

Poškození a jeho lokalizace

Na rozdíl od slov pružnost, plasticita nebo lom, které jsou v běžném životě používány zhruba ve stejném smyslu, jako v mechanice, je význam slova **poškození** velmi široký. Sprayeři? Ne. Snížení vnitřní integrity způsobené vznikem, šířením a vzájemným spojováním malých trhlin, dutin a podobných defektů.

Narušení spojitosti pole posunutí se ignoruje, dále pracujeme s představou kontinua (zůstává možnost definovat složky napětí a deformace a psát pro ně rovnice v klasickém tvaru). Ve skutečnosti se však jedná o hodnoty zprůměrované přes jistý reprezentativní objem materiálu, který významně větší, než rozměry defektu, avšak významně menší, než rozměry konstrukce. Otevření trhlin se převádí na ekvivalentní nepružnou deformaci (rozetřené trhliny – *smearred cracks*).

Namísto detailního popisu jednotlivých trhlin se používá zjednodušený popis jejich **vlivu na tuhost a pevnost** reprezentativního objemu materiálu. To je vhodný popis pro počáteční fáze deformačního procesu, kdy jsou efekty velmi malé (mikrotrhliny apod.) a dobře rozptýlené v mikrostruktuře materiálu.

Pokud se růst defektů zkoncentruje jen do některých z nich, zatímco ostatní se přestanou rozvíjet, hovoříme o **lokalizaci nepružného přetváření**. Pokud hovoříme o trhlinách, dochází k přechodu od mikrotrhlin k magistrální trhlíně, která se může významně podílet na zhroucení celé konstrukce.

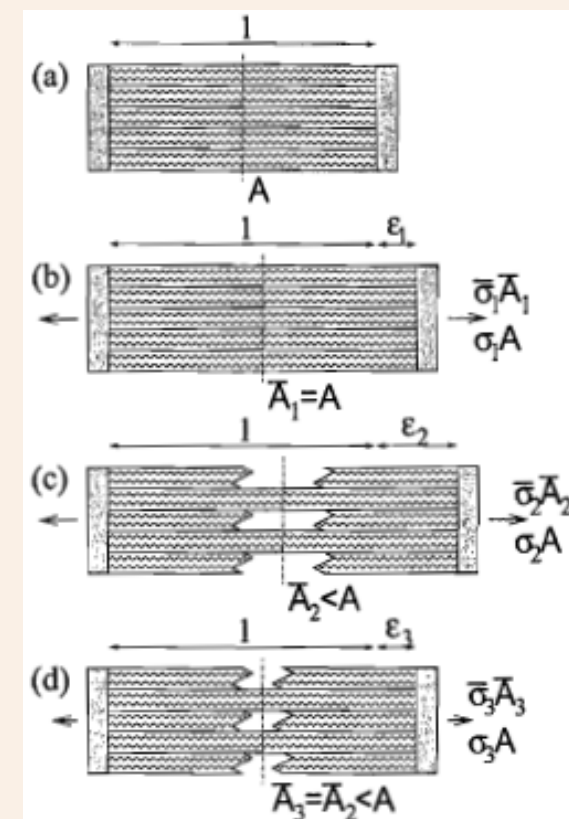
Při zkoumání zatěžovacího procesu je výhodné pracovat s jediným modelem od počátečních fází s rozptýleným poškozením přes postupnou lokalizaci až k totálnímu porušení. Proto se modely poškození často používají i pro popis velkých trhlin. To přináší určitá úskalí a modely v rámci teorie kontinua vyžadují speciální úpravy.

Jednoosý model poškození

Představa materiálu jako svazek vláken rovnoběžných se směrem namáhání.

Vlákna zpočátku pružná. Působící síla se rovnoměrně rozdělí mezi všechna vlákna, tedy na celkovou plochu všech vláken A . Vlákna jsou křehká a jejich pevnosti (nebo maximální protažení) se liší. Efektivní průřezová plocha vláken A_e postupně klesá z A do nuly.

Nominální napětí je definováno jako síla dělená původní celkovou plochou, zatímco *efektivní napětí* je síla vztažená na aktuální plochu (dosud neporušených vláken). Oscilace napětí v reálné mikrostruktuře tohoto typu zanedbáme.



Obrázky a části textu převzaty z:

Jirásek, M., Zeman, J. (2006) Přetváření a porušování materiálů – dotvarování, plasticita, lom a poškození. Skriptum. České vysoké učení technické v Praze.

Jednoosý model poškození

Sílu přenášenou materiálem lze vyjádřit jako součin nominálního napětí a nominální plochy, nebo také jako součin efektivního napětí a efektivní plochy. Ze vztahu $\sigma A = \bar{\sigma} \bar{A}$ dostaneme

$$\sigma = \frac{\bar{A}}{A} \bar{\sigma} = \beta \bar{\sigma} \quad (4.1)$$

kde poměr $\beta = \bar{A}/A$ mezi efektivní a nominální plochou je skalární veličina charakterizující *integritu* materiálu. V mechanice poškození se častěji používá tzv. *parametr poškození*,² definovaný jako

$$\omega = 1 - \beta = 1 - \frac{\bar{A}}{A} = \frac{A - \bar{A}}{A} = \frac{A_d}{A} \quad (4.2)$$

kde $A_d = A - \bar{A}$ je poškozená (prasklá) část původní plochy. Pro nepoškozený materiál je $\bar{A} = A$, tj. $A_d = 0$ a $\omega = 0$. V důsledku šíření a spojování mikrodefektů parametr poškození roste a v pokročilých fázích deformačního procesu se blíží k mezní hodnotě $\omega = 1$, která odpovídá úplně poškozenému materiálu s nulovou efektivní plochou.

V nejjednodušší verzi modelu se předpokládá, že každé vlákno je až do svého prasknutí lineárně pružné.³ V takovém případě se efektivní napětí $\bar{\sigma}$ vypočte podle Hookeova zákona

$$\bar{\sigma} = E \epsilon \quad (4.3)$$

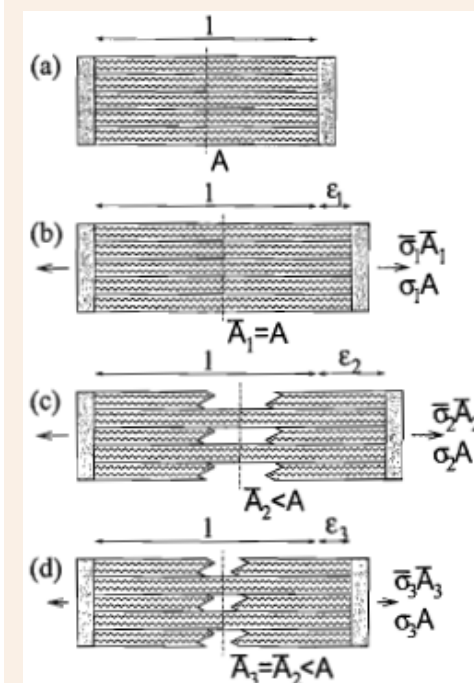
Spojením (4.1)–(4.3) získáme výraz pro nominální napětí

$$\sigma = (1 - \omega) E \epsilon \quad (4.4)$$

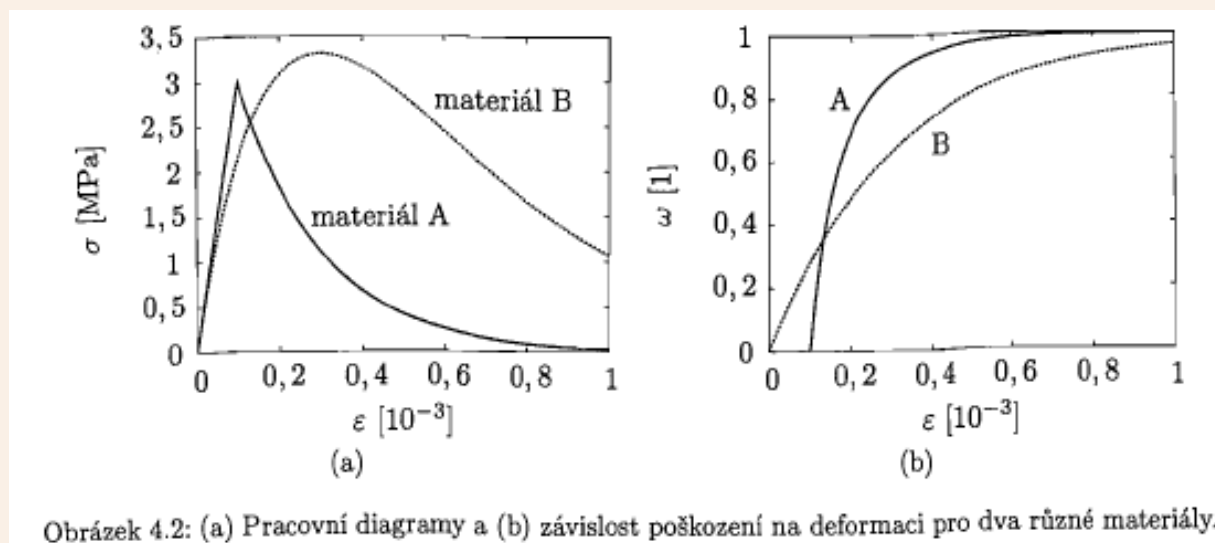
Vývoj poškození lze charakterizovat tzv. *zákonem poškození*, prozatím chápaným jako závislost parametru poškození na deformaci, který popíšeme vztahem

$$\omega = g(\epsilon) \quad (4.5)$$

Funkce g souvisí s tvarem pracovního diagramu a může být přímo odvozena z jednoosé tahové zkoušky.



Identifikace zákona poškození z jednoosé tahové zkoušky



Obrázek 4.2: (a) Pracovní diagramy a (b) závislost poškození na deformaci pro dva různé materiály.

Pro materiál A je diagram lineární až do po vrchol a následuje exponenciální pokles napětí

Podle vztahů 4.4 – 4.5 musí ovšem pro každou hodnotu deformace musí platit

$$\sigma = s(\varepsilon) = \begin{cases} E\varepsilon & \text{pro } 0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0 \\ f_t \exp\left(-\frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{\varepsilon_f}\right) & \text{pro } \varepsilon_0 \leq \varepsilon \end{cases}$$

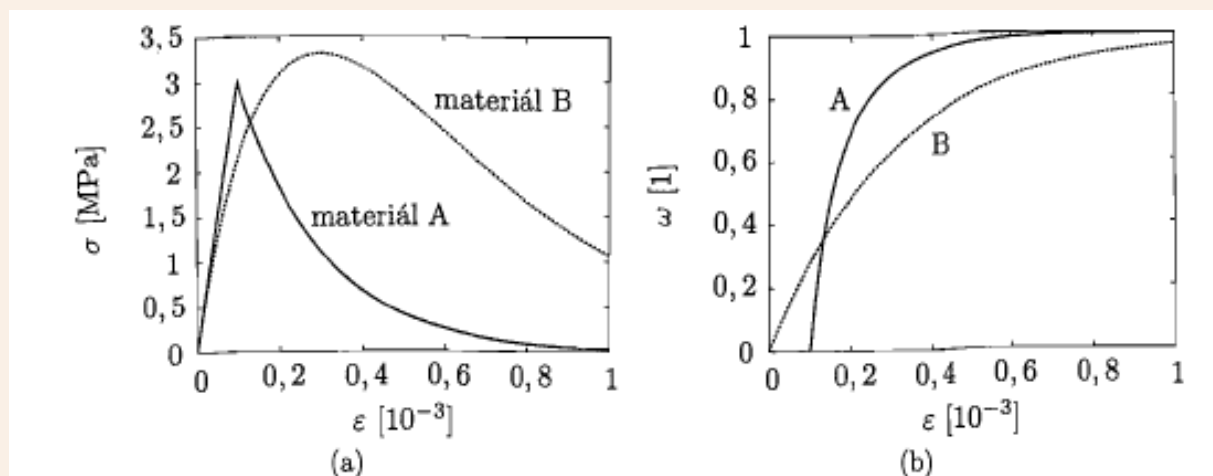
Dosažením dostaneme poškození omega jako funkci g(epsilon)

$$[1 - g(\varepsilon)]E\varepsilon = s(\varepsilon)$$

Rozvoj poškození a tedy degradace sečné tuhosti začíná až po dosažení deformace, která odpovídá vrcholu pracovního diagramu.

$$g(\varepsilon) = \begin{cases} 0 & \text{pro } 0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0 \\ 1 - \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon} \exp\left(-\frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{\varepsilon_f}\right) & \text{pro } \varepsilon_0 \leq \varepsilon \end{cases}$$

Identifikace zákona poškození z jednoosé tahové zkoušky



Obrázek 4.2: (a) Pracovní diagramy a (b) závislost poškození na deformaci pro dva různé materiály.

