

VYSOKÁ ŠKOLA BÁŇSKÁ – TECHNICKÁ UNIVERZITA OSTRAVA

FAKULTA STAVEBNÍ

INŽENÝRSKÉ STATICKÉ VÝPOČTY

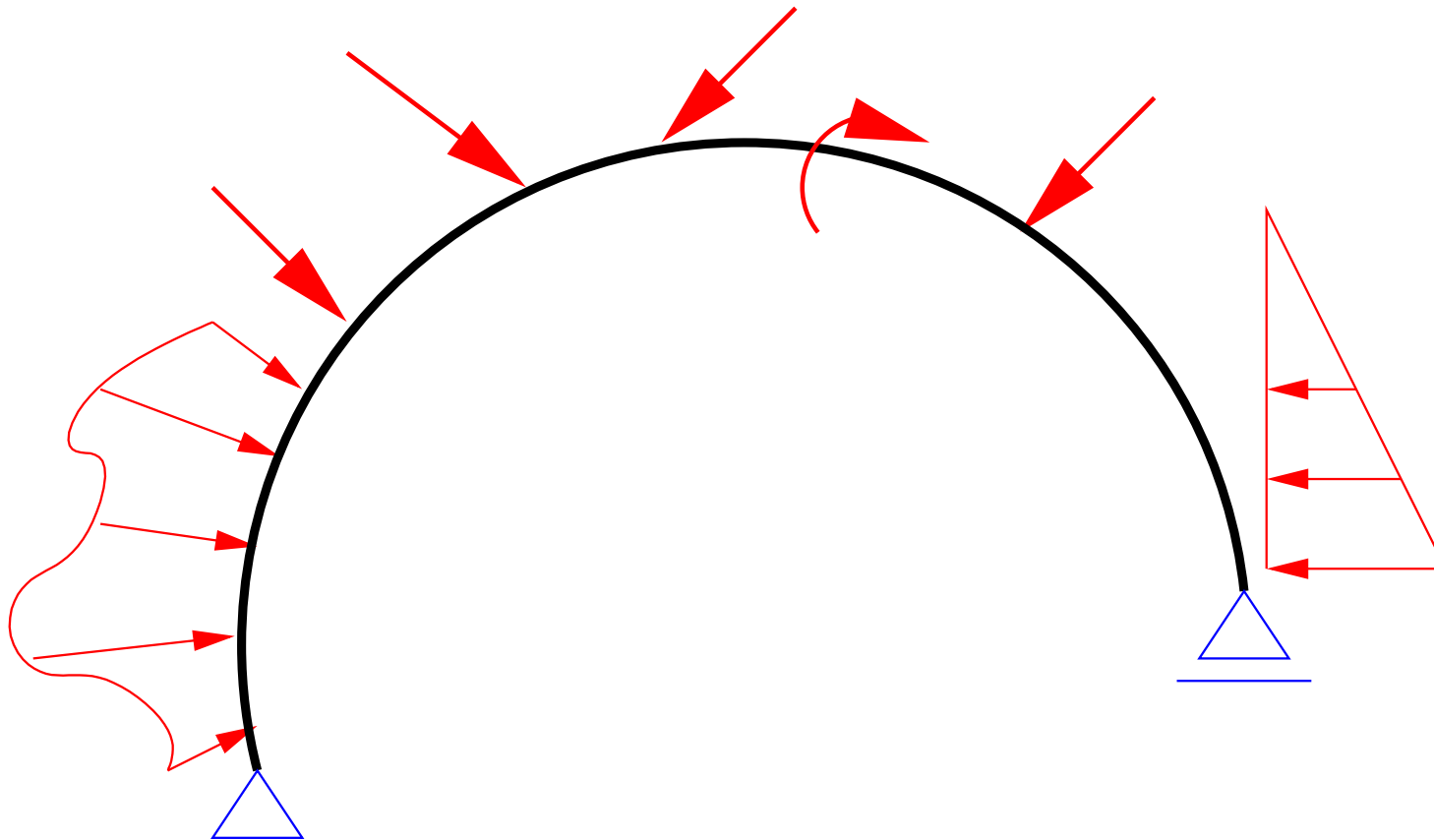
Deformační metoda: oblouky, prostorové prutové soustavy

Jiří Brožovský

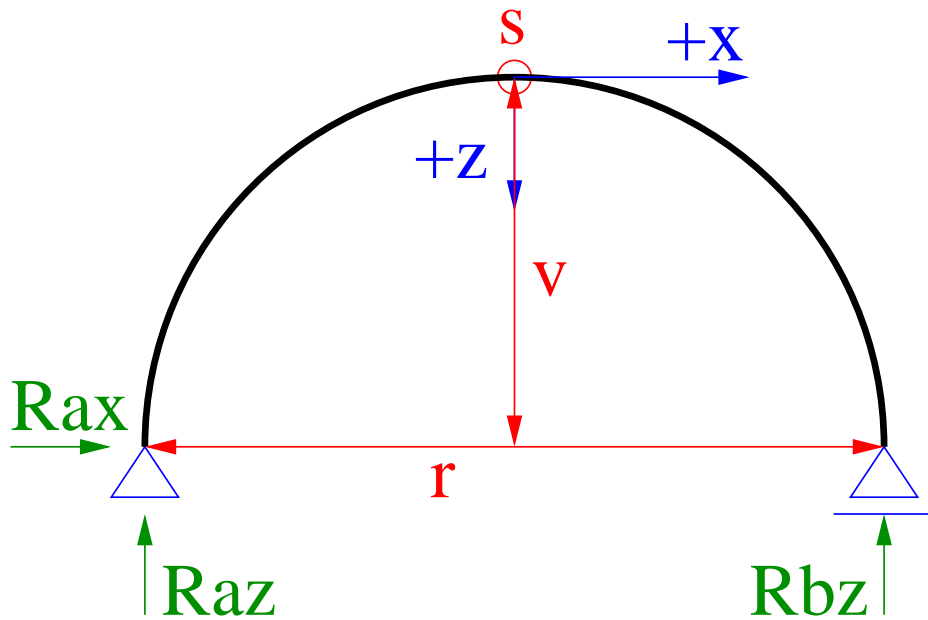
Kancelář: LP – H 406/3
Telefon: 597 321 321

E-mail: jiri.brozovsky@vsb.cz

Rovinný oblouk (rovinný zakřivený nosník)



Rovinný oblouk – popis



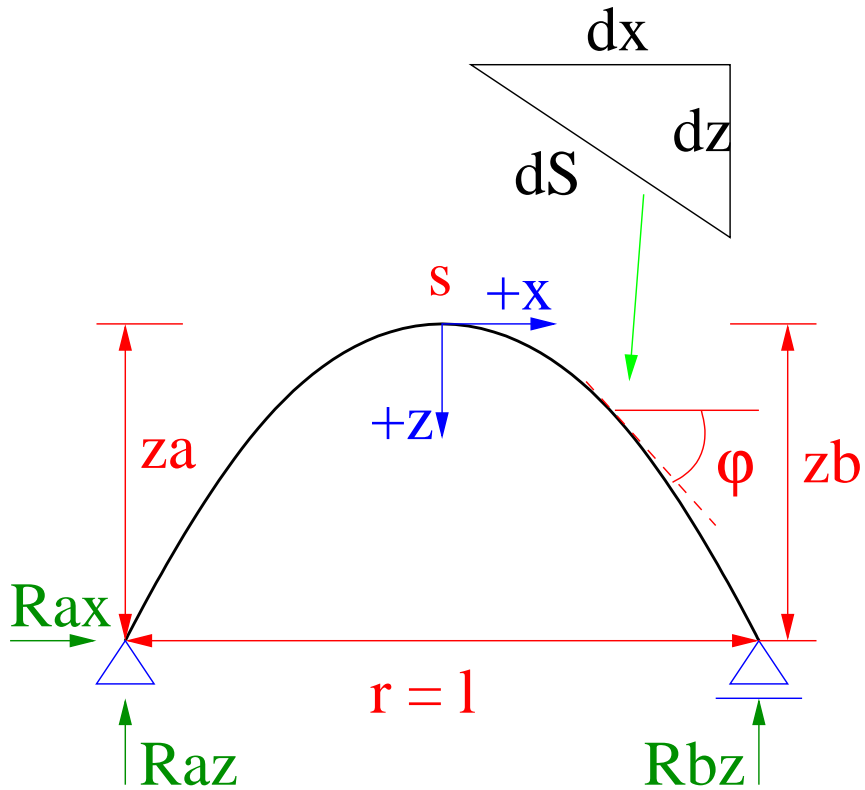
Geometrie:

- o ... vrchol
- r ... rozpětí
- v ... vzepětí

Tvar střednice:

- kvadratická parabola
- parabola 4^0
- kružnice

Rovinný oblouk: kvadratická parabola



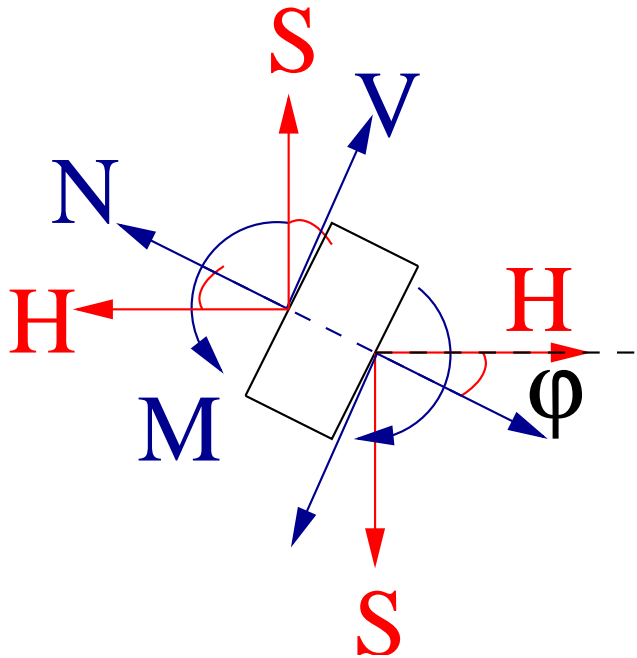
$$z(x) = k \times x^2$$

$$k = \frac{z_a}{x_a^2} = \frac{z_b}{x_b^2}$$

$$\tan \varphi = \frac{dz}{dx} = [k \times x^2]'$$

$$= 2 \times k \times x$$

Kvadratická parabola: vnitřní síly v průřezu



$$\tan \varphi = 2 \times k \times x$$

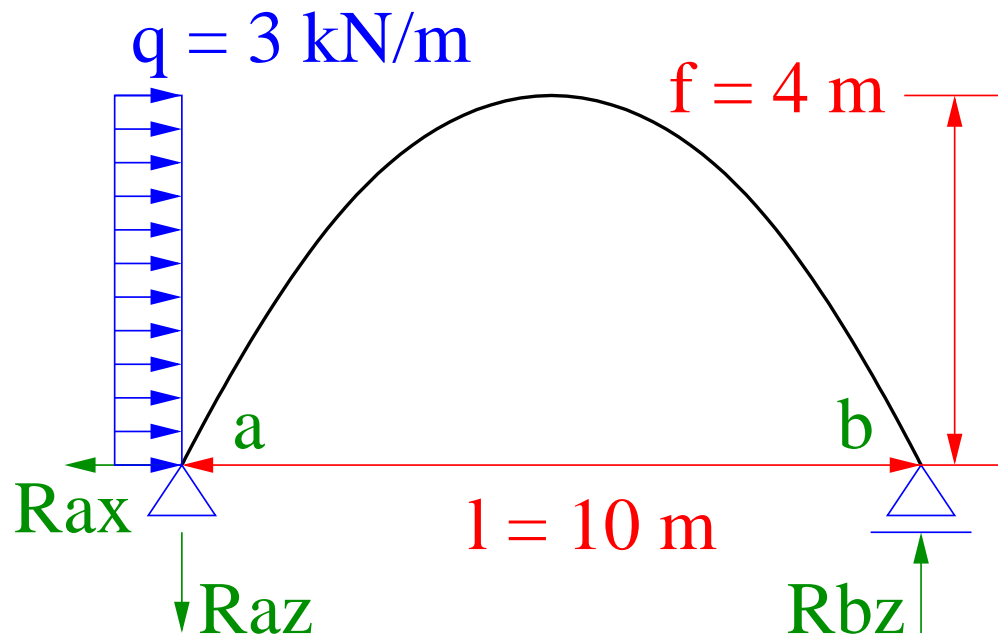
$$N = H \cos \varphi + S \sin \varphi$$

$$V = -H \sin \varphi + S \cos \varphi$$

$$\cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 \varphi}}$$

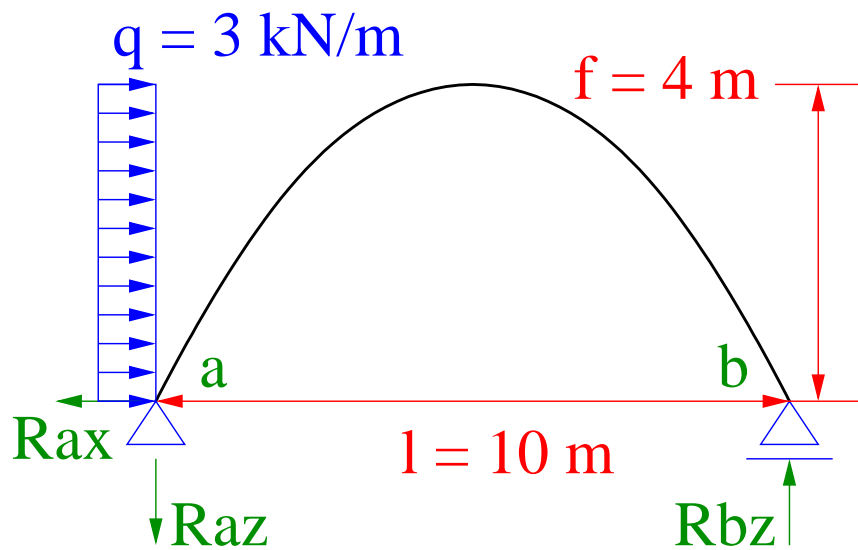
$$\sin \varphi = \frac{\tan \varphi}{\sqrt{1 + \tan^2 \varphi}}$$

Kvadratická parabola: příklad (1)



$$z(x) = k \times x^2$$
$$\tan \varphi = 2 \times k \times x$$
$$\cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{(1 + \tan^2 \varphi)}}$$
$$\sin \varphi = \frac{\tan \varphi}{\sqrt{(1 + \tan^2 \varphi)}}$$

Kvadratická parabola: příklad (2)



$$\sum F_{i,x} = 0 :$$

$$R_{a,x} - 3 \times 4 = 0$$

$$R_{a,x} = 12 \text{ kN} (\leftarrow)$$

$$\sum M_{a,i} = 0 :$$

$$-3 \times 4 \times \frac{4}{2} + R_{b,z} \times 10 = 0$$

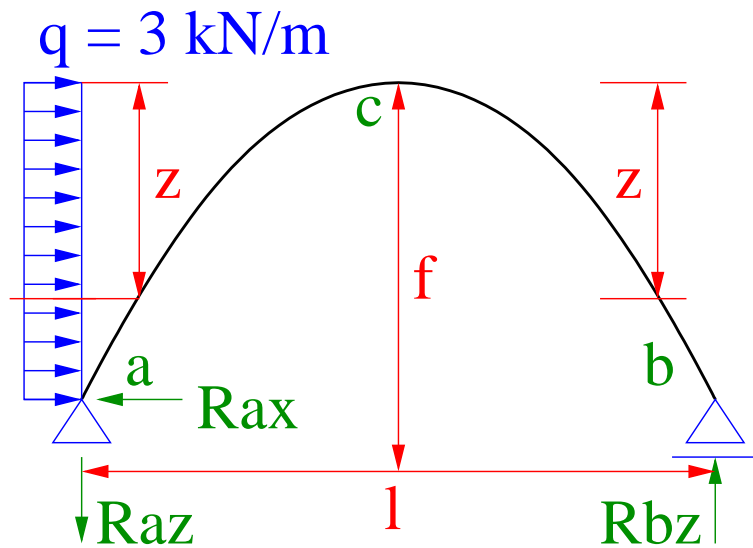
$$R_{b,z} = \frac{3 \times 4 \times 2}{10} = 2,4 \text{ kN} (\uparrow)$$

$$\sum M_{b,i} = 0 :$$

$$-3 \times 4 \times \frac{4}{2} + R_{a,z} \times 10 = 0$$

$$R_{a,z} = \frac{3 \times 4 \times 2}{10} = 2,4 \text{ kN} (\downarrow)$$

Kvadratická parabola: příklad (3)



H – levá polovina:

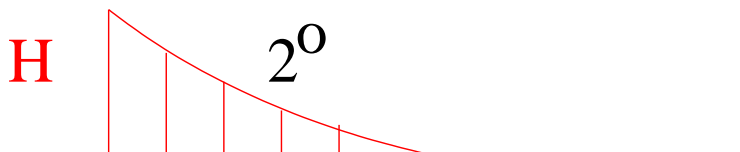
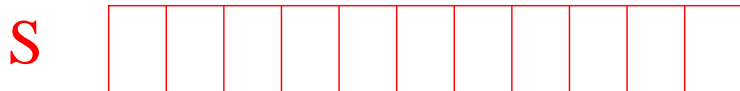
$$H = R_{a,x} - q(f - z)$$

H – pravá polovina:

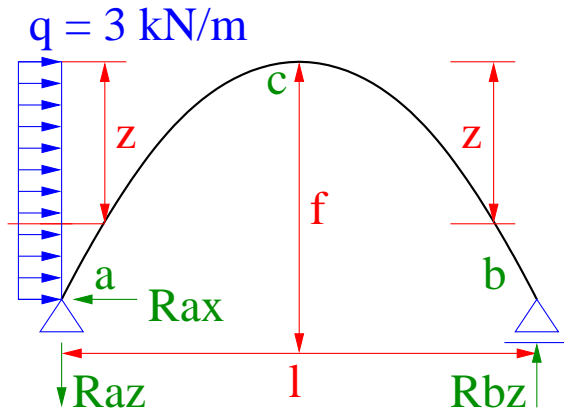
$$H = R_{a,x} - qf$$

S – celý nosník:

$$S = -R_{a,z}$$

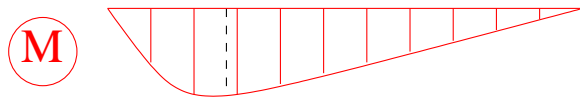
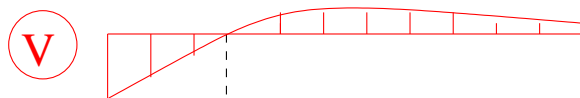
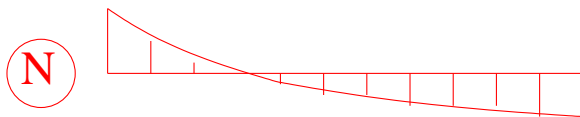
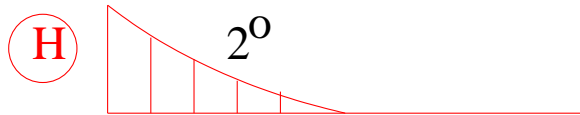
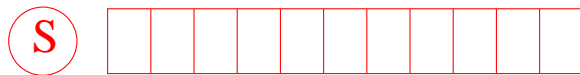


