}{1-\mu^2}\left(\varepsilon_x + \mu\,\varepsilon_y\right) \\
\sigma_y &= \frac{E}{1-\mu^2}\left(\varepsilon_y + \mu\,\varepsilon_x\right) \\
\tau_x &= \frac{E}{2(1-\mu)}\,\gamma_{xy}
\end{aligned}
\qquad (23)
$$

Rovinný problém – shrnutí (5)

Fyzikální rovnice: rovinná deformace

$$
\begin{aligned}
\sigma_x &= \frac{E}{(1+\mu)(1-2\mu)}\,[(1-\mu)\,\varepsilon_x + \mu\,\varepsilon_y] \\
\sigma_y &= \frac{E}{(1+\mu)(1-2\mu)}\,[\mu\,\varepsilon_x + (1-\mu)\,\varepsilon_y] \\
\tau_x &= \frac{E}{(1+\mu)(1-2\mu)}\,\gamma_{xy}\,\frac{1}{2}(1-\mu) \\
\sigma_z &= \mu\,(\sigma_x + \sigma_y)
\end{aligned}
\tag{24}
$$

Rovnice stěny (1)

Podmínka kompatibility stěny:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} \tag{25}$$

Dosaďme vztahy Hookeova zákona:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}\left[\sigma_x - \nu\left(\sigma_y\right)\right],\ \varepsilon_y = \frac{1}{E}\left[\sigma_y - \nu\left(\sigma_x\right)\right],\ \gamma_{xy} = \frac{2(1+\mu)\tau_{xy}}{E} \tag{26}$$

Tedy:

$$\frac{\partial^2\left[\sigma_x - \nu\sigma_y\right]}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\left[\sigma_y - \nu\sigma_x\right]}{\partial x^2} = \frac{2(1+\mu)\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y} \tag{27}$$

Rovnice stěny (2)

Po úpravách získáme:

$$\frac{\partial^2\sigma_x}{\partial y^2} - \mu\frac{\partial^2\sigma_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\sigma_y}{\partial x^2} - \mu\frac{\partial^2\sigma_x}{\partial x^2} - \frac{2(1+\mu)\partial^2\tau_{xy}}{\partial x\partial y} = 0 \quad (28)$$

Podmínky rovnováhy (pro nulové objemové síly):

$$\frac{\partial\sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial\sigma_y}{\partial y} = 0 \quad (29)$$

Tedy:

$$\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x} = -\frac{\partial\sigma_y}{\partial y}, \quad \frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y} = -\frac{\partial\sigma_x}{\partial x} \quad (30)$$

Rovnice stěny (3)

Získáme vztah:

$$\frac{\partial^2\sigma_x}{\partial y^2}-\mu\frac{\partial^2\sigma_y}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\sigma_y}{\partial x^2}-\mu\frac{\partial^2\sigma_x}{\partial x^2}+(1+\mu)\frac{\partial^2\sigma_x}{\partial x^2}+(1+\mu)\frac{\partial^2\sigma_y}{\partial y^2}=0 \tag{31}$$

Po úpravě získáme **Lévyho pomínku**:

$$\frac{\partial^2\sigma_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\sigma_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\sigma_y}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\sigma_y}{\partial x^2}=0 \tag{32}$$

Airyho funkce F – popisuje stav napjatosti stěny tak, že platí:

$$\sigma_x=\frac{\partial^2 F}{\partial y^2},\quad \sigma_y=\frac{\partial^2 F}{\partial x^2},\quad \tau_{xz}=-\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}. \tag{33}$$

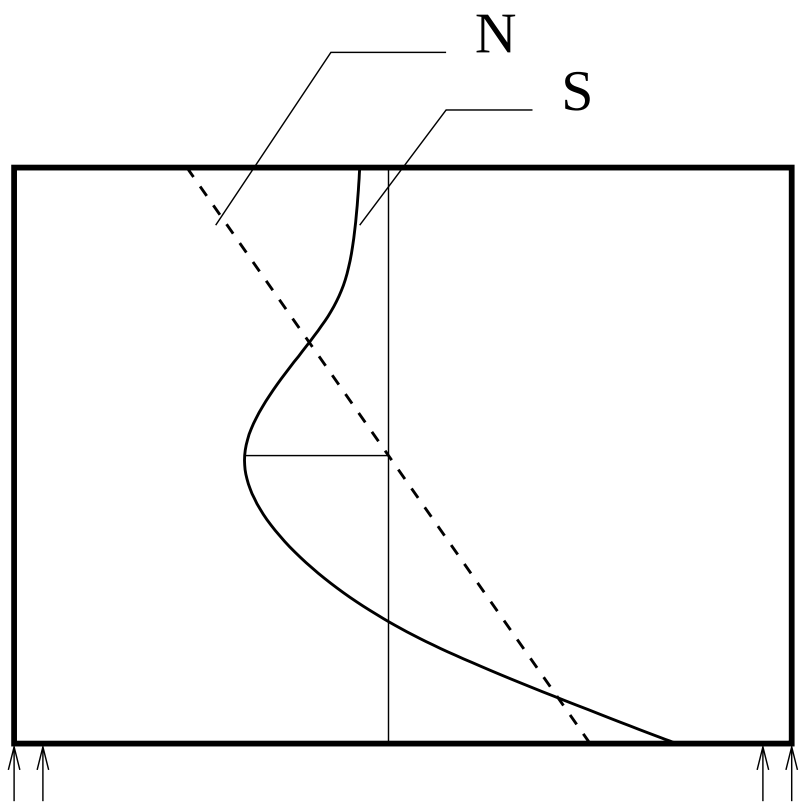
Rovnice stěny (4)

Stěnová rovnice – podmínka kompatibility stěny (32) vyjádřená pomocí Airyho funkce:

$$\frac{\partial^4 F}{\partial x^4} + 2\,\frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 F}{\partial y^4} = 0 \qquad (34)$$

Tento vztah je možné využívat k dalším výpočtům.

Příklad průběhu normálových napětí



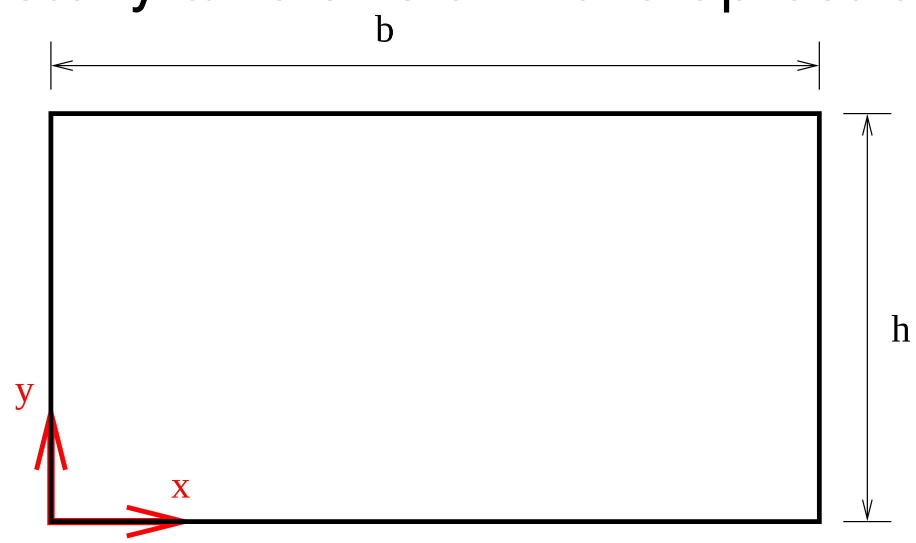
N . . . nosníkové řešení,

S . . . stěna (rovinná napjatost).