Pro materiál B je diagram nelineární již od počátku zatěžování.

$$\sigma = s(\varepsilon) = E\varepsilon \exp\left(-\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\right) = E\varepsilon(1-\omega(\varepsilon_0))$$

Snadno lze ověřit, že její derivace

$$\frac{ds(\varepsilon)}{d\varepsilon} = E \exp\left(-\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\right) + E\varepsilon \exp\left(-\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\right) \left(-\frac{1}{\varepsilon_0}\right) = E \left(1 - \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\right) \exp\left(-\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\right) \quad (4.11)$$

nabývá pro $\varepsilon = 0$ hodnoty E a pro $\varepsilon = \varepsilon_0$ hodnoty nula. Parametr E má tedy skutečně význam modulu pružnosti a parametr ε_0 představuje deformaci odpovídající vrcholu pracovního diagramu. Dosazením (4.10) do (4.8) získáme funkci popisující závislost poškození na deformaci,

$$g(\varepsilon) = 1 - \exp\left(-\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\right) = \omega(\varepsilon_0) \quad (4.12)$$

Její graf je vynesena na obr. 4.2b pro konkrétní hodnotu $\varepsilon_0 = 3 \cdot 10^{-4}$.

Jednoosý model poškození

Vývoj efektivního napětí, parametru poškození a nominálního napětí v materiálu, který zůstává lineárně pružný až po dosažení vrcholu pracovního diagramu, je znázorněn na obr. 4.3a. Popis vývoje poškození ve tvaru (4.5) je ale platný jen pro monotónní zatěžování, při kterém se deformace vzorku ε neustále zvětšuje. Pokud je materiál nejprve zatížen až po dosažení jisté deformace ε_2 , které odpovídá poškození $\omega_2 = g(\varepsilon_2)$, a pak deformace začne klesat (obr. 4.1d), poškozená plocha se již nemění a materiál se chová jako lineárně pružný materiál s redukováným modulem pružnosti $E_2 = (1 - \omega_2)E$. Během odtěžování se tedy parametr poškození nemění a jeho okamžitá hodnota nezávisí přímo na okamžité hodnotě deformace ε , ale na její největší hodnotě dosažené při předcházejícím zatěžování. Proto zavedeme vnitřní proměnnou κ , představující nejvyšší úroveň deformace dosaženou v materiálu během jeho „života“ až do současného okamžiku t . Matematicky to zapíšeme jako

$$\kappa(t) = \max_{t' \leq t} \varepsilon(t') \quad (4.13)$$

kde t označuje čas, ve kterém κ vyhodnocujeme, a t' probíhá všechny předcházející časy. Pro zjednodušení zápisu ale nebudeme v dalších rovnicích argument t u κ uvádět, stejně jako nepíšeme explicitně, že všechny veličiny závisí na prostorových souřadnicích. S využitím zavedené vnitřní proměnné κ zobecníme rovnici (4.5) na

$$\omega = g(\kappa) \quad (4.14)$$

Při monotónním zatěžování je neustále $\kappa = \varepsilon$, takže (4.5) můžeme považovat za zvláštní případ (4.14). Při obecném zatěžování ale výpočet podle (4.13)–(4.14) zabezpečí, že se parametr poškození nemůže zmenšit. Vývoj efektivního napětí, parametru poškození a nominálního napětí během nemonotónního testu je zachycen na obr. 4.3b. Všimněte si, že při úplném odstranění působícího napětí by zmizela i deformace (díky pružnému chování dosud nepřetržených vláken). Model poškození ve své základní podobě tedy nepostihuje trvalé deformace. Přestože po odtížení zmizí napětí i deformace a vracíme se do počátku pracovního diagramu, stav materiálu je už jiný než na počátku zatěžování, protože parametr poškození není nulový a tuhost a pevnost při novém zatížení tahem se liší od původních hodnot. Vliv předchozího vývoje na stav materiálu je zaznamenán ve vnitřní proměnné κ , resp. v odpovídajícím parametru poškození ω .

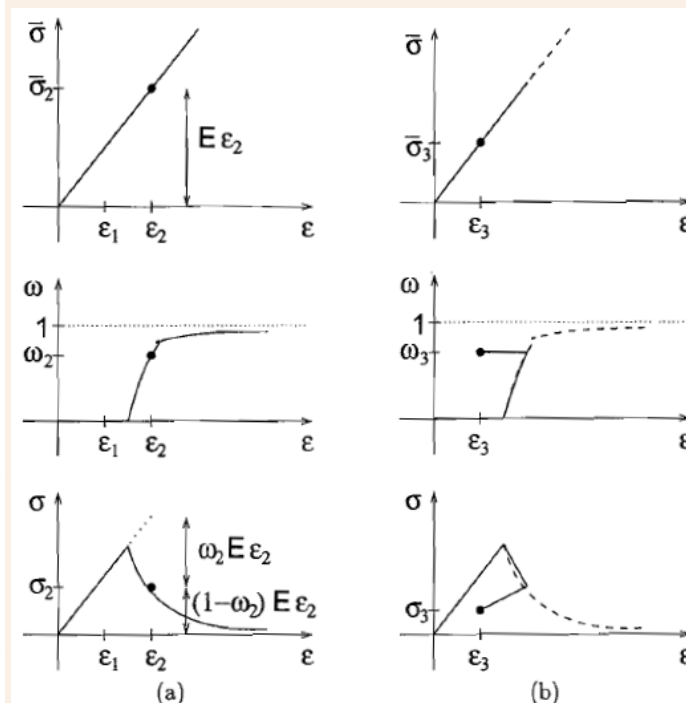
Základní rovnice jednoosého modelu poškození jsou v mírně upraveném tvaru sestaveny do tab. 4.1. Abychom lépe osvětlili podstatu modelu, přepsali jsme vztah mezi napětím a deformací (4.4) do tvaru

$$\sigma = E_s \varepsilon \quad (4.15)$$

kde

$$E_s = (1 - \omega)E \quad (4.16)$$

je upravený modul pružnosti poškozeného materiálu. Říkáme mu *sečný modul*, protože odpovídá sklonu přímky spojující v pracovním diagramu daný bod (ε, σ) s počátkem. Rovnice v tabulce také pracují s alternativní definicí



Obrázek 4.3: Vývoj efektivního napětí $\bar{\sigma}$, parametru poškození ω a nominálního napětí σ při (a) monotónním zatěžování, (b) nemonotónním zatěžování.

Jednoosý model poškození

Tabulka 4.1: Matematický popis modelu poškození pro jednoosou napjatost.

Hookeův zákon v sečném tvaru	$\sigma = E_s \varepsilon$
sečný modul pružnosti	$E_s = (1 - \omega)E$
zákon poškození	$\omega = g(\kappa), \quad \dot{\kappa} \geq 0$
definice funkce poškození	$f(\varepsilon, \kappa) = \varepsilon - \kappa$
podmínka přípustnosti	$f(\varepsilon, \kappa) \leq 0$
podmínka komplementarity	$\dot{\kappa} f(\varepsilon, \kappa) = 0$

vnitřní proměnné κ . Místo jejího výpočtu z celé předchozí historie materiálu jsou stanovena pravidla pro vývoj její okamžité hodnoty. Hodnota proměnné κ nikdy nesmí být menší než deformace ε . Pokud je větší, znamená to, že materiál je odtížen oproti stavu největší deformace dosažené v minulosti a hodnota κ se v nejbližší budoucnosti měnit nebude. Pokud je $\kappa = \varepsilon$, jsme ve stavu, kdy může dojít k dalšímu poškozování materiálu, nebo k pružnému odtížení. Na základě analogie s funkcí plasticity proto zavádíme tzv. *funkci poškození* $f(\varepsilon, \kappa) = \varepsilon - \kappa$, s jejíž pomocí lze všechny zmíněné případy popsat podmínkami zatěžování-odtěžování ve známém tvaru

$$f(\varepsilon, \kappa) \leq 0, \quad \dot{\kappa} \geq 0, \quad \dot{\kappa} f(\varepsilon, \kappa) = 0 \quad (4.17)$$

První podmínka odpovídá nerovnosti $\varepsilon \leq \kappa$ a vymezuje přípustné stavy deformace, kterých lze dosáhnout beze změny vnitřní proměnné κ . Druhá říká, že κ nemůže klesat, a můžeme ji chápat jakou součást zákona poškození, podobně jako podmínka $\dot{\lambda} \geq 0$ byla v teorii plasticity považována za součást zákona plastického přetváření. Podle třetí podmínky pak κ může růst pouze, pokud jsou okamžité hodnoty ε a κ stejné, jde tedy o podmínku komplementarity.

Izotropní modely poškození (víceosá napjatost)

V obecném případě trojosé napjatosti pracujeme s šesti složkami napětí a šesti složkami deformace seskupenými do sloupcových matic σ a ϵ . Výstižný popis účinku defektů na tuhost a pevnost materiálu by také vyžadoval větší množství veličin, ale prozatím se omezíme na nejjednodušší model, který vystačí s jediným parametrem poškození ω . Pro jednoosý model je tuhost nepoškozeného materiálu popsána Youngovým modulem pružnosti E , který se v důsledku poškození redukuje na sečný modul pružnosti $E_s = (1 - \omega)E$. V případě víceosé napjatosti je tuhost nepoškozeného materiálu popsána maticí pružné tuhosti \mathbf{D}_e . Nejjednodušší víceosý model poškození je založen na předpokladu, že všechny prvky této matice, tj. všechny tuhostní koeficienty, se v důsledku poškození redukují stejným způsobem, úměrně faktoru integrity $1 - \omega$. Matice sečné tuhosti se tedy vypočte jako

$$\mathbf{D}_s = (1 - \omega)\mathbf{D}_e \quad (4.18)$$

a vztah mezi napětím a deformací nabyde tvaru

$$\sigma = \mathbf{D}_s \epsilon = (1 - \omega)\mathbf{D}_e \epsilon = (1 - \omega)\bar{\sigma} \quad (4.19)$$

kde

$$\bar{\sigma} = \mathbf{D}_e \epsilon \quad (4.20)$$

je efektivní napětí. Rovnice (4.18) je zobecněním (4.16) a (4.19) je zobecněním (4.15) a (4.4).

