

# B3 HISTORICKÝ PŘEHLED LOMOVÝCH MODELŮ

Aplikace teorie lomové mechaniky zejména  
na beton a další kvazikřehké materiály

beton, malta, vláknobeton a další kompozity na silikátové i jiné bázi, skalní horniny,  
uhlí, keramika, led, papír, dřevo

## OSNOVA BLOKU C

1. Základy lineární lomové mechaniky
2. Klasické nelineární modely
3. Modely založené na mechanice kontinua
4. Nové pokročilé modely

# Základy lineární elastické lomové mechaniky

## • Řešení problému koncentrace napětí v blízkosti vrubů či inkluzí

počátek 20. století

Vznik a šíření trhliny je řízeno výskytem vysokých lokálních koncentrací napětí, které vznikají v blízkosti poruch jejich plynulého toku. Studium zákonitostí lomového procesu vycházelo ve svých počátcích z analýzy napjatosti v okolí vrubů. Elastická řešení v okolí vrubů vykazují významnou lokální změnu silového toku v blízkosti jejich vrcholů, což se projevuje kvalitativními i kvantitativními změnami polí napětí a deformací. Dochází ke vzniku trojosé napjatosti i v případě, že makroskopické zatížení tělesa je pouze jednoosé.

**Posouzení stability vrubů:** koncentrace napětí kvantifikována pomocí součinitele koncentrace napětí (tvarový součinitel)

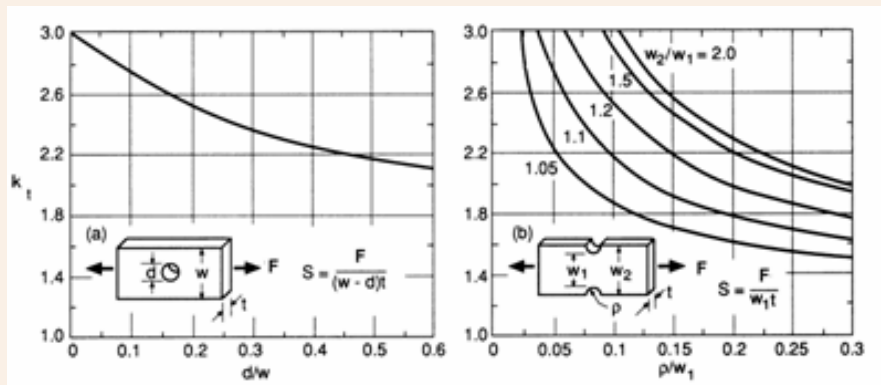
$$K_T = \frac{\sigma_{\max}}{\sigma_N} \quad [-]$$

Nevýhody:

- předpoklad pružného působení, mechanika kontinua
- zaoblené vruby – kruhové či eliptické
- neuvažuje se struktura materiálů

Použití:

- posouzení nebezpečnosti konstrukčních vrubů či technologických defektů (navrhování kovových prvků staveb či součástí strojů)

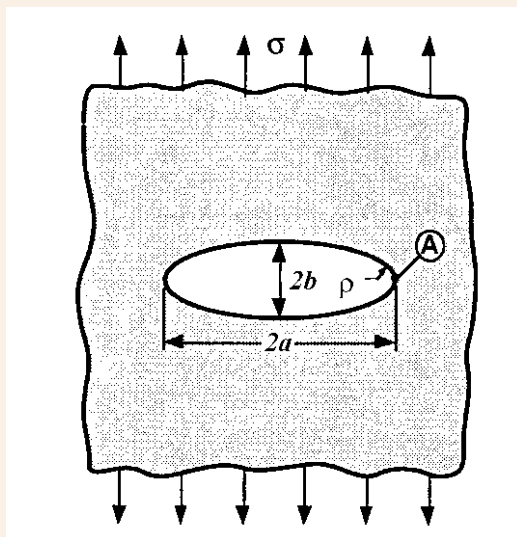


# Základy lineární elastické lomové mechaniky

- Inglisovo řešení napjatosti v okolí eliptického otvoru

rok 1913

$$\sigma_A = \sigma_N \left(1 + \frac{2a}{b}\right) = K_T \sigma_N$$

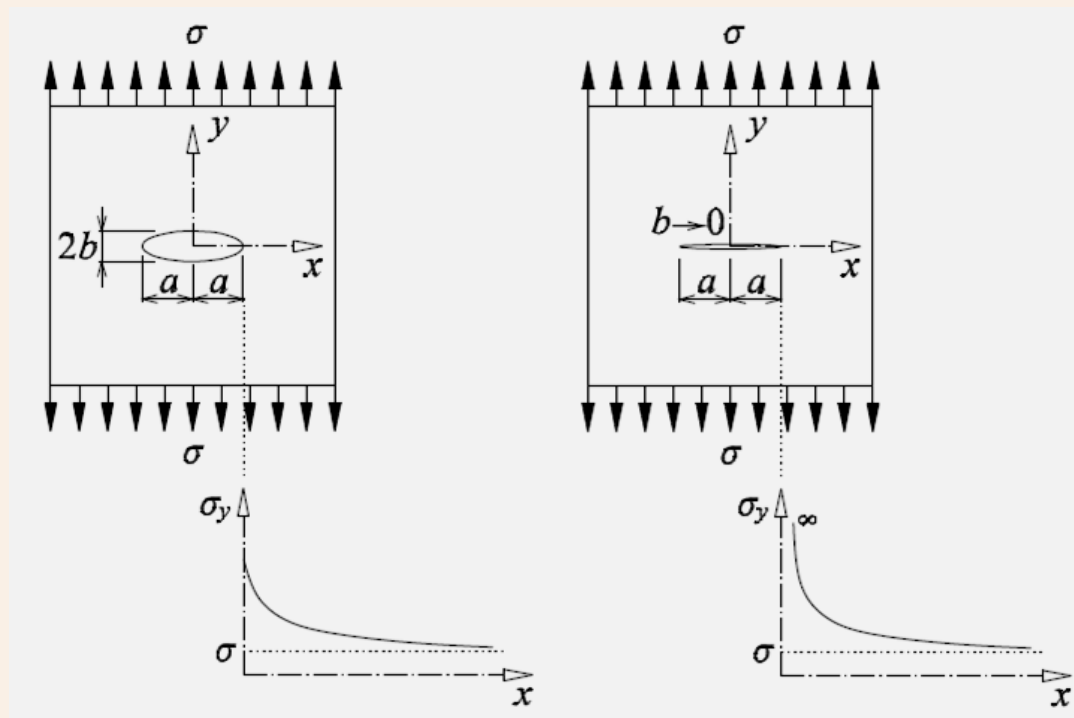


Převzato z Vlach, B.  
http://www.zam.fme.vutbr.cz/~vlach/

$b \rightarrow 0$  přechází elipsa v ostrou trhlínu

$\sigma_A \rightarrow \infty$  pro libovolné nominální napětí  $\sigma_N$

!!! SINGULARITA !!!



Veselý, V. (2004) Parametry betonu pro popis lomového chování. Disertační práce, FAST VUT v Brně, Brno.

Nutnost přechodu od **NAPĚŤOVÉHO** kritéria stability konstrukce s poruchou k **ENERGETICKÉMU** kritériu

# Základy lineární elastické lomové mechaniky

## Griffithova teorie křehkého lomu

rok 1921

Griffithův model vychází z prvního zákona termodynamiky – zákona zachování energie. Je založen na bilanci celkové energie – lom nastane v okamžiku, kdy v tělese uložená energie je dostatečná k překonání povrchové energie materiálu. Potom dojde k porušení vazeb (napětí na atomární úrovni překročí kohezivní pevnost na atomární úrovni).