Aplikace stěnové rovnice I (1)

Zadání:

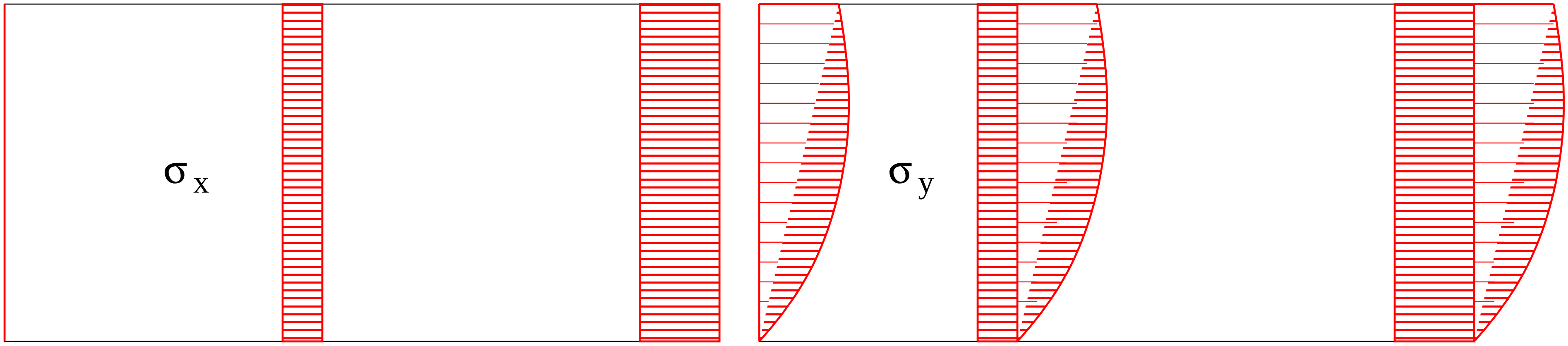
Na obdélníkové stěně o rozměrech b a h je dána Airyho funkce ve tvaru $F = 2 \times x^3 + 4 \times x^2 \times y^2$. Stanovte průběhy napětí σ_x na okrajích stěny a ve svislém řezu uprostřed.



Aplikace stěnové rovnice I (2)

Řešení:

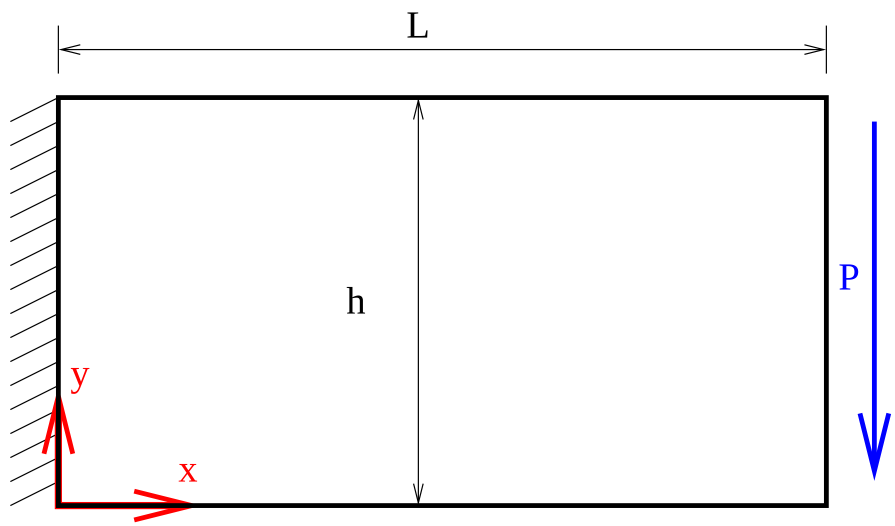
$$
\begin{aligned}
\sigma_x &= \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 8 \times x \\
\sigma_y &= \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = 12 \times x + 2 \times y^2 \\
\tau_{xz} &= -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = -16 \times x \times y
\end{aligned}
$$



Aplikace stěnové rovnice II (1)

Zadání:

Stanovte tvar Airyho funkce na obdélníkové stěně o rozměrech L a h vlevo vetknuté a vpravo zatížené silou (viz obrázek). Tloušťka stěny je 1.



Aplikace stěnové rovnice II (2)

Volba tvaru Airyho funkce:

$$F = a \times x^2 \times y + b \times x \times y^2$$

kde a, b jsou zatím neznámé konstanty.

Funkce musí vyhovovat stěnové rovnici $\frac{\partial^4 F}{\partial x^4} + 2\,\frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 F}{\partial y^4} = 0$:

$$\frac{\partial^4 F}{\partial x^4} = 0, \quad \frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^4 F}{\partial y^4} = 0$$

Aplikace stěnové rovnice II (3)

Airyho funkce:

$$F = a \times x^2 \times y + b \times x \times y^2$$

Vyjádření napětí:

$$\begin{aligned}
\sigma_x &= \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 2 \times a \times x^2 + 2 \times a \times x \\
\sigma_y &= \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = 2 \times a \times y^2 \\
\tau_{xz} &= -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = -4 \times a \times x - 2 \times b \times y
\end{aligned}$$

Aplikace stěnové rovnice II (4)

Stanovení a, b z okrajových podmínek:

- pro $x = L$ je $\sigma_x = 0$: $2 \times a \times L^2 + 2 \times a \times x = 0 \Rightarrow a = -\frac{b}{3 \times L}$
- pro $x = b$ je $\int_0^L \tau_{xy} dy = P$: $\int_0^L (-4 \times a \times x - 2 \times b \times y) dy = -2 \times a \times L \times h^2 - b \times h^2 = P$,

  tedy $c \times h^3 - c \times h^3 = P \Rightarrow b = -\frac{3 \times P}{5 \times h^2}$

Po dosazení získáme Airyho funkci: $F = \frac{P}{5 \times h^2 \times L} \times x^2 \times y^2 - \frac{3 \times P}{5 \times h^2} \times x \times y^2$

Téma 3: Nosné desky

Deska je těleso, které má jeden rozměr mnohem menší než rozměry zbývající.

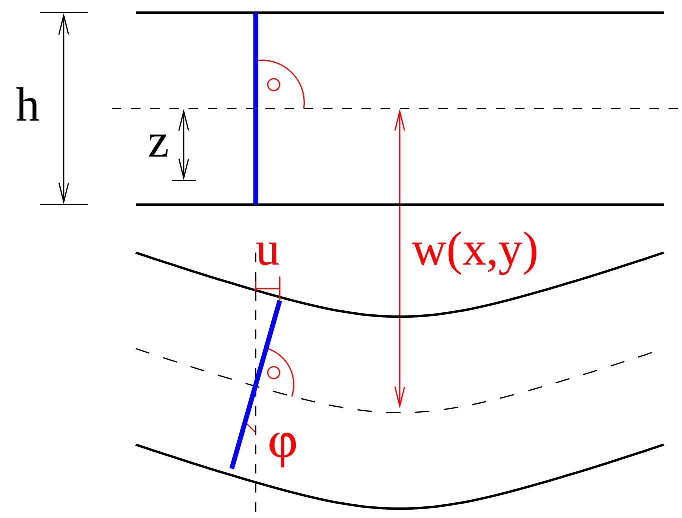
Zatížení desky je orientováno výhradně **kolmo k její střednicové rovině**.

1. Kirchhoffova teorie ohybu tenkých desek ($h/L < 1/10$)
2. výpočet deformačních a silových veličin na tenké desce metodou sítí
3. Mindlinova teorie pro tlusté desky ($h/L < 1/5$)

Kirchhoffova teorie ohybu tenkých desek (K1)

- „technická teorie“ ohybu tenkých desek
- jednotlivé vrstvy desky na sebe netlačí

  $\sigma_z = 0$
- normálová napětí ve střednicové rovině jsou nulová
- body ve střednicové rovině se mohou přemisťovat pouze ve směru osy z
- normály střednicové roviny zůstávají i po deformaci přímé a kolmé k této rovině



Vnitřní síly na desce (K2)