Kvadratická parabola: příklad (4)



$$N = H \cos \varphi + S \sin \varphi$$

$$V = -H \sin \varphi + S \cos \varphi$$



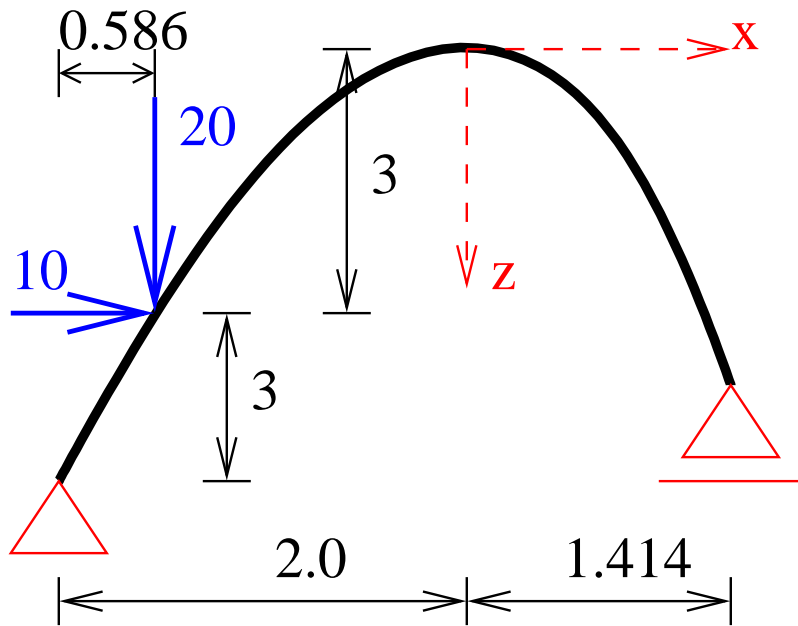
M – levá polovina:

$$M = R_{a,x}(f - z) - R_{a,z}\left(\frac{l}{2} + x\right) - \frac{q(f - z)^2}{2}$$

M – pravá polovina:

$$M = R_{a,x}(f - z) - R_{a,z}\left(\frac{l}{2} + x\right) + q \times f \left(\frac{f}{2} - z\right)$$

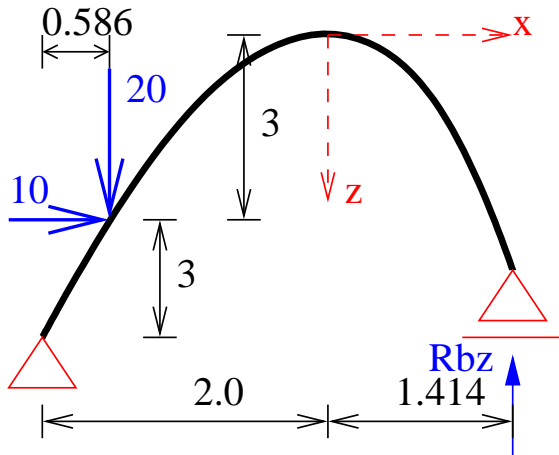
Kvadratická parabola: příklad 2 (1)



Stanovte reakce a vnitřní síly zadaného parabolického oblouku:

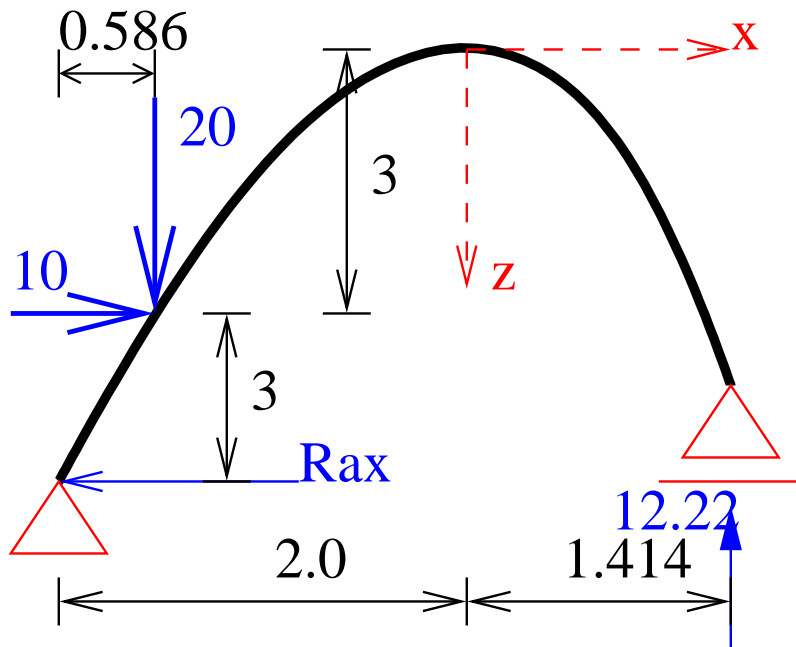
$$k = \frac{z_a}{x_a^2} = \frac{6}{2^2} = 1,5$$

Kvadratická parabola: příklad 2 (2)



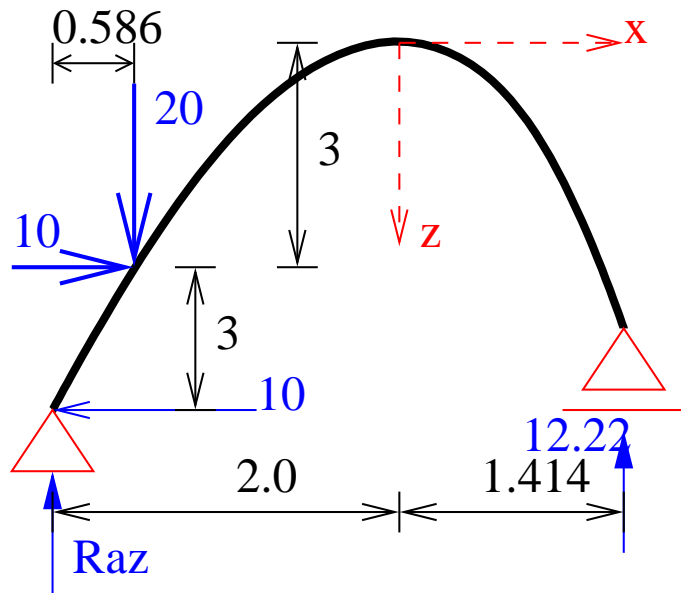
$$\sum M_{i,a} = 0 :$$
$$R_{bz} \times 3.314 - 10 \times 3 + 20 \times 0.586 = 0$$
$$R_{bz} \times 3.314 - 10 \times 3 + 20 \times 0.586 = 0$$
$$R_{bz} = 12.220 \text{ kN (} \uparrow \text{)}$$

Kvadratická parabola: příklad 2 (3)



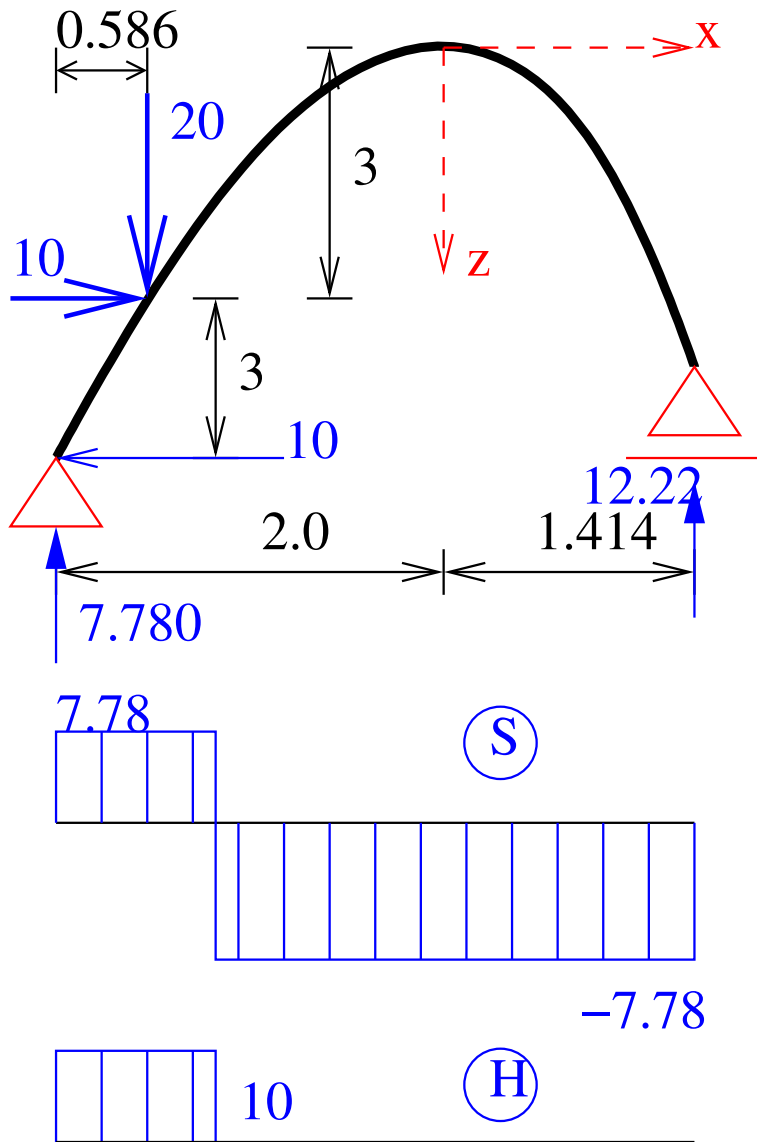
$$\begin{aligned}\sum F_{i,x} &= 0 : \\ R_{az} - 10 &= 0 \\ R_{az} &= 10 \text{ kN}(\leftarrow)\end{aligned}$$

Kvadratická parabola: příklad 2 (4)



$$\sum M_{i,b} = 0 :$$
$$-R_{az} \times 3.314 - 10 \times 3 + 20 \times 2.828 = 0$$
$$R_{az} = 7.780 \text{ kN (} \uparrow \text{)}$$

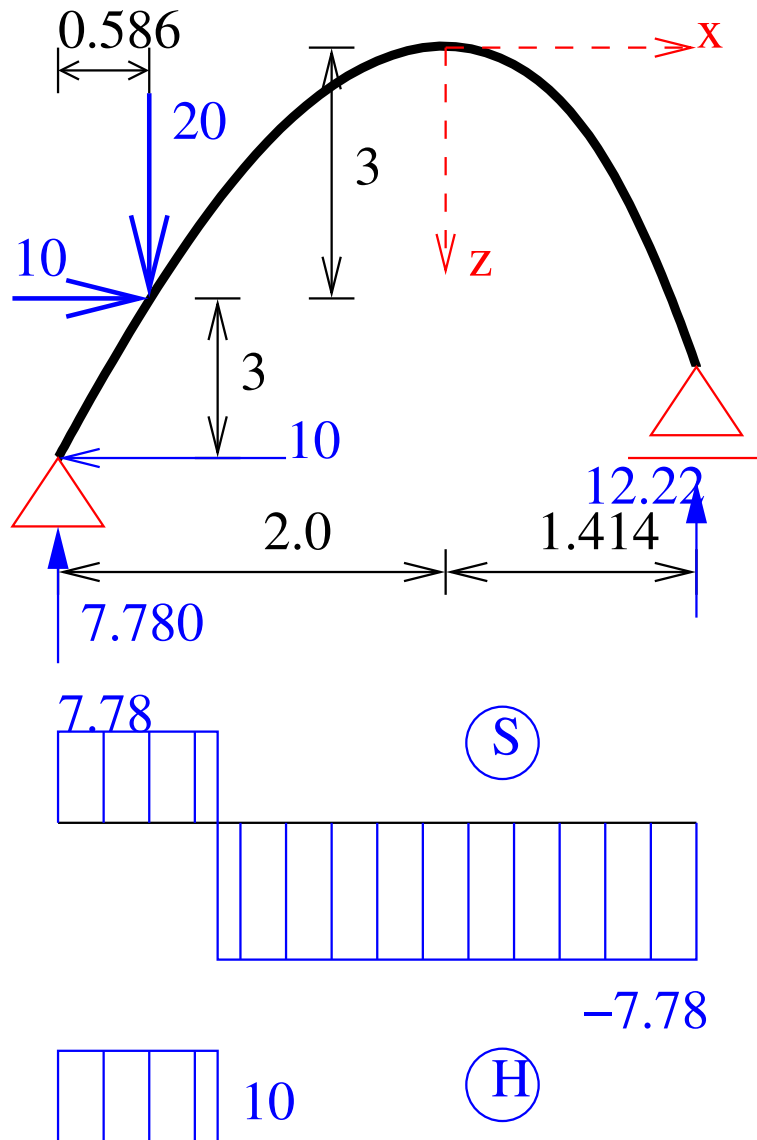
Kvadratická parabola: příklad 2 (5)



Výpočet pomocných vnitřních sil na pomocném přímém nosníku:

- S ... svislá síla („posouvající“)
- H ... vodorovná síla („normálová“)

Kvadratická parabola: příklad 2 (6)



Dopočet vnitřních sil (N, V, M):

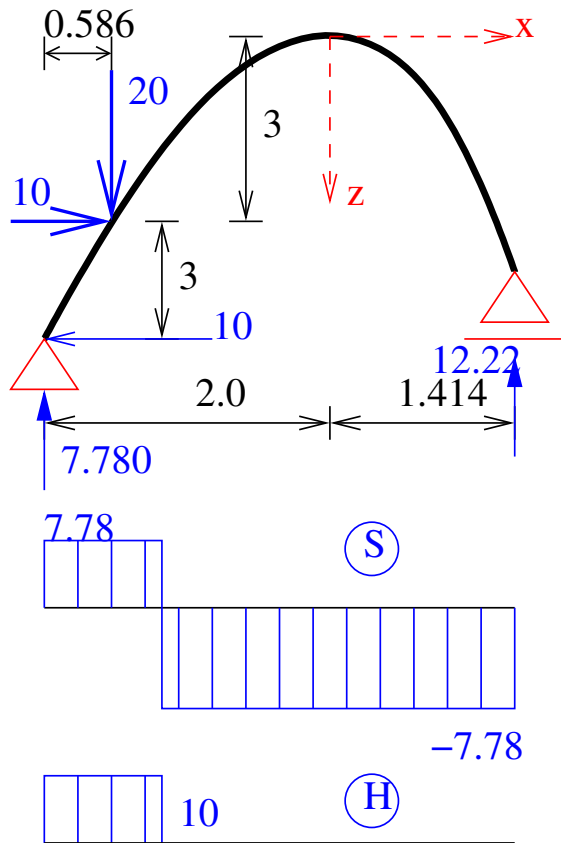
$$\tan \varphi = 2 \times k \times x$$

$$N = H \cos \varphi + S \sin \varphi$$

$$V = -H \sin \varphi + S \cos \varphi$$

M dopočteme $\sum M_{i,x}$.

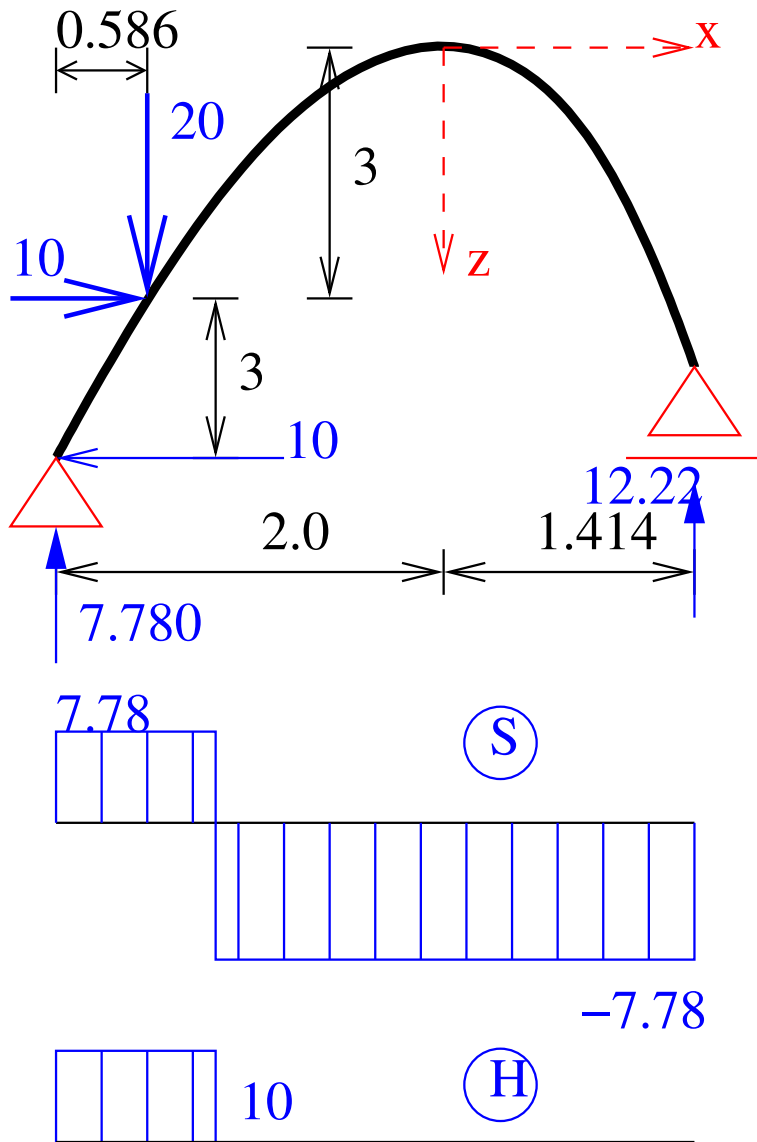
Kvadratická parabola: příklad 2 (7)



Dopočet vnitřních sil (N, V, M):

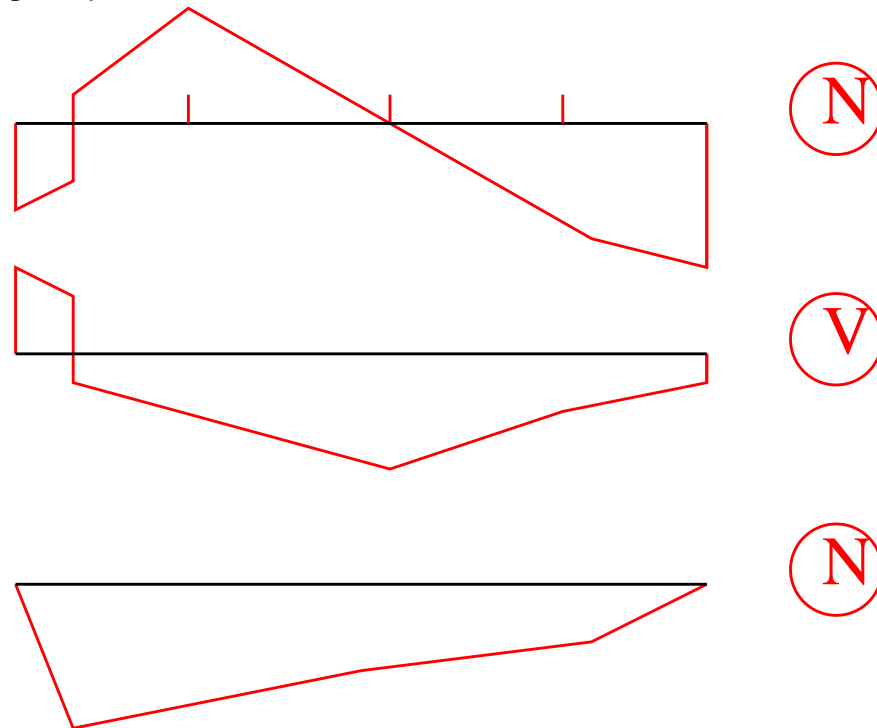
x	H	S	N	V	M
-2	10	7.78	-6.03	11.14	0
-1	0	-12.22	11.57	-3.86	25.44
0	0	-12.22	0	-12.2	17.28
1	0	-12.22	-11.57	-3.86	5.06
1.414	0	-12.22	-11.87	-2.80	0

Kvadratická parabola: příklad 2 (8)

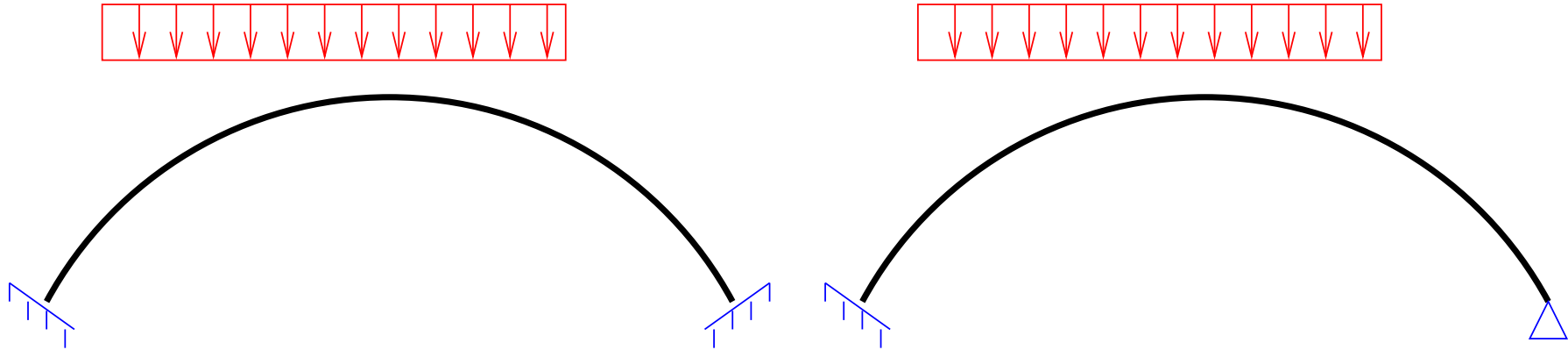


Dopočet vnitřních sil (N, V, M):

Aproximace průběhů (bylo by vhodné spočítat více bodů, v okolí síly budou průběhy **nespojité**).



