

VYSOKÁ ŠKOLA BÁŇSKÁ – TECHNICKÁ UNIVERZITA OSTRAVA

FAKULTA STAVEBNÍ

# INŽENÝRSKÉ STATICKÉ VÝPOČTY

Energetické metody, úvod do metody konečných prvků

Jiří Brožovský

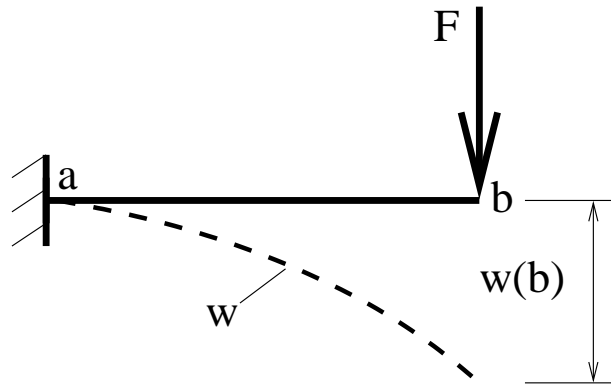
Kancelář: LP – H 406/3  
Telefon: 597 321 321

E-mail: [jiri.brozovsky@vsb.cz](mailto:jiri.brozovsky@vsb.cz)

# Energetické principy

- Klasické přístupy mechaniky (řešení z podmínek rovnováhy, silová a deformační metoda,...) neumožňují dostatečně obecně řešit 2D a 3D problémy.
- Možným řešením je využití **energetických metod** – metod pracujících s vlastnostmi energie systému (např. zatížená konstrukce).
- Omezíme se na úlohy **statiky** a budeme pracovat s **potenciální energií**.
- V přednášce využijeme tyto principy u **metody konečných prvků**.

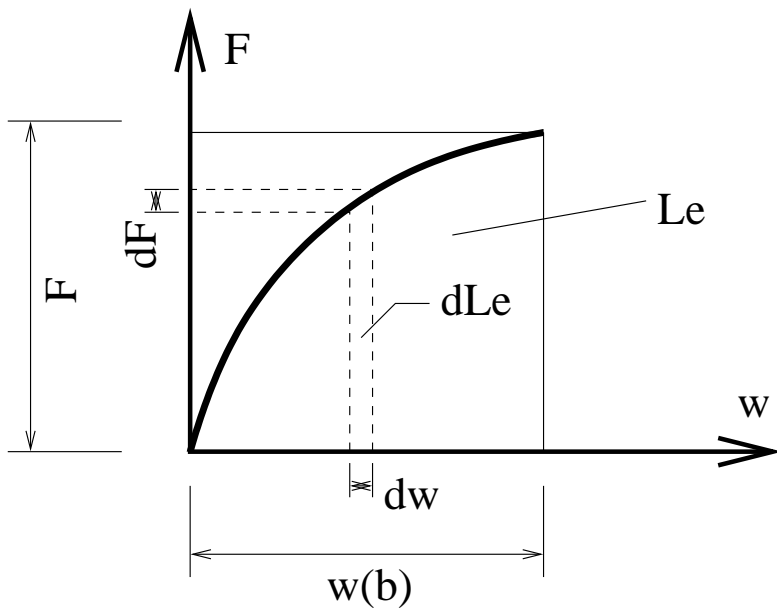
# Přetvárná práce vnějších sil (1)



Přetvárná práce v. s.:

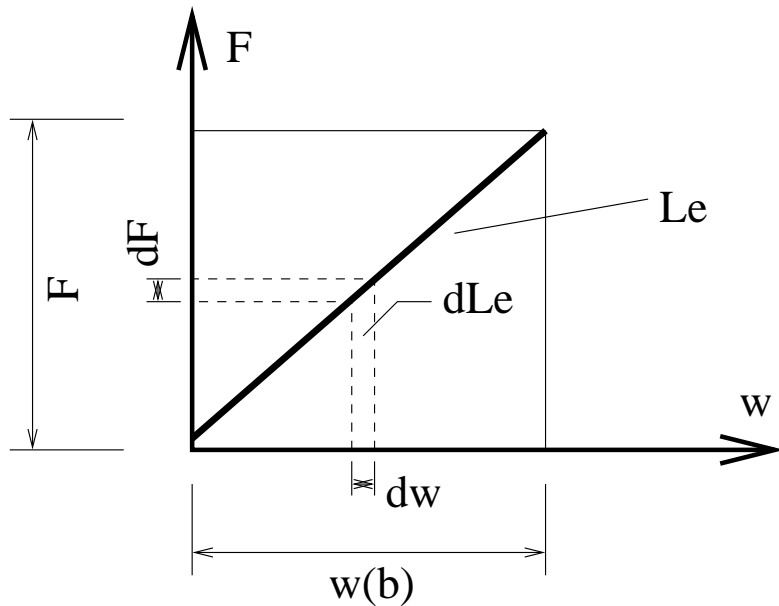
$$d L_e = F(w) d w, \quad (1)$$

$$L_e = \int_0^w F(w) d w. \quad (2)$$



# Přetvárná práce vnějších sil (2)

Lineárně pružná odezva konstrukce:



Clapeyronova věta:

$$L_e = \frac{1}{2} F w. \quad (3)$$

# Přetvárná práce vnějších sil (3)

**Přetvárná práce vnějších sil**  $L_e$ : práce vnějších sil vykonaná v průběhu zatěžování.

**Komplementární přetvárná práce vnějších sil**  $L_e^*$ :

- práce nutná k tomu, aby působení síly  $F$  na dráze  $w$  mělo statický charakter (možno představit jako práci „brzdící“ síly působící proti  $F$  na dráze  $w$ );
- práce nutná k navrácení konstrukce do nedeformované polohy.