Posunutí a pootočení : w, φ_x, φ_y $[m]$

Napětí: $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}$ $[Pa]$

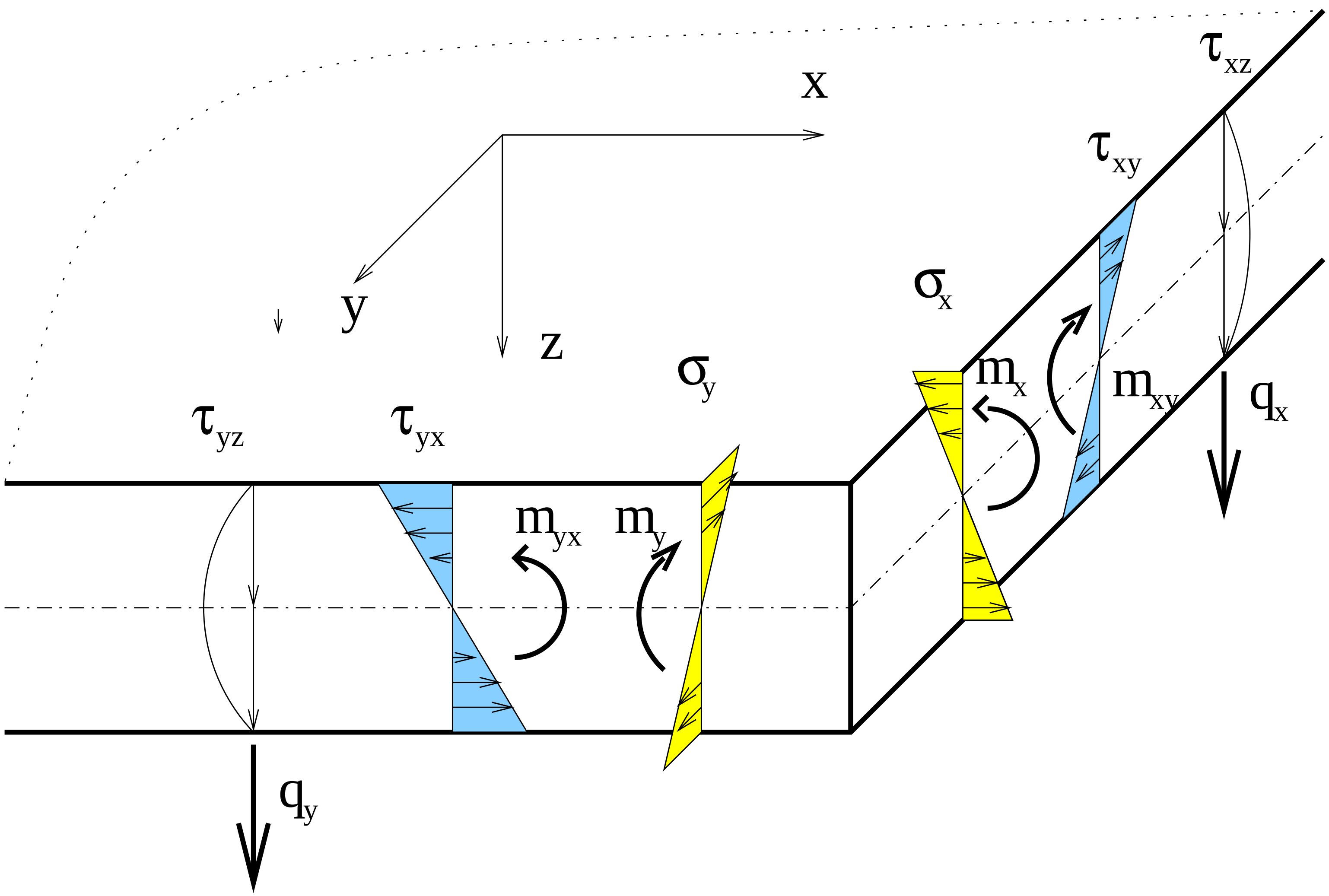
Poměrné deformace: $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}$ $[-]$

Měrné vnitřní síly:

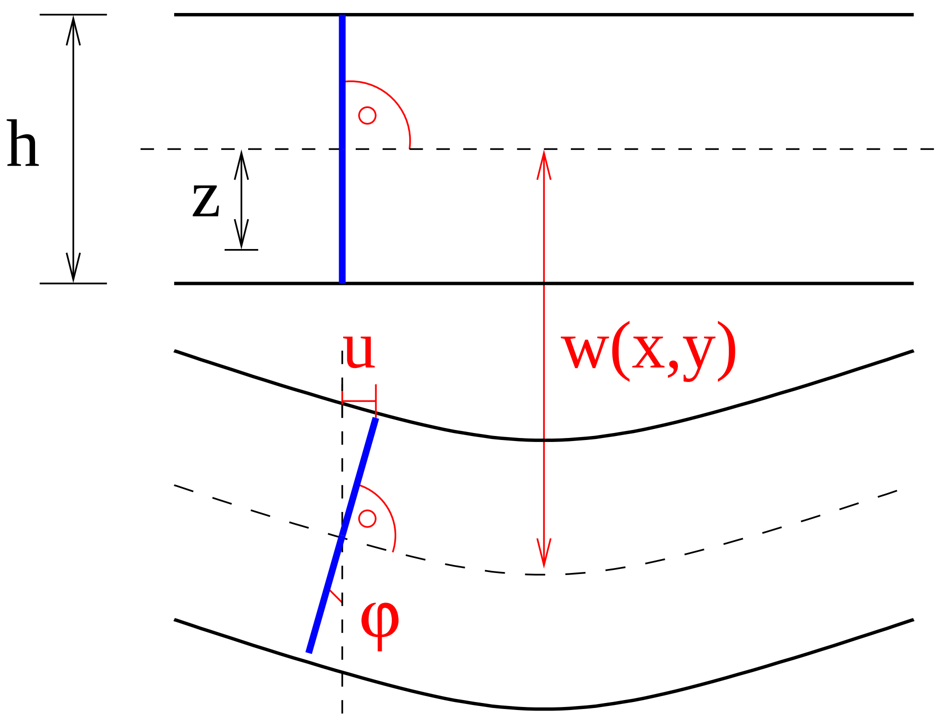
Měrné momenty: m_x, m_y (ohybové), m_{xy} (krouticí) $[\frac{N\ m}{m}]$, $[N]$

Měrné posouvající síly: q_x, q_y $[\frac{N}{m}]$

Vnitřní síly na desce (K3)



Deformace a poměrné deformace (K4)



$$u = -z \, \frac{\partial w}{\partial x}, \quad v = -z \, \frac{\partial w}{\partial y} \tag{35}$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} = -z \, \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial u}{\partial y} = -z \, \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = -2 \, z \, \frac{\partial x}{\partial y} \end{aligned} \tag{36}$$

Fyzikální rovnice na desce (Hookeův zákon) (K5)

$$\begin{aligned}
\sigma_x &= \frac{E}{1-\mu^2}(\varepsilon_x + \mu\,\varepsilon_y) = -\frac{E}{1-\mu^2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu\,\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) \\
\sigma_y &= \frac{E}{1-\mu^2}(\varepsilon_y + \mu\,\varepsilon_x) = -\frac{E}{1-\mu^2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu\,\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) \\
\tau_{xy} &= G\,\gamma = -\frac{E}{2\,(1+\mu)}\,2\,z\,\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \qquad (37)
\end{aligned}$$

Vnitřní síly na desce (K6)

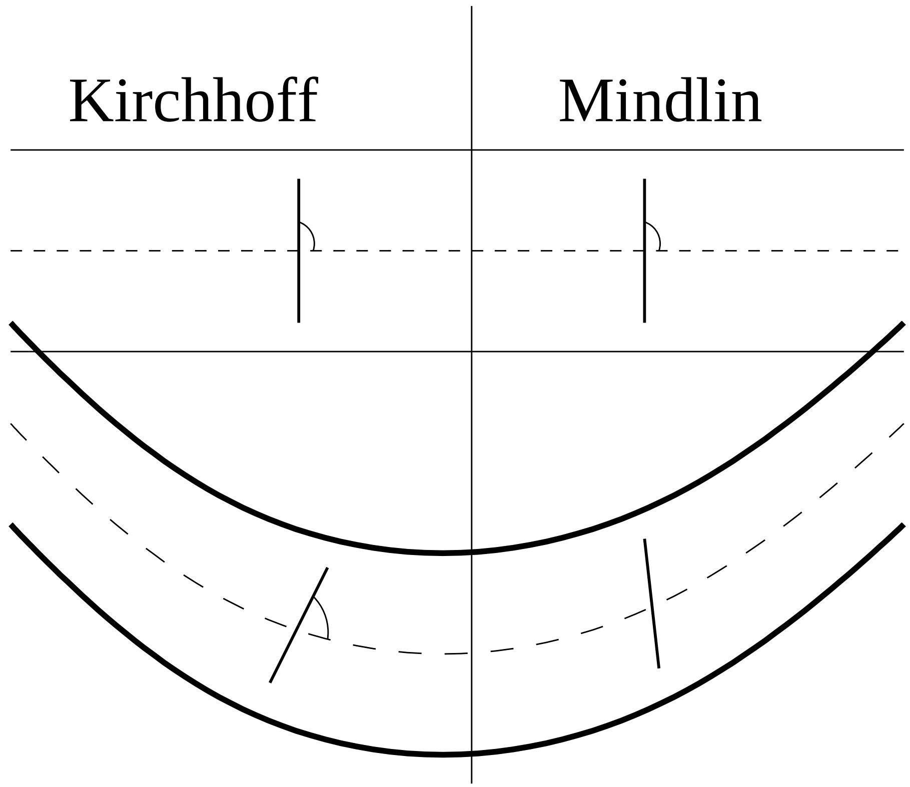
$$
\begin{aligned}
m_x &= \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_x \, z \, dx = -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right), \\
m_y &= \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_y \, z \, dx = -D\left(\mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right), \\
m_{xy} &= \int_{-t/2}^{t/2} \tau_{xy} \, z \, dx = -D\,(1-\mu)\,\frac{\partial^2 w}{\partial x\, y},
\end{aligned}
\tag{38}
$$