Staticky neurčitě oblouky (1)

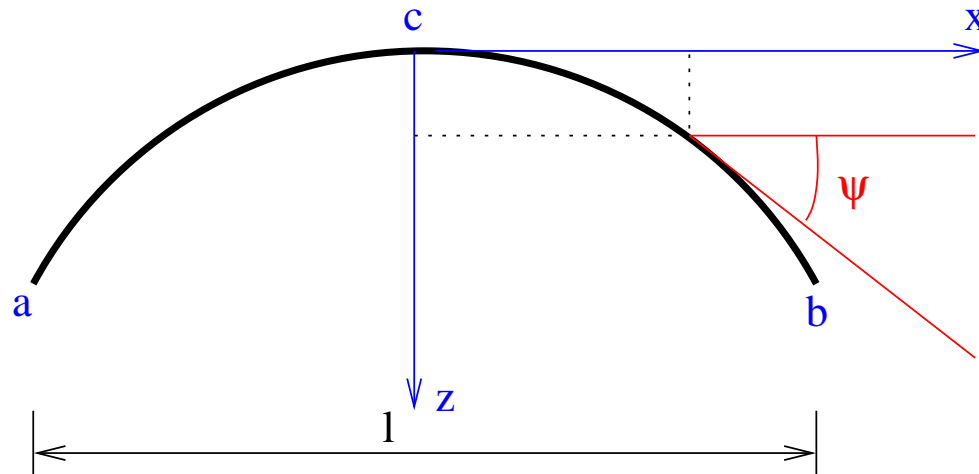


- nosníky a rámy se zakřivenou střednicí
- řešení silovou metodou (řešení staticky určité konstrukce shodné se staticky určitými rámy v látce 1. ročníku)
- uvažuje se práce normálových sil a momentů:

$$\delta_{i,j} = \int \frac{N_i \times \overline{N}_j}{EA} dx + \int \frac{M_i \times \overline{M}_j}{EI} dx + \dots$$

Staticky neurčitá oblouky (2)

Opakování ze základů stavební statiky (viz pár snímků dozadu) – popis střednice oblouku

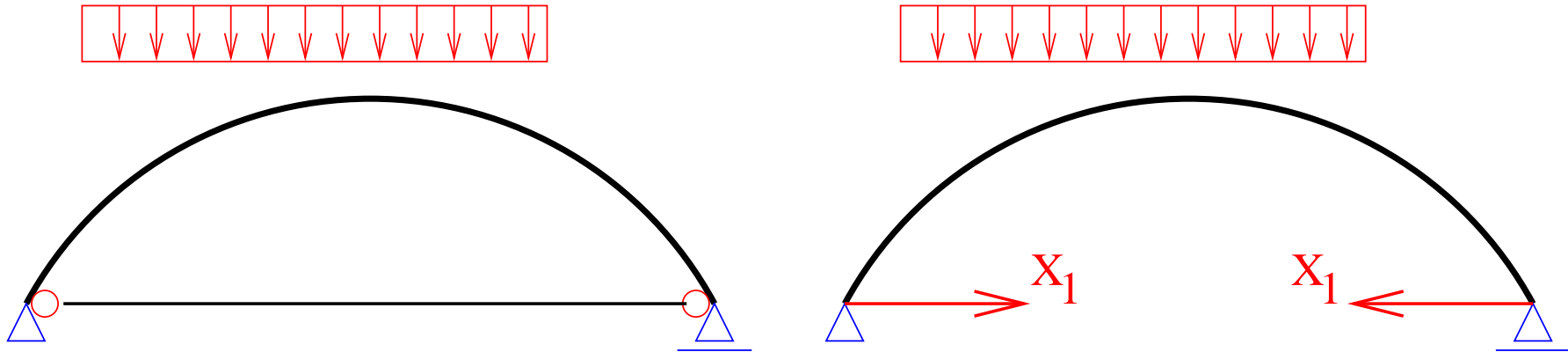


Např. pro parabolickou střednici:

$$z = k \times x^2, \quad k = \frac{z_a}{x_a^2} = \frac{z_b}{x_b^2}, \quad \tan \psi = \frac{dz}{dx} = 2 \times k \times x$$

Staticky neurčitá oblouky (3)

Zvláštní případ – oblouk s táhlem



Přetvárná rovnice pro táhlo:

$$(\delta_{1,1} + c_t) \times X_1 + \delta_{1,0} = 0,$$

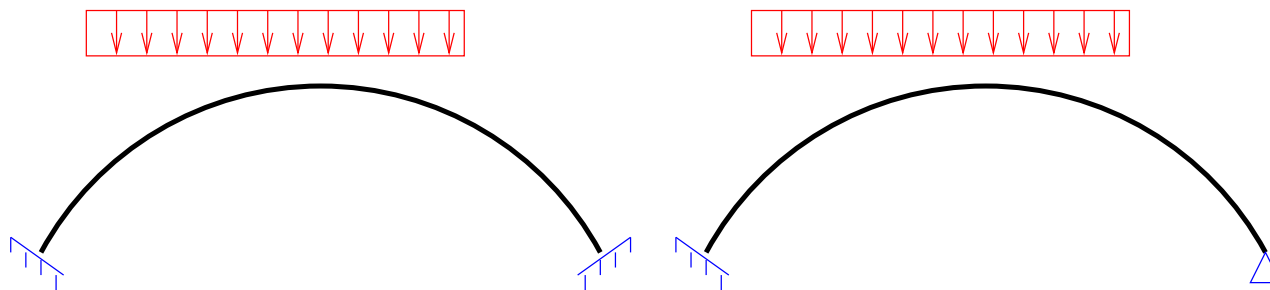
kde $c_t = \frac{l}{E \times A}$ vyplývá z rovnic pružnosti pro protažení c_t přímého prutu o délce l (táhla) vlivem normálové síly X_1 :

$$\Delta l = \frac{N \times l}{E \times A} = X_1 \times c_t$$

Oblouky v obecné deformační metodě (1)

Základní přístupy k řešení:

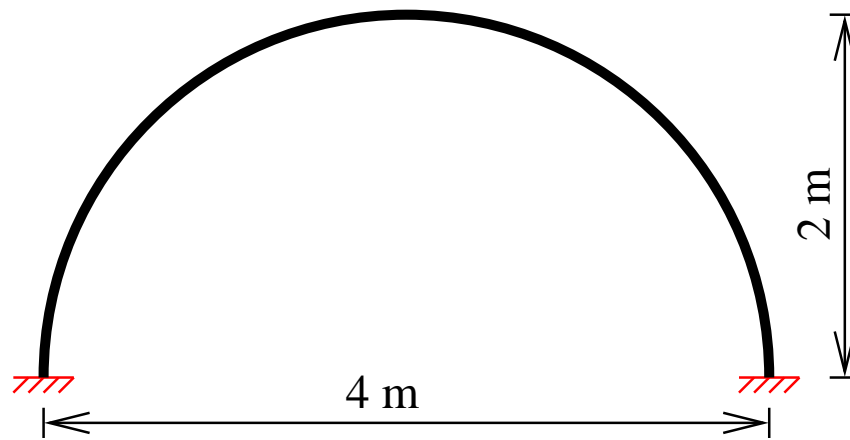
- Odvození matice tuhostu prutu se zakřivenou střednicí.
 - Nutno odvodit pro konkrétní křivku.
 - Zpravidla se v silové metodě nevyhneme integraci (po křivce).
 - V programech bývají k dispozici parabolické nebo kruhové oblouky.
- Rozdělení oblouku na větší počet prutů s přímou střednicí.
 - Jednodušší postup, lze použít znalosti o přímých prutech.
 - Většina programů tak postupuje.
 - Výsledků závisí na počtu „dílků“ oblouku.



Oblouky ODM: příklad (1)

Zadání: Vypočítejte svislé reakce a maximální normálovou sílu kruhového oblouku a rozpětí 4 m a vzepětí 2 m. Oblouk je na obou koncích vetknut a je zatížen jen vlastní tíhou. Jeho průřez má tvar obdélníku o rozměrech $b = 0.1 \text{ m}$, $h = 0,2 \text{ m}$. Modul pružnosti je 5 GPa a hustota jeho materiálu $\rho = 1500 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$.

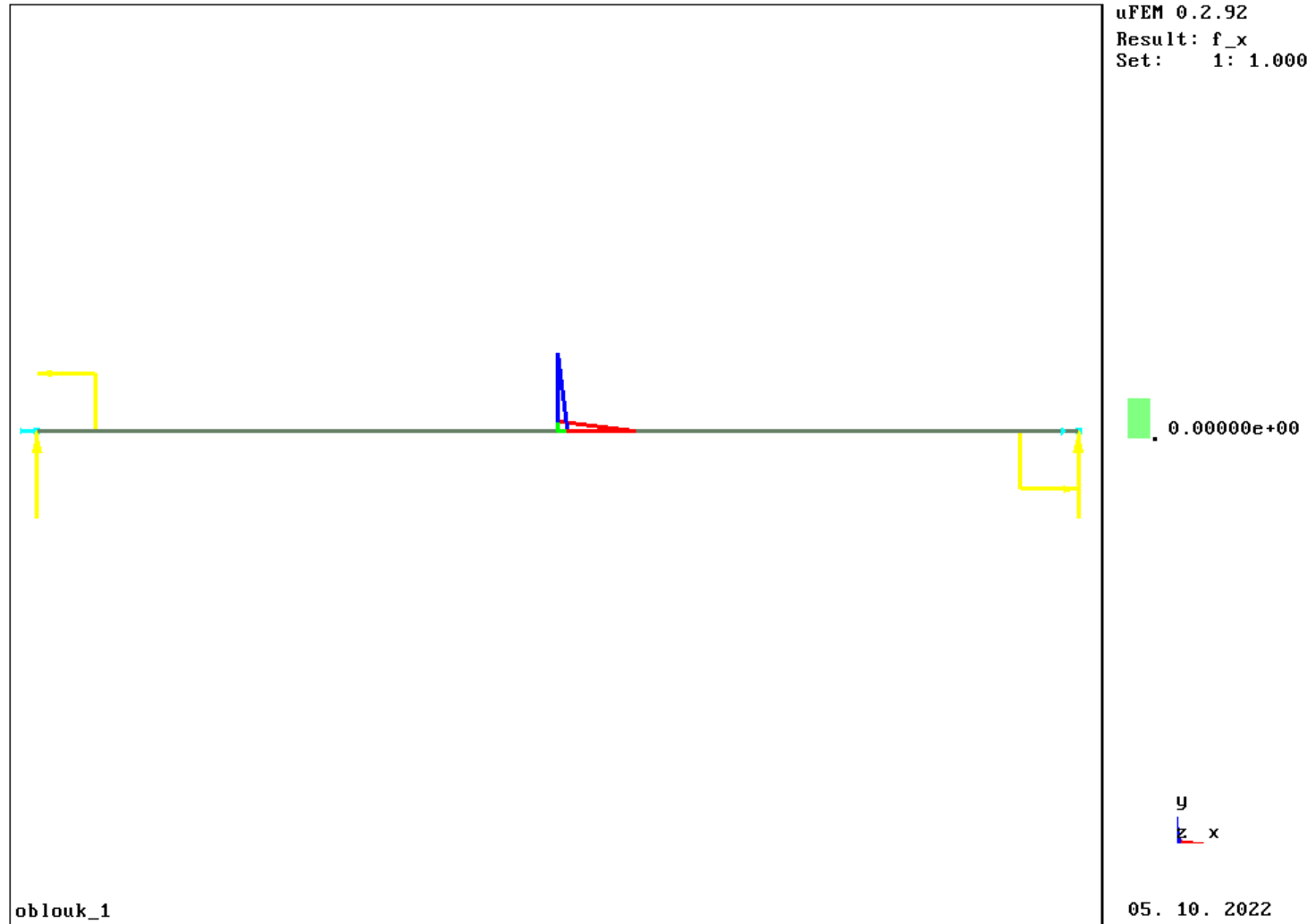
Výpočet proveďte pomocí přímých prutů, vyzkoušejte různá dělení.



Oblouky ODM: příklad

(2)

Náhrada oblouku jedním prutem:

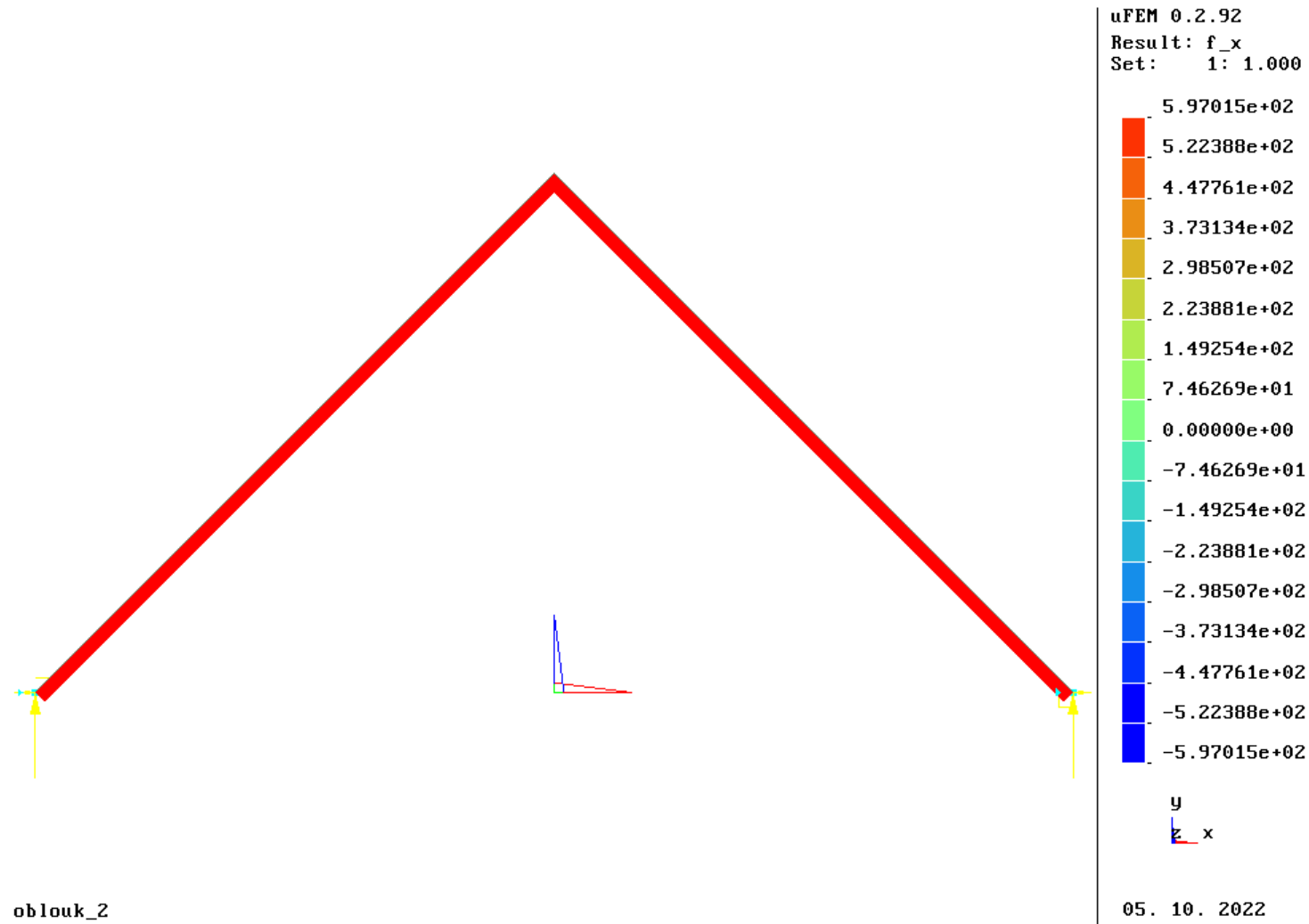


Svislé reakce jsou 1.20 kN , normálová síla je 0 kN (zatížení je kolmo ke střednici prutů). Uvedený model je zjevně nevhodný.

Oblouky ODM: příklad

(3)

Náhrada oblouku dvěma pruty:

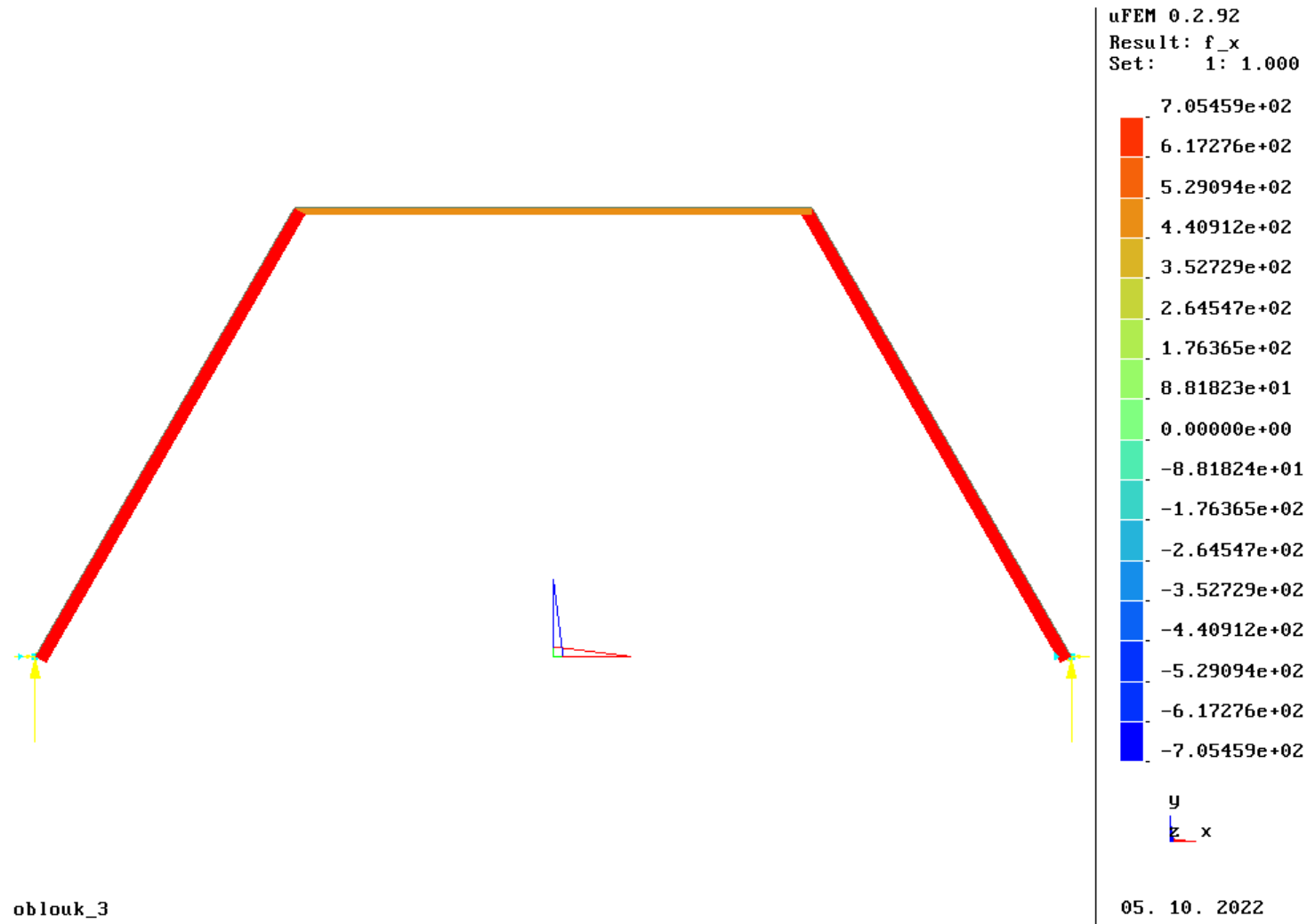


Svislé reakce jsou 1.70 kN , normálová síla je 0.60 kN . Tento model je o něco lepší, ale zřejmě to ještě nebude „ono“.