$$L_e + L_e^* = F w. \quad (4)$$

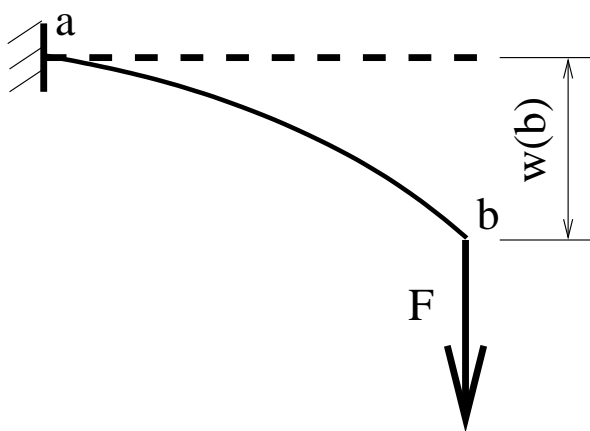
# Potenciální energie vnějších sil

Potenciální energie vnějších sil ( $\Pi_e$ ):



$$\Pi_e = -F w, \quad (5)$$

pro obecné zatížení:



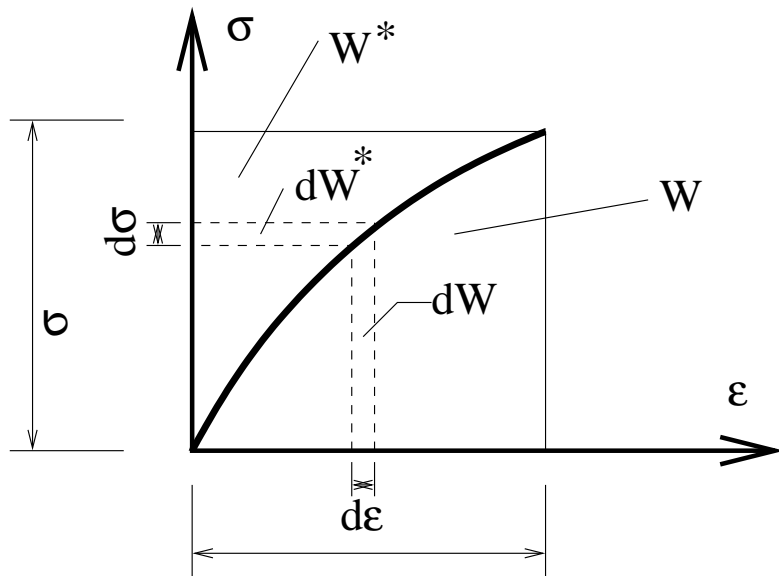
$$\Pi_e = - \sum_{i=1}^n F_i u_i - \sum_{j=1}^n M_j \varphi_j - \int_c^d q(x) w(x) dx. \quad (6)$$

Obecný stav napjatosti tělesa:

$$\Pi_e = - \int_V \mathbf{X}^T \mathbf{u} dV - \int_s \mathbf{p}^T \mathbf{u} dS. \quad (7)$$

# Práce vnitřních sil

(1)



Příspěvek normálových napětí:

$$W_{\sigma} = \int_0^{\epsilon} \sigma(\epsilon) d\epsilon, \quad (8)$$

$$W_{\sigma}^* = \int_0^{\sigma} \epsilon(\sigma) d\sigma. \quad (9)$$

Příspěvek smykových napětí:

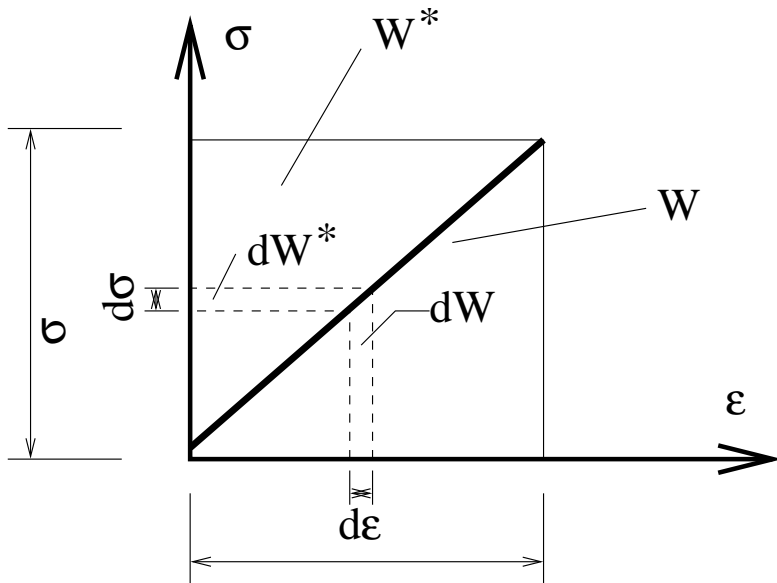
$$W_{\epsilon} = \int_0^{\gamma} \tau(\gamma) d\gamma, \quad (10)$$

$$W_{\epsilon}^* = \int_0^{\tau} \gamma(\tau) d\tau. \quad (11)$$

# Práce vnitřních sil

(2)

Lineárně pružná odezva materiálu:



Příspěvek normálových napětí:

$$W_{\sigma} = W_{\sigma}^* = \frac{1}{2} \sigma \epsilon. \quad (12)$$

Příspěvek smykových napětí:

$$W_{\epsilon} = W_{\epsilon}^* = \frac{1}{2} \tau \gamma. \quad (13)$$



# Potenciální energie vnitřních sil

Tedy **potenciální energie vnitřních sil** (pro lin. pružnou odezvu materiálu) se stanoví z práce vnitřních sil:

$$\begin{aligned}\Pi_i &= W_\sigma + W_\tau = L_i = \\ &= \frac{1}{2} \int_V (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \sigma_z \varepsilon_z + \tau_{xy} \gamma_{xy} + \tau_{yz} \gamma_{yz} + \tau_{zx} \gamma_{zx}) dV.\end{aligned}\quad (14)$$

V maticovém zápisu:

$$\Pi_i = \Pi_i^* = \frac{1}{2} \int_V \boldsymbol{\varepsilon}_z^T \boldsymbol{\sigma} dV. \quad (15)$$

Poznámka: maticový zápis (a maticové operace) se využije zejména v metodě konečných prvků.