kde D je **desková tuhost**: $D = \frac{E\, t^3}{12(1-\mu^2)}$

$$
\begin{aligned}
q_x &= \int_{-t/2}^{t/2} \tau_{xz} dz = -D\left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2}\right) \\
q_y &= \int_{-t/2}^{t/2} \tau_{yz} dz = -D\left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y}\right)
\end{aligned}
\tag{39}
$$

Mindlinova teorie ohybu desek

Mindlin předpokládal, že normály střednicové roviny zůstanou po deformaci přímé, avšak nemusí být kolmé k této rovině.



Technická teorie skořepin (1)

- tenké skořepiny – viz předpoklady Kirchhoffovy teorie pro desky

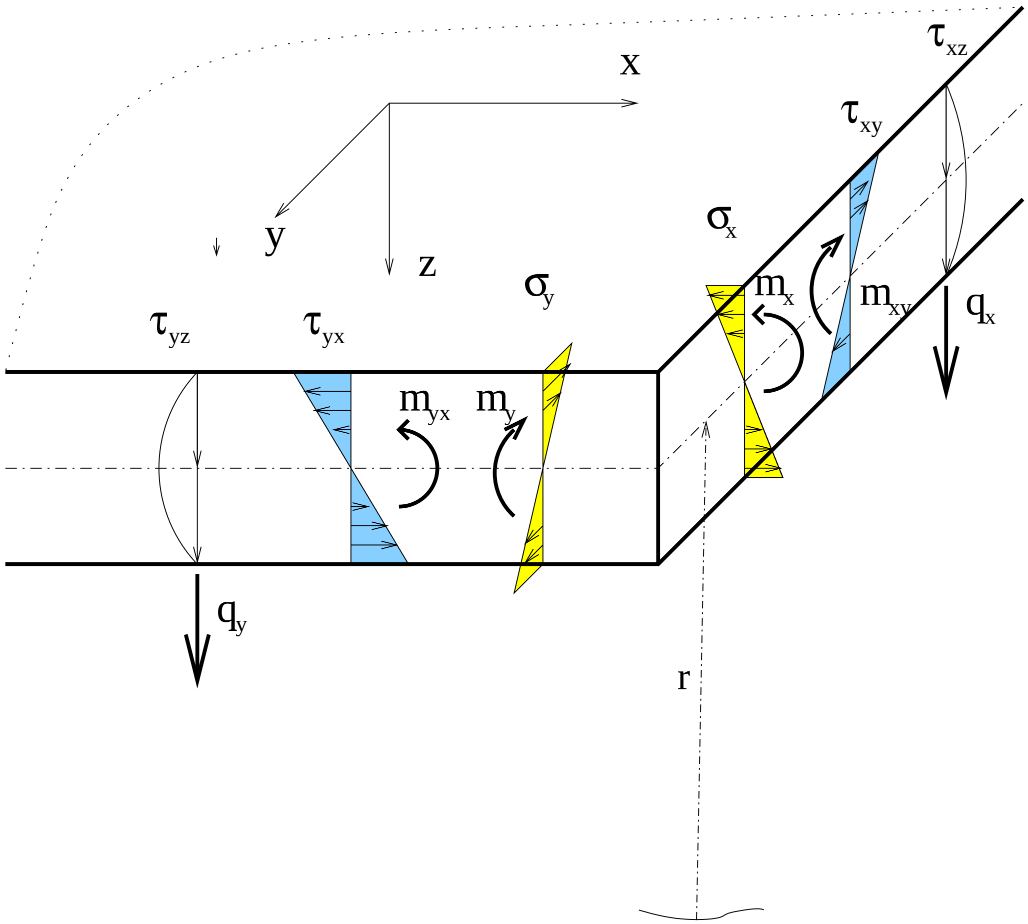
- vnitřní síly typické pro stěny i desky (vzájemně se ovlivňující)

- ohybový stav: m_x, m_y, m_{xy}, q_x, q_y

- membránový stav: n_x, n_y, n_{xy}

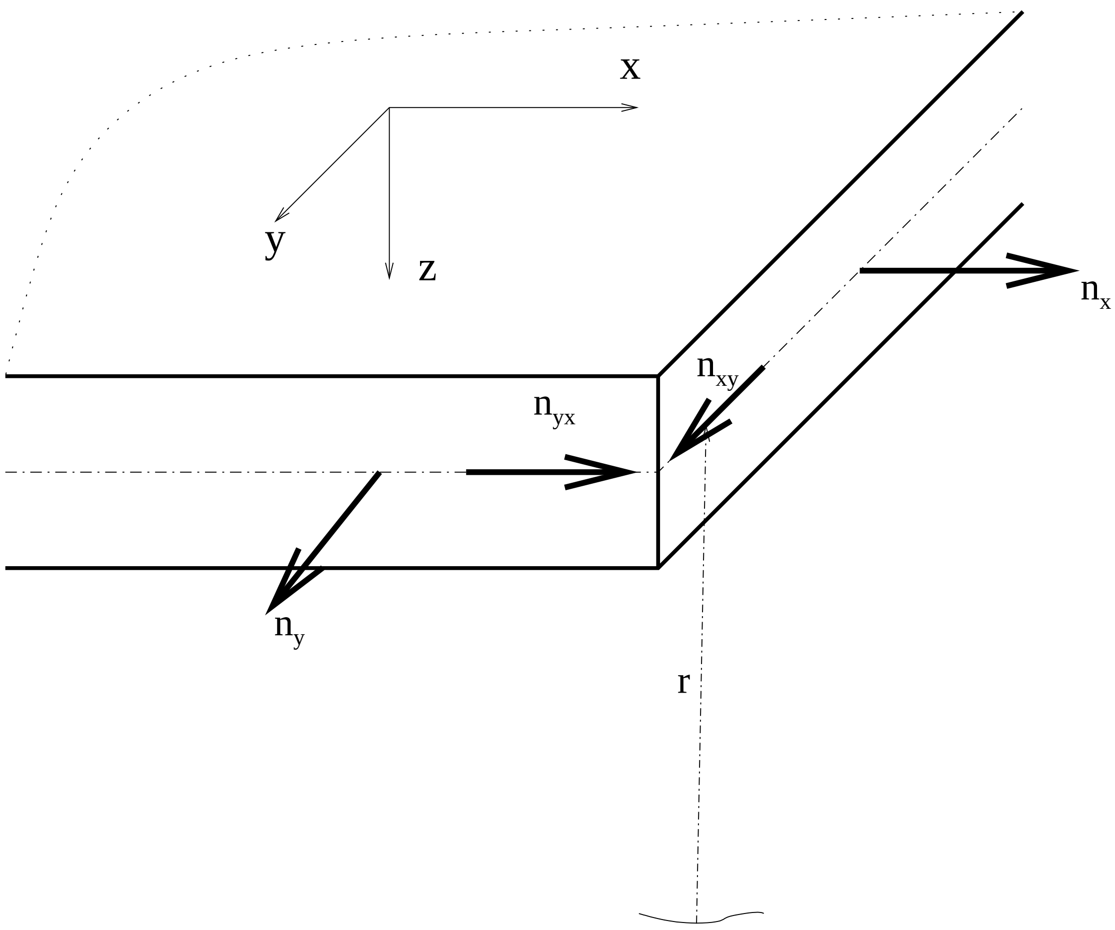
Technická teorie skořepin (2)