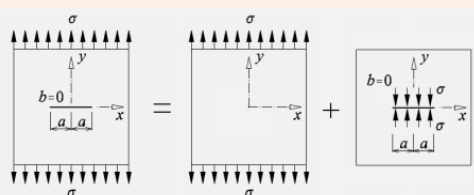
### Energetická bilance tělesa s trhlinou:

$$W_c = \Pi + W_F = -W + U + W_F = -W + U + \gamma_c A$$

$$\frac{\partial W_c}{\partial a} = 0$$

Celková volná energie systému má velmi důležitou vlastnost extrému; dosáhne-li  $W_c$  svého maxima, dochází ke ztrátě stability trhliny

- $W_c$  je celková volná energie tělesa s trhlinou
- $\Pi$  je potenciální energie systému těleso s trhlinou + zatížení, bez uvažování povrchových sil trhliny
- $W_F$  je potenciální (disipační) energie trhliny
- $W$  je přetvárná práce vnějších sil působících na těleso s trhlinou
- $U$  je elastická deformační energie tělesa
- $\gamma_c$  je specifická energii trhliny
- $A$  je obsah lomové plochy, vytvořené šířící se trhlinou



$$U = 2 \left( \frac{1}{2} \sigma \int_{-a}^a v(x) dx \right)$$

$$v(x) = \frac{2\sigma}{E'} \sqrt{a^2 - x^2}, \quad |x| \in \langle 0, a \rangle$$

$$W_c = -2 \frac{\pi \sigma^2 a^2}{E'} + \frac{\pi \sigma^2 a^2}{E'} + 2\gamma_c 2a$$

$$W = 2 \left( \sigma \int_{-a}^a v(x) dx \right)$$

$$\frac{\partial W_c}{\partial a} = \frac{\partial}{\partial a} \left( -\frac{\pi \sigma^2 a^2}{E'} + 4\gamma_c a \right) = 0$$

$$\sigma \sqrt{\pi a} = \sqrt{2E' \gamma}$$

později  $2 \gamma$  nahrazeno  $G$  (hnací síla trhliny)

$E' = E$  pro rovinnou napjatost     $E' = E/(1 - \nu^2)$  pro rovinnou deformaci

# Základy lineární elastické lomové mechaniky

## • Energetický přístup – energetické principy řídící šíření trhliny

Energetická bilance tělesa s trhlinou:

Irwin, 1956

$$\mathcal{W}_c = \Pi + \mathcal{W}_F = -\mathcal{W} + \mathcal{U} + \mathcal{W}_F$$

Nutná podmínka rovnovážného stavu tělesa s trhlinou během infinitesimálního rozšíření trhliny o  $da$  :

$$\frac{\partial \mathcal{W}_c}{\partial a} = 0 \quad \text{neboli} \quad \frac{\partial}{\partial a} (-\mathcal{W} + \mathcal{U} + \mathcal{W}_F) = 0 \quad \text{tj.} \quad \frac{\partial}{\partial a} (\mathcal{W} - \mathcal{U}) = \frac{\partial \mathcal{W}_F}{\partial a}$$

energie dostupná pro šíření trhliny  
hnací síla trhliny

$$\mathcal{G} = \mathcal{R}$$

energie potřebná pro šíření trhliny  
odpor proti šíření trhliny

$$\mathcal{G} = \frac{1}{b} \frac{\partial}{\partial a} (\mathcal{W} - \mathcal{U})$$

Jednotkou je  $\text{J} \cdot \text{m}^{-2}$  nebo  $\text{N/m}$

$$\mathcal{R} = \frac{1}{b} \frac{\partial \mathcal{W}_F}{\partial a}$$

$G$  závisí na geometrii konstrukce a okrajových podmínkách v daném okamžiku (je to stavová funkce, tj. nezávisí na tom, jak bylo daného stavu dosaženo ani jak se během lomového procesu mění)

$R$  je kritická hodnota  $G$  – materiálová charakteristika. Pro křehké materiály je to konstanta, značí se  $G_c$  (houževnatost). Pro kvazikřehké i elasto-plastické materiály je funkcí délky trhliny, značí se  $R$ .

# Základy lineární elastické lomové mechaniky

## • Energetický přístup – určení $G$ z elastických potenciálů

Základním problémem lomové mechaniky je určit množství energie dostupné pro šíření trhliny a porovnat ho s energií potřebnou pro uskutečnění tohoto procesu.

$$G = \frac{1}{b} \frac{\partial}{\partial a} (W - U)$$

Pro výpočet  $G$  nutno zavést okrajové podmínky. Existují dva extrémní případy: zatížení silou a zatížení přemístěním.

poddajnost  $C = \frac{\Delta}{F}$  deformační energie  $U = \int_0^{\Delta} F d\Delta = \frac{1}{2} F \Delta$  práce vnějších sil  $W = F \Delta$

zatížení silou,  $F = \text{konst.}$ ,  $\Pi = U - W$

$$G = \frac{1}{b} \frac{d}{da} (W - U) = \frac{1}{b} \frac{d}{da} \left( F^2 C - \frac{1}{2} F^2 C \right)_{F=\text{konst.}} = \frac{1}{b} \left[ F^2 \frac{dC}{da} - \frac{1}{2} F^2 \frac{dC}{da} \right]_{F=\text{konst.}} = \frac{1}{2b} F^2 \left( \frac{dC}{da} \right)_{F=\text{konst.}}$$

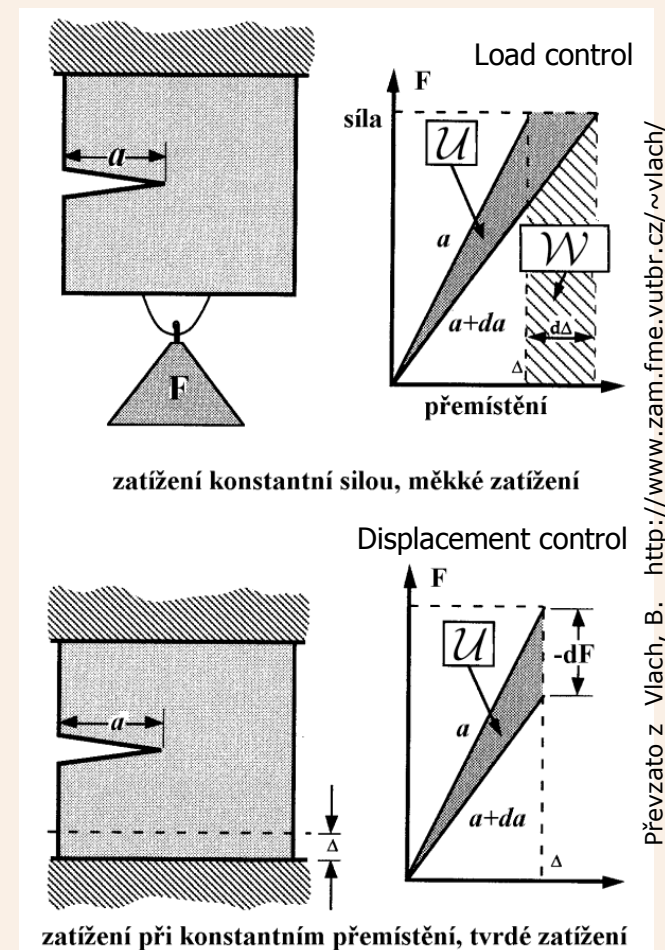
zatížení přemístěním,  $\Delta = \text{konst.}$ ,  $W = 0$ , tj.  $\Pi = U$

$$G = \frac{1}{b} \frac{d}{da} (0 - U) = -\frac{1}{b} \left[ \frac{d}{da} \left( \frac{1}{2} F \cdot \Delta \right) \right]_{\Delta=\text{konst.}} = -\frac{1}{b} \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{dF}{da} \right) \Delta \right]_{\Delta=\text{konst.}} = -\frac{1}{2b} F^2 \left( \frac{dC}{da} \right)_{\Delta=\text{konst.}}$$

Pro zatěžování silou i přemístěním je hnací síla trhliny stejná a tedy platí

$$\left( \frac{dU}{da} \right)_{F=\text{konst.}} = - \left( \frac{dU}{da} \right)_{\Delta=\text{konst.}}$$