# Přímý prut (bez vlivu smyku)

Uvedené vztahy pro potenciální energii vnitřních sil je možné aplikovat i na pruty (s využitím znalostí ze základní pružnosti):

Normálové síly ( $\sigma = \frac{N}{A}$ ):

$$\Pi_{i,N} = \frac{1}{2} \int_V \frac{1}{E} \sigma_x^2 dV = \dots = \frac{1}{2} \int_l \frac{N^2}{E A} dx \quad (16)$$

Momenty ( $\sigma = \frac{M y}{I}$ ):

$$\Pi_{i,M} = \frac{1}{2} \int_V \frac{1}{E} \sigma_x^2 dV = \dots = \frac{1}{2} \int_l \frac{M^2 y}{E I} dx \quad (17)$$

Tedy:

$$\Pi_i = \frac{1}{2} \int_l \frac{N^2}{E A} dx + \frac{1}{2} \int_l \frac{M^2 y}{E I} dx \quad (18)$$

# Potenciální energie vnitřních sil

Dokonale pružné těleso plně akumuluje *energii odpovídající vykonané přetvárné práci*:

$$\Pi_i = L_e \quad (19)$$

Vnitřní síly brání deformaci, proto:

$$L_i = - L_e \quad (20)$$

a

$$L_i \leq 0 \quad (21)$$

tedy:

$$\Pi_i = |L_i|. \quad (22)$$

# Potenciální energie systému (1)

Potenciální energie vnějších sil ( $\Pi_e$ ):

$$\Pi_e = -(L_e + L_e^*). \quad (23)$$

Tedy odpovídá celkové práci vykonané vnějšími silami.

Při lineárně pružné odezvě materiálu ( $L_e = L_e^*$ ):

$$\Pi_e = -2 L_e. \quad (24)$$

tedy

$$\Pi_e \leq 0. \quad (25)$$

# Potenciální energie systému (2)

Celková potenciální energie systému:

$$\Pi = \Pi_e + \Pi_i. \quad (26)$$

Dosazením za  $\Pi_e$  a  $\Pi_i$ :

$$\Pi = \Pi_e + \Pi_i = -(L_e + L_e^*) + L_e = -L_e^*, \quad (27)$$

tedy

$$\Pi \leq 0. \quad (28)$$

# Potenciální energie systému (3)

(Lagrangeův) **princip minima celkové potenciální energie:**

$$\Pi = \Pi_e + \Pi_i = \min. \quad (29)$$

„Ze všech možných deformačních stavů tělesa (které neporušují jeho spojitost a respektují okrajové podmínky) nastane právě ten, při kterém je potenciální energie systému minimální.“

# Variační úloha

Znalost z předchozího snímku ( $\Pi = \min.$ ) je možné využít ve variačních úlohách:

- hledáme neznámou **funkci** (nikoli jen hodnotu),
- funkce musí splňovat určité okrajové nebo počáteční podmínky,
- hledaná funkce musí splňovat podmínku **extrému** nějaké veličiny (zde  $\Pi = \min.$ ).

# Variační úlohy v teorii pružnosti

Protože platí (29):

$$\Pi = \Pi_i + \Pi_e = \min, \quad (30)$$

tedy hodnota potenciální energie je extrémní (minimální).

Z matematiky: pro extrém veličiny  $\Pi$  platí:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial Y} = 0, \quad (31)$$

čehož využívají variační metody (např Ritzova metoda).

- Funkce  $Y$  bude – pokud použijeme Lagrangeova principu – zřejmě funkcí popisující deformaci konstrukce (napr. průhybová čára nosníku).
- Veličina  $\Pi$  je **funkcionálem** (nikoli funkcí): přiřazuje dané hodnotě proměnné  $X$  funkci  $Y$  (níkoli hodnotu!).



# Ritzova metoda (1)

Tato metoda nahrazuje neznámou funkci  $Y$  vhodnou **aproximací**.

1. Aproximace řešení volíme ve tvaru:

$$w_n(x) = \sum_{i=1}^n a_i \psi_i, \quad (32)$$

kde  $a_i \dots$  neznámé konstanty,  $\psi_i \dots$  aproximační funkce.

2. Vyjádříme  $\Pi$  pomocí  $w_n(x)$ .

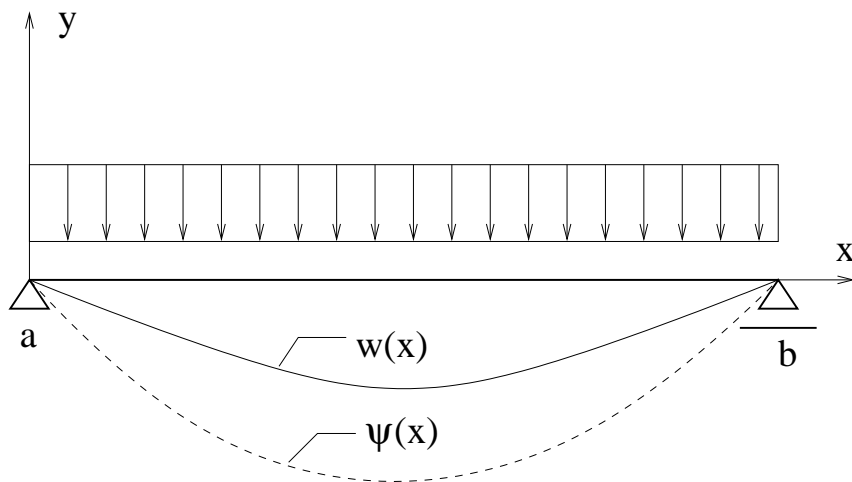
3. Sestavení a vyřešení  $n$  rovnic:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial a_i} = 0. \quad (33)$$

4. Dosazení vypočtených  $a_i$  do (32).

# Rizova metoda (2) – bázové funkce

Bázové (aproximační) funkce  $\psi$  musí vyhovovat **okrajovým podmínkám** úlohy (tedy v určitých bodech musí aproximace nabývat předepsaných hodnot).