Oblouky ODM: příklad

(4)

Náhrada oblouku třemi pruty:

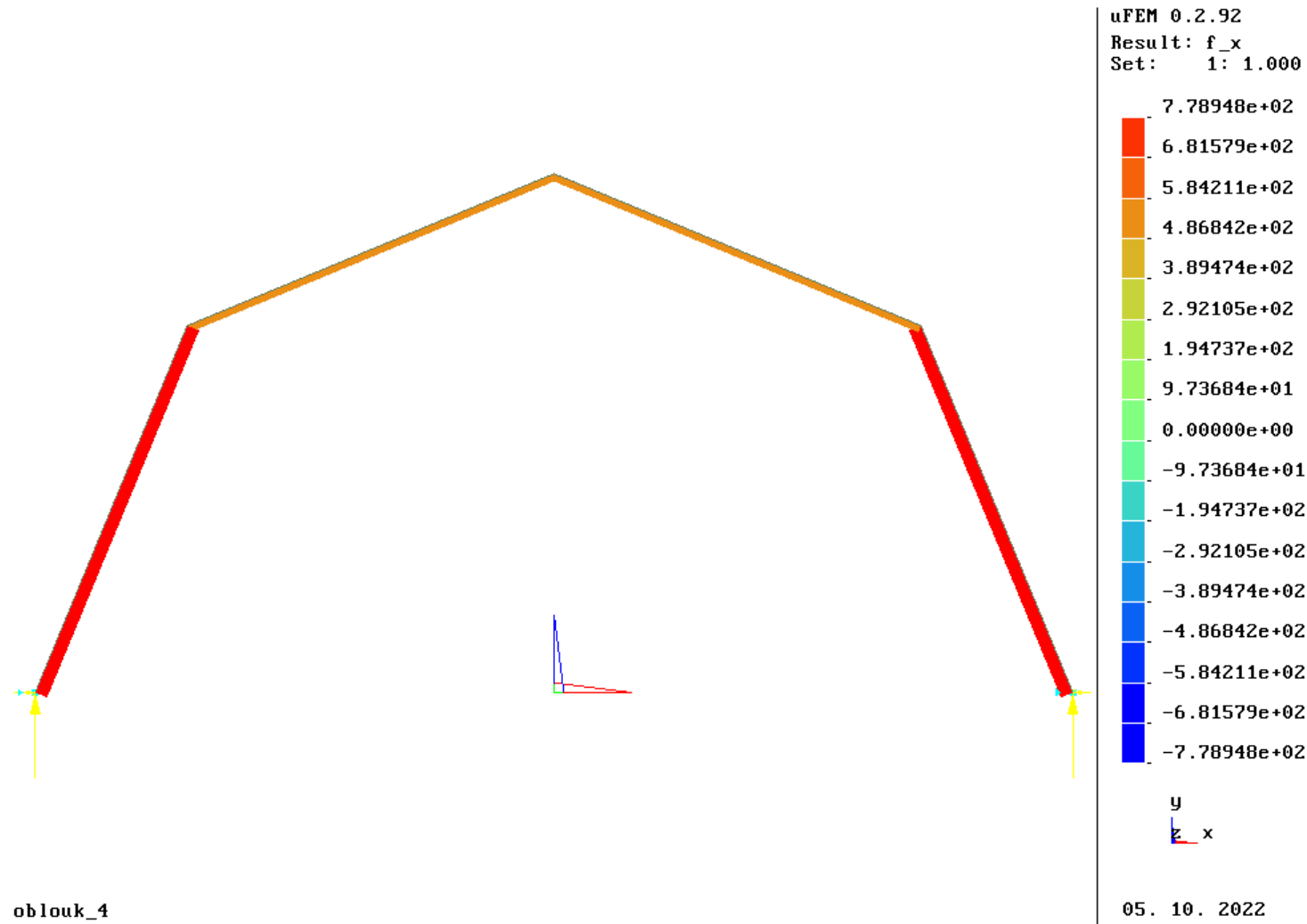


Svislé reakce jsou 1.80 kN , normálová síla je 0.70 kN . Tento model již začíná připomínat „oblouk“, ale zřejmě to také ještě nebude „ono“.

Oblouky ODM: příklad

(5)

Náhrada oblouku 4 pruty:

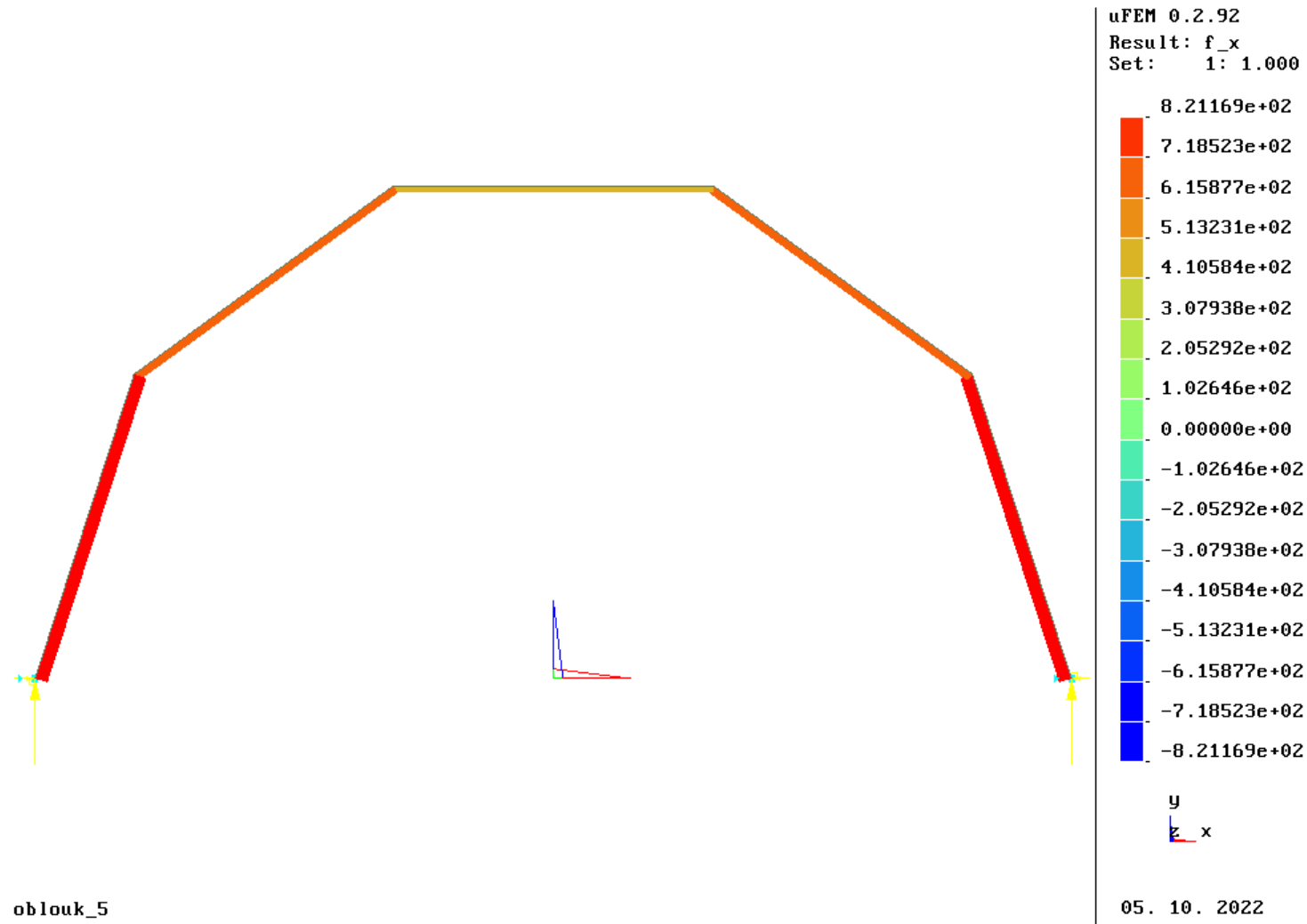


Svislé reakce jsou 1.84 kN , normálová síla je 0.78 kN . Všimněte si, že se obě hodnoty postupně zvětšují (proč se asi mění i svislá reakce?).

Oblouky ODM: příklad

(6)

Náhrada oblouku 5 pruty:

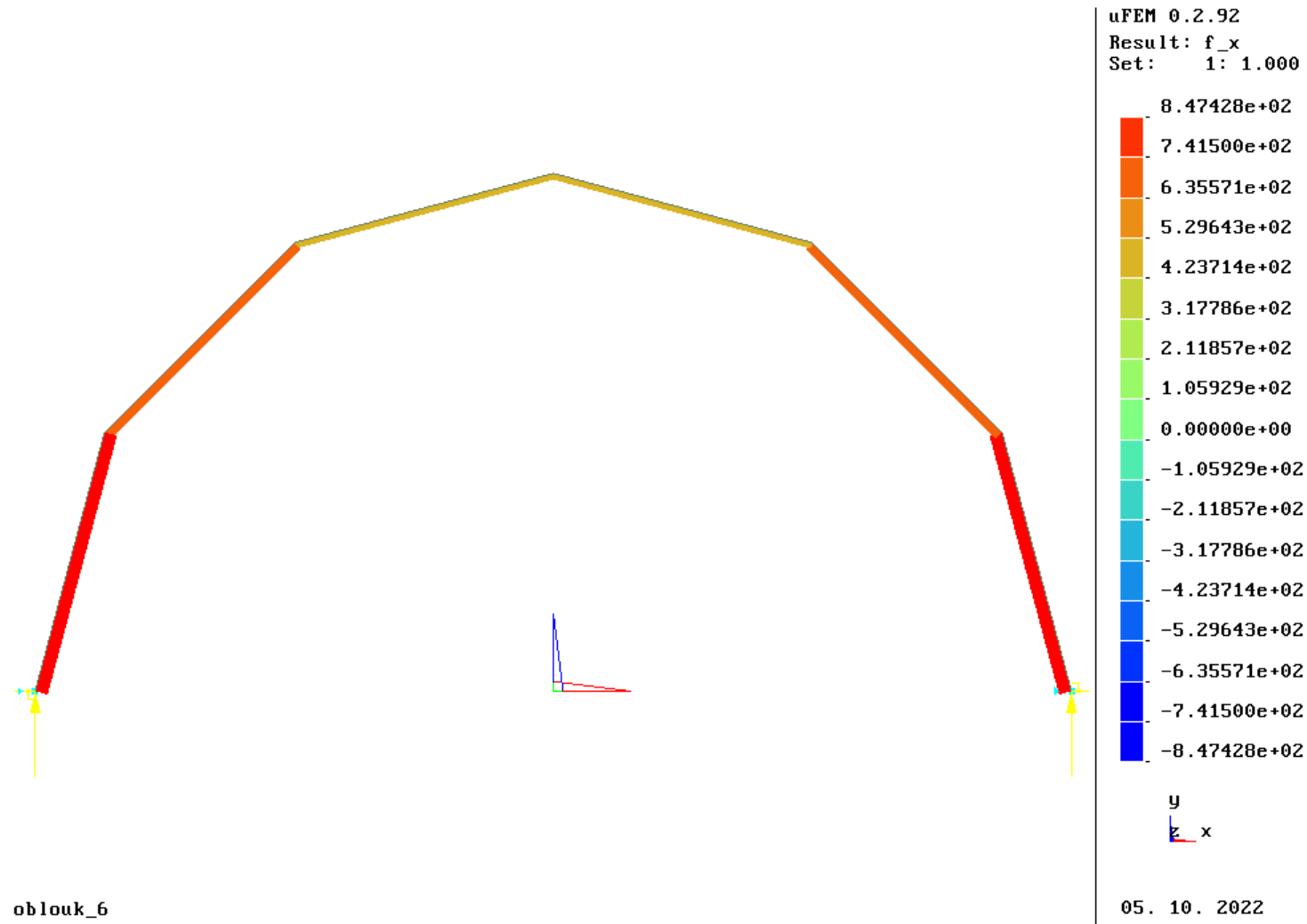


Svislé reakce jsou 1.85 kN , normálová síla je 0.82 kN .

Oblouky ODM: příklad

(7)

Náhrada oblouku 6 pruty:

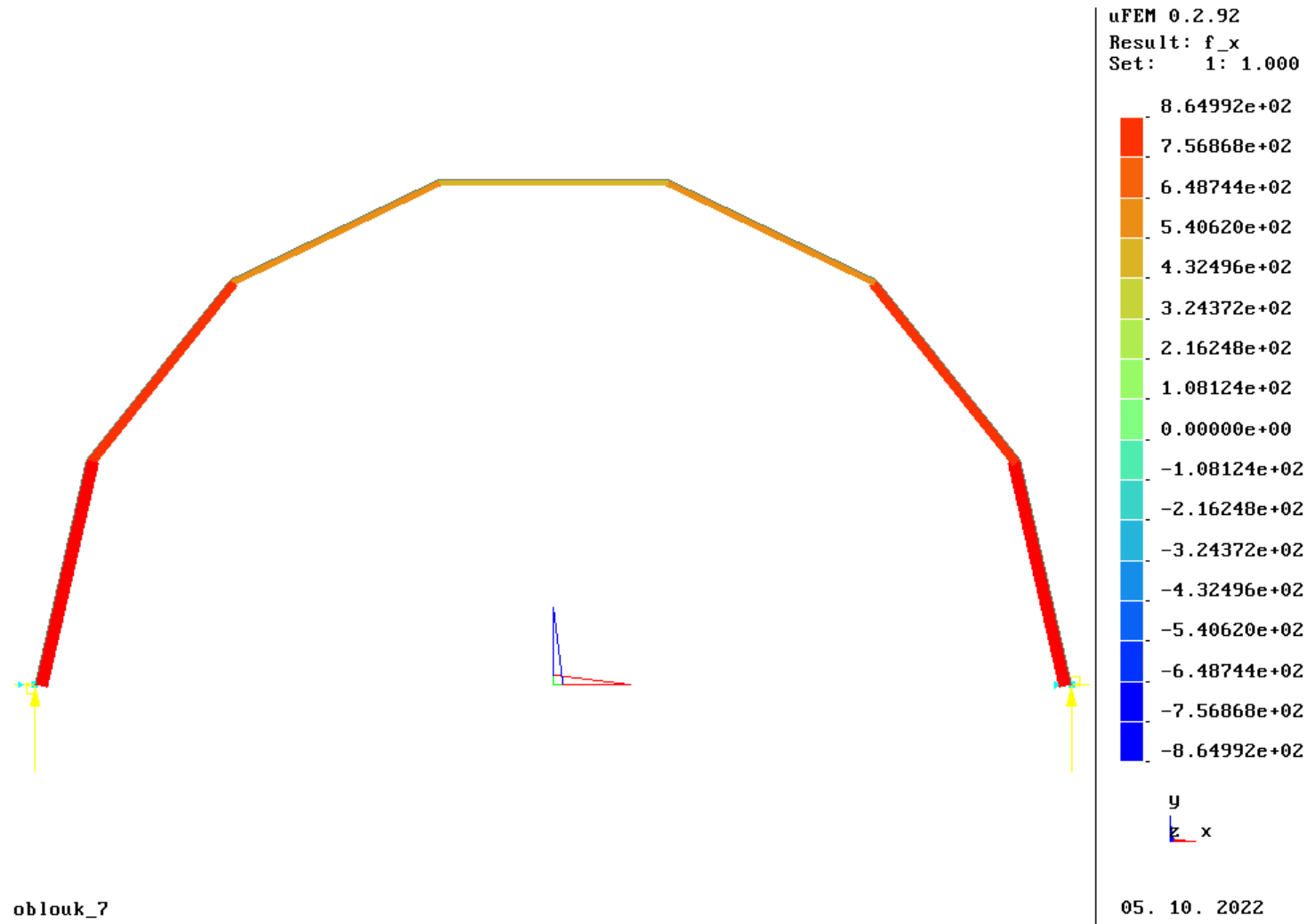


Svislé reakce jsou 1.86 kN , normálová síla je 0.85 kN .