Izotropní modely poškození (víceosá napjatost)

Podobně jako pro jednoosý model je i zde třeba formulovat rovnice, jimiž se řídí vývoj parametru poškození ω . Opět můžeme předpokládat, že k růstu defektů dochází, pokud deformace materiálu překročí jistou mez, která odpovídá maximální úrovni deformace dosažené při předchozím zatěžování. Abychom mohli porovnávat různé deformační stavy charakterizované různými kombinacemi šesti složek deformace, je třeba zavést vhodnou srovnávací veličinu, která představuje ekvivalentní deformaci při jednoosé napjatosti. Jde o podobnou úvahu jako při konstrukci funkce plasticity, kdy jsme s mezí kluzu v jednoosém případě porovnávali jedinou nenulovou složku napětí a ve víceosém případě jistý výraz závislý na všech složkách napětí, např. odmocninu z invariantu J_2 . Konkrétní volba tohoto výrazu pak měla přímou souvislost se tvarem plochy plasticity v prostoru napětí. Podobně pro model poškození zavedeme *ekvivalentní deformaci* $\bar{\epsilon}$ závislou na složkách deformace ϵ , přičemž konkrétní volba funkce $\bar{\epsilon}(\epsilon)$ bude souviset s tzv. *plochou poškození* v prostoru deformací. Vnitřní proměnná κ pak bude představovat maximální hodnotu ekvivalentní deformace dosaženou v dosavadním průběhu deformačního procesu. Můžeme také zavést *funkci poškození*

$$f(\epsilon, \kappa) = \bar{\epsilon}(\epsilon) - \kappa \quad (4.21)$$

Tabulka 4.2: Matematický popis jednoduchého izotropního modelu poškození pro víceosou napjatost.

zobecněný Hookeův zákon v sečném tvaru	$\sigma = \mathbf{D}_s \epsilon$
sečná matice tuhosti	$\mathbf{D}_s = (1 - \omega)\mathbf{D}_e$
zákon poškození	$\omega = g(\kappa), \quad \dot{\kappa} \geq 0$
definice funkce poškození	$f(\epsilon, \kappa) = \bar{\epsilon}(\epsilon) - \kappa$
podmínka přípustnosti	$f(\epsilon, \kappa) \leq 0$
podmínka komplementarity	$\dot{\kappa} f(\epsilon, \kappa) = 0$

Izotropní modely poškození (víceosá napjatost)

Nejjednodušší víceosý model s jedním parametrem poškození ω je tedy popsán rovnicemi shrnutými v tab. 4.2. Vzhledem k tomu, že matice sečné tuhosti je skalárním násobkem matice pružné tuhosti, chová se podle takového modelu i poškozený materiál jako izotropní. Proto hovoříme o *izotropním modelu poškození* (anglicky „isotropic damage model“). Ve srovnání s jednoosým modelem podle tab. 4.1 se formální tvar zatěžovacích-odtěžovacích podmínek nemění, jen je funkce poškození f závislá na více složkách deformace a její konkrétní tvar závisí na volbě výrazu pro ekvivalentní deformaci $\tilde{\epsilon}$. Nejjednodušší volbou se zdá být norma deformace, pro kterou ale nemůžeme použít obvyklý výraz $\|\epsilon\| = \sqrt{\epsilon^T \epsilon}$, protože ten není invariantní při potočení souřadnicových os, vůči nimž jednotlivé složky deformace vyjadřujeme. Proto použijeme deformační normu $\|\epsilon\|_\epsilon$ definovanou podle vzorce (B.25) v dodatku B jako $\sqrt{\epsilon^T \mathbf{P}^{-1} \epsilon}$, a navíc ji vydělíme konstantou $\sqrt{1 + 2\nu^2}$ z důvodů, které vyplynou z následujícího příkladu. Ekvivalentní deformaci tedy definujeme jako

$$\tilde{\epsilon}(\epsilon) = \frac{\|\epsilon\|_\epsilon}{\sqrt{1 + 2\nu^2}} = \sqrt{\frac{\epsilon^T \mathbf{P}^{-1} \epsilon}{1 + 2\nu^2}} \quad (4.22)$$

případně při použití tzv. energetické normy jako

$$\tilde{\epsilon}(\epsilon) = \sqrt{\frac{\epsilon^T \mathbf{D}_e \epsilon}{E}} \quad (4.23)$$

O energetické normě mluvíme proto, že výraz $\epsilon^T \mathbf{D}_e \epsilon$ je dvojnásobkem potenciální energie pružné deformace nepoškozeného materiálu podrobeného deformaci ϵ , viz vzorec (B.49) v dodatku B.

Izotropní modely poškození (víceosá napjatost)

Co se rozumí protahováním a stlačováním (tedy kladnou a zápornou deformací) pro jednoosý model je jasné, ale pro obecný trojosý model je třeba objektivním způsobem definovat, jak z deformace popsané šesti složkami vybrat její kladnou část. Nebylo by například správné řídit se znaménky jednotlivých složek deformace, protože výsledek by pak závisel na konkrétní volbě soustavy souřadnic. K objektivní definici kladné části deformace dospějeme s využitím pojmu hlavních deformací. Hlavní deformace jsou totiž invarianty a navíc si je lze představit jako relativní protažení ve třech navzájem kolmých směrech, které na sebe zůstávají kolmé i po deformaci, takže odpovídající smyková zkosení jsou nulová. Pokud bychom pomocí hlavních deformací ε_1 , ε_2 a ε_3 počítali deformační normu, dostali bychom

$$\|\varepsilon\|_\varepsilon = \sqrt{\varepsilon^T \mathbf{P}^{-1} \varepsilon} = \sqrt{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2} \quad (4.27)$$

Pokud chceme vyloučit příspěvky pocházející od záporných deformací, kterým odpovídá zkracování příslušných vláken a zavírání trhlin kolmých na tato vlákna, pak vezmeme v úvahu pouze tzv. kladné části hlavních deformací. *Kladnou částí* $\langle x \rangle$ reálného čísla x rozumíme toto číslo samo, pokud je kladné, a nulu, pokud není. Jinými slovy, definujeme⁴

$$\langle x \rangle = \begin{cases} x & \text{pro } x > 0 \\ 0 & \text{pro } x \leq 0 \end{cases} \quad (4.28)$$

Pokud z hlavních deformací ponecháme jen jejich kladnou část, získáme obecně jiný deformační stav, který budeme značit $\langle \varepsilon \rangle$. Jestliže jsou všechny hlavní deformace kladné, je $\langle \varepsilon \rangle = \varepsilon$, a pokud jsou všechny záporné nebo nulové, je $\langle \varepsilon \rangle = \mathbf{0}$. Kromě toho však existuje celá řada případů s některými hlavními deformacemi kladnými a jinými zápornými, pro které je $\langle \varepsilon \rangle$ nenulové, ale různé od ε .

Izotropní modely poškození (víceosá napjatost)

V zájmu zdůraznění vlivu tahových deformací na šíření defektů můžeme místo norem celé deformace použít při definici ekvivalentní deformace jen normy kladné části deformace. Tato úvaha vede k modifikaci vztahů (4.22)–(4.23) a k definicím ekvivalentní deformace vzorci

$$\bar{\varepsilon}(\boldsymbol{\varepsilon}) = \|\langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle\|_{\varepsilon} = \sqrt{\langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle^T \mathbf{P}^{-1} \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle} = \sqrt{\langle \varepsilon_1 \rangle^2 + \langle \varepsilon_2 \rangle^2 + \langle \varepsilon_3 \rangle^2} \quad (4.29)$$

nebo

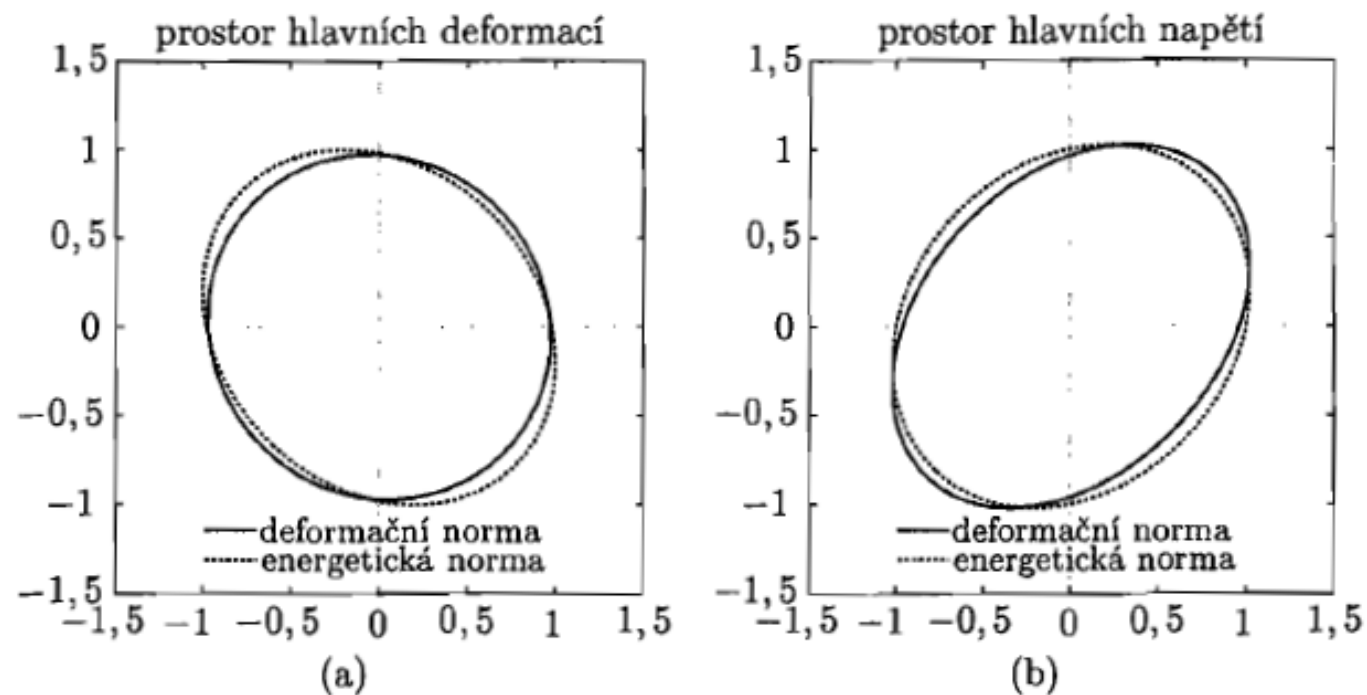
$$\bar{\varepsilon}(\boldsymbol{\varepsilon}) = \sqrt{\frac{\langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle^T \mathbf{D}_e \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle}{D_{e11}}} \quad (4.30)$$