Např. při výpočtu průhybu musí platit:

$$\psi(a) = 0 \text{ (protože } w(a)=0),$$
$$\psi(b) = 0 \text{ (protože } w(b)=0).$$

# Aplikace na prutové konstrukce

Protože platí:

$$N = (E A) \frac{du}{dx}, \quad (34)$$

$$M = -(E I_y) \frac{d^2 w}{dx^2}, \quad (35)$$

Ize vyjádřit **potenciální energii vnitřních sil** (bez vlivu smyku):

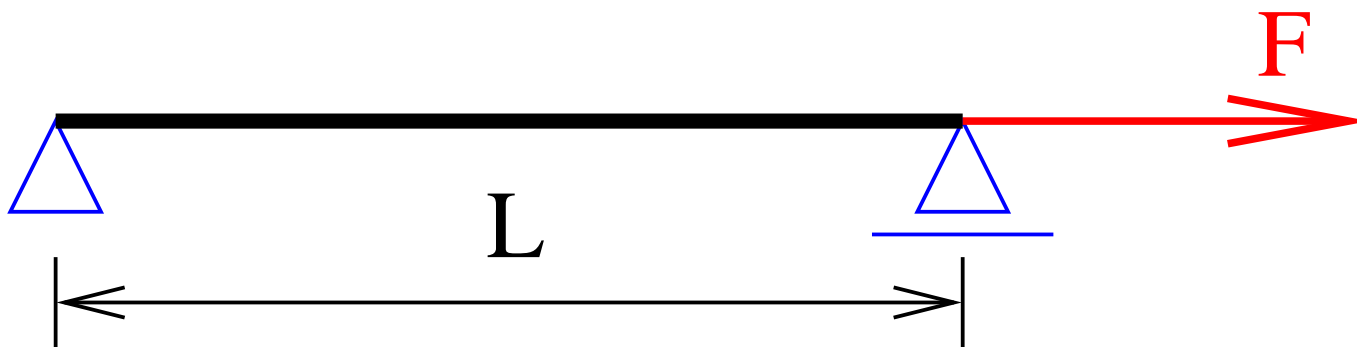
$$\Pi_i = \frac{1}{2} \int_0^L E A u'^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^L E I w''^2 dx. \quad (36)$$

Podobně **potenciální energie vnějších sil** může být zapsána jako:

$$\Pi_e = \sum_{i=1}^n F_{z,i} w_i + \int_0^L q(x) dx + \sum_{i=1}^m F_{x,i} u_i + \int_0^L n(x) dx \quad (37)$$

# Příklad 1 (1)

Stanovte funkci osově deformace zadaného nosníku (viz schéma). Předpokládejte, že součin  $E \times A$  je po celé délce nosníku konstantní.



Volba aproximace:

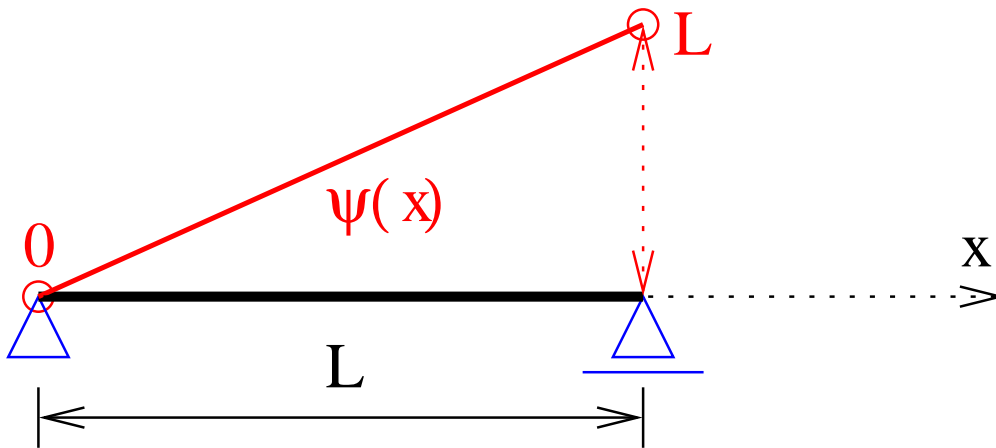
$$u(x) = a_1 \psi_1 = a_1 x, \quad \text{tj. } \psi_1 = x.$$

# Příklad 1 (2)

Okrajové podmínky:

$$u(a) = w(x = 0) = 0 \dots \psi_1(a) = x = 0$$

$$u(b) = w(x = L) \neq 0 \dots \psi_1(b) = x = L$$



# Příklad 1 (3)

Vyjádření  $\Pi_e$ :

$$\Pi_e = -F u - \int_0^L q u(x) dx.$$

Přitom  $F$  působí v bodě  $x = L$ :

$$\Pi_e = -F u = -F a_1 \psi_1 = -F a_1 x = -F L a_1.$$

# Příklad 1 (4)

Derivace funkce  $u = a_1 \psi_1$ :

$$u' = [a_1 x]' = a_1.$$

Vyjádření  $\Pi_i$ :

$$\Pi_i = \frac{1}{2} \int_0^L E A (u')^2 dx = \frac{1}{2} \int_0^L E A a_1^2 dx = \frac{E A a_1^2}{2} \int_0^L dx$$

$$\Pi_i = \frac{E A a_1^2}{2} [x]_0^L = \frac{E A L}{2} a_1^2.$$

# Příklad 1 (5)

Vyjádření  $\Pi$ :

$$\Pi = \Pi_e + \Pi_i = -F L a_1 + \frac{E A L}{2} a_1^2.$$

Sestavení rovnic(e)  $\frac{\partial \Pi}{\partial a_i} = 0$  :

$$-F L + E A L a_1 = 0$$

Výpočet  $a_1$ :

$$a_1 = \frac{F}{E A}$$



# Příklad 1 (6)

Výsledek (dosazením  $a_i$  do  $u(x)$ ):

$$u(x) = a_1 \psi_1 = \frac{F}{E A} x.$$

Protažení v  $x = L$ :  $u(L) = \frac{F L}{E A}$ .

Výpočet vnitřních sil (normálová síla):

$$N(x) = E A u' = -E A \left[ \frac{F}{E A} x \right]' = F$$

# Metoda konečných prvků (1)

Nevýhoda klasických variačních metod – obtížná volba (často nemožná) aproximačních funkcí  $\varphi$  na složitějších oblastech (např. i lomené nosníky).

Řešení – rozdělení konstrukce na malé oblasti na  $n$  **tvarově jednoduchých podoblastí** a volba aproximačních funkcí na nich  $\varphi_j$  na nich.

Protože  $\Pi$  je skalární veličina, lze:

$$\Pi_{approx.} = \sum_{j=1}^n \Pi_{e,j}, \quad (38)$$

kde  $\Pi_{e,j}$  je potenciální energie  $j$ -té podoblasti („konečného prvku“).