Ohybový stav:



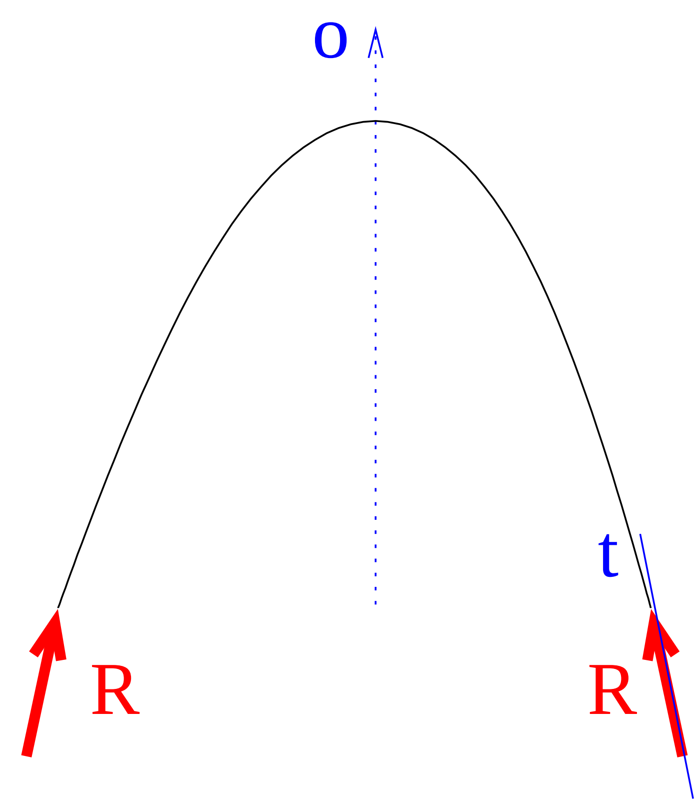
Technická teorie skořepin (3)

Membránový stav:



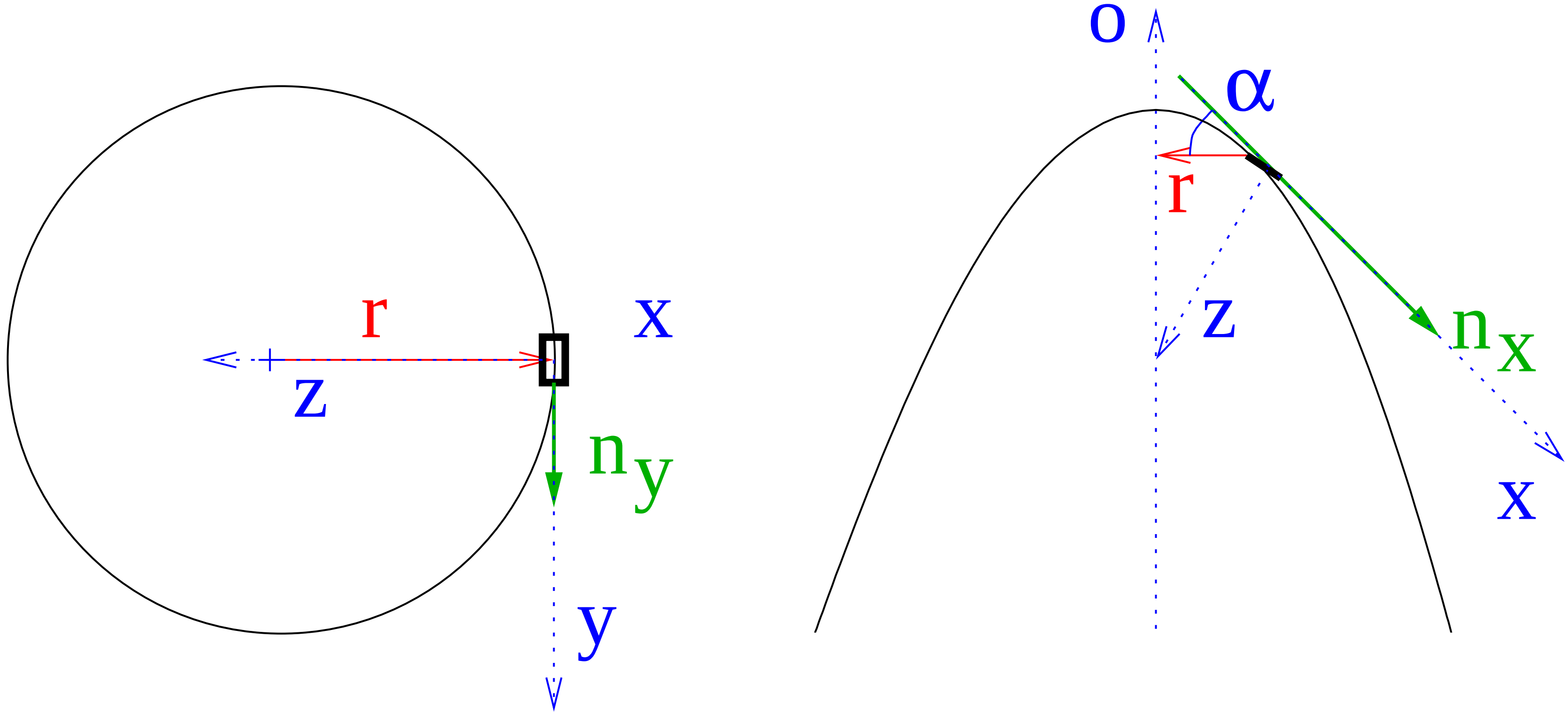
Rotační symetrie (1)

- Předpoklad: membránový stav napjatosti
- Podmínky: rotačně symetrické zatížení, podepření nesmí rušit membránovou napjatost



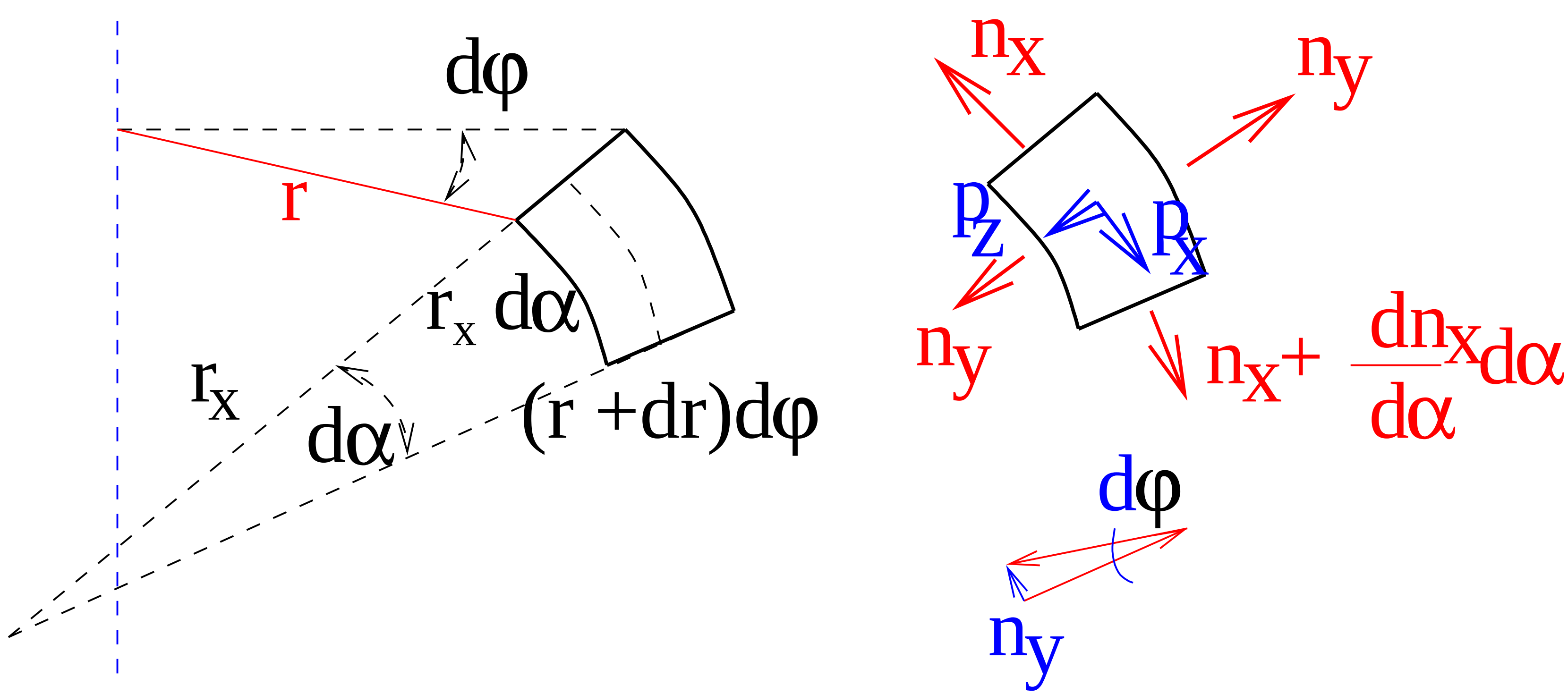
Rotační symetrie (2)

Vnitřní síly n_x, n_y:



Smyková složka $n_{xy} = 0$ (podmínky symetrie).