Oblouky ODM: příklad

(8)

Náhrada oblouku 7 pruty:

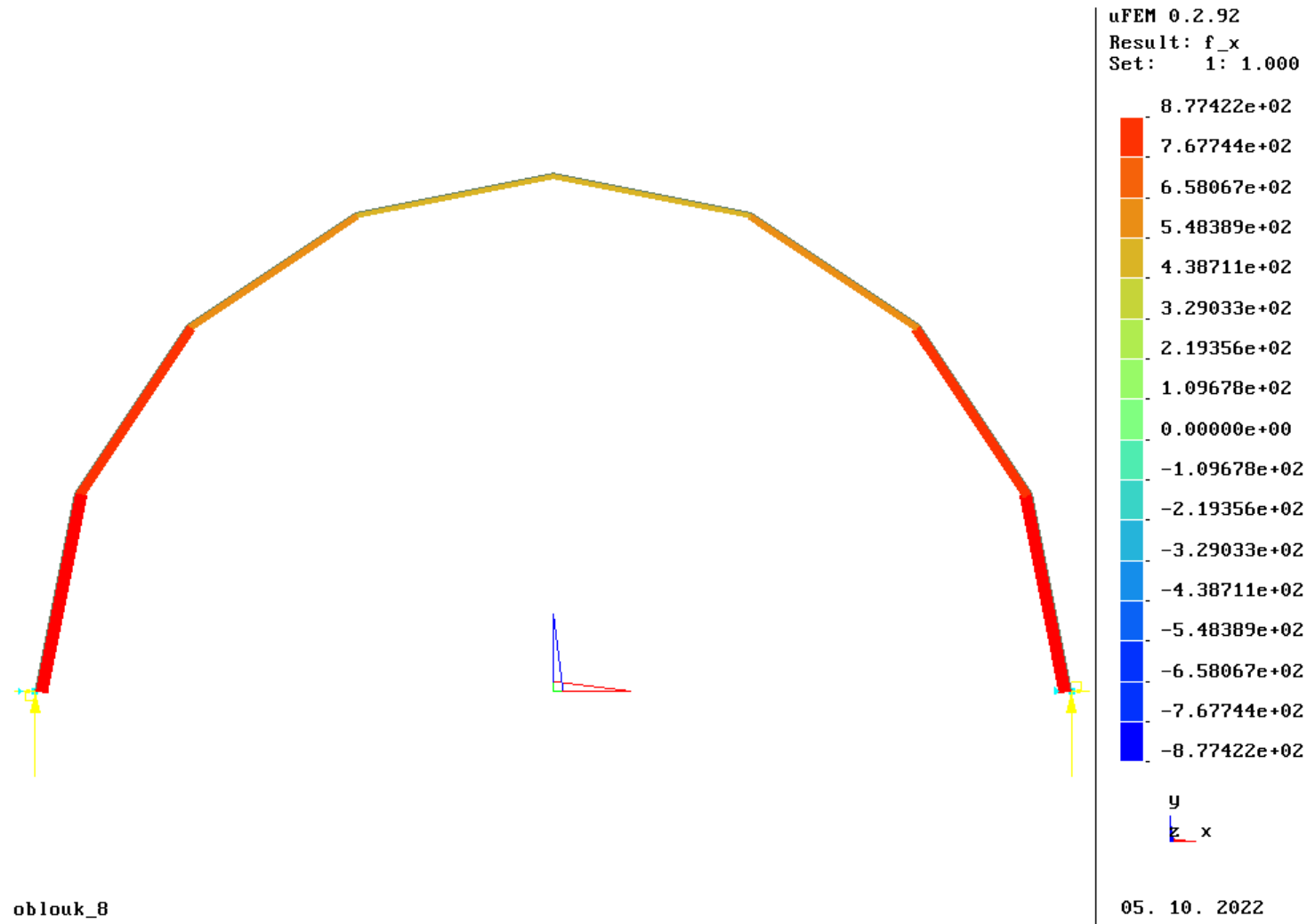


Svislé reakce jsou 1.87 kN , normálová síla je 0.86 kN .

Oblouky ODM: příklad

(9)

Náhrada oblouku 8 pruty:



Svislé reakce jsou 1.87 kN , normálová síla je 0.88 kN .

Oblouky ODM: příklad

(10)

Náhrada oblouku 9 pruty:

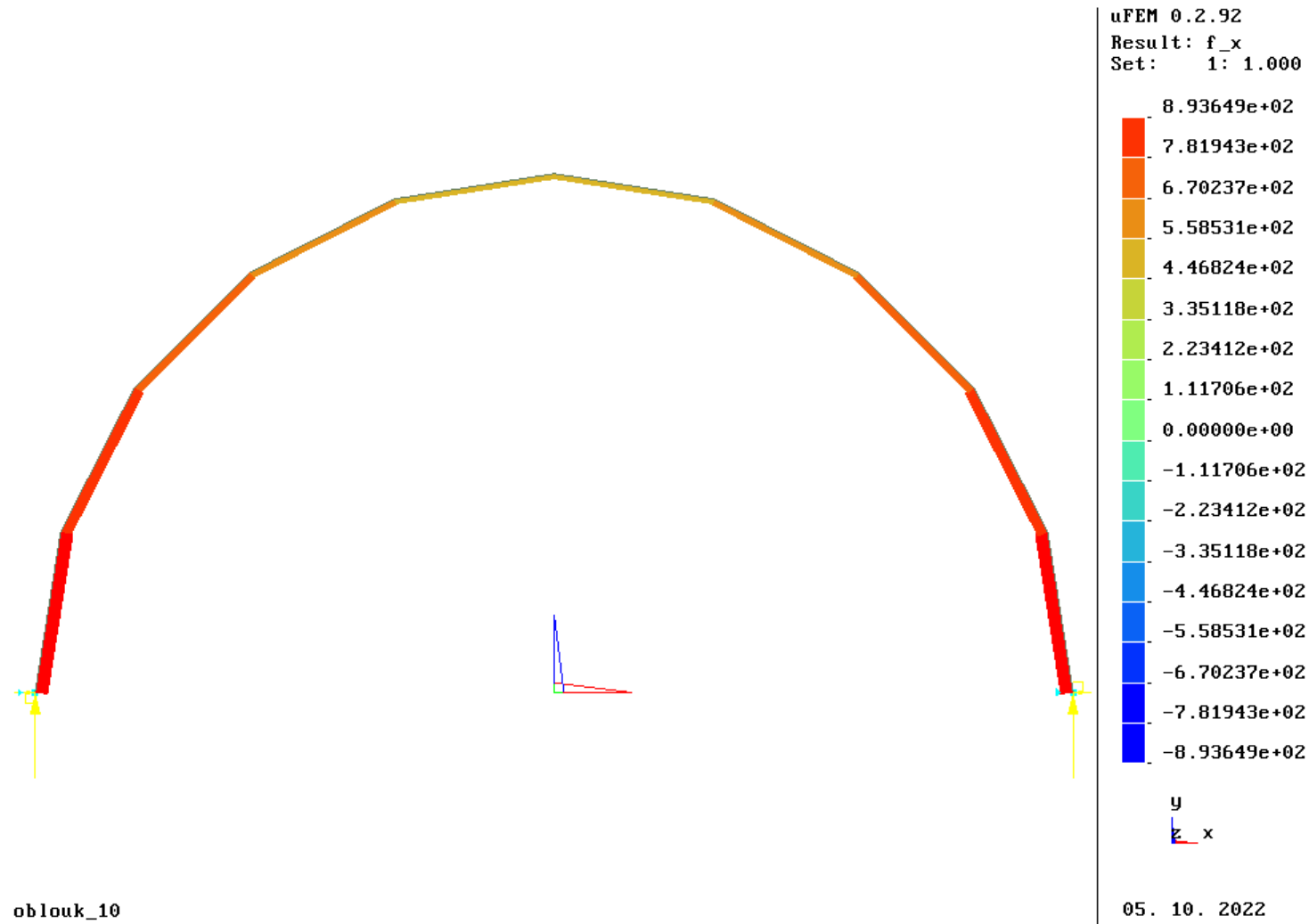


Svislé reakce jsou 1.88 kN , normálová síla je 0.89 kN .

Oblouky ODM: příklad

(11)

Náhrada oblouku 10 pruty:

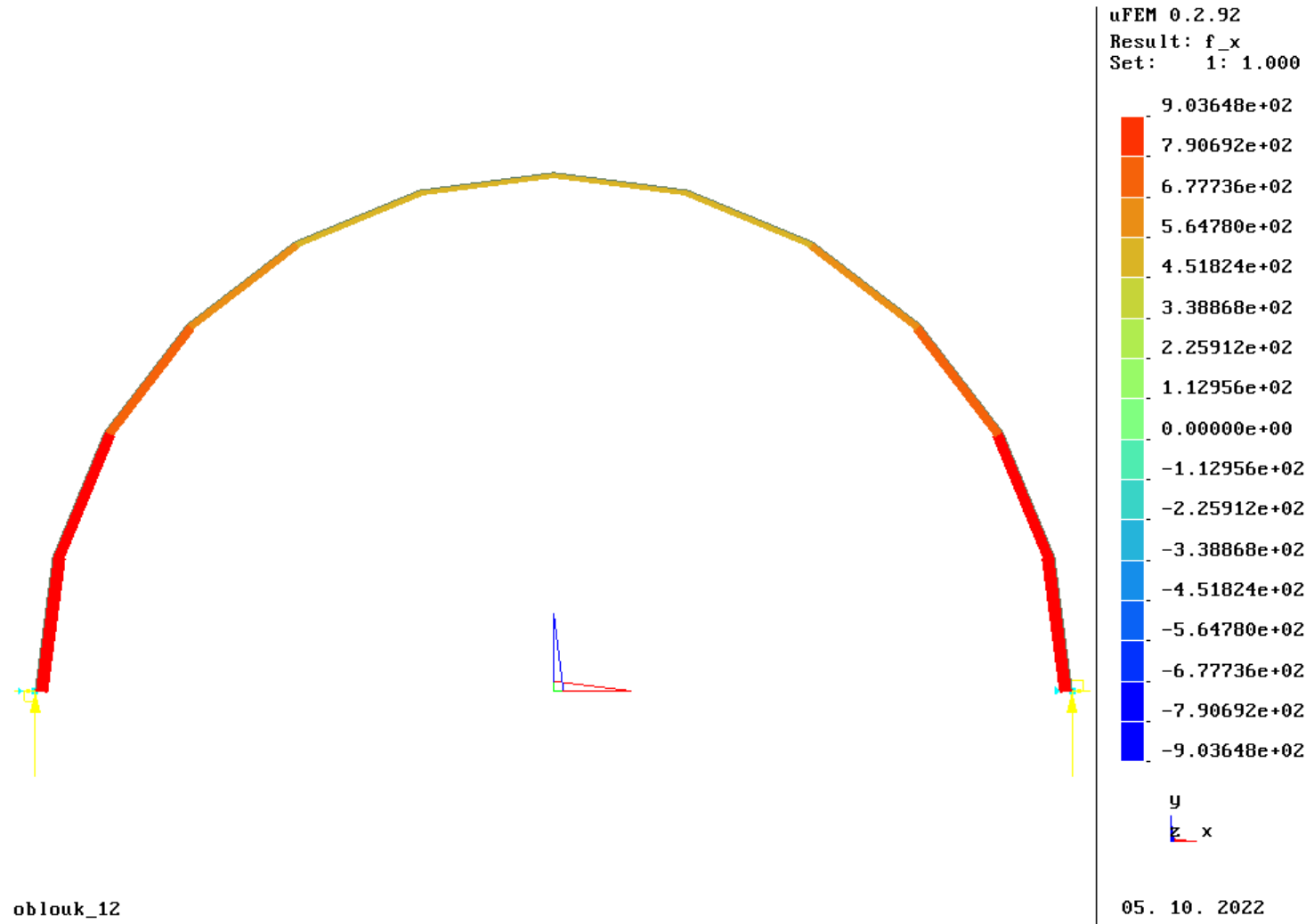


Svislé reakce jsou 1.88 kN , normálová síla je 0.89 kN .
Zdá se, že hodnoty se už příliš nemění (uvidíme).

Oblouky ODM: příklad

(12)

Náhrada oblouku 12 pruty:

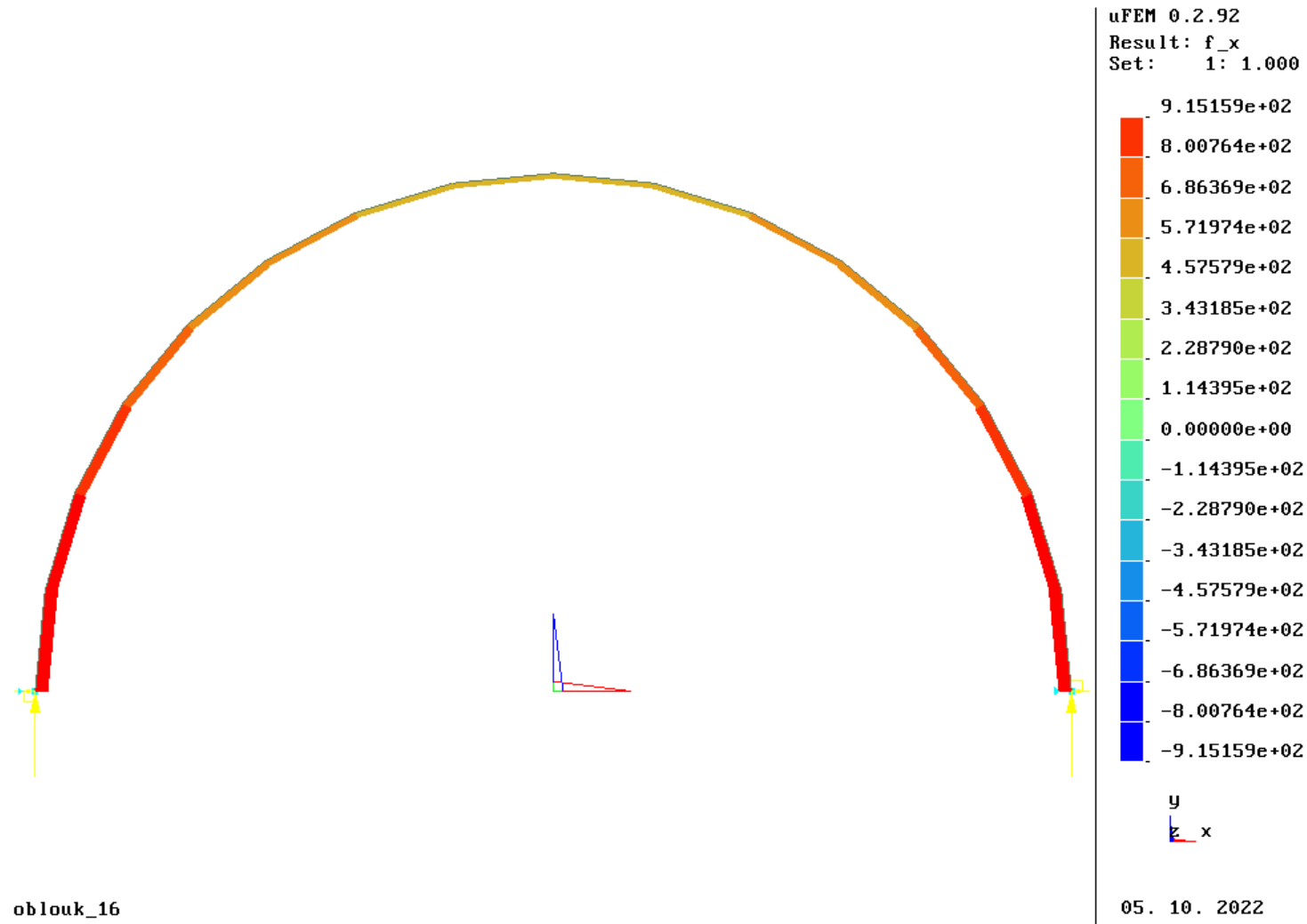


Svislé reakce jsou 1.88 kN , normálová síla je 0.90 kN .

Oblouky ODM: příklad

(13)

Náhrada oblouku 16 pruty:

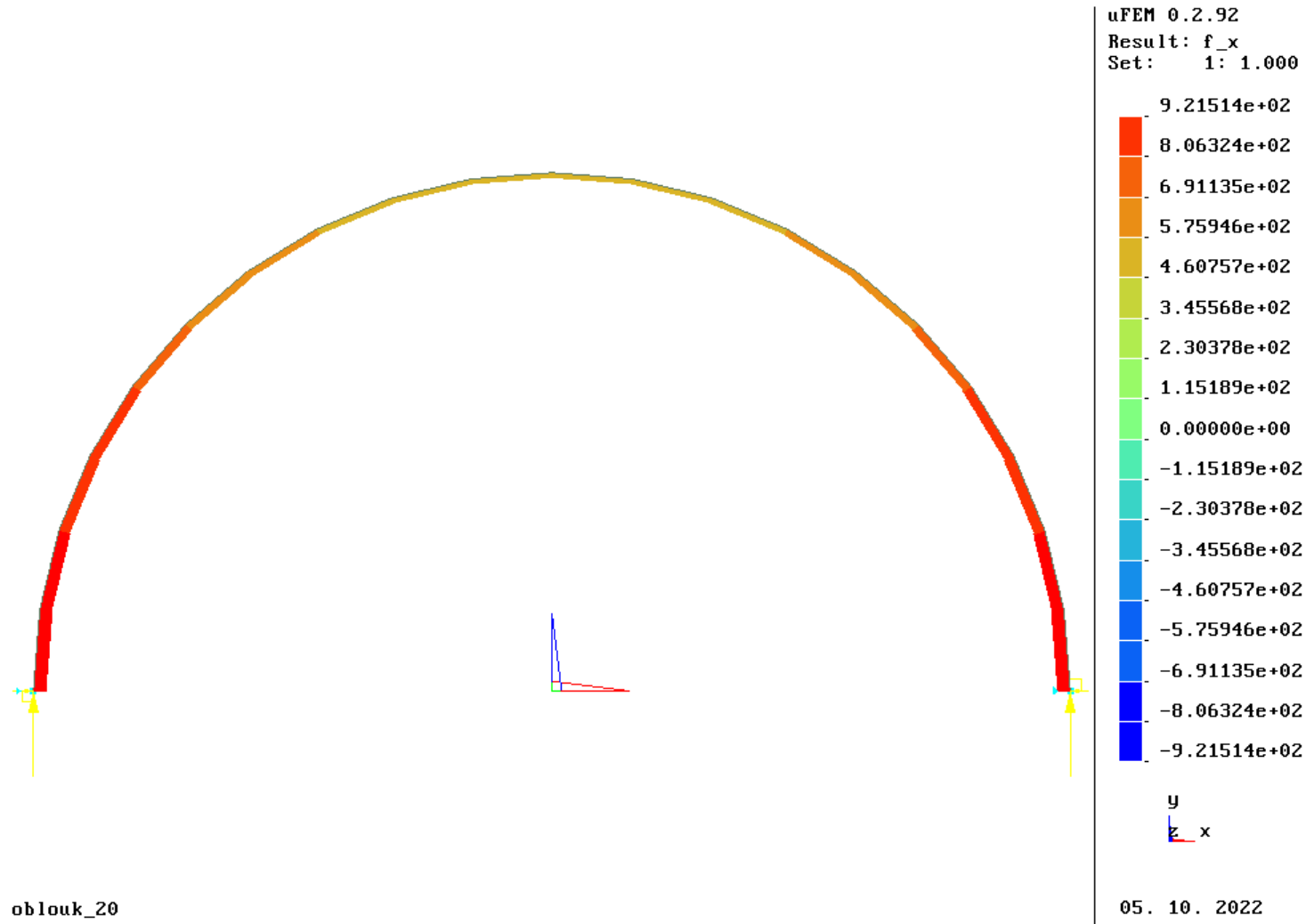


Svislé reakce jsou 1.88 kN , normálová síla je 0.92 kN .