# Metoda konečných prvků (2)

Další postup je analogický klasickým variačním metodám (např. Ritzově metodě) – řeší se soustava  $n$  lineárních rovnic:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial a_i} = 0, \quad i = 1..n \quad (39)$$

Pozn.: zde je použit **Lagrangeův variační princip** a jde tedy o **deformační variantu** metody konečných prvků MKP (viz dále).

# Metoda konečných prvků

(3)

Varianty MKP podle variačního principu, na kterém je založena:

- deformační (Lagrangeův variační princip) – neznámá jsou **posunutí a pootočení** (nejčastější, přes 90% případů, všechny komerční software),
- silová (např. Castiglianův variační princip) – neznámé jsou silové veličiny,
- smíšená (např. variační princip Hu-Washitsu).

Otázka: proč je „deformační varianta“ nejvhodnější pro praktické použití?

# Deformační varianta MKP

Hledané **deformační veličiny** – viz klasická teorie pružnosti (mohou být i jejich derivace!):

- rovinná napjatost s deformace (stěny, ...):  $u, v$
- desky:  $w, \varphi_x, \varphi_y$
- prostorové úlohy:  $u, v, w$

Aproximační funkce se volí **zásadně** ve tvaru polynomů (otázka: proč asi?).

# Volba náhradních polynomů (1)

- Nejlepší konvergence při použití úplného polynomu  $n$ -tého stupně (Ženíšek et al).
- Počet konstant v polynomu  $(a_1, a_2, \dots)$  = počet neznámých na konečném prvku  $(u_1, v_1, \dots)$ .
- Ne vždy je možné použít všechny členy úplného polynomu.

# Volba náhradních polynomů (2)

Pro neznámou  $x$ :

1.  $a_1 + a_2 x$

2.  $a_1 + a_2 x + a_3 x^2$

3.  $a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + a_4 x^3$

4.  $a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + a_4 x^3 + a_5 x^4$

# Volba náhradních polynomů (3)

Pro neznámé  $x$  a  $y$ :

1.  $a_1 + a_2 x + a_3 y$

2.  $a_1 + a_2 x + a_3 y + a_4 xy + a_5 x^2 + a_6 y^2$

3.  $a_1 + a_2 x + a_3 y + a_4 xy + a_5 x^2 + a_6 y^2 + a_7 x^3 + a_8 y^3 +$   
 $a_9 x y^2 + a_{10} x^2 y$



# Matice tuhosti kon. prvku (1)

Potenciální energie soustavy:

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_V \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon} dV - \int_V \mathbf{X}^T \mathbf{r} dV. \quad (40)$$

Po dosazení za  $\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B}\mathbf{S}\mathbf{r}$  (vytvoříme později) a vytknutí vektoru neznámých konstant (posunutí)  $\mathbf{r}$ :

$$\Pi = \frac{1}{2} \mathbf{r}^T \int_V \mathbf{S}^{-1T} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} \mathbf{S}^{-1} dV \mathbf{r} - \int_V \mathbf{X}^T dV \mathbf{r}. \quad (41)$$

Stručně:

$$\Pi = \frac{1}{2} \mathbf{r}^T \mathbf{K} \mathbf{r} - \mathbf{F}^T \mathbf{r}. \quad (42)$$

# Matice tuhosti kon. prvku (2)

Aplikací Lagrangeova variačního principu ( $\frac{\partial \Pi}{\partial \mathbf{r}} = 0$ ) na (65):

$$\mathbf{K} \mathbf{r} = \mathbf{F}, \quad (43)$$

kde  $\mathbf{K}$  ... matice tuhosti konečného prvku:

$$\mathbf{K} = \int_V \mathbf{S}^{-1T} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} \mathbf{S}^{-1} dV, \quad (44)$$

$\mathbf{F}$  ... zatěžovací vektor konečného prvku:

$$\mathbf{F} = - \int_V \mathbf{X}^T dV - \int_S \mathbf{p}^T dS. \quad (45)$$

# Analýza konstrukce

Z  $K_e$  a  $r_e$  a  $F_e$  jednotlivých prvků ( $e$  je číslo prvku) sestavíme  $K$  a  $r$  a  $F$  celé konstrukce a neznámé určíme řešením soustavy rovnic:

$$K r = F. \quad (46)$$

**Poznámka:** tyto sestavení matice tuhosti a zatěžovacího vektoru je zcela shodné s postupem v obecné deformační metodě.

# Zatížení konstrukce

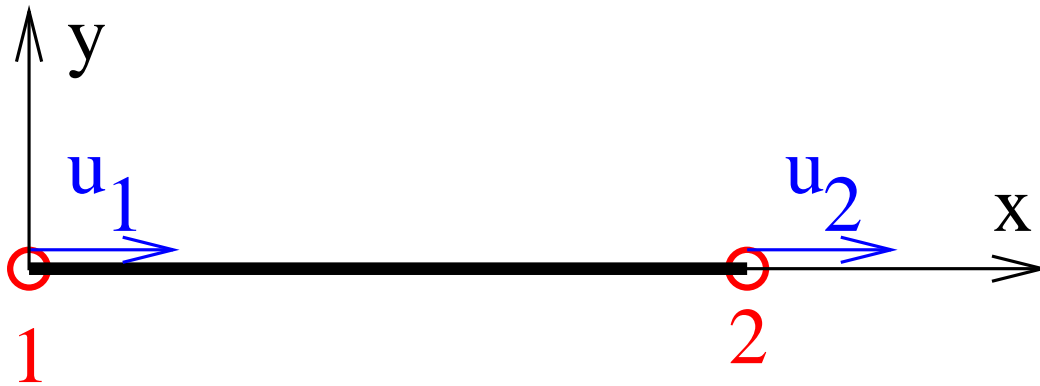
- Zatížení zavádíme výhradně v uzlech konečných prvků
- Zatížení má silový charakter:
  - **síly** pracují na posunutích
  - **momenty** pracují na pootočeních
- Zatížení deformacemi bude popsáno dále

# Podpřetí konstrukce – okrajové podmínky

- Pružné podpory: přidáme odpovídající tuhost pružiny na diagonálu matice tuhosti
- Pevná podpora (posunutí, pootočení)  $\Rightarrow$  známá hodnota (0, 0) neznámého posunutí/pootočení (upravíme systém rovnic)
- Popuštění podpor:  $\Rightarrow$  známá hodnota neznámého posunutí/pootočení (upravíme systém rovnic)

# Odvození konečného prvku příhradoviny

(1)



Neznámé parametry deformace:  $u, v$  v každém uzlu.