Rotační symetrie (3)

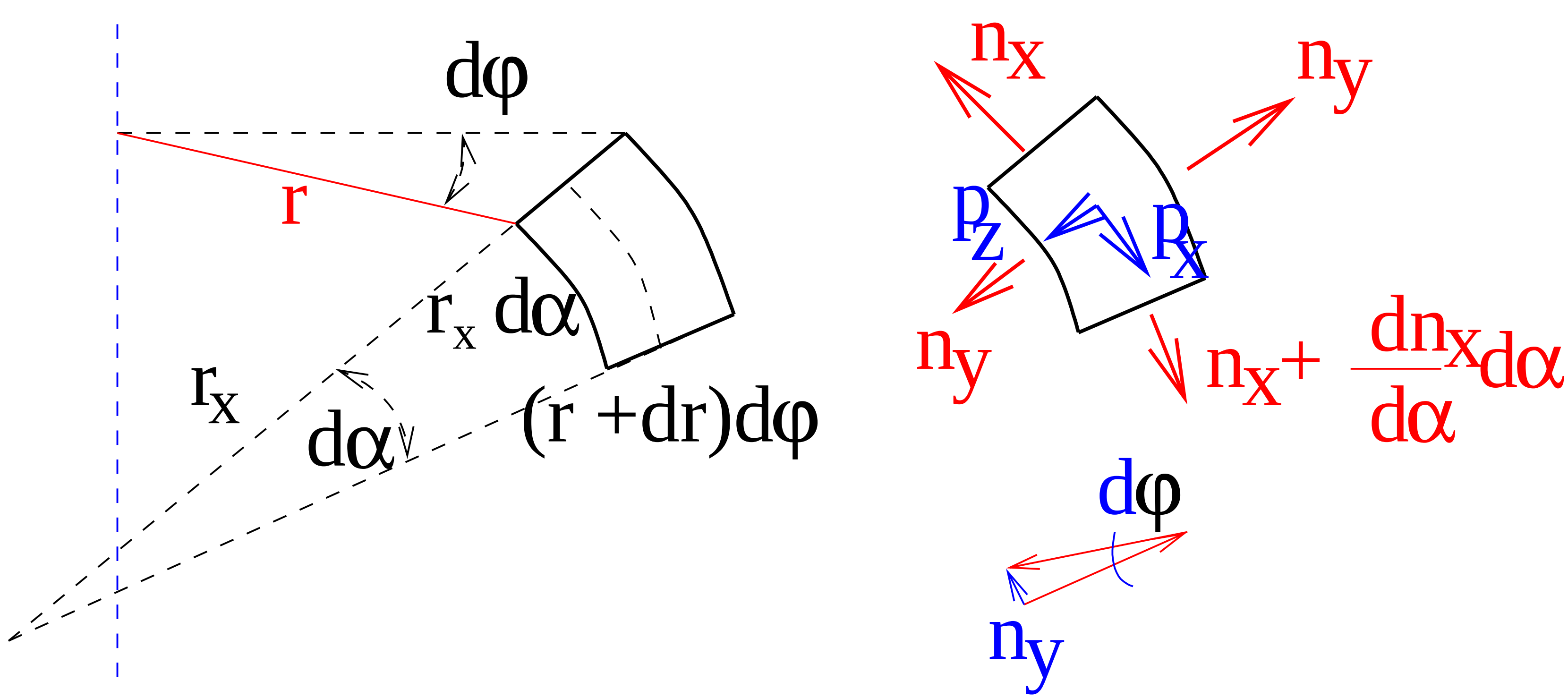


$\sum F_{i,x} = 0$:

$$(n_x + \frac{dn_x}{d\alpha})(r + dr)d\varphi - n_c r d\varphi - n_y r_x d\alpha d\varphi \cos\alpha + p_x r d\varphi r_x d\alpha =$$

$$= 0$$

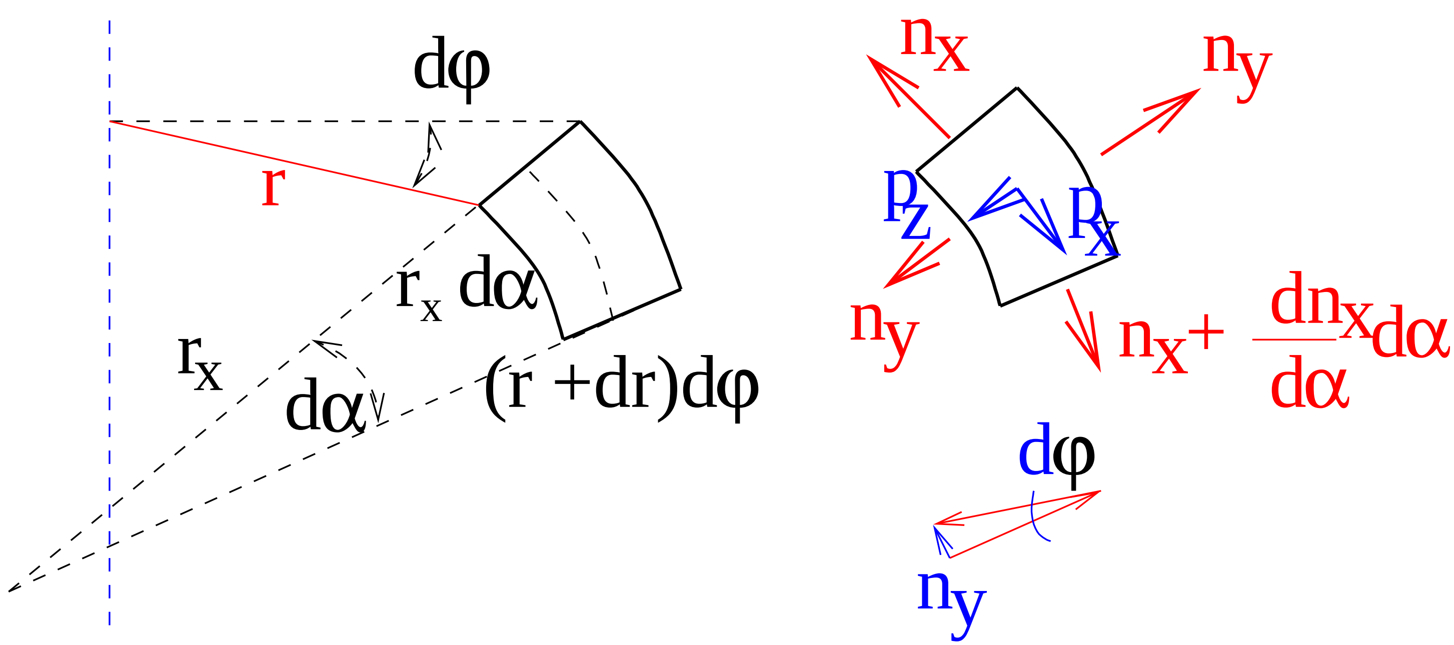
Rotační symetrie (4)



$\sum F_{i,y} = 0$:

$$n_x r \; d\varphi d\alpha + n_y r_x d\alpha d\varphi \sin\alpha + p_z r d\varphi r_x d\alpha = 0$$

Rotační symetrie (zjednod.) (5)