Všimněte si, že v tzv. Mazarsově definici (4.29) se už na rozdíl od (4.22) nepoužívá faktor závislý na Poissonovu součiniteli ν . Za jednoosého tahu je totiž kladná jen jedna hlavní deformace $\varepsilon_1 = \varepsilon_x > 0$, zatímco další dvě hlavní deformace, odpovídající příčnému směru, jsou $\varepsilon_2 = \varepsilon_3 = -\nu\varepsilon_x < 0$. Proto za jednoosého tahu dostaneme přímo $\|\langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle\|_{\varepsilon} = \varepsilon_x$ a ekvivalentní deformace podle (4.29) bez dalších úprav odpovídá složce ε_x . Naproti tomu při výpočtu podle energetické normy dostaneme za jednoosého tahu $\langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle^T \mathbf{D}_e \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle = D_{e11} \varepsilon_x^2$, kde

$$D_{e11} = \frac{E(1 - \nu)}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \quad (4.31)$$

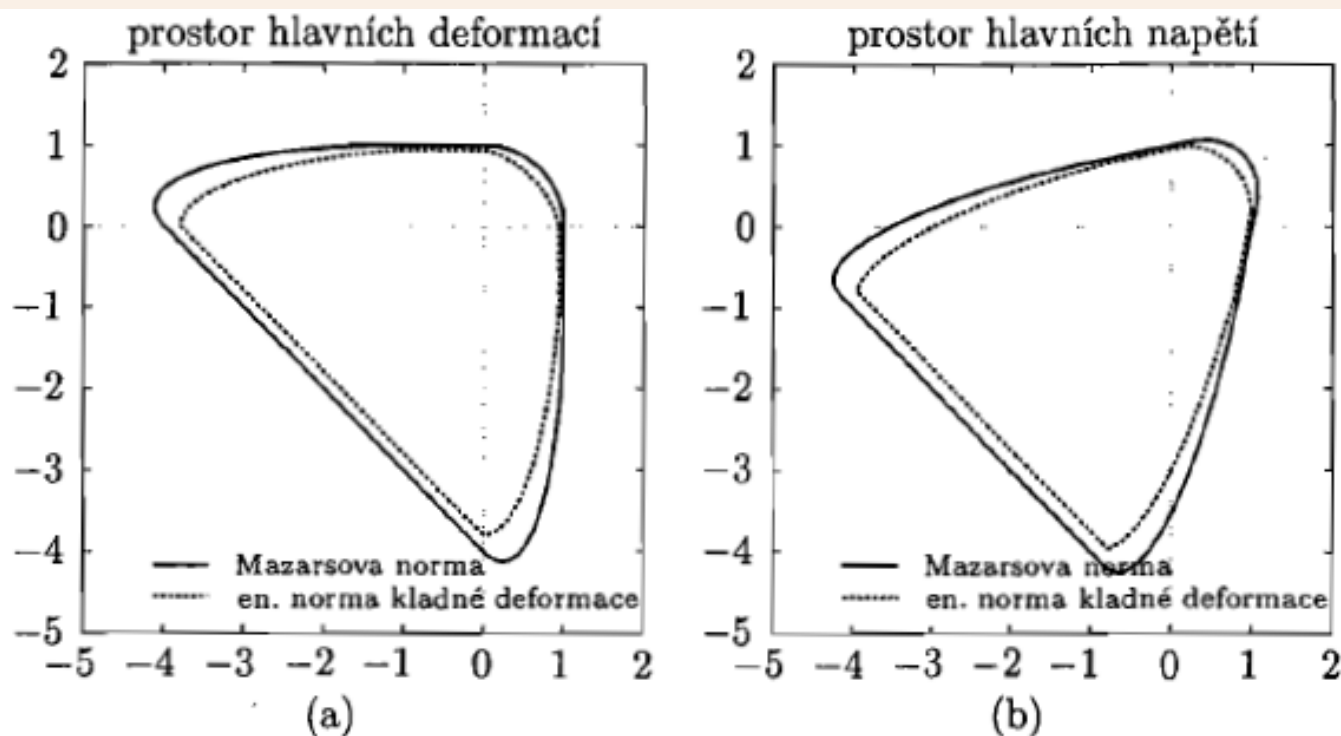
je tuhostní koeficient z prvního řádku a prvního sloupce matice pružné tuhosti, jímž je třeba ve (4.30) nahradit modul pružnosti E použitý v původním vzorci (4.23).

Izotropní modely poškození (víceosá napjatost)



Obrázek 4.4: Plochy poškození odpovídající konstantním úrovním ekvivalentní deformace definované podle (4.22) a (4.23), zobrazené (a) v rovině hlavních deformací, (b) v rovině hlavních napětí. Předpokládá se rovinná napjatost a Poissonův součinitel $\nu = 0,2$.

Izotropní modely poškození (víceosá napjatost)



Obrázek 4.5: Plochy poškození odpovídající konstantním úrovním ekvivalentní deformace definované podle (4.29) a (4.30), zobrazené (a) v rovině hlavních deformací, (b) v rovině hlavních napětí. Předpokládá se rovinná napjatost a Poissonův součinitel $\nu = 0,2$.

Izotropní modely poškození (víceosá napjatost)

Příklad 4.4: Pracovní diagramy v jednoosém tahu a jednoosém tlaku

Pro jednoduchý model s jedním parametrem poškození ω ukážeme, jaký je vztah mezi pracovními diagramy v tahu a v tlaku. Při jednoosém namáhání napětím σ_x jsou normálové deformace ε_x a $\varepsilon_y = \varepsilon_z = -\nu\varepsilon_x$ hlavními deformacemi. Všechny dosud uvedené vzorce pro ekvivalentní deformaci byly upraveny tak, aby při jednoosém tahu platilo $\tilde{\varepsilon} = \varepsilon_x$. Při monotónním zatěžování je $\kappa = \tilde{\varepsilon} = \varepsilon_x$ a $\omega = g(\varepsilon_x)$. Vztah mezi složkami napětí σ_x a deformace ε_x je pak popsán rovnicí

$$\sigma_x = (1 - \omega)E\varepsilon_x = [1 - g(\varepsilon_x)]E\varepsilon_x \quad (4.39)$$

Pokud je pracovní diagram v jednoosém tahu popsán analyticky jako $\sigma_x = s(\varepsilon_x)$, funkce g popisující závislost

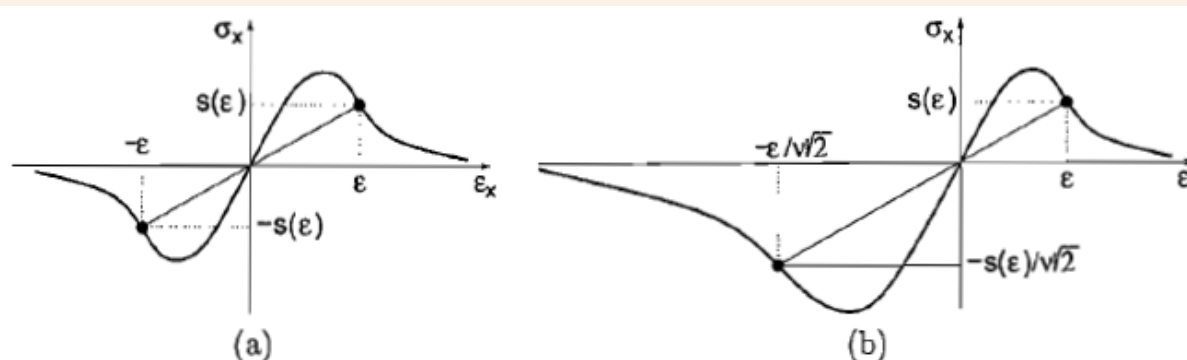
poškození na deformaci se určí jako

$$g(\varepsilon_x) = 1 - \frac{s(\varepsilon_x)}{E\varepsilon_x} \quad (4.40)$$

Při jednoosém tlaku, kdy $\varepsilon_x < 0$ a $\varepsilon_y = \varepsilon_z = -\nu\varepsilon_x > 0$, dávají vzorce (4.22) a (4.23) ekvivalentní deformaci $\tilde{\varepsilon} = |\varepsilon_x| = -\varepsilon_x$ a vztah mezi napětím a deformací je popsán rovnicí

$$\sigma_x = (1 - \omega)E\varepsilon_x = [1 - g(-\varepsilon_x)]E\varepsilon_x = -[1 - g(-\varepsilon_x)](-E\varepsilon_x) = -s(-\varepsilon_x) \quad (4.41)$$

Izotropní modely poškození (víceosá napjatost)



Obrázek 4.6: Vztah mezi pracovními diagramy v tahu a v tlaku pro jednoduchý izotropní model poškození s ekvivalentní deformací danou (a) vzcrcem (4.22) nebo (4.23), (b) vzcrcem (4.29).

V tomto případě je tedy v tlaku vztah mezi napětím vynásobeným $\nu\sqrt{2}$ a deformací vynásobenou tímtež faktorem stejný, jako vztah mezi napětím a deformací v tahu. Jinými slovy, pracovní diagram v tlaku vznikne z pracovního diagramu v tahu pouhou změnou měřítka na obou osách, přičemž jeho tvar zůstává beze změny. Graficky je to znázorněno na obr. 4.6b. Ať už je konkrétní tvar pracovního diagramu jakýkoli, pevnosti v tahu a v tlaku budou vždy v poměru $f_t:f_c = \nu\sqrt{2}$. Pro ekvivalentní deformaci založenou na energetické normě kladné části deformace podle (4.30) lze odvodit velmi podobný výsledek, jen se poměr pevností změní na $f_t:f_c = \nu\sqrt{2/(1-\nu)}$.

□

Příklad ukázal, že pro uvažovaný typ jednoduchého modelu poškození s definicí ekvivalentní deformace založenou na normě kladné části deformace je poměr mezi pevnostmi v tahu a v tlaku závislý pouze na Poissonovu součiniteli. To ovšem jednak nelogické, protože není žádná bezprostřední souvislost mezi příčnou kontrakcí a poměrem tahové a tlakové pevnosti, jednak nepříjemné, protože v obecném případě nebude možné přesně popsat příčnou kontrakci a zároveň i poměr pevností. Například pro beton je obvyklá hodnota Poissonova součinitele kolem 0,2 a poměr pevností $f_t:f_c$ zpravidla mezi 1:8 a 1:12. Ovšem při volbě $\nu = 0,2$ bychom dostali poměr pevností $f_t:f_c = 0,2\sqrt{2} = 0,283 = 1:3,54$, resp. $f_t:f_c = 0,2\sqrt{2/(1-0,2)} = 0,316 = 1:3,16$, tedy příliš nízký. Abychom dosáhli poměru $f_t:f_c = 1:10$, museli bychom zvolit $\nu = 0,071$, resp. $\nu = 0,068$, což jsou nereálné hodnoty.