Tj. celkem dva neznámé uzlové parametry:

$$\{u_1, u_2\}^T.$$

# Odvození konečného prvku příhradoviny (2)

Geometrická rovnice:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \quad (47)$$

Maticově ( $\varepsilon = \partial^T \mathbf{u}$ ):

$$\left\{ \varepsilon_x \right\} = \left[ \frac{\partial}{\partial x} \right] \left\{ u \right\} \quad (48)$$

# Odvození konečného prvku příhradoviny (3)

Podmínka rovnováhy:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + X = 0 \quad (49)$$

Maticově ( $\partial \sigma + X = 0$ ):

$$\left[ \frac{\partial}{\partial x} \right] \{ \sigma_x \} + \{ X \} = \{ 0 \} \quad (50)$$



# Odvození konečného prvku příhradoviny (4)

Fyzikální rovnice:

$$\sigma_x = E \times \varepsilon_x \quad (51)$$

Maticově ( $\sigma = \mathbf{D} \varepsilon$ ):

$$\left\{ \sigma_x \right\} = \left[ E \right] \left\{ \varepsilon_x \right\} \quad (52)$$

# Odvození konečného prvku příhradoviny

(5)

Aproximace neznámých uzlových posunutí:

$$u(x) = a_1 + a_2 x \quad (53)$$

Maticově ( $\mathbf{u} = \mathbf{U} \mathbf{a}$ ):

$$\{ u \} = \begin{bmatrix} 1 & x \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} \quad (54)$$

# Odvození konečného prvku příhradoviny

(6)

Aproximace neznámých uzlových posunutí v uzlech 1, 2

( $\mathbf{r} = \mathbf{S} \mathbf{a}$ ):

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} \quad (55)$$

# Odvození konečného prvku příhradoviny (7)

Kombinací vztahů  $\varepsilon = \partial^T u$  a  $u = U a$  vznikne  $\varepsilon = B a$ , kde  $B = \partial^T U$  a:

$$\left\{ \varepsilon_x \right\} = \left[ \frac{\partial}{\partial x} \right] \left[ \begin{array}{cc} 1 & x \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} a_1 \\ a_2 \end{array} \right\} \quad (56)$$

# Odvození konečného prvku příhradoviny (8)

Kombinací vztahů  $\varepsilon = \partial^T u$  a  $u = U a$  vznikne  $\varepsilon = B a$ , kde  $B = \partial^T U$  a:

$$\left\{ \varepsilon_x \right\} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} \quad (57)$$

# Odvození konečného prvku příhradoviny

(9)

Z  $\mathbf{r} = \mathbf{S} \mathbf{a}$  plyne:

$$\mathbf{a} = \mathbf{S}^{-1} \mathbf{r}, \quad (58)$$

kde:

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{S}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{x_2}{x_2-x_1} & \frac{-x_1}{x_2-x_1} \\ \frac{-1}{x_2-x_1} & \frac{-1}{x_2-x_1} \end{bmatrix} \quad (59)$$

Pak místo  $\varepsilon = \mathbf{B} \mathbf{a}$  lze psát  $\varepsilon = \mathbf{B} \mathbf{S}^{-1} \mathbf{r}$ :

$$\left\{ \varepsilon_x \right\} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{x_2}{x_2-x_1} & \frac{-x_1}{x_2-x_1} \\ \frac{-1}{x_2-x_1} & \frac{-1}{x_2-x_1} \end{bmatrix} \left\{ \begin{matrix} u_1 \\ u_2 \end{matrix} \right\}. \quad (60)$$

# Odvození konečného prvku příhradoviny (11)

Potenciální energie vnitřních sil:

$$\Pi_i = \frac{1}{2} \int_V \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} dV = \frac{1}{2} \int_V \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon} dV = \quad (61)$$

Potenciální energie vnějších sil:

$$\Pi_e = - \int_V \mathbf{X}^T \mathbf{r} dV - \int_S \mathbf{p}^T \mathbf{r} dS. \quad (62)$$

# Odvození konečného prvku příhradoviny (12)

Potenciální energie soustavy:

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_V \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon} dV - \int_V \mathbf{X}^T \mathbf{r} dV - \int_S \mathbf{p}^T \mathbf{r} dS. \quad (63)$$

Po dosazení za  $\boldsymbol{\varepsilon}$  a vytknutí  $\mathbf{r}$ :

$$\Pi = \frac{1}{2} \mathbf{r}^T \int_V \mathbf{S}^{-1T} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} \mathbf{S}^{-1} dV \mathbf{r} - \int_V \mathbf{X}^T dV \mathbf{r} - \int_S \mathbf{p}^T dS \mathbf{r}. \quad (64)$$

Stručně:

$$\Pi = \frac{1}{2} \mathbf{r}^T \mathbf{K} \mathbf{r} - \mathbf{F}^T \mathbf{r}. \quad (65)$$



# Odvození konečného prvku příhradoviny (13)

Aplikací Lagrangeova variačního principu ( $\partial \Pi = \min.$ ) na (65):

$$\mathbf{K} \mathbf{r} = \mathbf{F}, \quad (66)$$

kde  $\mathbf{K}$  ... matice tuhosti konečného prvku:

$$\mathbf{K} = \int_V \mathbf{S}^{-1T} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} \mathbf{S}^{-1} dV, \quad (67)$$