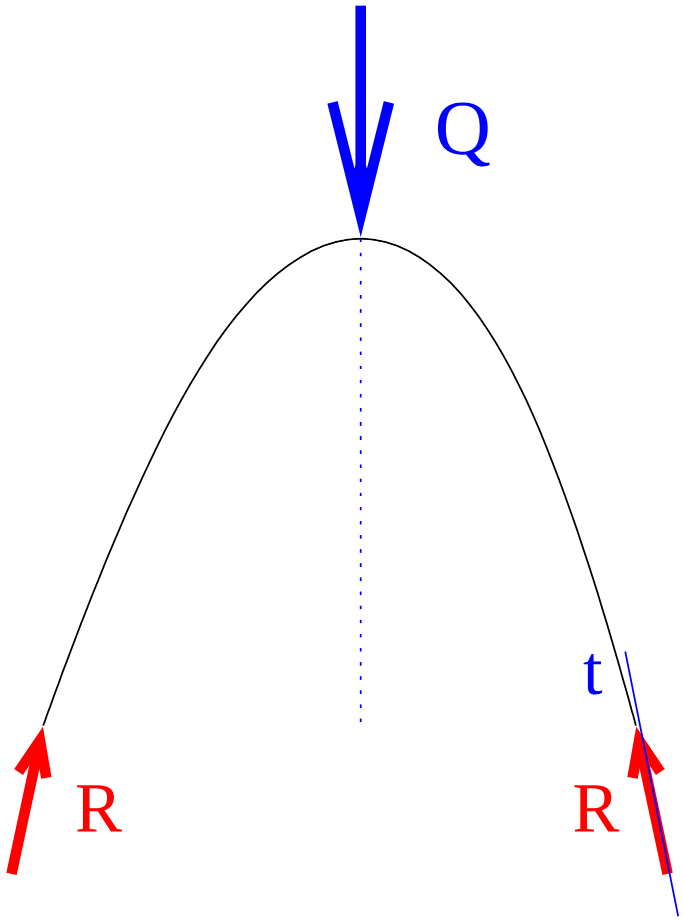


$$\frac{dn_x r}{d\alpha} - n_y r_y \cos\alpha + p_x r\ r_x = 0$$

$$\frac{n_x}{r_x} + \frac{n_y}{r_y} + p_z = 0, \text{ kde } r_y = \frac{r}{\sin\alpha}$$

Rotační symetrie (6)

Zjednodušení pro sílu (nebo výslednici zatížení) Q ve vrcholu:



Podmínka $\sum F_{i.y} = 0$:

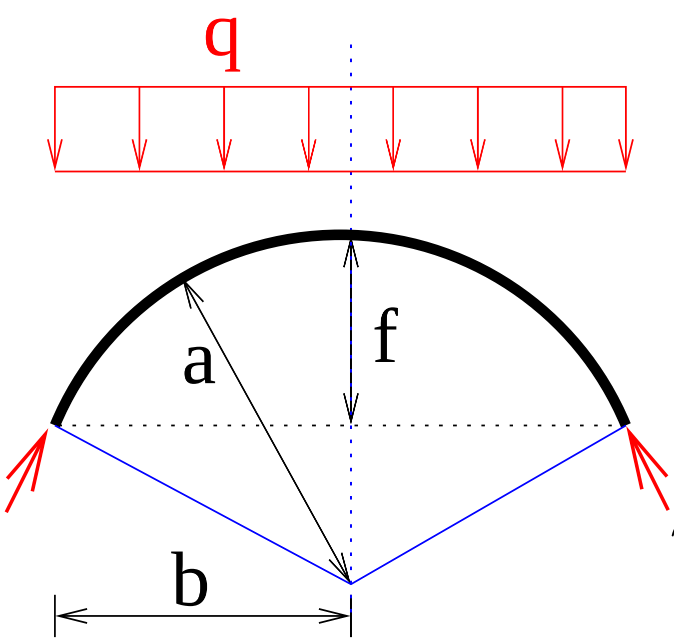
$$2\pi r n_x \sin\alpha + Q = 0$$

Síly:

$$n_x = -\frac{Q}{2\pi r \sin\alpha}$$

$$n_y = \frac{Q}{2\pi r \sin^2\alpha} - \frac{p_z r}{\sin\alpha}$$

Kulová báň (1)



$$a = \frac{f^2 + b^2}{2f}$$

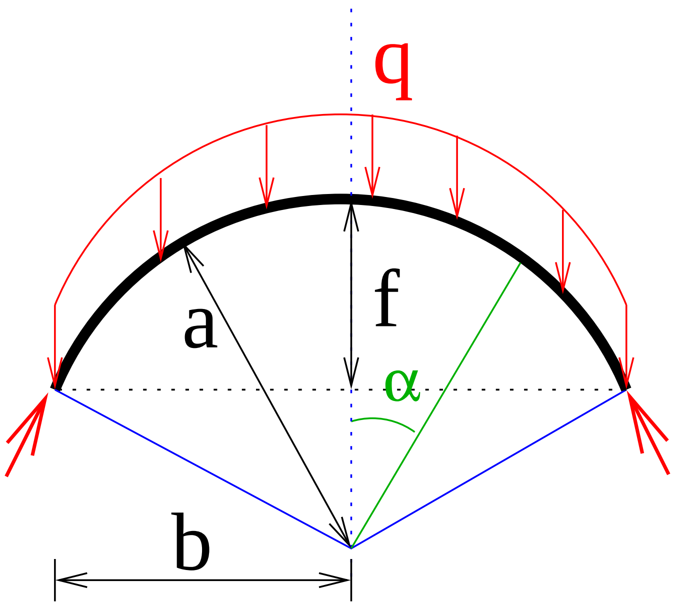
$$Q = q\pi r^2 = q\pi a^2 \sin^2 \alpha$$

$$p_z = q \cos^2 \alpha$$

$$n_x = -\frac{q\pi a^2 \sin^2 a}{2\pi a \sin^2 \alpha} = -\frac{1}{2}qa$$

$$n_y = \frac{q\pi a^2 \sin^2 a}{2\pi\alpha \sin^2 \alpha} = \left(\frac{1}{2} - \sin^2 \alpha\right) qa$$

Kulová báň (2)



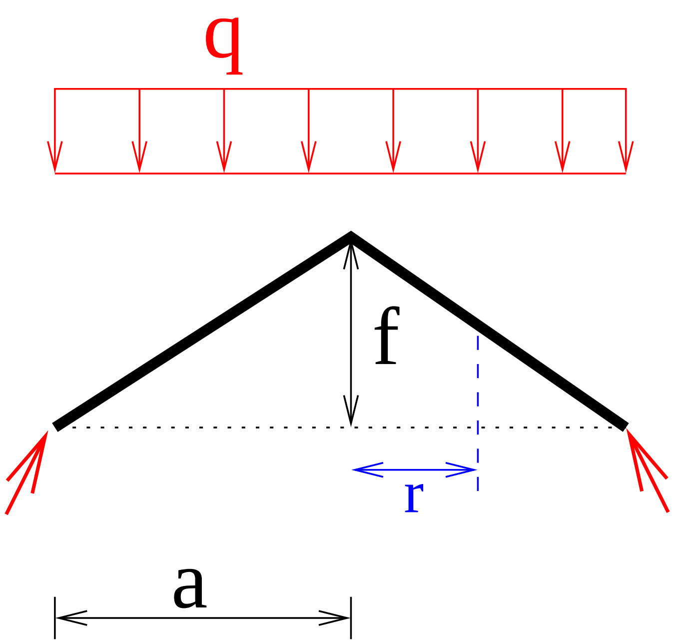
$$Q = q2\pi a^2(1 - \cos\alpha)$$

$$p_z = q\cos\alpha$$

$$n_x = = -\frac{1}{1+\cos\alpha}qa$$

$$n_y = = \left(\frac{1}{1+\cos\alpha} - \cos\alpha\right)qa$$

Kuželová báň (1)