V obecných případech je určení  $G$  značně složité



zatížení konstantní silou, měkké zatížení

zatížení při konstantním přemístění, tvrdé zatížení

$W - U$  je možno vyjádřit více rovnocennými cestami: pomocí deformační energie (resp. jejího komplementárního protejšku) nebo potenciální energie (resp. komplementární potenciální energie). Závisí to na povaze problému (okraj. podmínkách)

# Základy lineární elastické lomové mechaniky

## • Energetický přístup – energetická rovnováha a kritérium stability

- Nutná podmínka pro šíření trhliny

$$\frac{\partial \mathcal{W}_c}{\partial a} = 0 \quad \text{neboli} \quad \mathcal{G} = \mathcal{R}$$

$\mathcal{G} < \mathcal{R}$  trhlina se nešíří

$\mathcal{G} = \mathcal{R}$  trhlina se šíří, může se šířit stabilně nebo nestabilně

$\mathcal{G} > \mathcal{R}$  trhlina se šíří nestabilně (dynamicky)

- Dostatečná podmínka pro posouzení stability trhliny při  $G = R$

$$\frac{\partial^2 \mathcal{W}_c}{\partial a^2} = 0 \quad \text{neboli} \quad \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial a} = \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial a}$$

$\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial a} < \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial a}$  trhlina se šíří stabilně

$\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial a} = \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial a}$  trhlina se šíří stacionárně

$\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial a} > \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial a}$  trhlina se šíří nestabilně (dynamicky)



# Základy lineární elastické lomové mechaniky

## • Energetický přístup – energetická rovnováha a kritérium stability

Při kvazistatickém zatěžování konstrukce s trhlinou (kinetická energie konstrukce  $K$  je na počátku nulová, přírůstek  $\Delta K$  může nabývat pouze kladných hodnot) mohou nastat tyto případy:

	podmínka 1	podmínka 2	$\Delta \mathcal{K}$	$\Delta a$	šíření trhliny	stabilita konstrukce
i)	$\mathcal{G} < \mathcal{R}$		$\Delta \mathcal{K} = 0$	$\Delta a = 0$	trhlina se nešíří	stabilní stav
ii)	$\mathcal{G} = \mathcal{R}$	$\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial a} < \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial a}$	$\Delta \mathcal{K} = 0$	$\Delta a > 0$	kvazistatické	stabilní rovnováha
iii)	$\mathcal{G} = \mathcal{R}$	$\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial a} = \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial a}$	$\Delta \mathcal{K} = 0$	$\Delta a \geq 0$	stacionární	indiferentní rovnováha
iv)	$\mathcal{G} = \mathcal{R}$	$\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial a} > \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial a}$	$\Delta \mathcal{K} > 0$	$\Delta a > 0$	poč. dynamického	nestabilní rovnováha
v)	$\mathcal{G} > \mathcal{R}$		$\Delta \mathcal{K} > 0$	$\Delta a > 0$	dynamické	nestabilní stav

Pro případ kvazistatického zatěžování lze podle této tabulky posoudit stabilitu konstrukce s trhlinou obecně z jakéhokoliv materiálu.



# Základy lineární elastické lomové mechaniky

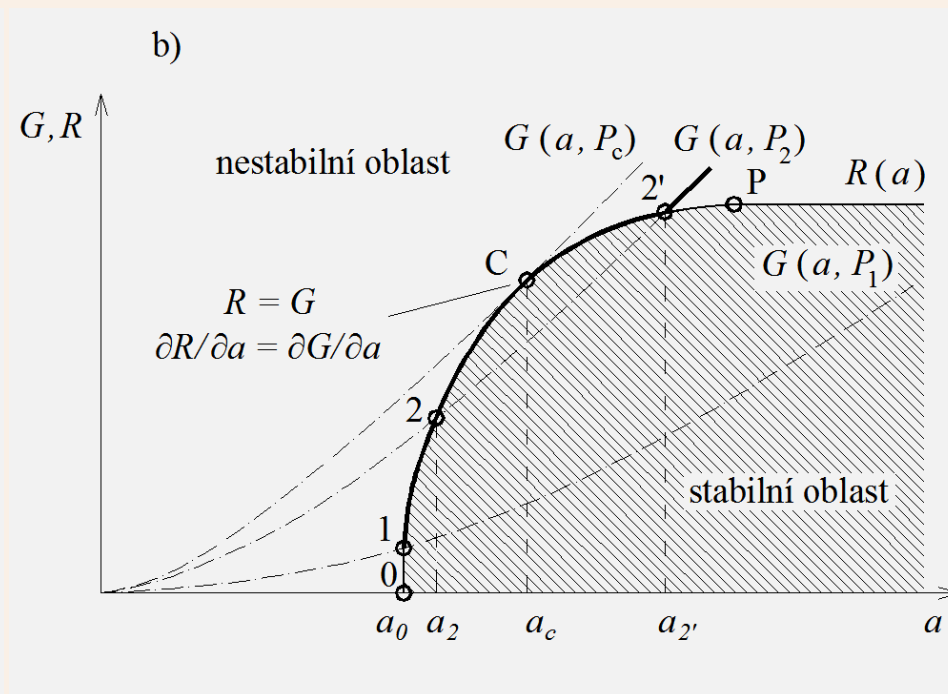
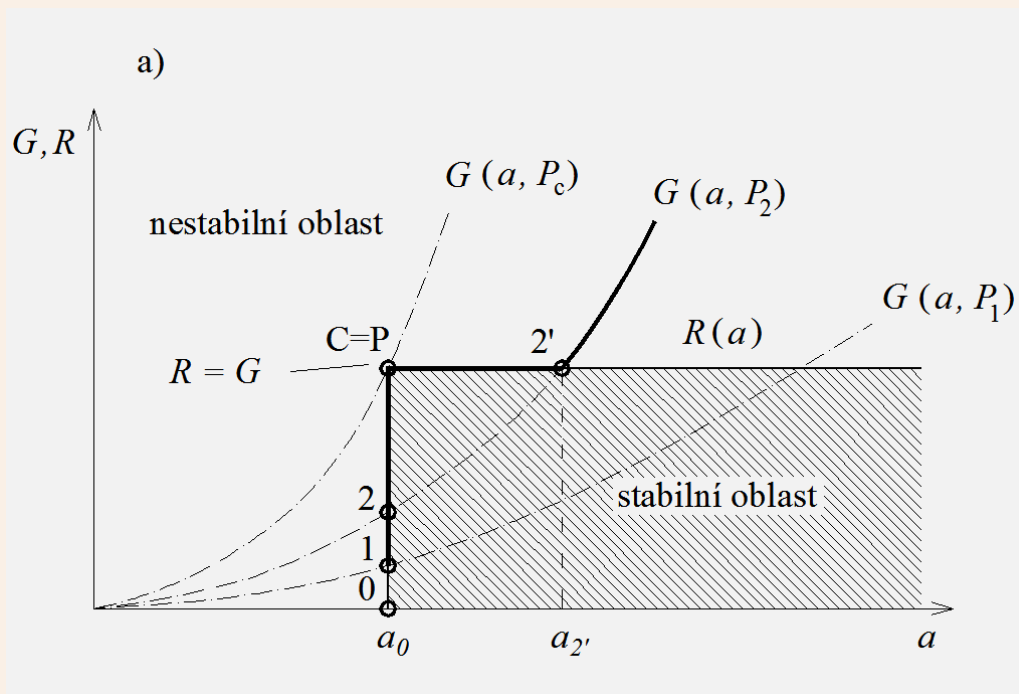
- Energetický přístup – energetická rovnováha a kritérium stability

Příklad:

Těleso s trhlinou počáteční délky  $a_0$  zatěžované silou  $P$ , materiál tělesa:

a) lineárně elastický (křehký)

b) kvazikřehký



Adaptováno z Shah, S. P. et al. 1995: Fracture mechanics of structural concrete...

Během zatěžování mohou nastat varianty energetické bilance i), iii), iv) a v) (viz tabulka na předchozí straně). Nenastane varianta ii).