$\mathbf{F}$  ... zatěžovací vektor konečného prvku:

$$\mathbf{F} = - \int_V \mathbf{X}^T dV - \int_S \mathbf{p}^T dS. \quad (68)$$

# Odvození konečného prvku příhradoviny (14)

Pro studovaný konečný prvek:

$$\mathbf{F} = \mathbf{X} + \mathbf{p}. \quad (69)$$

$$\mathbf{K} = \int_V \mathbf{S}^{-1T} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} \mathbf{S}^{-1} dV = A \int_0^L \mathbf{S}^{-1T} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} \mathbf{S}^{-1} dx, \quad (70)$$

podrobný zápis:

$$\mathbf{K} = A \int_0^L \begin{bmatrix} \frac{x_2}{x_2-x_1} & \frac{-1}{x_2-x_1} \\ \frac{-x_1}{x_2-x_1} & \frac{-1}{x_2-x_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} [E] \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{x_2}{x_2-x_1} & \frac{-x_1}{x_2-x_1} \\ \frac{-1}{x_2-x_1} & \frac{-1}{x_2-x_1} \end{bmatrix} dx \quad (71)$$

# Odvození konečného prvku příhradoviny (15)

Podrobný zápis (vytknutí konstant pře integrál):

$$\mathbf{K} = A \begin{bmatrix} \frac{x_2}{x_2-x_1} & \frac{-1}{x_2-x_1} \\ \frac{-x_1}{x_2-x_1} & \frac{-1}{x_2-x_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} [E] \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{x_2}{x_2-x_1} & \frac{-x_1}{x_2-x_1} \\ \frac{-1}{x_2-x_1} & \frac{-1}{x_2-x_1} \end{bmatrix} \int_0^L dx \quad (72)$$

Po úpravě (integrace  $\int_0^L dx = L$  násobení matic):

$$\mathbf{K} = EAL \begin{bmatrix} \frac{1}{(x_2-x_1)^2} & \frac{-1}{(x_2-x_1)^2} \\ \frac{-1}{(x_2-x_1)^2} & \frac{1}{(x_2-x_1)^2} \end{bmatrix}, \quad x_2-x_1 = L \Rightarrow \mathbf{K} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & \frac{-EA}{L} \\ \frac{-EA}{L} & \frac{EA}{L} \end{bmatrix}, \quad (73)$$

což je matice tuhosti známá i z deformační metody.

# Odvození konečného prvku příhradoviny (16)

Soustava rovnic pro jeden konečný prvek má tedy tvar:

$$\mathbf{K}_e \mathbf{r}_e = \mathbf{F}_e,$$

podrobně:

$$\begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & \frac{-EA}{L} \\ \frac{-EA}{L} & \frac{EA}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix} \quad (74)$$

# Odvození konečného prvku příhradoviny

(17)

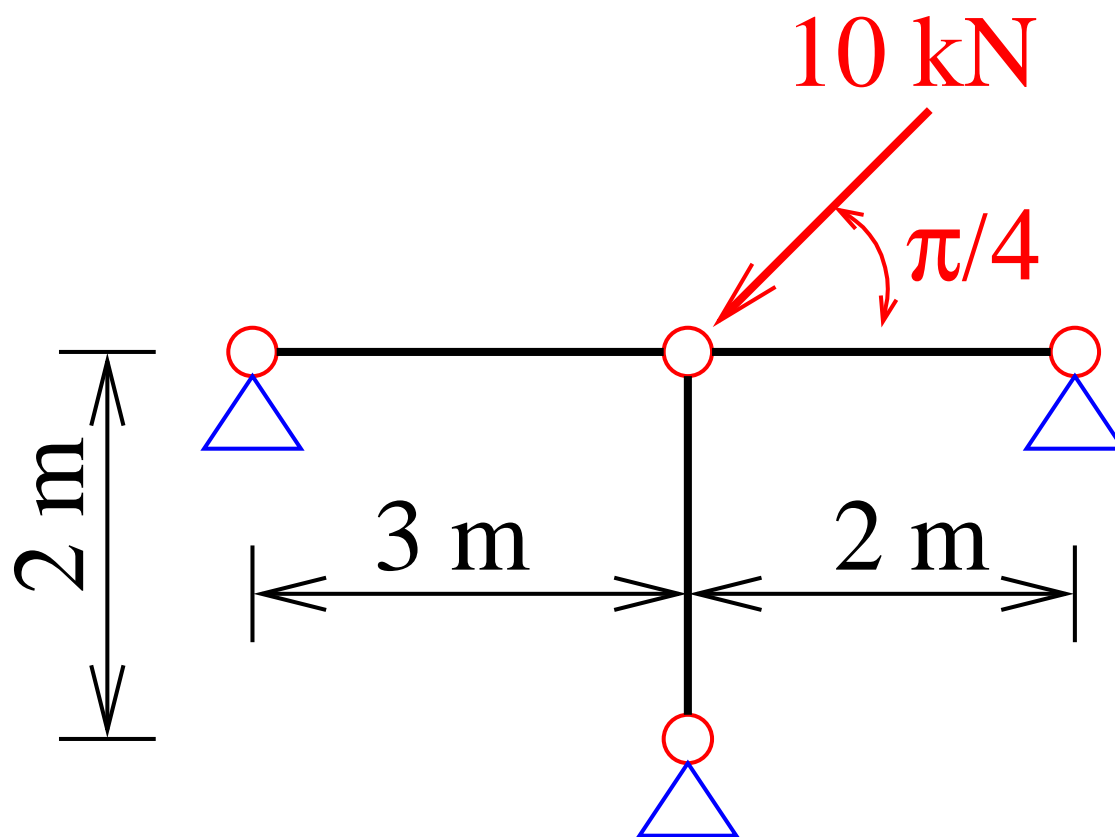
Rozšíření na proměnné  $u$  a  $v$  v každém uzlu:



$$\begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{EA}{L} & 0 & \frac{EA}{L} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ 0 \\ F_2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (75)$$