Izotropní modely poškození (víceosá napjatost)

Model poškození pro beton, který navrhl Mazars s využitím ekvivalentní deformace (4.29), odstraňuje závislost poměru $f_t:f_c$ na Poissonovu součiniteli tím, že místo jednoho parametru poškození ω používá dva, ω_t a ω_c , přičemž první z nich odpovídá tahovému namáhání a druhý tlakovému. Tyto parametry se počítají ze stejné vnitřní proměnné κ , ale podle dvou různých vzorců, je tedy $\omega_t = g_t(\kappa)$ a $\omega_c = g_c(\kappa)$. Funkce g_t a g_c je možné nakalibrovat z pracovních diagramů v tahu a v tlaku nezávisle na sobě. Při výpočtu napětí se pak pro namáhání jednoosým tahem počítá s poškozením ω_t , tedy podle vzorce $\sigma = (1 - \omega_t)E\varepsilon$, a při namáhání jednoosým tlakem se místo ω_t použije ω_c . To zní poměrně jednoduše, ale otázka je, jak postupovat při obecném namáhání. Mazars navrhl parametr ω dosazovaný do vztahu $\sigma = (1 - \omega)\mathbf{D}_e\varepsilon$ vypočítat jako vážený průměr mezi ω_t a ω_c , přičemž použité váhové koeficienty závisejí na typu napjatosti. Další podrobnosti o tomto modelu zde uvádět nebudeme, protože v každém případě není příliš realistické modelovat tlakové přetváření betonu ani jiných materiálů pomocí čistého modelu poškození. Pro všechny takové modely se totiž při odtěžování pracovní diagram vrací do počátku a nevznikají žádné trvalé deformace. To je ovšem v rozporu s experimentálními výsledky. Pro tahové namáhání jsou předpoklady teorie poškození bližší realitě, a proto je pro materiály jako beton vhodné kombinovat teorie poškození a plasticity tak, aby v tahu bylo dominantním mechanismem šíření trhlin a v tlaku plastický pokluz. Podrobnější informace o modelech kombinujících teorie plasticity a poškození lze najít v článku 4.2.3.

Izotropní modely poškození (víceosá napjatost)

Pro některé aplikace stačí uvažovat porušení materiálu tahem, případně smykem, protože tlaková napětí zůstávají poměrně malá ve srovnání s tlakovou pevností. V takových případech je pohodlné použít jednoduchý model poškození se vzorcem pro ekvivalentní deformaci sestrojeným tak, aby příslušná obálka pevnosti dobře aproximovala skutečnou v oblasti převážně tahových napětí, zatímco o popis tlakového porušení se vůbec neustíjí. Vhodný je například vzorec vedoucí k podobné obálce pevnosti, k jaké vede v případě plasticity Rankinovo kritérium maximálního hlavního napětí. Toho lze docílit tím, že za ekvivalentní deformaci $\tilde{\epsilon}$ prohlásíme největší z hlavních hodnot efektivního napětí vydělenou modulem pružnosti. Zdánlivě je rozpor v tom, že $\tilde{\epsilon}$ by mělo být odvozeno z deformace, nikoli z napětí. Nicméně efektivní napětí je jen deformace přenásobená maticí pružné tuhosti, takže podle navržené definice se ekvivalentní deformace dá skutečně jednoznačně vypočítat ze složek deformace, aniž bychom museli znát další stavové veličiny, jako je třeba poškození. Hlavní efektivní napětí $\bar{\sigma}_1$ můžeme podle zobecněného Hookeova zákona (B.13)–(B.14) vyjádřit jako

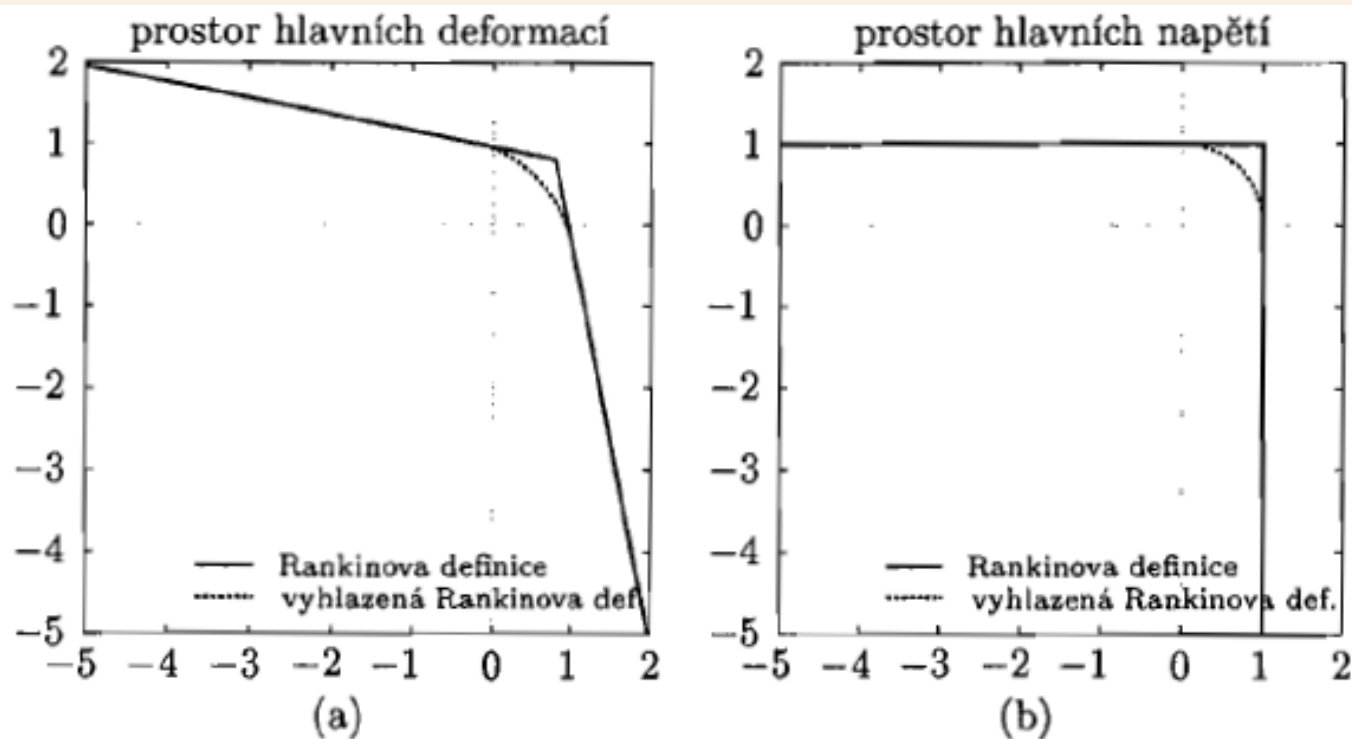
$$\bar{\sigma}_1 = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} [(1-\nu)\epsilon_1 + \nu\epsilon_2 + \nu\epsilon_3] = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} [(1-2\nu)\epsilon_1 + \nu\epsilon_V] = 2G\epsilon_1 + \frac{E\nu\epsilon_V}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad (4.43)$$

kde $\epsilon_V = \epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3$ je objemová deformace a ϵ_1 je hlavní deformace odpovídající stejnému hlavnímu směru jako $\bar{\sigma}_1$. Je tedy zřejmé, že největší hlavní napětí vznikne ve směru největší hlavní deformace, a ekvivalentní deformaci ve smyslu výše navržené definice můžeme zapsat jako

$$\tilde{\epsilon} = \frac{1}{E} \max(\bar{\sigma}_1, \bar{\sigma}_2, \bar{\sigma}_3) = \frac{1}{1+\nu} \epsilon_{\max} + \frac{\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \epsilon_V \quad (4.44)$$

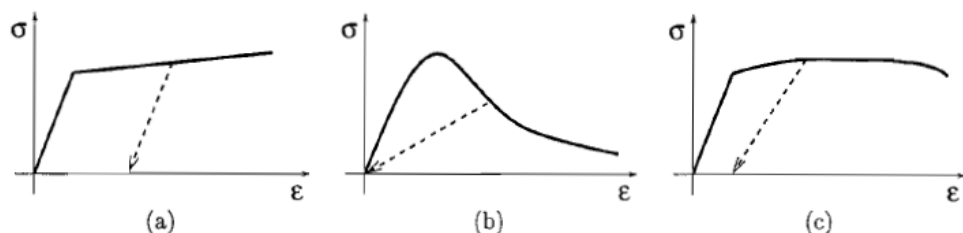
kde $\epsilon_{\max} = \max(\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3)$ je největší hlavní deformace. Pro jednoosý tah máme jako obvykle $\epsilon_y = \epsilon_z = -\nu\epsilon_x$, a odtud $\epsilon_{\max} = \epsilon_x$, $\epsilon_V = (1-2\nu)\epsilon_x$ a $\tilde{\epsilon} = \epsilon_x/(1+\nu) + \nu(1-2\nu)\epsilon_x/(1+\nu)(1-2\nu) = \epsilon_x$. Definice (4.44) tedy splňuje podmínku, že pro jednoosý tah je ekvivalentní deformace rovna relativnímu protažení ve směru namáhání. Pro jednoosý tlak je $\epsilon_x < 0$, $\epsilon_{\max} = -\nu\epsilon_x$ a $\epsilon_V = (1-2\nu)\epsilon_x$, takže podle (4.44) vyjde $\tilde{\epsilon} = 0$. V jednoosém tlaku je tedy ekvivalentní deformace nulová a nedochází k růstu poškození. Pracovní diagram pro jednoosý tlak je proto lineárně pružný a tlaková pevnost je nekonečná, zcela v souladu s Rankinovým kritériem.

Izotropní modely poškození (víceosá napjatost)

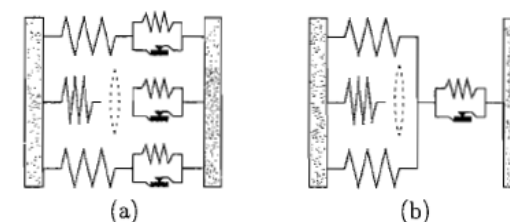


Obrázek 4.7: Plochy poškození odpovídající konstantním úrovním ekvivalentní deformace definované podle (4.44) a (4.45), zobrazené (a) v rovině hlavních deformací, (b) v rovině hlavních napětí. Předpokládá se rovinná napjatost.

Izotropní modely poškození (víceosá napjatost)



Obrázek 4.8: Typické pracovní diagramy pro (a) pružnoplastický materiál, (b) pružný materiál s poškozením, (c) pružnoplastický materiál s poškozením.



Obrázek 4.9: Dvě reologická schémata kombinující pružnost, plasticitu a poškození.

4.2.3 Kombinace modelů poškození a plasticity

V kapitole 2 jsme se zabývali pružnoplastickými modely, které jsou inspirovány představou pokluzu podél krystalografických rovin v kovech a soustředí se na popis trvalé (plastické) deformace vyvolané takovými procesy. Při odtěžování se materiál chová jako lineárně pružný se stejnou tuhostí jako ve výchozím stavu, viz obr. 4.8a.

Naproti tomu modely poškození jsou založeny na představě šířících se trhlin a dutin a popisují odpovídající redukci tuhosti materiálu. Jestliže materiál mezi trhlínami zůstává pružný a trhliny se mohou bez odporu zavřít, pak se při odtěžování pracovní diagram vrací zpět do počátku, jak je naznačeno na obr. 4.8b. Ve skutečných materiálech obvykle dochází jak ke vzniku trvalých deformací, tak i ke snížení tuhosti, a odtěžovací větve pracovního diagramu je někde mezi oběma extrémy, viz obr. 4.8c. Tato skutečnost naznačuje, že optimální je oba typy modelů (tedy plasticitu a poškození) kombinovat.