Oblouky ODM: příklad

(14)

Náhrada oblouku 20 pruty:

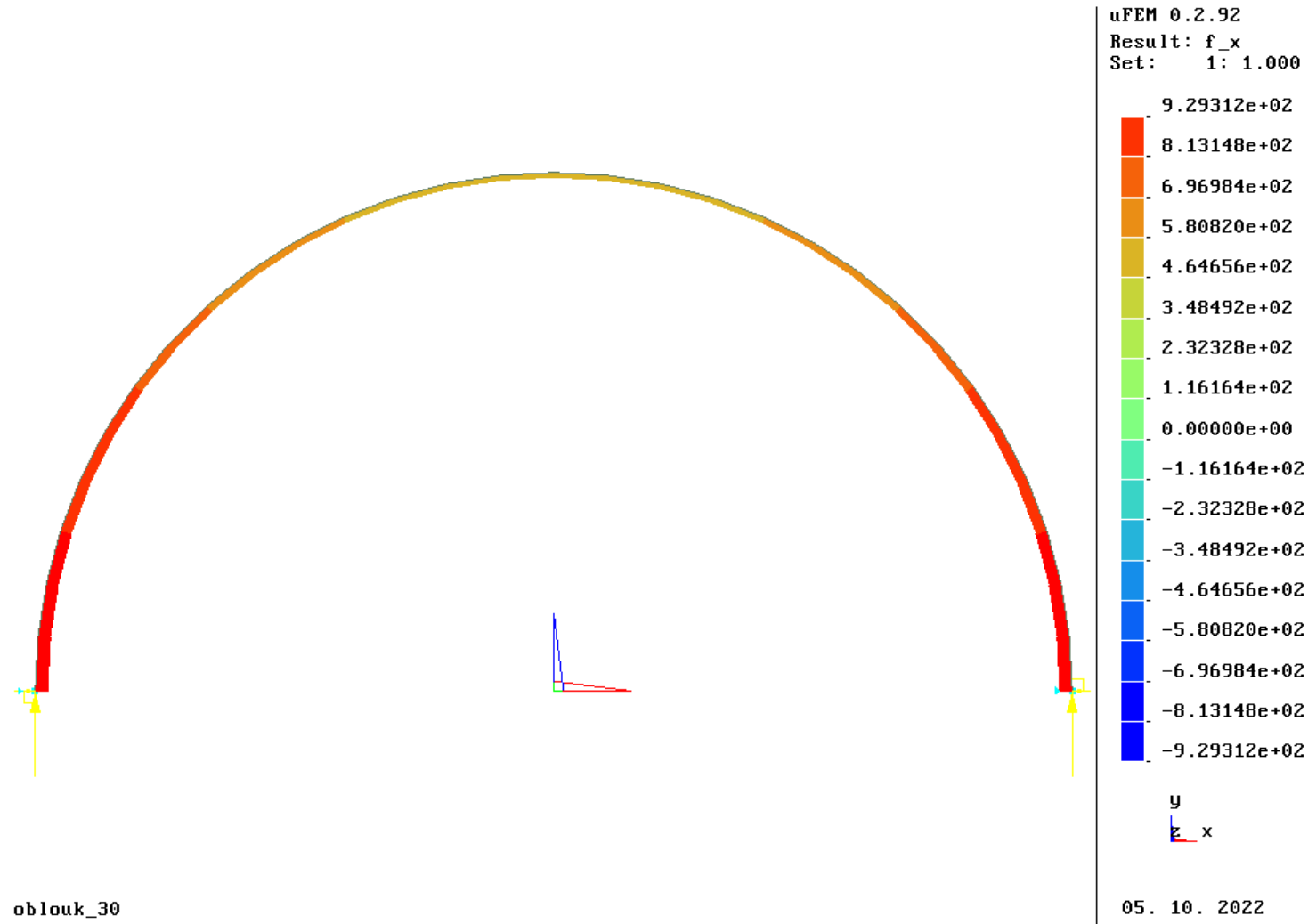


Svislé reakce jsou 1.88 kN , normálová síla je 0.92 kN .

Oblouky ODM: příklad

(15)

Náhrada oblouku 30 pruty:

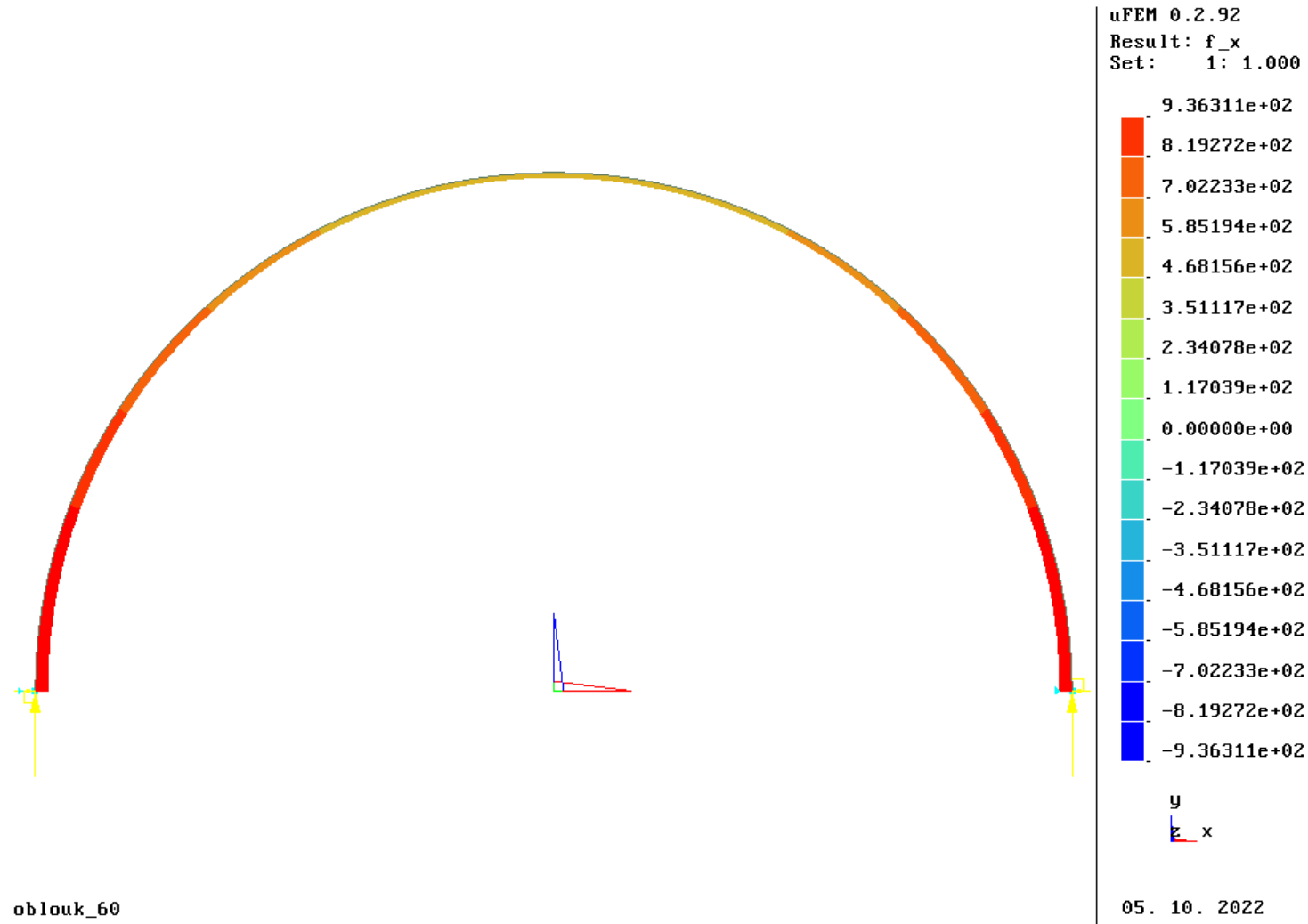


Svislé reakce jsou 1.88 kN , normálová síla je 0.93 kN .

Oblouky ODM: příklad

(16)

Náhrada oblouku 60 pruty:

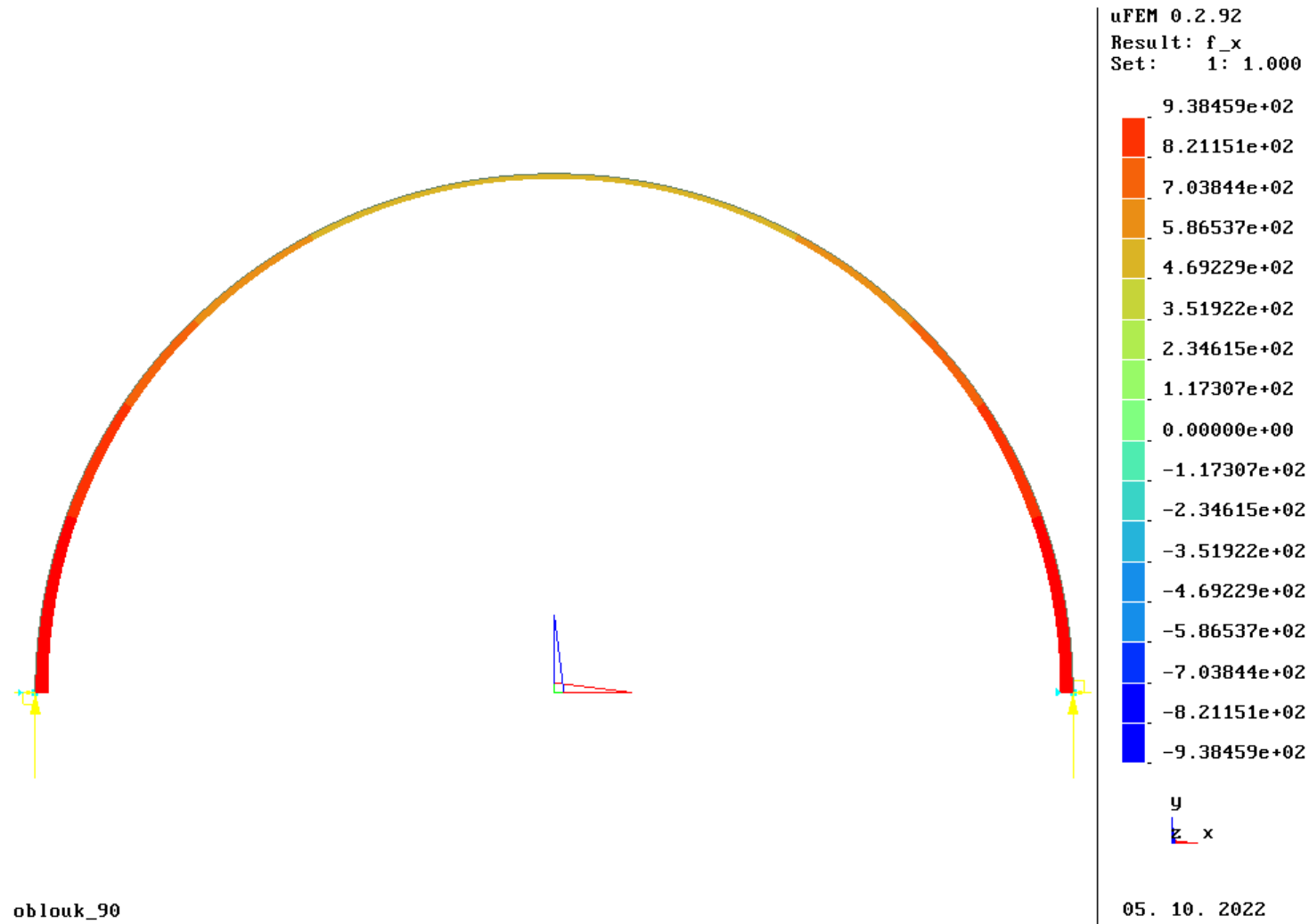


Svislé reakce jsou 1.88 kN , normálová síla je 0.94 kN .

Oblouky ODM: příklad

(17)

Náhrada oblouku 60 pruty:

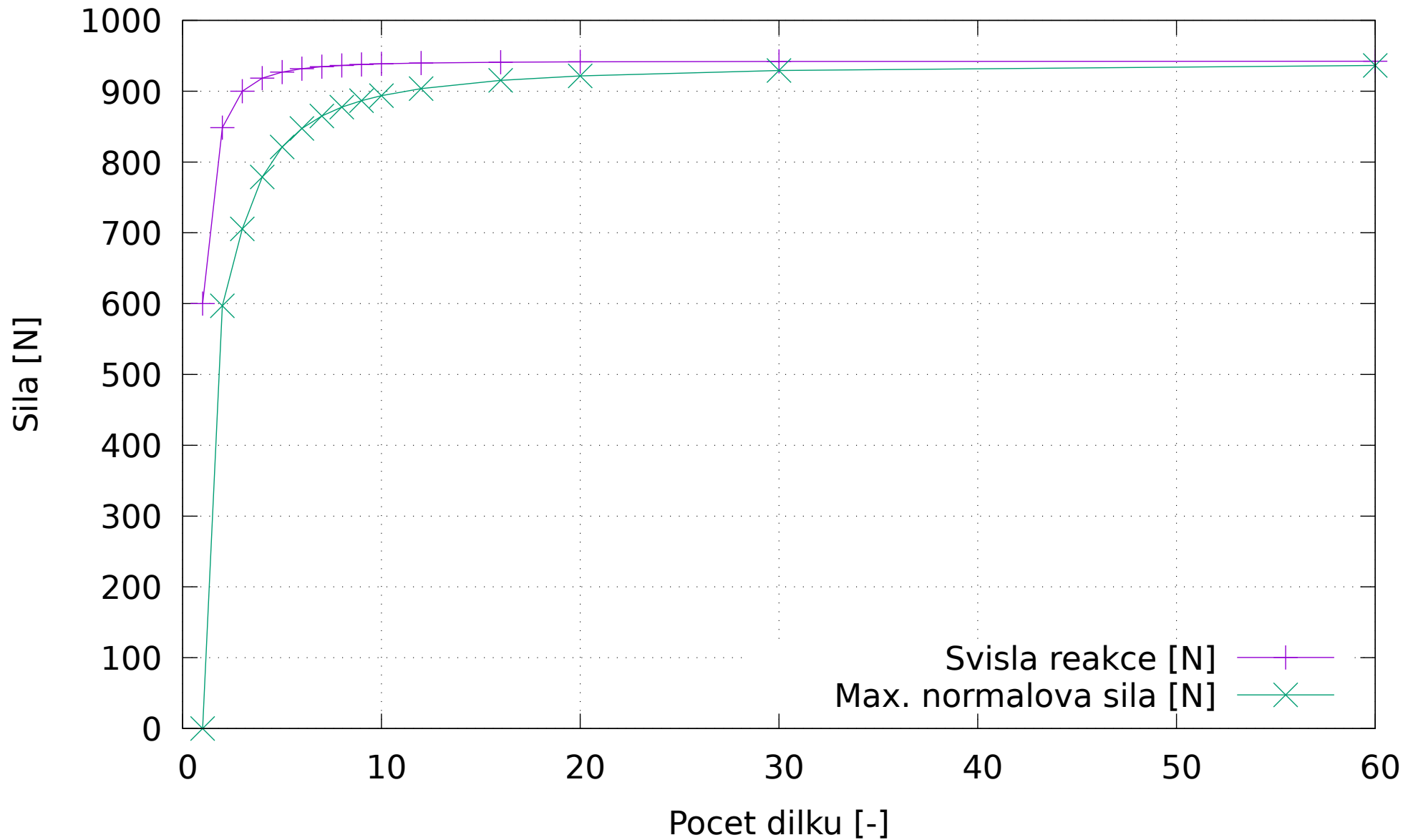


Svislé reakce jsou 1.88 kN , normálová síla je 0.94 kN .

Všimněte si, že už ani normálová síla příliš neroste (od cca 30 bodů).

Oblouky ODM: příklad

(18)

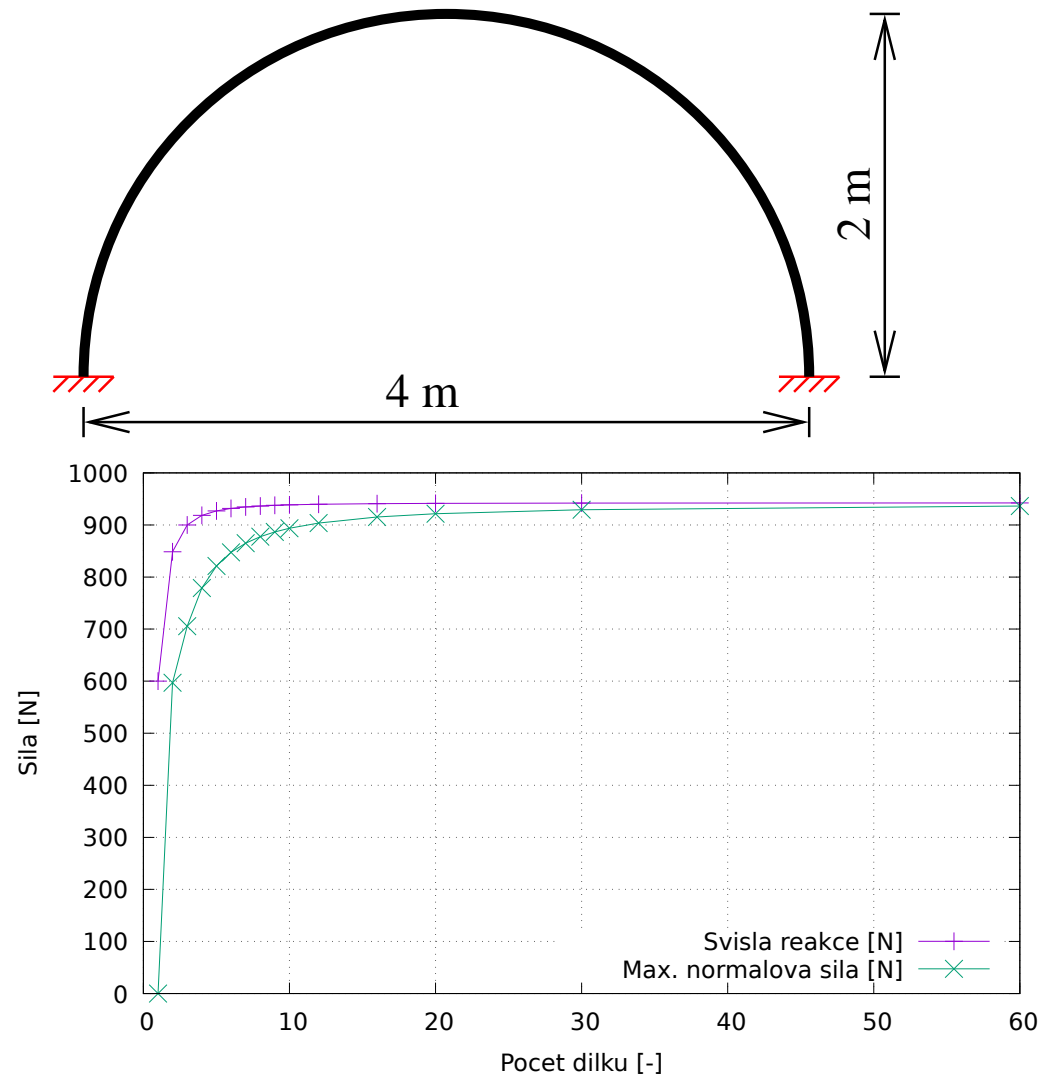


Oblouky ODM: příklad

(19)

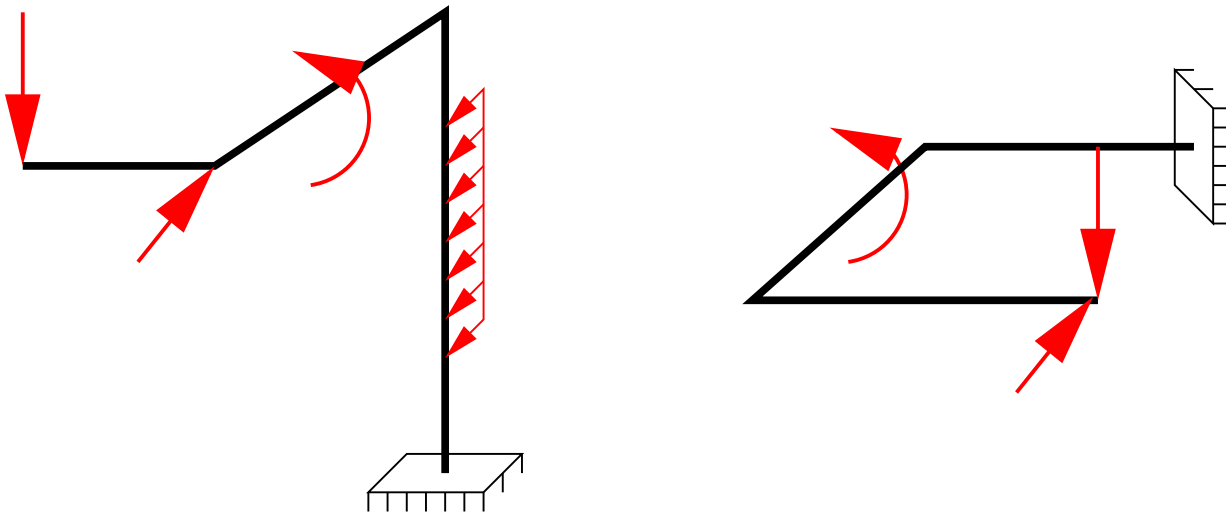
Diskuse:

- Zřejmě záleží na hustotě dělení (počtu přímých prvků, kterými modelujeme oblouk).
- Při přesném řešení by v této konkrétní úloze (půlkruh) mělo být $\frac{R}{2} = N$.
- V daném případě lze konstatovat, že od cca 12 „dílků“ je už chyba „malá“ (jde o jednotky procent).
- Obvykle se doporučuje dělit oblouky na alespoň 10–12 „dílků“.