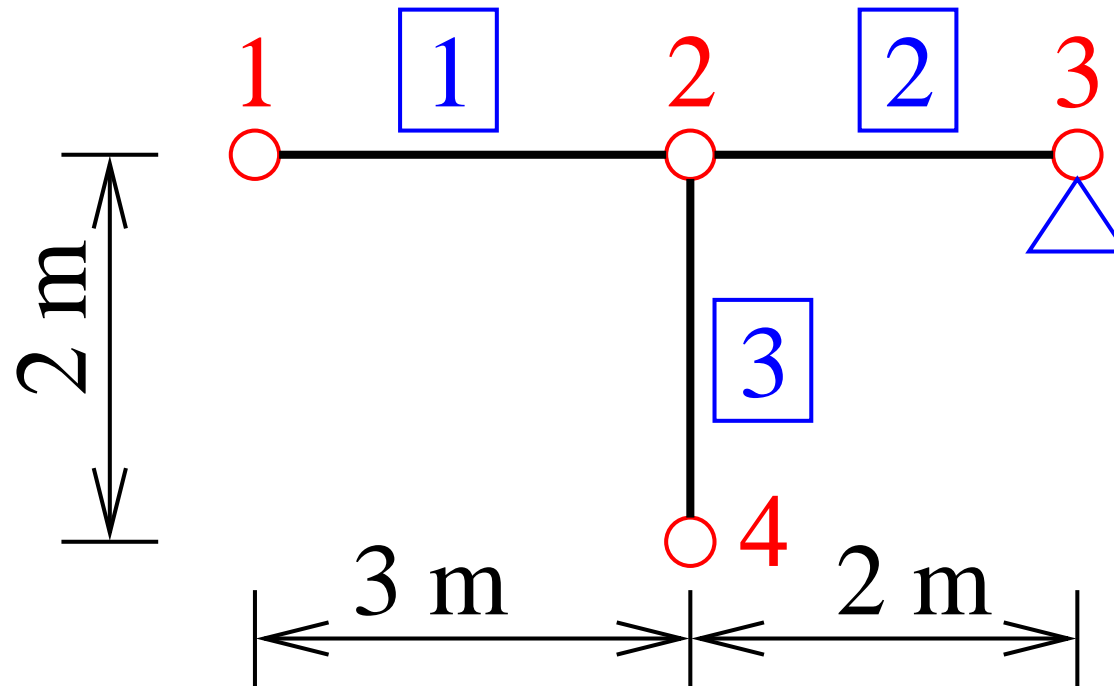
# Příklad (1)

Stanovte vnitřní síly zadané příhradové konstrukce, je-li dáno  $E = 20 \text{ GPa}$ ,  $A = 0.01 \text{ m}^2$ .



# Příklad (2)

Označení prvků a uzlů:



# Příklad (3)

Matice tuhosti prvku 1 (uzly 1,2):

	$u_1$	$v_1$	$u_2$	$v_2$
$u_1$	$\frac{EA}{L}$	0	$-\frac{EA}{L}$	0
$v_1$	0	0	0	0
$u_2$	$-\frac{EA}{L}$	0	$\frac{EA}{L}$	0
$v_2$	0	0	0	0

	$u_1$	$v_1$	$u_2$	$v_2$
$u_1$	66666667	0	-66666667	0
$v_1$	0	0	0	0
$u_2$	-66666667	0	66666667	0
$v_2$	0	0	0	0



# Příklad (4)

Matice tuhosti prvku 2 (uzly 2,3):

	$u_2$	$v_2$	$u_3$	$v_3$
$u_2$	$\frac{EA}{L}$	0	$-\frac{EA}{L}$	0
$v_2$	0	0	0	0
$u_3$	$-\frac{EA}{L}$	0	$\frac{EA}{L}$	0
$v_3$	0	0	0	0

	$u_2$	$v_2$	$u_3$	$v_3$
$u_2$	100000000	0	-100000000	0
$v_2$	0	0	0	0
$u_3$	-100000000	0	100000000	0
$v_3$	0	0	0	0

# Příklad (5)

Matice tuhosti prvku 3 (uzly 2,4) v **lokálních souřadnicích**:

	$u_2$	$v_2$	$u_4$	$v_4$
$u_2$	$\frac{EA}{L}$	0	$-\frac{EA}{L}$	0
$v_2$	0	0	0	0
$u_4$	$-\frac{EA}{L}$	0	$\frac{EA}{L}$	0
$v_4$	0	0	0	0

	$u_2$	$v_2$	$u_4$	$v_4$
$u_2$	100000000	0	-100000000	0
$v_2$	0	0	0	0
$u_4$	-100000000	0	100000000	0
$v_4$	0	0	0	0

# Příklad (6)

Transformace matice tuhosti prvku 3 (uzly 2,4) do svislého směru (viz SSK II):

$$\mathbf{K}_e = \mathbf{T}^T \mathbf{K}_e^{\text{loc}} \mathbf{T},$$

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \cos(90) & \sin(90) & 0 & 0 \\ -\sin(90) & \cos(90) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos(90) & \sin(90) \\ 0 & 0 & -\sin(90) & \cos(90) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Matice prvku 3 v **globálních souřadnicích**:

	$u_2$	$v_2$	$u_4$	$v_4$
$u_2$	0	0	0	0
$v_2$	0	100000000	0	-100000000
$u_4$	0	0	0	0
$v_4$	0	-100000000	0	100000000

# Příklad (7)

Matice tuhosti konstrukce:

$$10^6 \times \begin{bmatrix} 67 & 0 & -67 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -67 & 0 & 167 & 0 & -100 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 100 & 0 & 0 & 0 & -100 \\ 0 & 0 & -100 & 0 & 100 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -100 & 0 & 0 & 0 & 100 \end{bmatrix} \quad (76)$$

# Příklad (9)

Soustava rovnic  $\mathbf{K} \times \mathbf{r} = \mathbf{F}$  po zavedení okrajových podmínek:

$$10^6 \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 167 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 100 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -7071 \\ -7071 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (77)$$

# Příklad (10)

Vypočítaný vektor posunutí:

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -4.2426 \times 10^{-05} \\ -7.0711 \times 10^{-05} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} [m] \quad (78)$$

# Příklad (11)

Vektory posunutí jednotlivých prutů:

$$r_{e,1} = [0, 0, -4.2426 \times 10^{-05}]^T \quad (79)$$

$$r_{e,1} = [-4.2426 \times 10^{-05}, 0, 0]^T \quad (80)$$

$$r_{e,1} = [-4.2426 \times 10^{-05}, 0, 0]^T \quad (81)$$

Dopočet koncových (a vnitřních) sil:

$$\mathbf{K}_{e,i} \times \mathbf{r}_{e,i} = \mathbf{F}_{e,i} \Rightarrow N_i \quad (82)$$

Prut	Síla [kN]
1	-2.83
2	4.24
3	-7.07