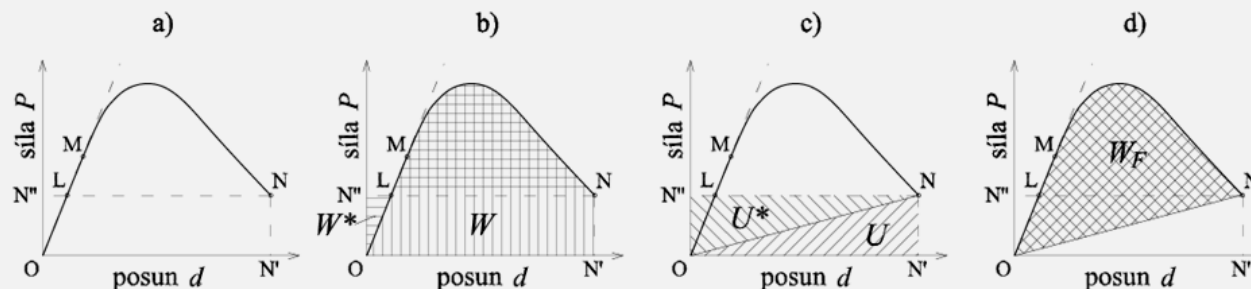
Může nastat i varianta ii), tj. stabilní šíření trhliny.

# Základy lineární elastické lomové mechaniky

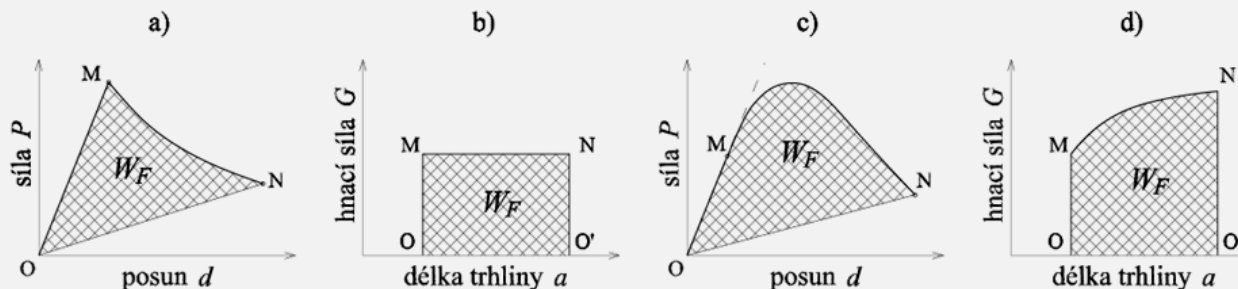
## • Energetický přístup – grafická reprezentace lomového procesu

Energie, které se je možno sledovat během lomového procesu z bodu O do bodu N:

- $W$  práce vnějších sil
- $W^*$  komplementární práce vnějších sil
- $U$  elastická energie deformace
- $U^*$  komplementární elastická energie deformace
- $W_F$  energie dodaná na šíření trhliny = energie spotřebovaná při lomu



Obrázek 5.6: Grafická reprezentace lomového procesu – a) zatěžovací křivka, b) práce vnějších sil  $W$  a  $W^*$ , c) elastické energie deformace  $U$  a  $U^*$ , d) energie dodaná a vyčerpaná při lomovém procesu  $W_F$



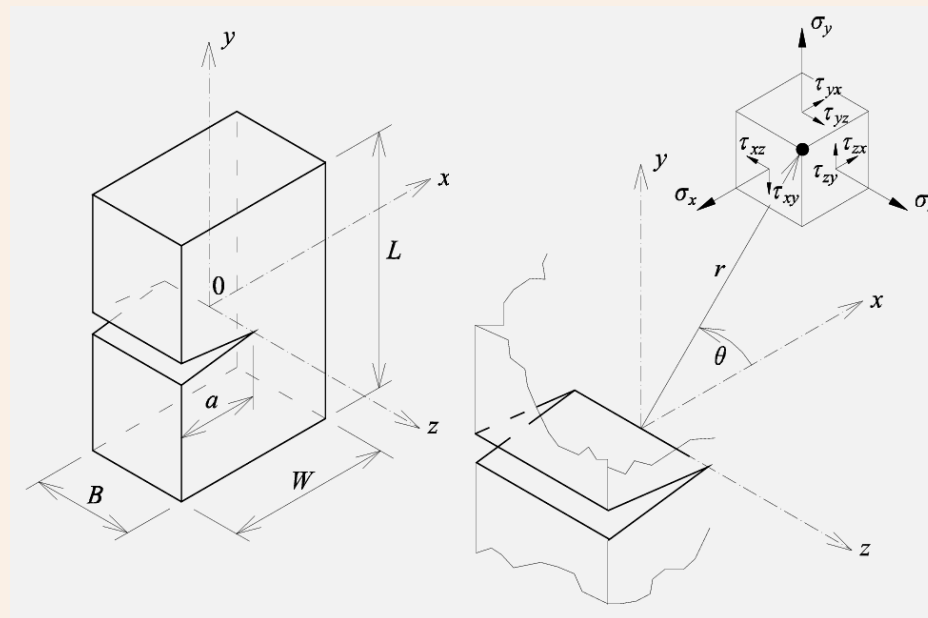
Obrázek 5.7: Grafická reprezentace lomového procesu – a) graf závislosti  $P-d$  a b) graf závislosti  $G-a$  pro lomový proces splňující předpoklady LELM, c) graf závislosti  $P-d$  a d) graf závislosti  $G-a$  pro lomový proces, při němž se mění odpor proti šíření trhliny  $\mathcal{R}$

# Základy lineární elastické lomové mechaniky

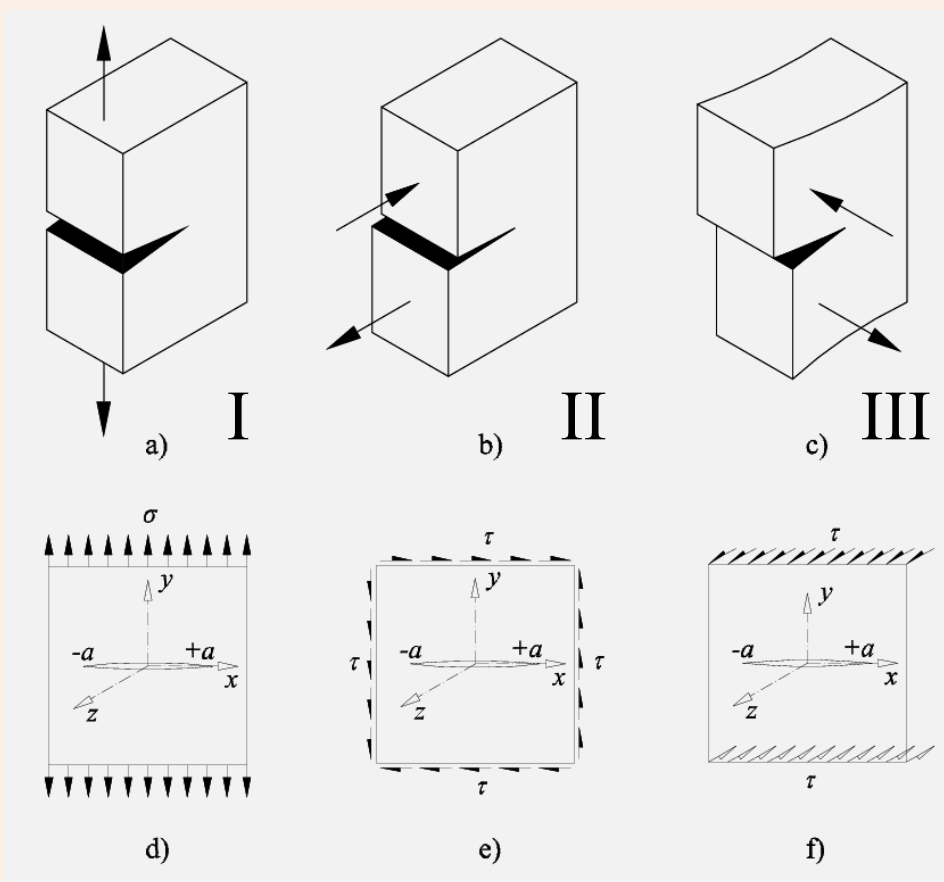
## • Řešení napjatosti v tělese s trhlinou

30. až 50. léta 20. stol.