$$r_x = \infty$$

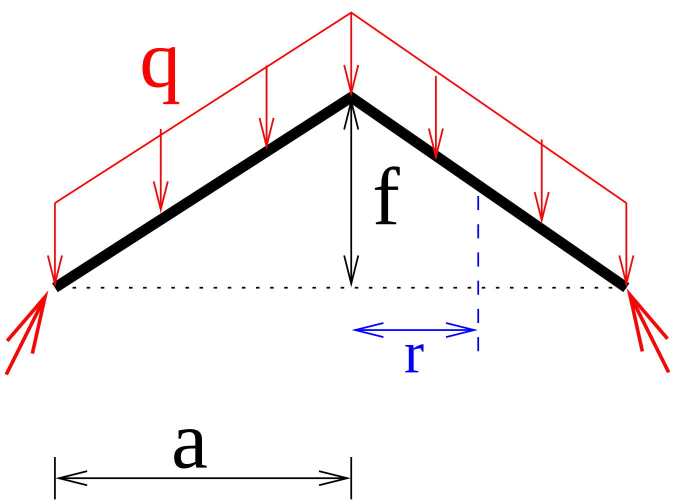
$$Q = q 2 \pi a^2$$

$$p_z = q \cos^2 \alpha$$

$$n_x = = -\frac{1}{2 \sin \alpha} q a$$

$$n_y = = -q \; a \; \cos \alpha \cot \alpha$$

Kuželová báň (2)



$$r_x = \infty$$

$$Q = \frac{q\pi\ a}{\cos\alpha}$$

$$p_z = q\cos\alpha$$

$$n_x \ = \ = -\frac{1}{2\sin 2\alpha}qa$$

$$n_y \ = \ = -q\ a\ \cot\alpha$$

Ohybová teorie: podmínky rovnováhy (1)

Podmínky rovnováhy:

$$\begin{aligned}
\sum F_{i,x} &= 0: \quad \left(n_x + \frac{dn_x}{dx}dx\right) ad\varphi - n_x ad\varphi + p_x ad\varphi dx = 0 \\
\sum F_{i,y} &= 0: \quad \left(q_x + \frac{dq_x}{dx}dx\right) ad\varphi - q_x ad\varphi + n_y d\varphi dx + p_z ad\varphi dx = 0 \\
\sum M_{i,y} &= 0: \quad \left(m_x + \frac{dm_x}{dx}dx\right) ad\varphi - m_x ad\varphi + q_x ad\varphi dx = 0
\end{aligned}$$

Ohybová teorie: podmínky rovnováhy (2)

Po úpravě:

$$
\begin{aligned}
\frac{dn_x}{dx} + p_x &= 0 \\
\frac{dq_x}{dx} + \frac{n_y}{a} &= 0 \\
\frac{dm_x}{dx} - q_x &= 0
\end{aligned}
$$

Ohybová teorie: geometrické rovnice

$$
\begin{aligned}
\varepsilon_x &= \frac{du}{dx} \\
\varepsilon_y &= -\frac{w}{a}
\end{aligned}
$$

Ohybová teorie: fyzikální rovnice (1)

$$
\begin{aligned}
n_x &= \frac{E\,h}{1-\nu^2}(\varepsilon_x + \nu\varepsilon_y) = \frac{E\,h}{1-\nu^2}\left(\frac{du}{dx} - \nu\frac{w}{a}\right)\\
n_y &= \frac{E\,h}{1-\nu^2}(\varepsilon_y + \nu\varepsilon_x) = \frac{E\,h}{1-\nu^2}\left(-\frac{w}{a} + \nu\frac{du}{dx}\right)
\end{aligned}
$$

Ohybová teorie: fyzikální rovnice (2)

Pro $n_x = 0$ (protože $\frac{dn_x}{dx} = -p_x$, tj. n_x závisí jen na p_x):

$$n_y = -\frac{Eh}{a}w$$

Momenty:

$$m_x = -D\frac{d^2w}{dx^2}$$

$$m_y = \nu m_x$$

Ohybová teorie: základní rovnice úlohy

$$D\frac{d^4w}{dx^4} + \frac{Eh}{a^2}w = p_z$$

Rovnici je možno řešit stejně jako rovnici stěny nebo desky.

Aplikace: kruhový válec (1)

$$D\frac{d^4w}{dx^4} + \frac{Eh}{a^2}w = p_z \Longrightarrow D\frac{d^4w}{dx^4} + \frac{4}{c^4}w = \frac{p_z}{D},$$

kde

$$c = \frac{1}{\sqrt[4]{3(1-mu)}}\sqrt{ah}$$

Pro $\nu = 0,2$ (beton): $c = 0,768\sqrt{ah}$

Aplikace: kruhový válec (2)

$$D\frac{d^4 w}{dx^4} + \frac{4}{c^4} w = \frac{p_z}{D},$$

Partikulární řešení:

$$w_o = \frac{a^2 p_z}{Eh}$$

Obecné řešení:

$$w_1 = C_1 f_1 + C_2 f_2 + C_3 f_3 + C_4 f_4$$

Aplikace: kruhový válec (3)

Funkce f_i:

$$
\begin{aligned}
f_1 &= e^{-\frac{x}{c}} cos\frac{x}{c} \\
f_2 &= e^{-\frac{x}{c}} sin\frac{x}{c} \\
f_3 &= e^{-\frac{l-x}{c}} cos\frac{l-x}{c} \\
f_4 &= e^{-\frac{l-x}{c}} cos\frac{l-x}{c}
\end{aligned}
$$

Konstanty C_i se určí z okrajových podmínek.

Aplikace: kruhový válec (4)

Okrajové podmínky:

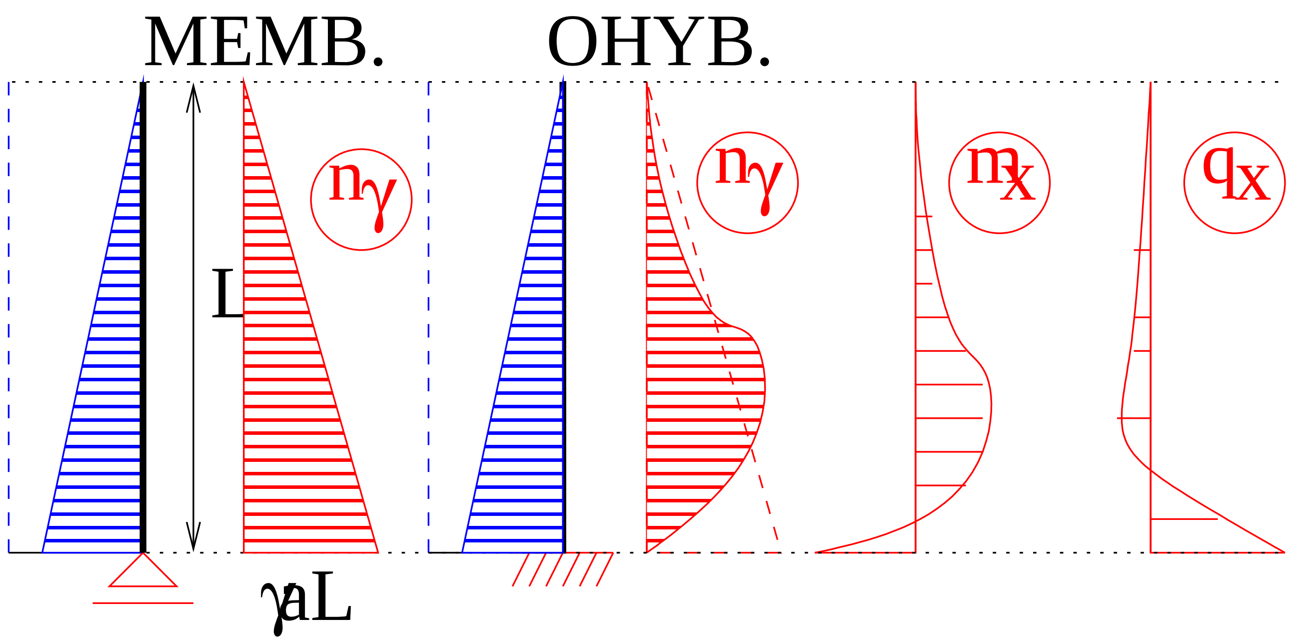
- volný (**nezatížený**) okraj: $m_x = 0$, $q_x = 0$

- kloub: $m_x = 0$, $w = 0$

- vetknutí: $w = 0$, $\frac{dw}{dx} = 0$

Aplikace: kruhový válec (5)

Srovnání membránového (M) a ohybového (O) řešení pro zatížení hydrostatickým tlakem:



Viz Teplý, Šmiřák: Pružnost a plasticita II, str. 97 – 105