Kombinace plasticity a poškození může být založena přinejmenším na dvou různých přístupech. První přístup využívá pojmu efektivního napětí, známého z mechaniky poškození. Tato veličina představuje napětí vznikající v dosud nepoškozeném materiálu mezi defekty. Místo předpokladu pružného chování nepoškozeného materiálu můžeme použít předpoklad pružnoplastického chování. Vztah mezi efektivním napětím a deformací je pak popsán rovnicemi teorie plasticity. Názorně lze tento přístup ilustrovat reologickým schématem na obr. 4.9a, ve kterém jsou paralelně zapojeny pružnoplastické jednotky, z nichž každá je sériovým spojením pružiny a plastického článku (s případným zpevněním). Tyto jednotky jsou v důsledku poškození postupně vyřazovány z činnosti. Jde vlastně o obdobu svazku postupně praskajících vláken z obr. 4.1, s tím rozdílem, že vlákna nyní nejsou pružná, ale pružnoplastická. Přitom poškození může být závislé na celkové deformaci, ale také třeba na její pružné nebo plastické části, podle toho, jak si představujeme konkrétní mechanismus poškození pro daný materiál.

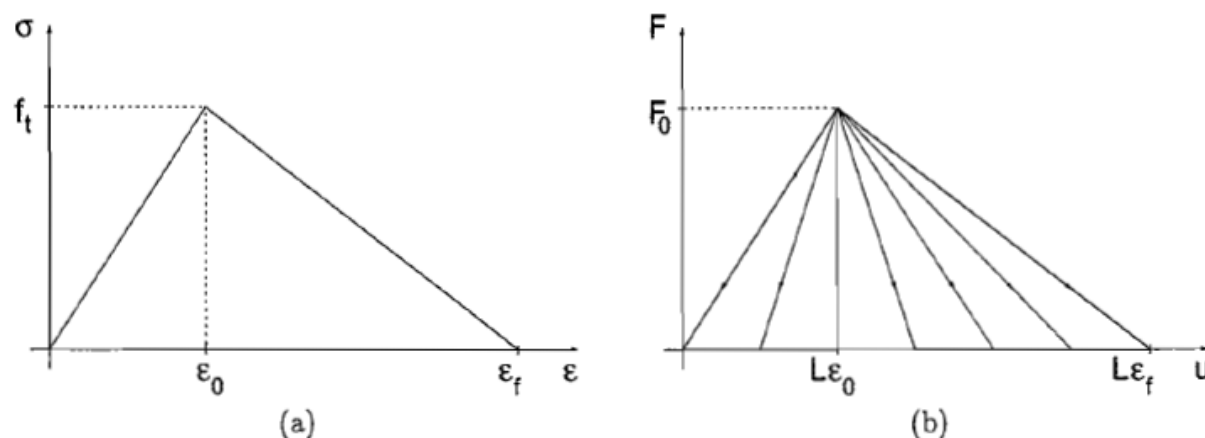
Lokalizace poškození

4.3.1 Potíže s popisem změkčení

Řada přírodních i umělých materiálů vykazuje přinejmenším v pokročilých stádiích přetvárného procesu změkčení, což znamená, že při rostoucí deformaci klesá jimi přenášené napětí. Příčinou změkčení bývá rozvoj defektů v materiálu, provázený poklesem efektivní plochy schopné přenášet napětí. Postupné změkčování je charakteristické zejména pro kvazikřehké materiály, jako je beton. V *křehkých* materiálech často dojde k náhlému katastrofickému růstu trhlin, takže přenášené napětí vymizí prakticky okamžitě a místo o změkčení hovoříme o křehkém lomu. V *tažných* (duktilních) materiálech, jako je většina kovů, je naopak dominantním mechanismem nepružného přetváření plastický pokluz, v jehož průběhu zpravidla dochází k postupnému zvyšování meze kluzu, tedy ke zpevnění. Při velkých deformacích se však i v takových materiálech mohou vytvářet a šířit defekty, například dutiny, které se postupně spojují a nakonec vedou k duktilnímu lomu. Takové chování lze popisovat pomocí pružnoplastických modelů se zpevněním, postupně přecházejícím do změkčení, nebo pomocí pružnoplastických modelů se zpevněním kombinovaných s modely poškození. Pro *kvazikřehké* materiály obvykle dochází při namáhání v tahu k náhlému přechodu od téměř lineárně pružného chování ke změkčování, v pozdějších fázích ale zbytkové přenášené napětí klesá pomalu a úplně vymizí až při poměrně značné deformaci. Takové chování se nejnázne popíše pomocí modelů poškození.

Lokalizace poškození

Pro modely se změkčením, ať již formulované v rámci teorie poškození nebo teorie plasticity s klesající mezí kluzu, je ovšem třeba velké opatrnosti. Změkčování materiálu je totiž často příčinou *lokalizace nepružných deformací* a pro nevhodně formulované modely dojde ke vzniku problémů, které mohou výsledky analytických výpočtů nebo numerických simulací zcela znehodnotit. Podstatu těchto problémů si nejprve názorně osvětlíme na jednoduchém příkladu a poté vysvětlíme jejich obecné důsledky a budeme se věnovat hledání nápravy.



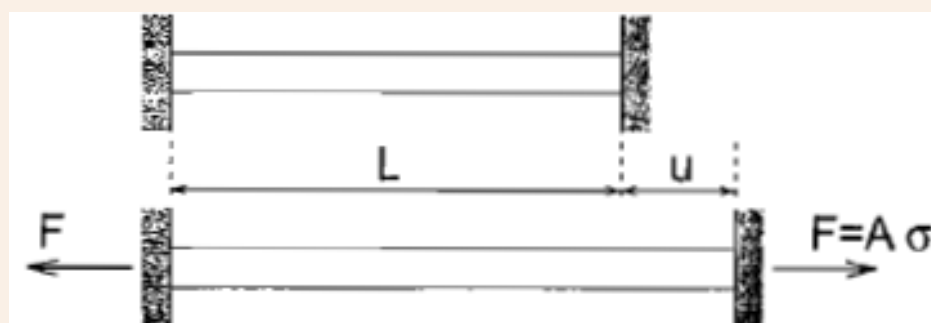
Obrázek 4.10: (a) Lokální pracovní diagram s lineárním změkčením, (b) vějíř možných sestupných větví globálního pracovního diagramu.

Pro ilustraci použijeme velmi jednoduchý materiálový model pro jednoosou napjatost. Předpokládáme, že materiál je lineárně pružný až po dosažení deformace ϵ_0 . Při dalším zvětšování deformace dochází k lineárnímu změkčení podle obr. 4.10a a napětí přenášené materiálem zcela zmizí při dosažení deformace ϵ_f . Maximálního napětí f_t , které představuje tahovou pevnost materiálu, je tedy dosaženo na konci lineárně pružné části pracovního diagramu a platí $f_t = E\epsilon_0$, kde E je modul pružnosti. Pro další úvahy o lokalizaci není podstatné, v rámci jaké konkrétní teorie je tento model formulován, tedy zda jde např. o pružnoplastický model s lineárním změkčením, o model izotropního poškození, nebo o model s rozetřenými trhlinami. Důležité je pouze, že pracovní diagram se skládá ze dvou lineárních částí, z nichž jedna (vzestupná) odpovídá pružnému chování a druhá (sestupná) změkčení.

Lokalizace poškození

Příklad 4.6: Tahová zkouška prutu ze změkčujícího materiálu — numerické řešení

Při numerickém řešení jednorozměrné úlohy metodou konečných prvků (MKP) rozdělíme celý prut na N intervalů, v terminologii MKP označovaných jako prvky, které se navzájem stýkají v $N - 1$ průřezech, v terminologii MKP označovaných jako uzly. Další dva uzly odpovídají krajním průřezům celého prutu. Metoda je založena na aproximaci pole posunutí funkcemi, které jsou na celém prutu spojité a v rámci každého prvku lineární. Každá taková funkce je jednoznačně určena hodnotami posunů v uzlech. Je-li na prvku posunutí aproximováno lineární funkcí souřadnice x , je odpovídající deformace v rámci prvku konstantní a vypočte se jako rozdíl posunů uzlů, ke kterým je tento prvek připojen, dělený délkou prvku. Rozložení deformace po délce prutu je tedy aproximováno po částech konstantní funkcí. Uplatněním materiálového modelu se z deformace v každém prutu vypočte odpovídající napětí, které bude tudíž také aproximováno po částech konstantní funkcí. Obecně se podmínky rovnováhy při výpočtu MKP splňují pouze v tzv. slabém smyslu, ale to pro naše účely není podstatné. Za daných předpokladů (jednorozměrná úloha, lineární aproximace posunutí na prvcích, konstantní průřez a zanedbání objemových sil) totiž budou podmínky rovnováhy sestrojené v rámci přibližného výpočtu MKP ekvivalentní s podmínkou, že napětí ve všech prvcích má být stejné, což je vlastně klasická podmínka rovnováhy v silném smyslu.

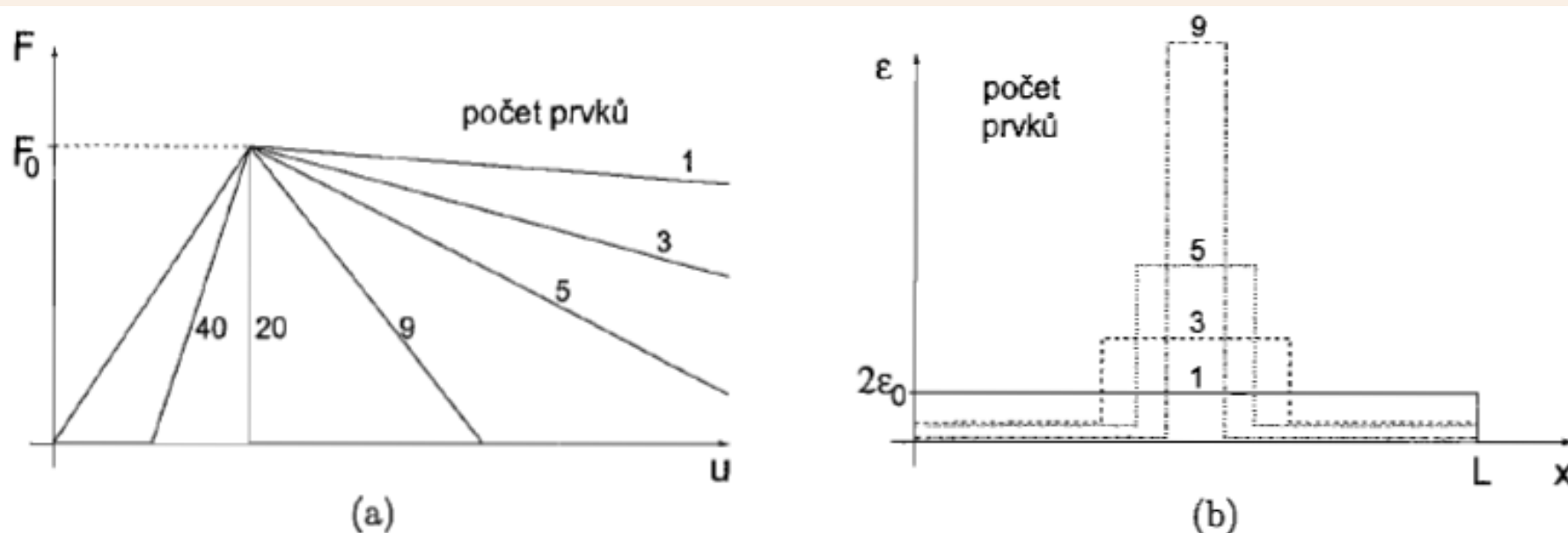


Obrázek 4.11: Tažený prut.