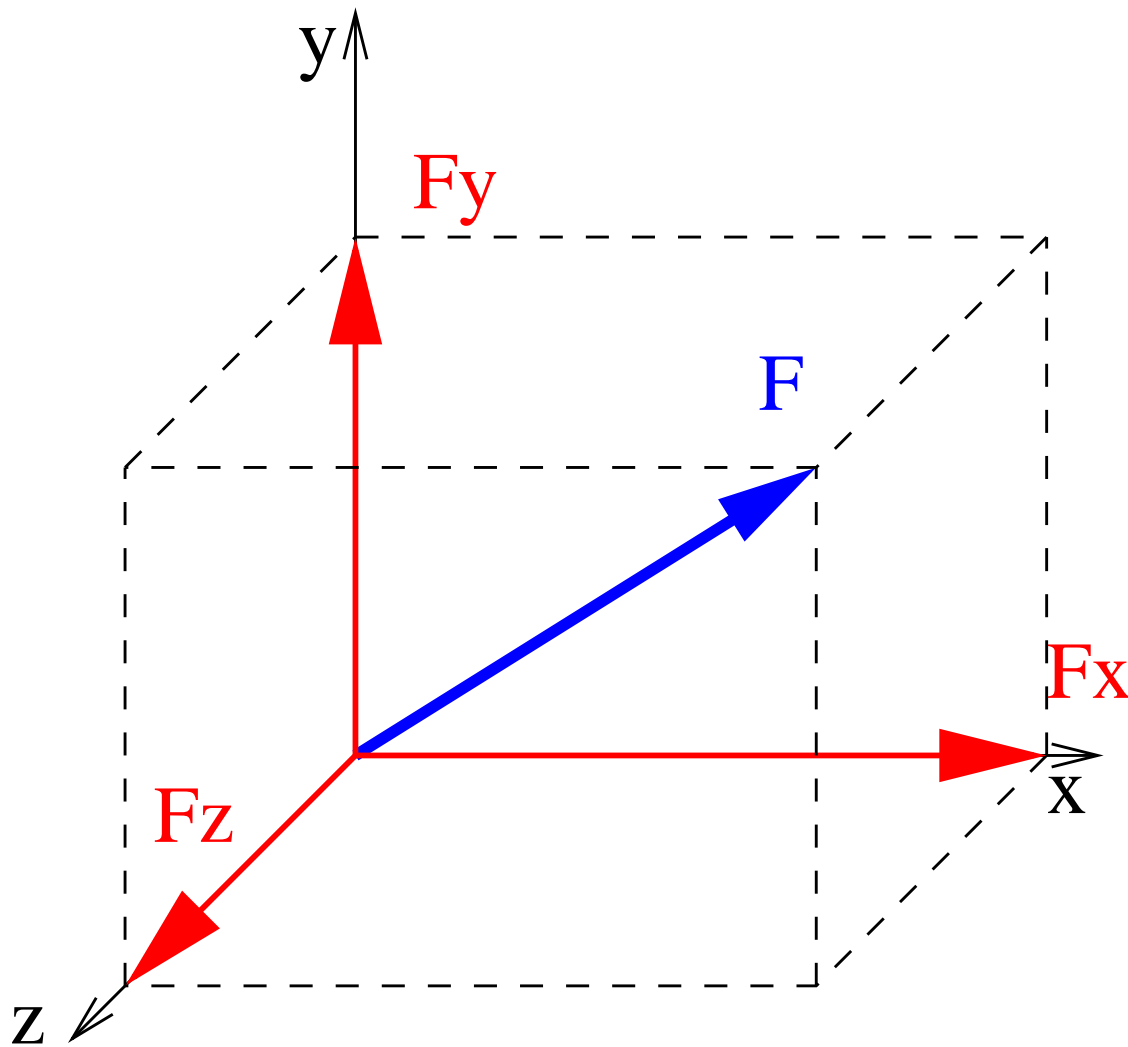


Prutové prostorové konstrukce

- Opakování – síly a podmínky rovnováhy v prostoru
- Staticky určité prostorové konstrukce
- Řešení prostorových prutových konstrukcí obecnou deformační metodou
 - Stupeň přetvárné neurčitosti
 - Příhradové konstrukce
 - Rámové konstrukce

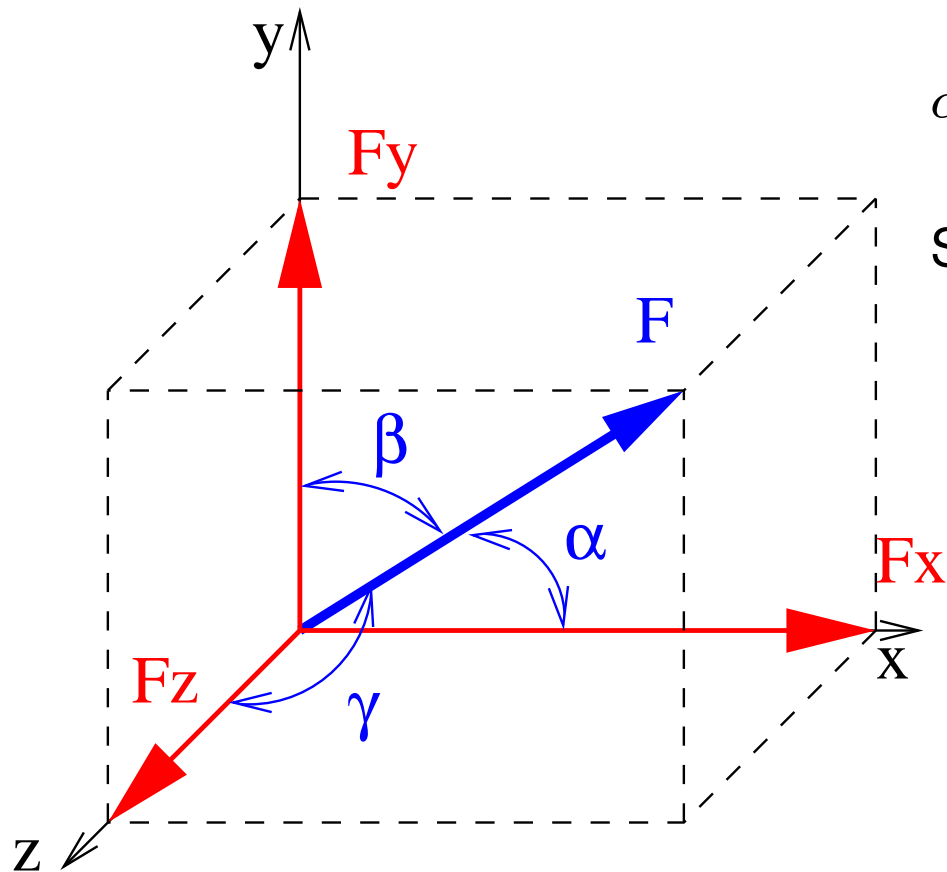


Síla v prostoru



$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}$$

Síla v prostoru: směrové úhly



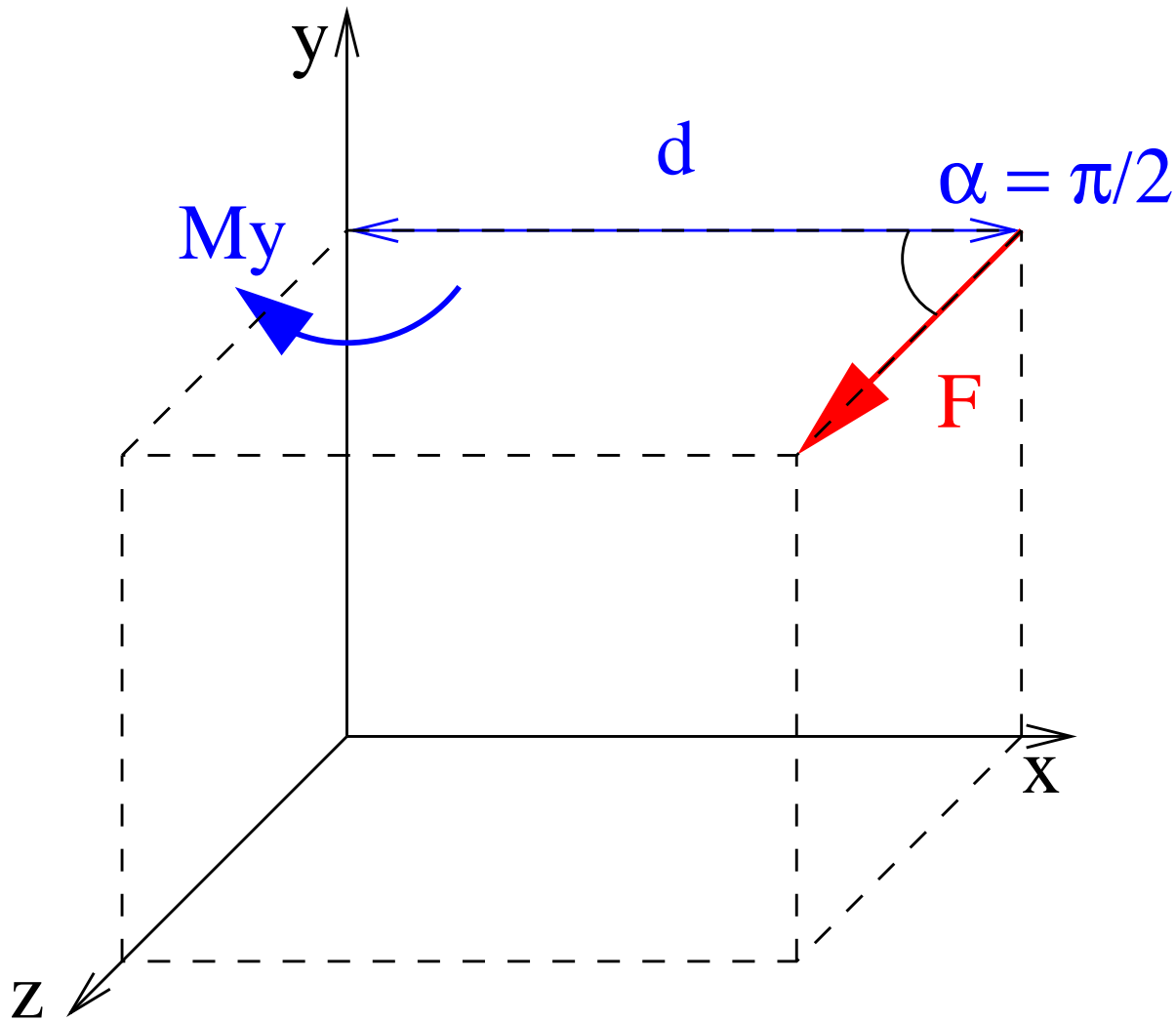
α, β, γ ... směrové úhly.

Směrové kosiny:

$$\cos \alpha = \frac{F_x}{F}$$
$$\cos \beta = \frac{F_y}{F}$$
$$\cos \gamma = \frac{F_z}{F}$$

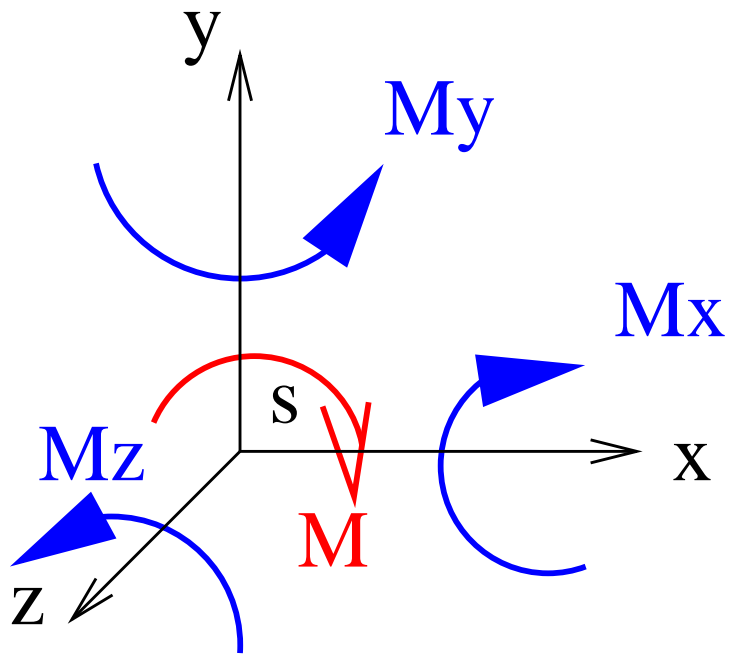
$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$$

Moment síly k bodu v prostoru (1)



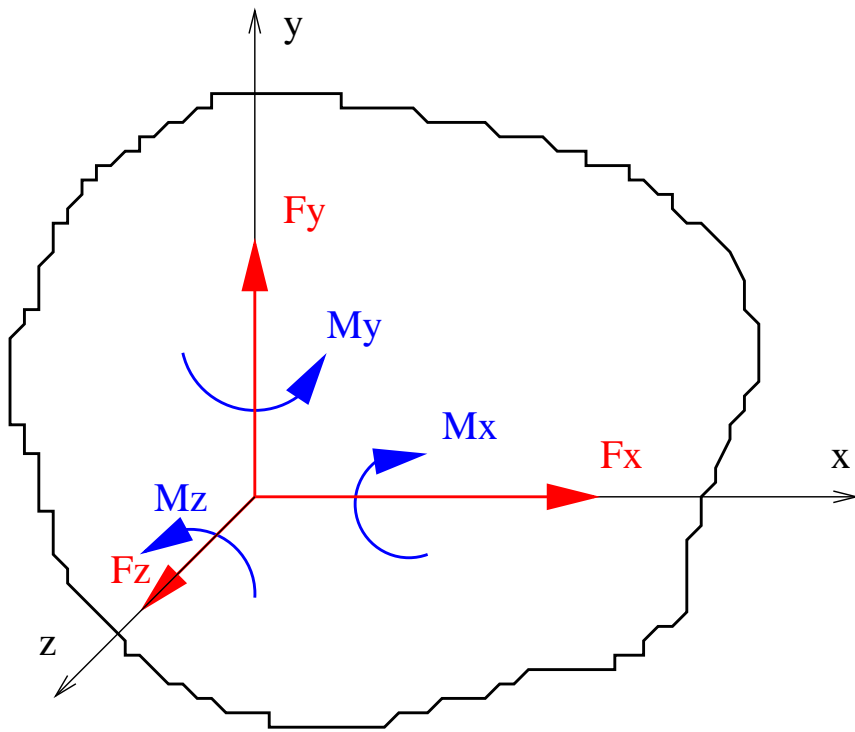
$$M = F \times d$$

Moment síly k bodu v prostoru (2)



$$M_o = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2}$$

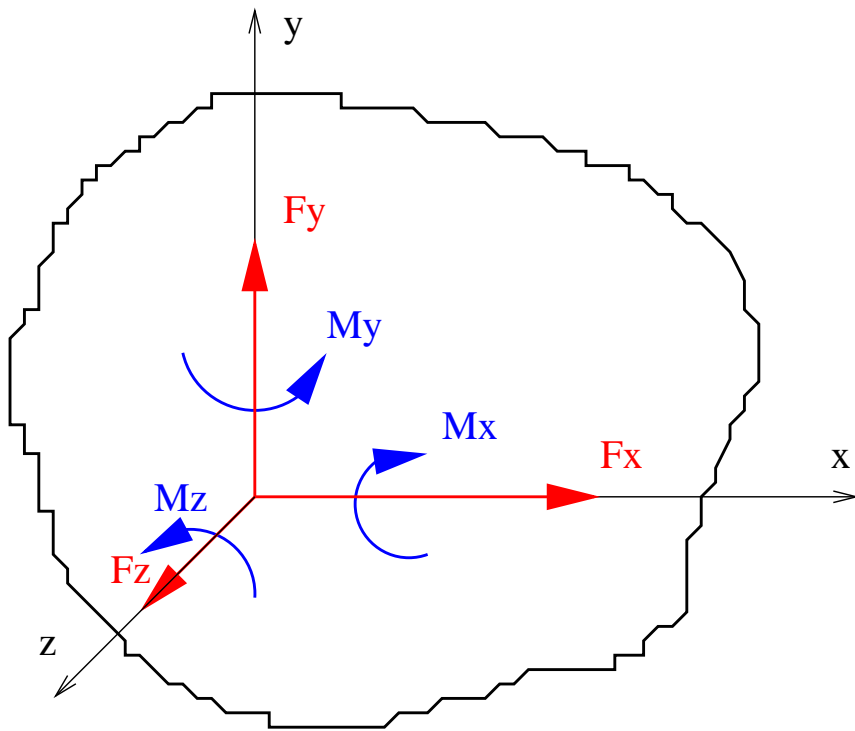
Obecná prostorová soustava sil (1)



- Rozložíme síly do směrů x, y, z
- Stanovíme výslednice F_{ix}, F_{iy}, F_{iz}
- $F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}$
- Směrové kosiny:

$$\cos \alpha = \frac{F_x}{F}$$
$$\cos \beta = \frac{F_y}{F}$$
$$\cos \gamma = \frac{F_z}{F}$$

Obecná prostorová soustava sil (2)



- Stanovíme výslednice

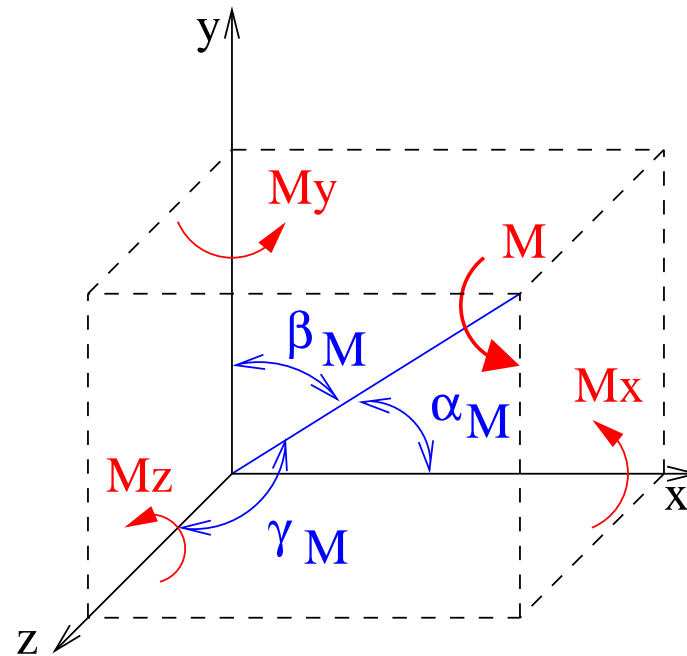
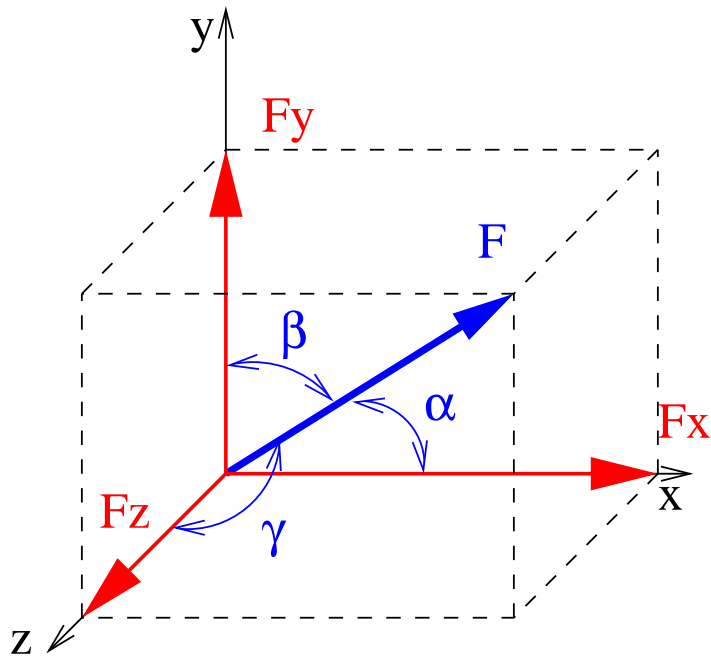
M_{ix}, M_{iy}, M_{iz}

- $M = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2}$
- Směrové kosiny:

$$\begin{aligned}\cos \alpha_M &= \frac{M_x}{M} \\ \cos \beta_M &= \frac{M_y}{M} \\ \cos \gamma_M &= \frac{M_z}{M}\end{aligned}$$

Obecná prostor. soustava sil (3)

Výslednice: **bivektor** M, F .