Obecné řešení neexistuje. Při popisu napjatosti v okolí čela trhliny se využívá principu superpozice, řešení problému obecné napjatosti se zjednodušuje rozložením do tří 2D řešení – **tři módy** namáhání (zatížení).



Veselý, V. (2004) Parametry betonu pro popis lomového chování. Disertační práce, FAST VUT v Brně, Brno.



- Mód I – tahový mód – růst trhliny je řízen složkou tenzoru napětí  $\sigma_y$
- Mód II – rovinný smykový mód – růst trhliny je řízen složkou tenzoru napětí  $\tau_{xy}$
- Mód III – antirovinný smykový mód – růst trhliny je řízen složkou tenzoru napětí  $\tau_{yz}$

# Základy lineární elastické lomové mechaniky

## • Řešení napjatosti v tělese s trhlinou

řešení Airyho funkce napětí  $\Phi(x, y)$

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}, \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}, \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y}$$

stěnová rovnice:

$$\frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \Phi}{\partial y^4} = \nabla^2 \nabla^2 \Phi = 0$$

Různé možnosti řešení:

- nahrazení Airyho funkce holomorfními funkcemi komplexní proměnné (Muschelišvili, Westergaard)
- nahrazení Airyho funkce nekonečnou řadou (Williams)

## MÓD I

napětí:

$$\sigma_x = \frac{\sigma \sqrt{a}}{\sqrt{2r}} \cos \frac{\theta}{2} \left( 1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right)$$

$$\sigma_y = \frac{\sigma \sqrt{a}}{\sqrt{2r}} \cos \frac{\theta}{2} \left( 1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right)$$

$$\tau_{xy} = \frac{\sigma \sqrt{a}}{\sqrt{2r}} \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2}$$

$$\sigma_z = \nu (\sigma_x + \sigma_y)$$

posuny:

$$u = \frac{\sigma \sqrt{2ra} (1 + \nu)}{E} \cos \frac{\theta}{2} \left( \frac{1 - \nu}{1 + \nu} + \sin^2 \frac{\theta}{2} \right)$$

$$v = \frac{\sigma \sqrt{2ra} (1 + \nu)}{E} \sin \frac{\theta}{2} \left( \frac{2}{1 + \nu} - \cos^2 \frac{\theta}{2} \right)$$

$$w = -\frac{2\nu}{E} \sigma \sqrt{\frac{a}{2r}} z \cos \frac{\theta}{2}$$

RN

$$u = \frac{\sigma \sqrt{2ra} (1 + \nu)}{E} \cos \frac{\theta}{2} \left( 1 - 2\nu + \sin^2 \frac{\theta}{2} \right)$$

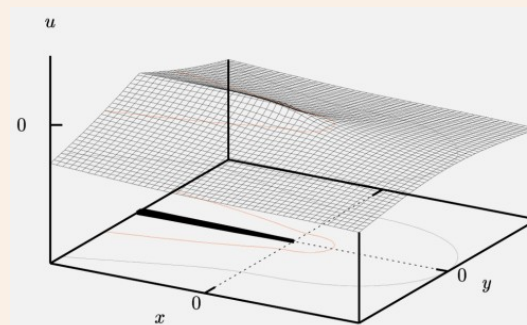
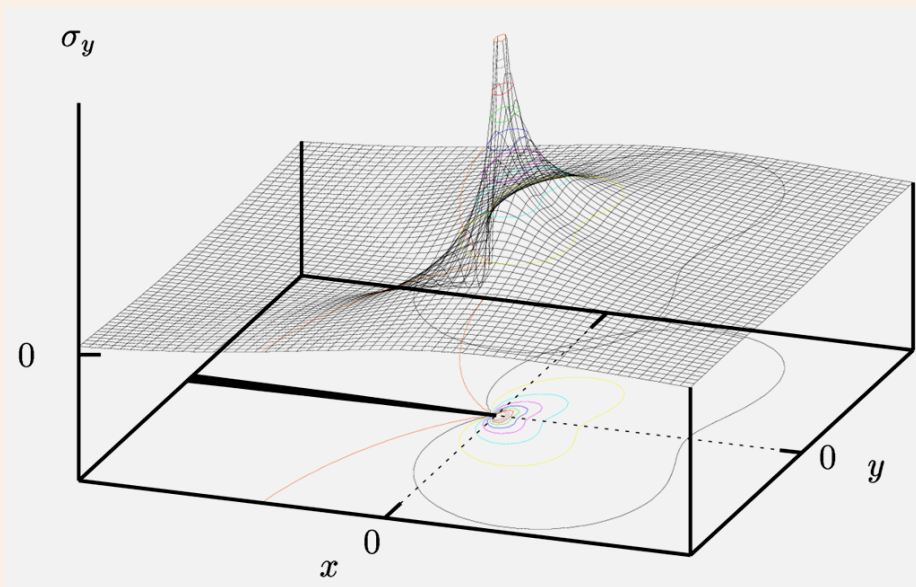
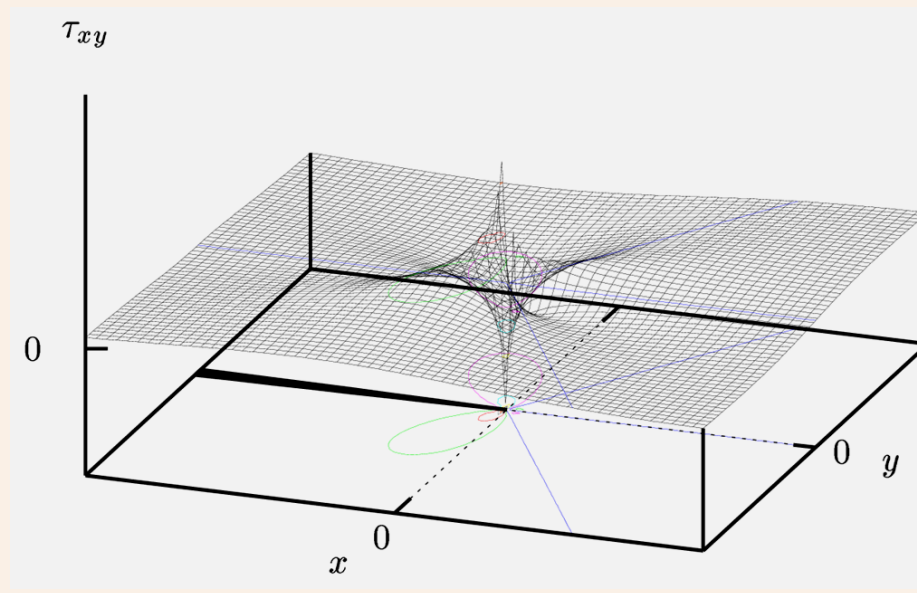
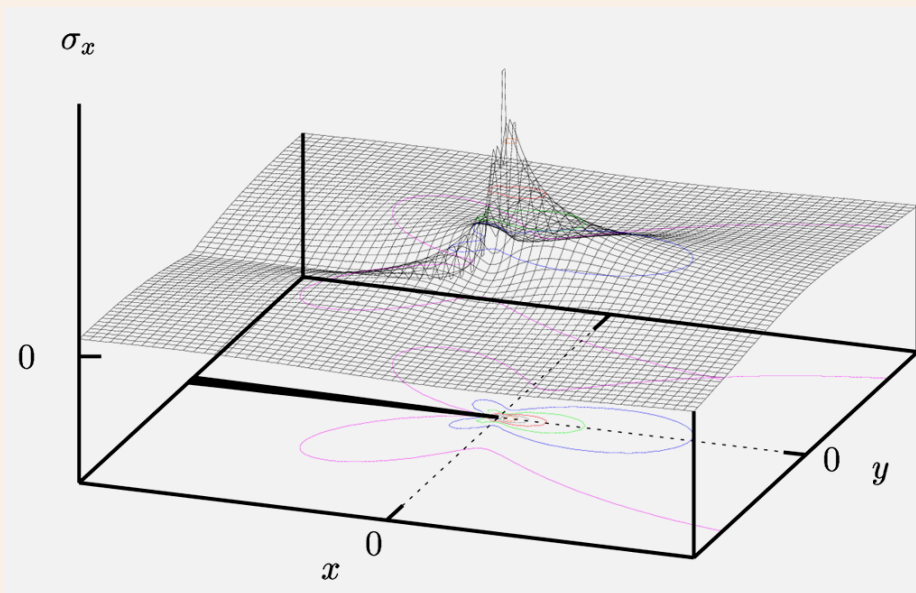
$$v = \frac{\sigma \sqrt{2ra} (1 + \nu)}{E} \sin \frac{\theta}{2} \left( 2 - 2\nu - \cos^2 \frac{\theta}{2} \right)$$