Lokalizace poškození

Až po dosažení vrcholu pracovního diagramu je řešení jednoznačné, protože při lineárně pružném chování je deformace jednoznačně určena napětím, a proto z podmínky stejného napětí ve všech prvcích plyne, že i deformace ve všech prvcích jsou stejné. Numerické řešení tedy přesně odpovídá analytickému. V okamžiku dosažení vrcholu se jednoznačnost ztrácí, protože v každém prvku může začít buď pružné odtěžování, nebo změkčování. Celkem je tedy 2^N možných řešení, z nichž jedno odpovídá odtěžování celého prutu, jedno odpovídá rovnoměrnému změkčování celého prutu, a ostatní odpovídají různým kombinacím odtěžování a změkčování v jednotlivých prvcích. Pružné odtěžování celého prutu z dalších úvah vyloučíme, protože nás zajímají jen taková řešení, při kterých nakonec dojde k porušení, tj. ke ztrátě schopnosti prutu přenášet zatížení. Z ostatních řešení můžeme při numerickém výpočtu získat v podstatě kterékoliv. Závisí to na konkrétním algoritmu, pomocí kterého se hledá řešení splňující podmínky rovnováhy. Celý zkoumaný zatěžovací proces je rozdělen na kroky a v rámci každého kroku se zvětší hodnota veličiny používané jako řídicí parametr, např. síly působící na pravý konec prutu nebo posunu tohoto konce. Řízení silou by ovšem ze známých důvodů selhalo po dosažení vrcholu pracovního diagramu, takže si prozatím představíme řízení posunem pravého konce. Pokud se na konci prvního nepružného kroku ocitnou v režimu změkčování všechny prvky najednou, může se stát, že i v dalších krocích pokračuje změkčování všech prvků a je zachováno rovnoměrné rozdělení deformace po délce prutu. Jestliže se však vlastnosti materiálu (např. pevnost) v jednotlivých prvcích mírně liší, při dostatečně malých krocích se z pružného režimu do režimu změkčení dostane nejprve jen jeden prvek, a sice ten nejslabší (s nejmenší pevností). V dalším kroku tento prvek změkčuje, napětí v něm tedy klesá a stejně tak musí klesat i napětí v ostatních prvcích, které ovšem zůstávají v pružném stavu a jejich deformace se zmenšuje. Dojde tedy k lokalizaci nepružného přetváření do jediného prvku. Při konkrétním výpočtu můžeme lokalizaci napomoci tím, že jeden vybraný prvek mírně oslabíme. Ale i pokud to neuděláme, často při numerickém řešení k lokalizaci dojde samovolně, vlivem malých zaokrouhlovacích chyb, které vedou k drobným odchylkám od idealizovaných předpokladů a mají podobný účinek jako mírně nerovnoměrné rozdělení pevnosti.

Lokalizace poškození



Obrázek 4.12: Vliv počtu konečných prvků na numerické výsledky: (a) globální pracovní diagram, (b) rozložení deformace po délce prutu.

Při obvyklých výpočtech MKP vede zvětšování počtu prvků ke zvyšování přesnosti výpočtu. Z grafů na obr. 4.12 je ale zřejmé, že v daném případě se při rostoucím N výsledky neblíží žádnému „rozumnému řešení“. Plocha pod globálním pracovním diagramem se s rostoucím N zmenšuje a pro $N \rightarrow \infty$ se blíží k nule. Přitom tato plocha má význam celkové práce vykonané vnějšími silami v průběhu testu. Podle numerického výpočtu se práce potřebná k totálnímu porušení prutu blíží k nule, a to nezávisle na původním poměru ϵ_f/ϵ_0 určujícím, jak duktilní nebo křehký je daný materiál. I pro velké hodnoty ϵ_f/ϵ_0 , tedy pro vysoce duktilní materiál, bychom při dostatečně vysokém počtu prvků získali globální pracovní diagram odpovídající velice křehkému chování. To je samozřejmě z fyzikálního hlediska nepřijatelné.

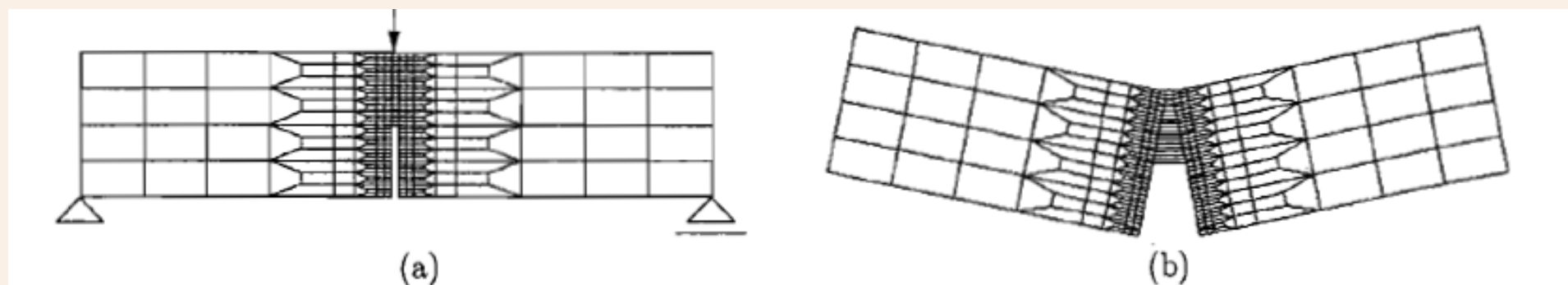
Lokalizace poškození

V příkladech 4.5 a 4.6 jsme ukázali, že pro materiál se změkčením se při popisu jednoduché tahové zkoušky objeví následující nesrovnalosti:

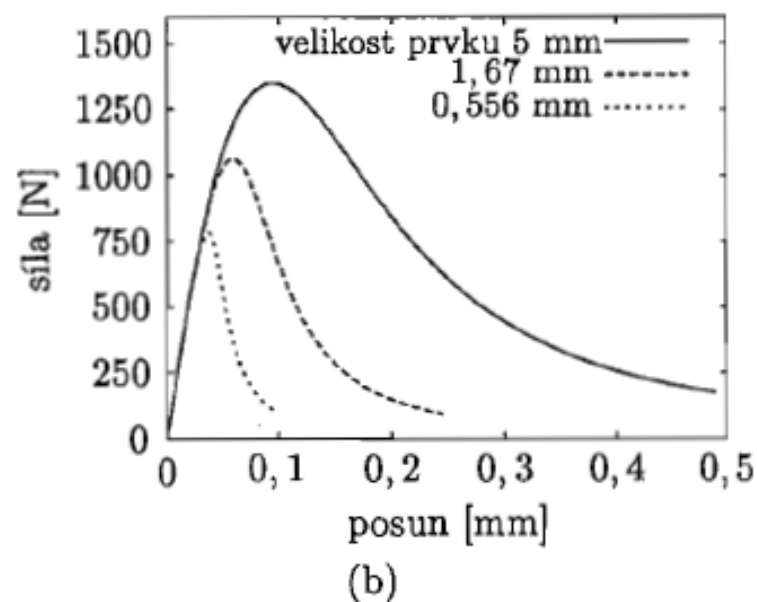
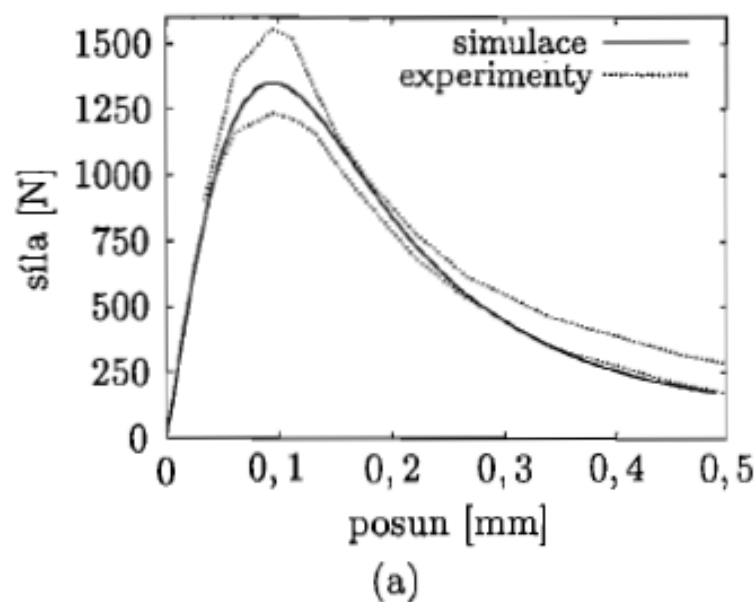
1. Deformace se lokalizuje do zóny, která může být libovolně malá.
2. Globální pracovní diagram vykazuje bod obratu, nezávisle na parametrech materiálového modelu a na rozměrech prutu.
3. Celková práce vykonaná vnějšími silami (tj. práce spotřebovaná na porušení konstrukce) je libovolně malá.
4. Při numerickém řešení metodou konečných prvků výsledky velmi silně závisejí na počtu prvků a pro zvyšující se počet prvků nekonvergují k fyzikálně přijatelnému řešení.

Uvedené potíže souvisejí s tím, že z matematického hlediska má zkoumaný problém před dosažením vrcholu pracovního diagramu charakter okrajové úlohy s tzv. eliptickým operátorem, ale změkčování materiálu vede ke ztrátě eliptičnosti. Přitom pro úlohy s eliptickým operátorem je možno dokázat jednoznačnost řešení a jeho spojitou závislost na okrajových podmínkách, zatímco při ztrátě eliptičnosti vzniká tzv. špatně formulovaná úloha (anglicky „ill-posed problem“). Z numerického hlediska se to pak projeví patologickou závislostí řešení na počtu konečných prvků.

Lokalizace poškození



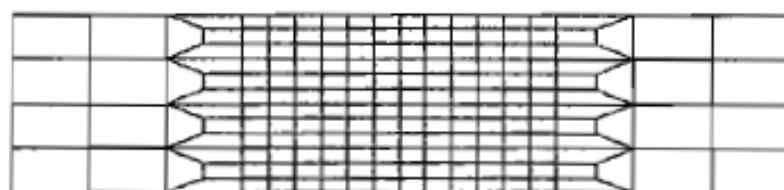
Obrázek 4.13: Nosník s vrubem namáhaný tříbodovým ohybem: (a) síť konečných prvků s vyznačením podpor a zatížení, (b) deformovaná síť při úplném porušení vzorku (posuny záměrně přehnány).



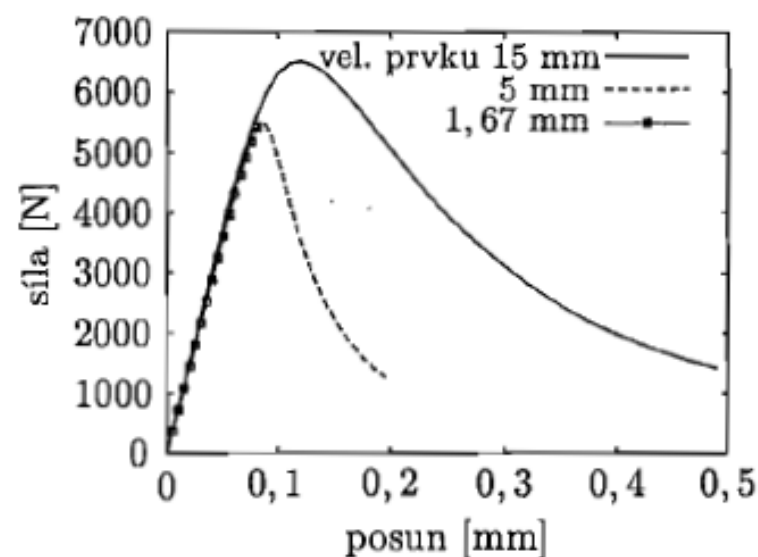
Obrázek 4.14: Globální pracovní diagram (závislost mezi silou a posunem) pro nosník s vrubem: (a) simulace na síti z obr. 4.13a v porovnání s experimentálními výsledky, (b) simulace na třech různých sítích konečných prvků.