RD

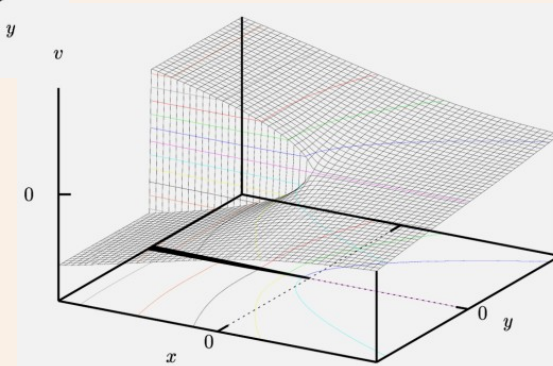
# Základy lineární elastické lomové mechaniky

- Řešení napjatosti v tělese s trhlinou

MÓD I



RD



Veselý, V. (2004.) Parametry betonu pro popis lomového chování. Disertační práce, FAST VUT v Brně, Brno.



# Základy lineární elastické lomové mechaniky

## • Irwinův napět'ový přístup – $K$ -faktor rok 1957

V křehkém tělese se celý lomový proces odehrává v okolí vrcholu trhliny, kde je pole napětí singulární, celý zbytek tělesa zůstává elastický. Irwin zjistil, že jednotlivé složky tenzoru napětí v blízkosti kořene trhliny pro každý z módů I, II, III jsou vždy stejné, závisejí pouze na geometrii pružného tělesa vyjádřené délkou trhliny  $a$  a způsobu zatěžování, jež je charakterizováno napětím  $\sigma$  či  $\tau$ . Zavedl veličinu, která v sobě zahrnovala vliv tvaru tělesa s trhlinou a způsobu jeho zatěžování – **FAKTOR INTENZITY NAPĚTÍ**.

$$K_I = \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{2\pi r} \sigma_y(r, \theta)$$

$$K_{II} = \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{2\pi r} \tau_{xy}(r, \theta)$$

$$K_{III} = \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{2\pi r} \tau_{yz}(r, \theta)$$

Tato veličina umožní, aby vzorce pro výpočet složek napětí a posunů v místech v nejbližším okolí kořene trhliny měly stejný tvar, a to pro různá tělesa a různé druhy zatížení. Složky napětí a posunů v bodě v okolí kořene trhliny jsou vždy funkcí jen této navrhované veličiny a polohy vyšetřovaného bodu.

pro  $\theta = 0$

$$K_I = \sigma \sqrt{\pi a}$$

$$K_{II} = \tau \sqrt{\pi a}$$

$$K_{III} = \tau \sqrt{\pi a}$$

faktory intenzity napětí pro centrální ostrou trhlinu délky  $2a$  v nekonečném tělese zatíženém v nekonečnu

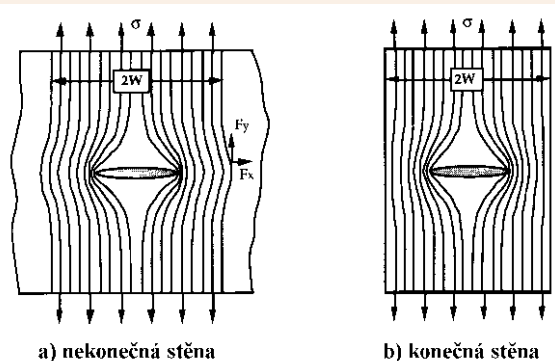
$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left( 1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) \\ \sigma_y &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left( 1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) \\ \tau_{xy} &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \end{aligned}$$

Jednotkou faktoru intenzity napětí je  $\text{MPa} \cdot \text{m}^{1/2}$

# Základy lineární elastické lomové mechaniky

## • Napět'ový přístup – *K*-faktor

U reálných těles s konečnými rozměry bude pole napětí v okolí špičky trhliny ovlivněno volnými okraji tělesa a *K*-faktor bude pak závislý také na geometrii tělesa. Do výpočtu *K*-faktoru se tento vliv zavádí pomocí funkce geometrie (tvarové funkce) *Y*.



$$K_I = \sigma \sqrt{a} Y_I(a, W, L, \dots)$$

$$K_{II} = \tau \sqrt{a} Y_{II}(a, W, L, \dots)$$

$$K_{III} = \tau \sqrt{a} Y_{III}(a, W, L, \dots)$$

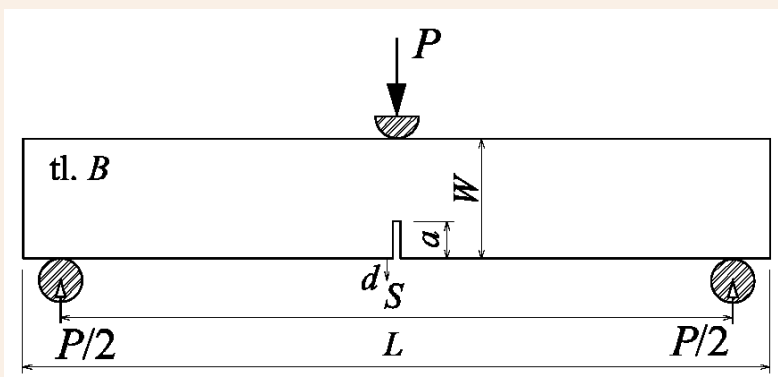
Pro různé tvary těles a způsoby zatížení byly nalezeny vztahy pro výpočet faktoru intenzity napětí.

Možno najít v literatuře.

Převzato z Vlach, B.  
http://www.zam.fme.vutbr.cz/~vlach/

### Příklady:

#### Třibodový ohyb trámce s trhlinou



$\alpha$  je relativní délka trhliny, tj. poměr  $a/W$ ,  
 $\beta$  je poměr  $S/W$ .

$$K_I = \sigma_N \sqrt{a} Y(\alpha, \beta) = \frac{6M}{BW^2} \sqrt{a} Y(\alpha, \beta) = \frac{3S \left( P + \frac{qS}{2} \right)}{2BW^2} \sqrt{a} Y(\alpha, \beta)$$

$$Y(\alpha, \beta) = \frac{p(\alpha, \beta)}{(1 + 2\alpha)(1 - \alpha)^{\frac{3}{2}}}$$

$$p(\alpha, \beta) = p_\infty(\alpha) + \frac{4}{\beta} (p_4(\alpha) - p_\infty(\alpha))$$

$$p_4(\alpha) = 1,900 - \alpha [-0,089 + 0,603(1 - \alpha) - 0,441(1 - \alpha)^2 + 1,223(1 - \alpha)^3]$$

$$p_\infty(\alpha) = 1,989 - \alpha(1 - \alpha) [0,448 - 0,458(1 - \alpha) + 1,226(1 - \alpha)^2]$$



# Základy lineární elastické lomové mechaniky

## • Napět'ový přístup – posouzení stability trhliny

Kritická hodnota faktoru intenzity napětí je materiálová veličina – **LOMOVÁ HOUŽEVNATOST**.

Analogicky s energetickým kritériem stability platí:

$K_I < K_{Ic}$  trhlina se nešíří

$K_I = K_{Ic}$  trhlina se šíří, může se šířit stabilně nebo nestabilně dle  $dK_I/da$  vers.  $dK_{Ic}/da$

$K_I > K_{Ic}$  trhlina se šíří nestabilně (dynamicky)

## • Svázání napět'ového a energetického přístupu

Napět'ový (lokální) přístup

$K_I$

kvantifikuje napětí a posunutí v blízkosti čela trhliny, popisuje lokální (místní) vlastnost

Energetický (globální) přístup

$G$

kvantifikuje změnu energie napjatosti při malém přírůstku trhliny, popisuje globální (celkovou) vlastnost

Pro lineárně elastický materiál jsou parametry  $K_I$  a  $G$  ve zcela jednoznačném vztahu

Pro centrální trhlinu v nekonečné stěně zatížené rovnoměrně tahovým napětím platí

$$K_I = \sigma \sqrt{\pi \cdot a}$$

$$G = \frac{\pi \sigma^2 a}{E}$$

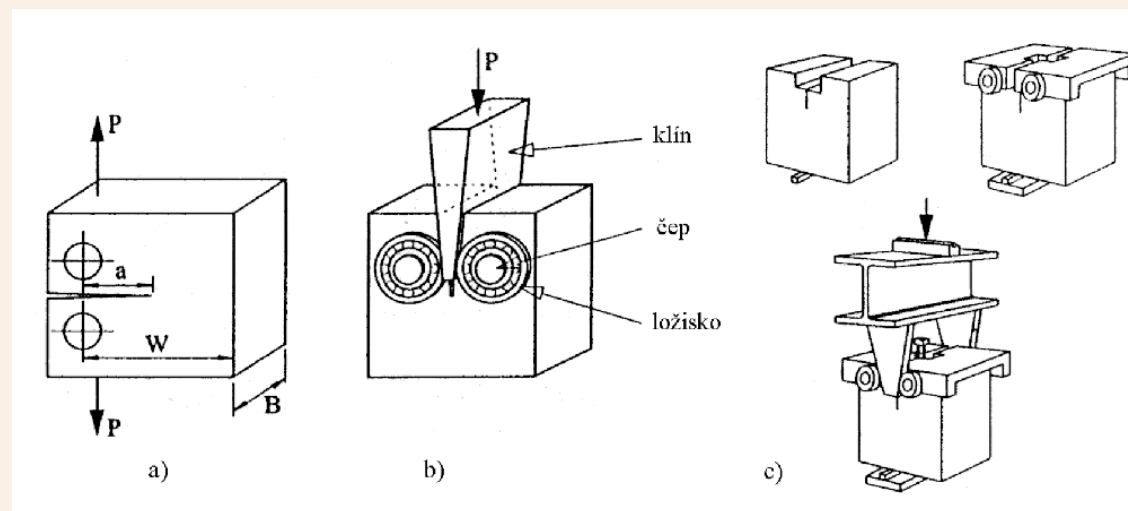
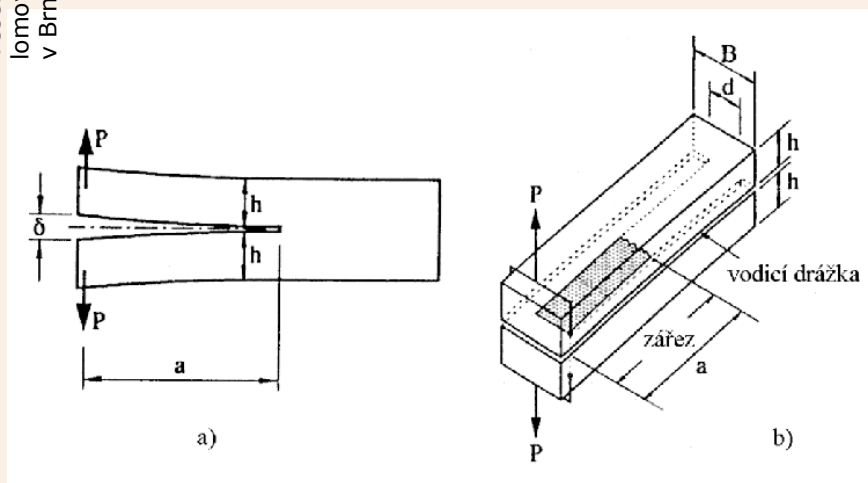
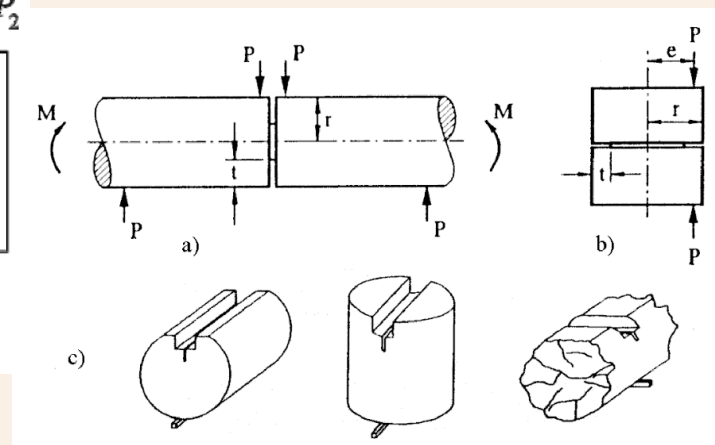
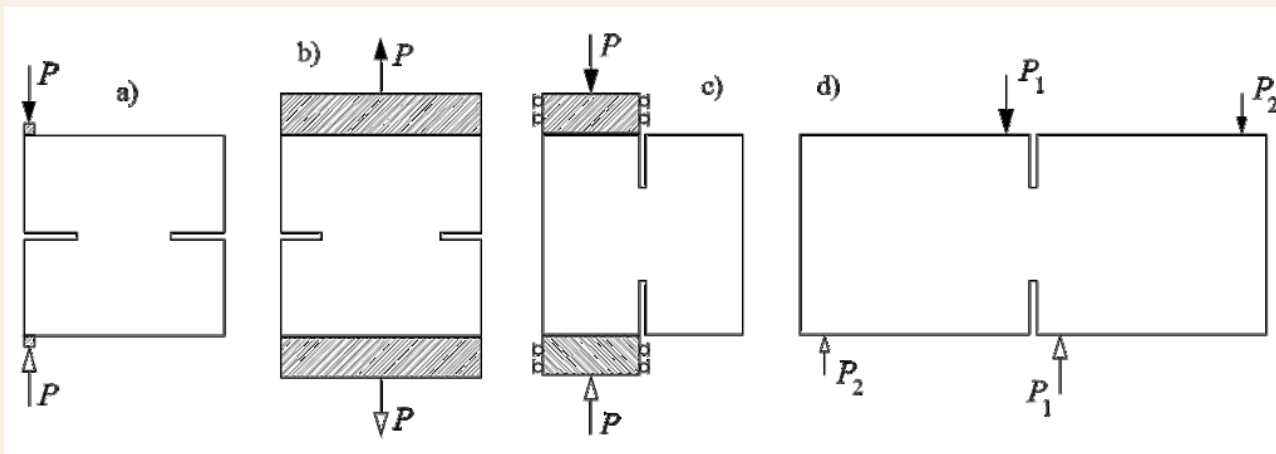
$$K_I = \sqrt{G E'} \quad \text{neboli} \quad G = \frac{K_I^2}{E'}$$

totéž pro kritické hodnoty, tj.  $K_{Ic}$  a  $R$

# Základy lineární elastické lomové mechaniky

- Napět'ový přístup – určování  $K_C$

Veselý, V. (2004) Parametry betonu pro popis lomového chování. Disertační práce, FAST VUT v Brně, Brno.