Lokalizace poškození

Výsledky právě předvedeného příkladu by neměly být velkým překvapením pro čtenáře, který si dobře promyslel předcházející příklady s tahovou zkouškou. Stejně jako při jednoosém tahu se i při ohybu nosníku s vrubem ukázalo, že poškození se lokalizuje do oblasti, jejíž šířka odpovídá velikosti použitého konečného prvku. Při simulaci tahové zkoušky pomocí jednorozměrného modelu stačilo k porušení celého vzorku, aby se úplně poškodil jeden prvek. V případě ohybové zkoušky simulované ve dvou rozměrech je k rozlomení vzorku na dvě části zapotřebí poškodit vrstvu prvků probíhající přes celou výšku oslabeného průřezu, ale šířka této vrstvy opět odpovídá jedinému prvku. Důsledky jsou podobné, dokonce ještě horší, protože při tahové zkoušce byla aspoň maximální síla přenášená vzorkem pro všechny sítě stejná, zatímco při ohybové zkoušce je i tento výsledek silně závislý na síti a tudíž zcela nespolehlivý. Mohlo by se snad zdát, že k lokalizaci došlo jen v důsledku přítomnosti vrubu, který se na reálných konstrukcích obvykle vyskytovat nebude. Následující příklad ukazuje, že problémy nastanou i při simulaci nosníku bez vrubu.



(a)



(b)

Obrázek 4.15: Simulace tříbodového ohybu nosníku bez vrubu: (a) nejhrubší síť konečných prvků, (b) globální pracovní diagram (závislost mezi silou a posunem) simulovaný na třech různých sítích.

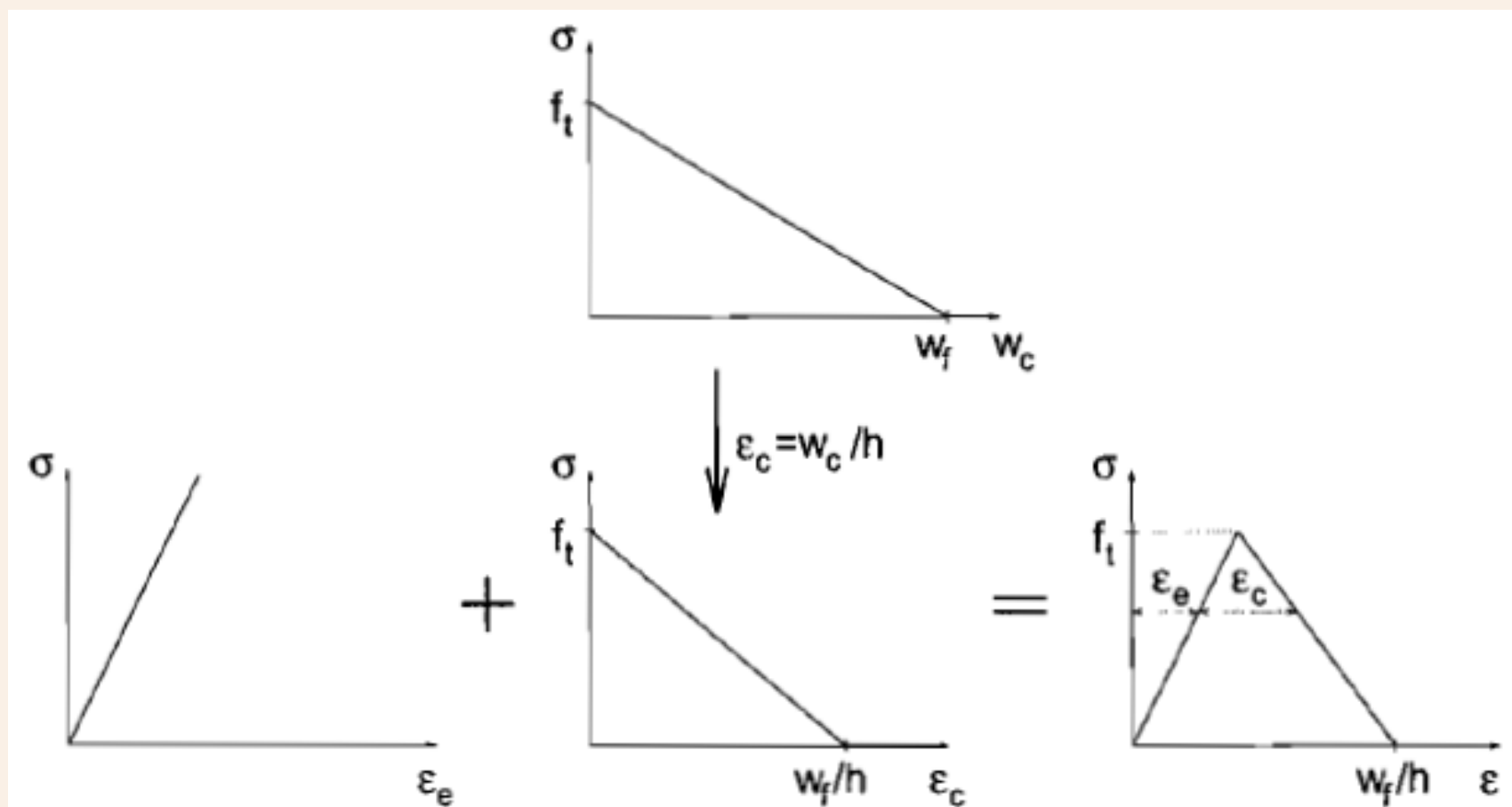
Lokalizace poškození

Zatím jsme hovořili pouze o skutečném (byť poněkud idealizovaném) průběhu testu. Při numerickém řešení se porušení také lokalizuje do určité zóny, její šířka L_s však odpovídá velikosti použitých konečných prvků, a proto je obecně jiná než skutečná fyzikální šířka L_p . Podle simulace tedy dochází k disipaci v objemu AL_s a jestliže pro zvolený materiálový model se zvolenými parametry je plocha pod lokálním pracovním diagramem pro jednoosý tah g_f , je celková disipace simulovaná výpočtem rovna $AL_s g_f$. Aby byla rovna skutečně disipované energii $W_f = AG_f$, musí zřejmě platit

$$L_s g_f = G_f \quad (4.67)$$

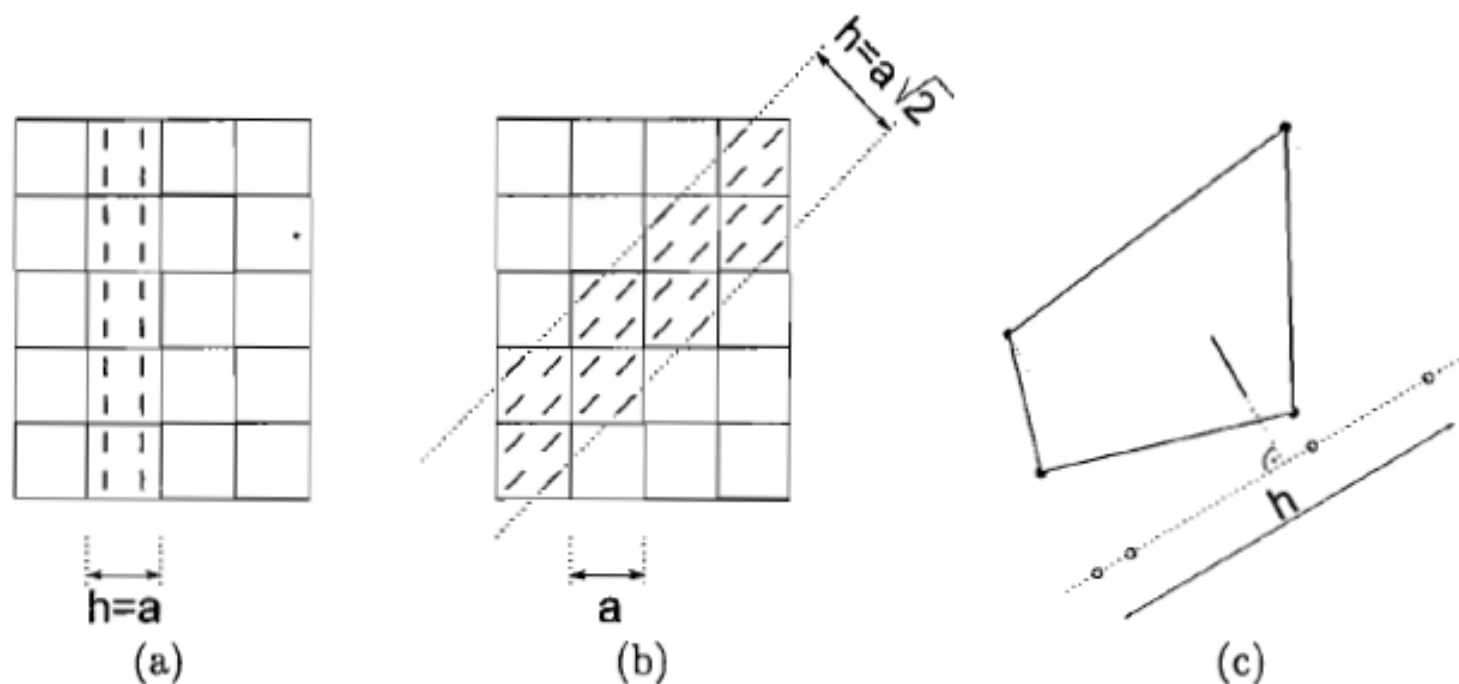
Přitom lomová energie G_f na pravé straně je považována za materiálovou vlastnost, tedy za danou konstantu. Na levé straně veličina g_f souvisí se zvoleným materiálovým modelem a L_s je šířka simulované zóny lokalizace. Jestliže podmínka (4.67) není splněna, plocha pod simulovaným globálním pracovním diagramem je jiná než pod skutečným a není tedy možné, aby se oba diagramy aspoň zhruba shodovaly. Při výpočtu metodou konečných prvků je L_s rovno velikosti prvku, kterou označíme h . Při zjemňování sítě se h zmenšuje, ale g_f se nemění, takže podmínka (4.67) může být splněna víceméně náhodou pro jistou konkrétní velikost prvku $h = G_f/g_f$, ale obecně splněna není.

Lokalizace poškození



Obrázek 4.17: Odvození lokálního pracovního diagramu ze zákona koheze.

Lokalizace poškození



Obrázek 4.18: (a) Zóna lokalizovaného poškození rovnoběžná se stranami prvků, (b) zóna lokalizovaného poškození v diagonálním směru, (c) odhad šířky této zóny pomocí průmětu prvku do směru kolmého na trhliny.