# Základy lineární elastické lomové mechaniky

- Odvození posuvů (přemístění) tělesa s trhlinou z Castiglianova principu

## SEN-T

Posun  $d$  konce dlouhého pásu s trhlinou (zářezem) taženého silou  $P$  lze zapsat jako součet dvou částí: část  $d_1$  reprezentuje běžný posun konce taženého prvku při uvažování průřezu neoslabeného trhlinou (zářezem), část  $d_2$  představuje zvětšení posunu v důsledku existence trhliny (zářezu). Uvažuje se prut délky  $L$  obdélníkového průřezu s výškou  $W$ , tloušťkou  $B$  a trhlinou délky  $a$  (plocha neoslabeného průřezu  $A = WB$ ).

### Část $d_1$

Na základě Hookeova zákona pro protažení prutu platí

$$d_1 = \frac{P L}{E' B W}, \quad (1)$$

kde  $P/BW$  je nominální napětí  $\sigma_N$  (konstantní po průřezu prutu),  $E' = E$  pro rovinnou napjatost a  $E' = E/(1 - \nu^2)$  pro rovinnou deformaci.

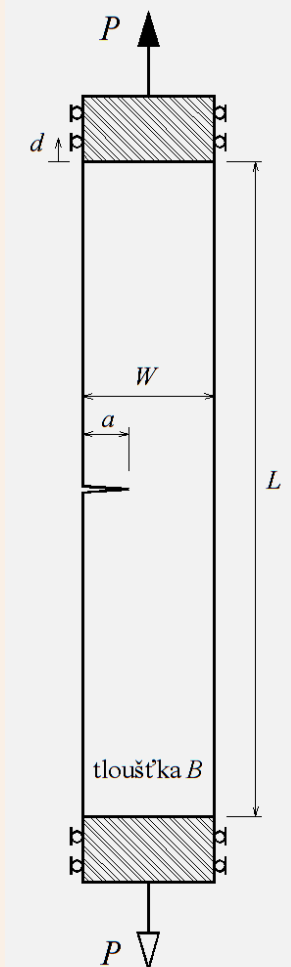
### Část $d_2$

Připomněme, že faktor intenzity napětí

$$K_I = \sigma_N \sqrt{a} Y(\alpha), \quad (2)$$

kde  $\alpha = a/W$ , je svázán s energií dostupnou pro šíření trhliny vztahem

$$\mathcal{G} = \frac{K_I^2}{E'}. \quad (3)$$



# Základy lineární elastické lomové mechaniky

## • Odvození posuvů (pokračování)

Z definičního vztahu pro  $\mathcal{G}$

$$\mathcal{G} = -\frac{1}{B} \frac{\partial \Pi}{\partial a} = \frac{1}{B} \frac{\partial}{\partial a} (\mathcal{W} - \mathcal{U}) \quad (4)$$

se vyjádří rozdíl  $\mathcal{W} - \mathcal{U}$ . Pak s použitím rovnice (3) a (2) platí

$$\partial(\mathcal{W} - \mathcal{U}) = \frac{BK_I^2}{E'} \partial a = \frac{B \sigma_N^2 a Y^2(\alpha)}{E'} \partial a = \frac{B}{E'} \sigma_N^2 \frac{a}{W} W Y^2\left(\frac{a}{W}\right) \partial a. \quad (5)$$

Nyní se infinitezimální přírůstek  $\partial a$  přetransformuje na  $\partial \alpha$

$$\partial(\mathcal{W} - \mathcal{U}) = \frac{BW}{E'} \sigma_N^2 \frac{a}{W} Y^2\left(\frac{a}{W}\right) \partial\left(W \frac{a}{W}\right) = \frac{BW^2}{E'} \sigma_N^2 \alpha Y^2(\alpha) \partial \alpha \quad (6)$$

Rozdíl  $\mathcal{W} - \mathcal{U}$  pak nabývá tvaru

$$\mathcal{W} - \mathcal{U} = \frac{BW^2}{E'} \sigma_N^2 \int_0^\alpha x Y^2(x) dx. \quad (7)$$

Nyní je možno uplatnit Castiglianův teorém, jehož výsledkem je posun konstrukce v místě přiložené síly  $P$ . Platí

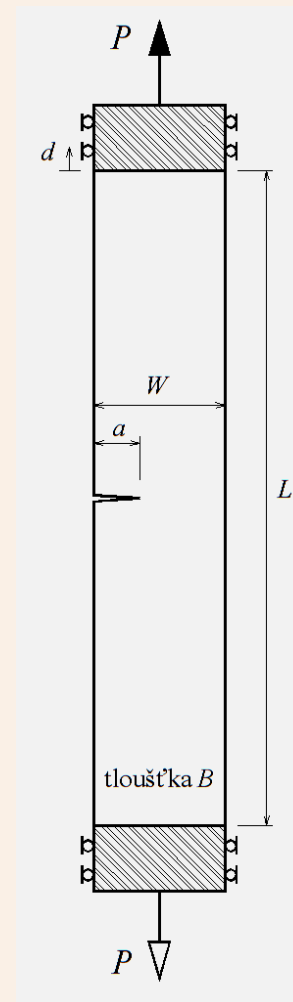
$$d_2 = \frac{\partial(\mathcal{W} - \mathcal{U})}{\partial P} = \frac{\partial}{\partial P} \left[ \frac{BW^2}{E'} \sigma_N^2 \int_0^\alpha x Y^2(x) dx \right]. \quad (8)$$

Po dosazení  $\sigma_N = P/BW$ , zderivování a úpravě dostáváme

$$d_2 = \frac{\partial}{\partial P} \left[ \frac{BW^2}{E'} \frac{P^2}{B^2 W^2} \int_0^\alpha x Y^2(x) dx \right] = \frac{\partial}{\partial P} \left[ \frac{P^2}{E' B} \int_0^\alpha x Y^2(x) dx \right] = \frac{2P}{E' B} \int_0^\alpha x Y^2(x) dx. \quad (9)$$

Posun konce taženého pásu s postranní trhlinou:

$$d = d_1 + d_2 = \frac{P}{E' B} \left[ \frac{L}{W} + 2 \int_0^\alpha x Y^2(x) dx \right]$$



# Základy lineární elastické lomové mechaniky

## • Rozměrový efekt (vliv velikosti) v LELM

Pod pojmem rozměrový efekt (vliv velikosti) se rozumí závislost materiálové charakteristiky (většinou tahová pevnost) na velikosti konstrukce.

$$\sigma_N = c_N \frac{P}{BD}$$

$\sigma_N$  nominální napětí  
 $P$  zatížení  
 $B$  šířka průřezu  
 $D$  charakteristický rozměr, obvykle výška průřezu  
 $c_N$  je součinitel charakterizující způsob namáhání (tah, ohyb, smyk, kroucení) a metodu výpočtu napětí (elastické nebo plastické rozložení napětí po průřezu)

pro třibodový ohyb nosníku

$$\sigma_N = \frac{3}{2} \frac{PS}{BW^2} = c_N \frac{P}{BD}$$

$S$  rozpětí  
 $D$  charakteristický rozměr, tj.  $W$   
 $c_N$  1,5  $S/W$

Po dosažení maximálního zatížení  $P_u$  dostaneme vztah pro nominální pevnost  $\sigma_{Nu}$

### Vliv velikosti predikovaný LELM:

faktor intenzity napětí

$$K_I = \sigma_N \sqrt{a} Y \left( \frac{a}{W} \right) = \sigma_N \sqrt{D} k(\alpha)$$

$$k(\alpha) = Y(\alpha) \sqrt{\alpha} \quad \text{součinitel geometrie}$$

nominální pevnost

$$\sigma_{Nu} = \frac{K_{Ic}}{\sqrt{D} k(\alpha)} \quad \text{čili} \quad \sigma_{Nu} \propto D^{-1/2}$$

$$\log \sigma_{Nu} = -\frac{1}{2} \log D + \text{konstanta}$$