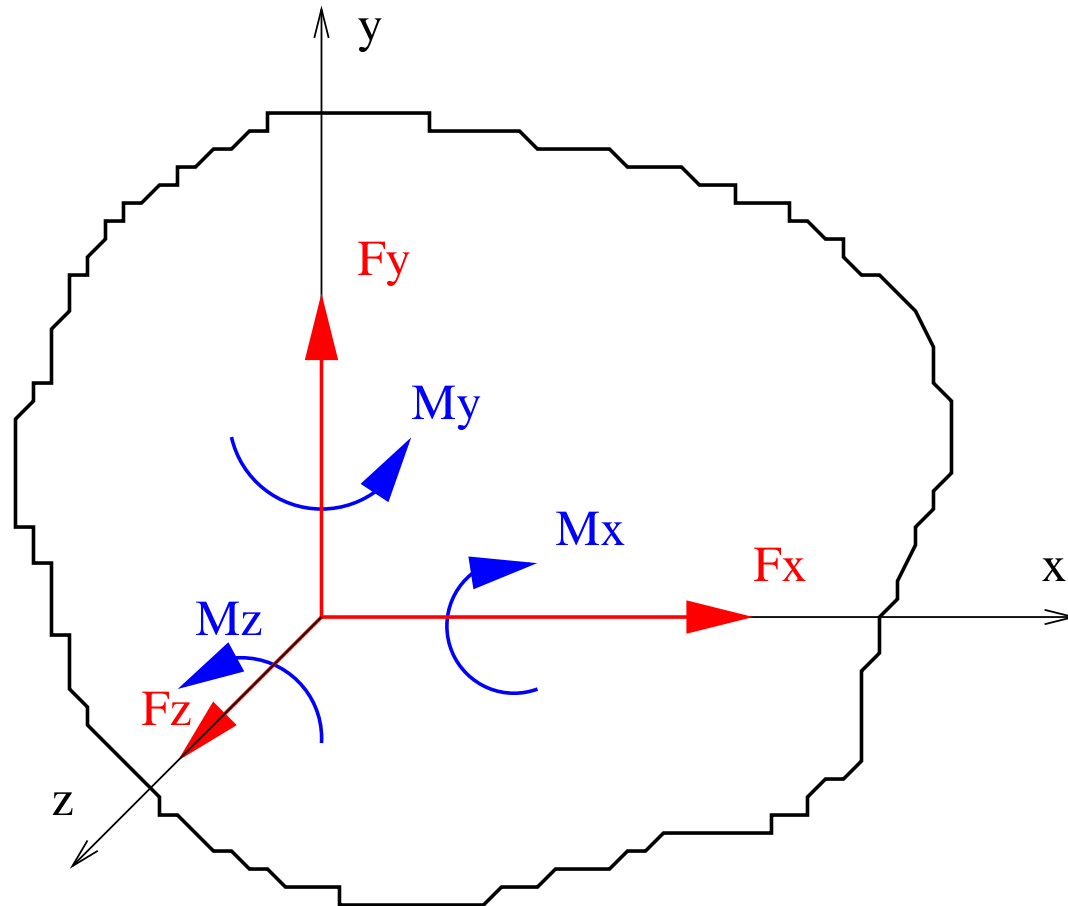


Úhel mezi F a M :

$$\cos \psi = \cos \alpha \times \cos \alpha_M + \cos \beta \times \cos \beta_M + \cos \gamma \times \cos \gamma_M$$

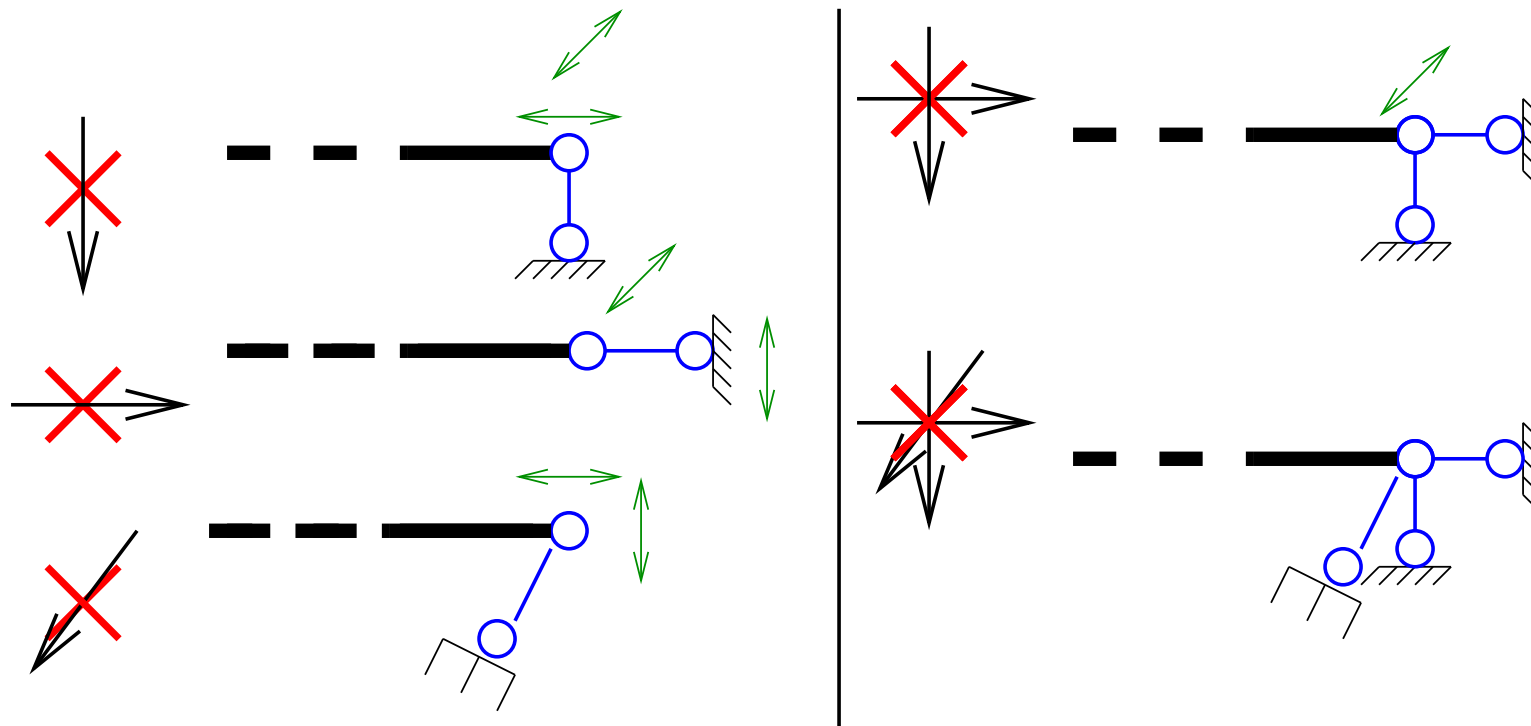
Podmínky rovnováhy soustavy sil v prostoru

$$\begin{aligned}\sum F_{i,x} &= 0 \\ \sum F_{i,y} &= 0 \\ \sum F_{i,z} &= 0 \\ \sum M_{i,x} &= 0 \\ \sum M_{i,y} &= 0 \\ \sum M_{i,z} &= 0\end{aligned}$$



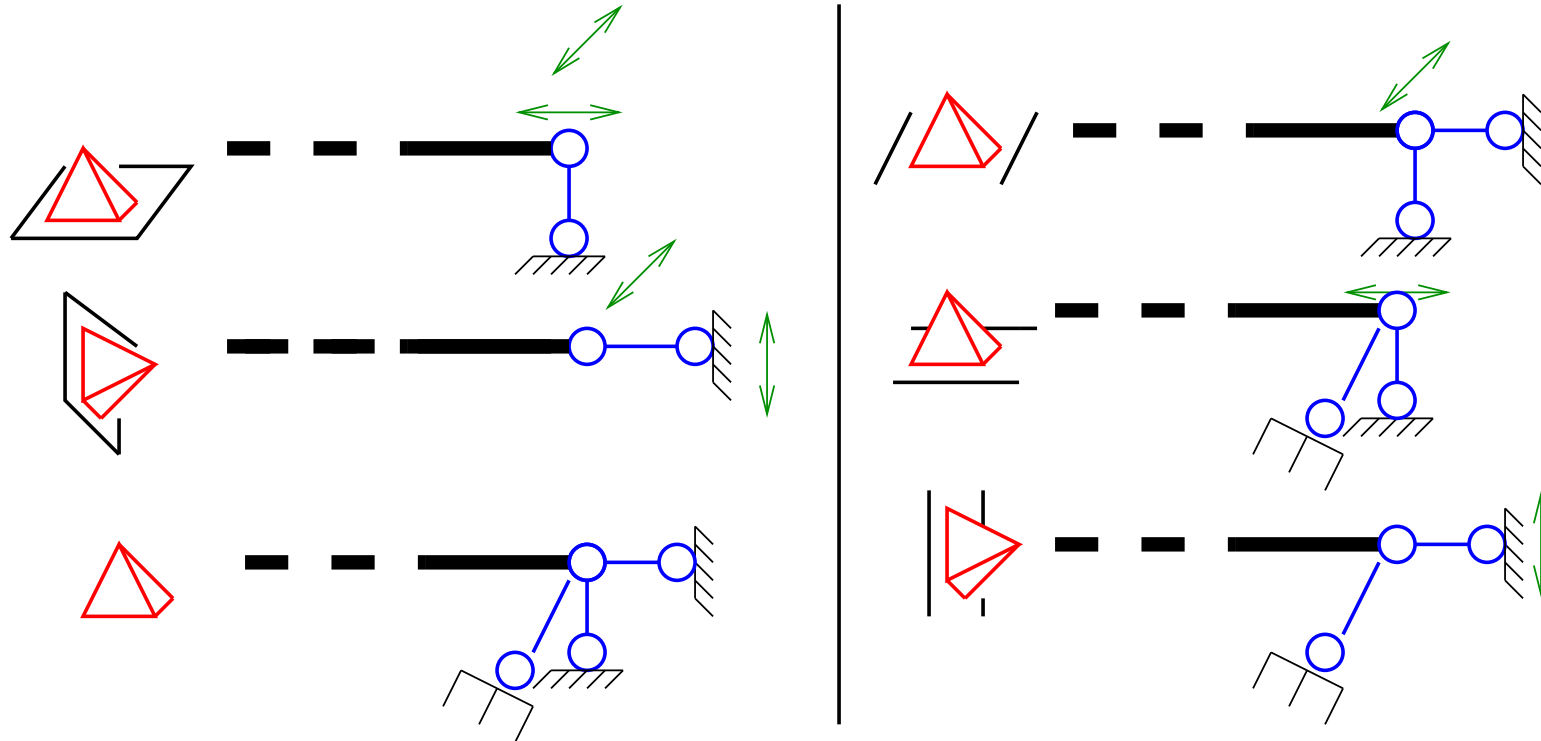
Opakování: vnější vazby

Vazba proti **posunu** v daném směru:

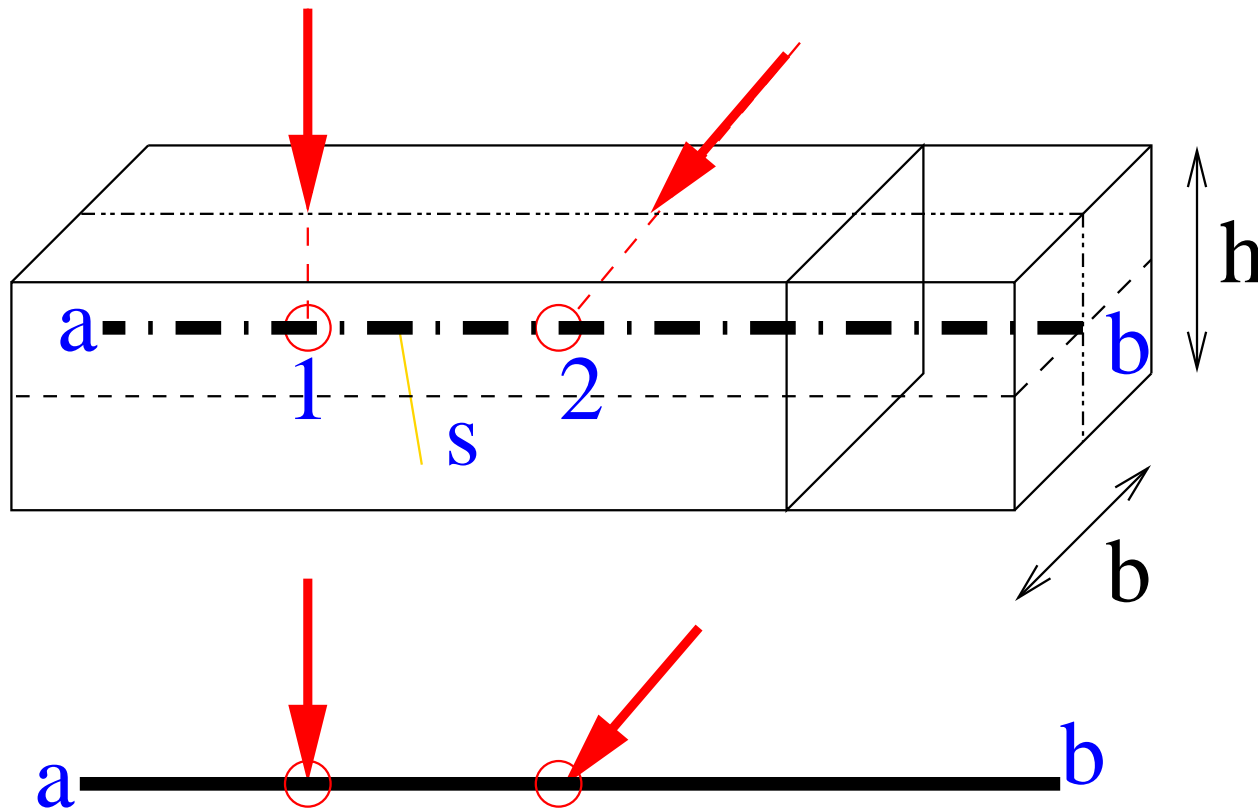


Vnější vazby: alternativní znázornění pro 3D

Vazba proti **posunu** v daném směru (posuvné a pevné klouby):

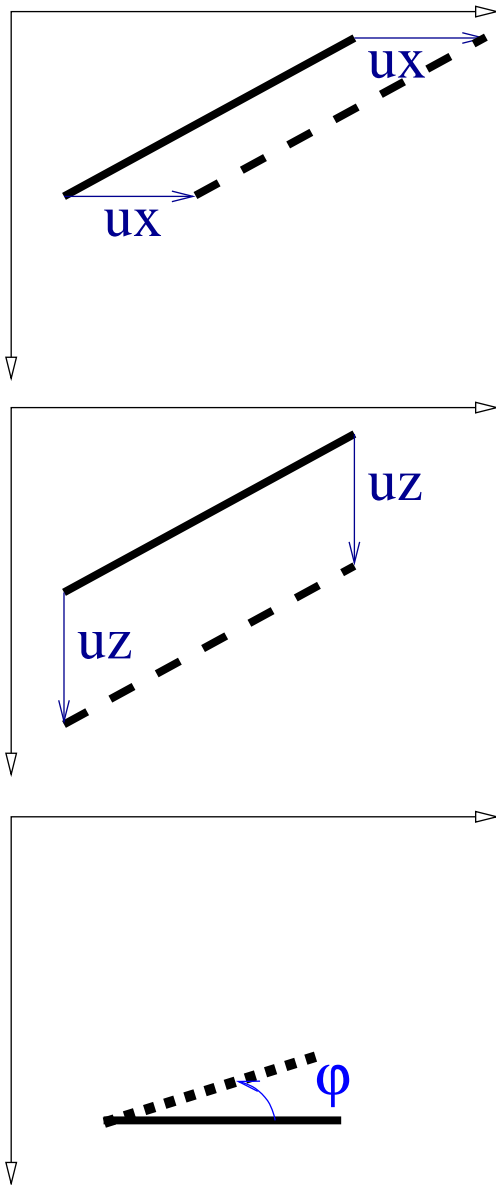


Prut – geometrický popis



- s - řídicí čára (**střednice**, u přímého prutu také **osa prutu**)
- b, h – šířka a výška **průřezu prutu**
- $1, 2$ – **působíště sil**

Pohybové možnosti prutu



Až do konce semestru budeme pokládat prut za **dokonale tuhé těleso**.

- posun prutu (u)
- pootočení prutu (φ)
- v rovině 3 možnosti („stupně volnosti“):

$$u_x, u_z, \varphi_y$$

- v prostoru 6 možností:

$$u_x, u_y, u_z, \varphi_x, \varphi_y, \varphi_z$$

Stupeň statické neurčitosti

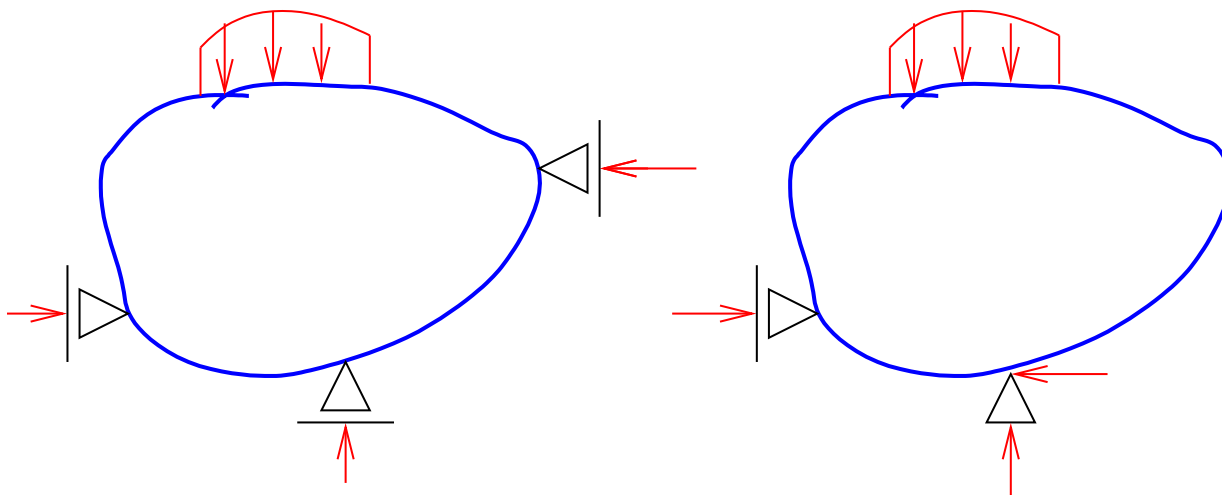
$$S_n = v - 6 + 6 \times u - k$$

v ... počet stupňů volnosti odebraný vazbami

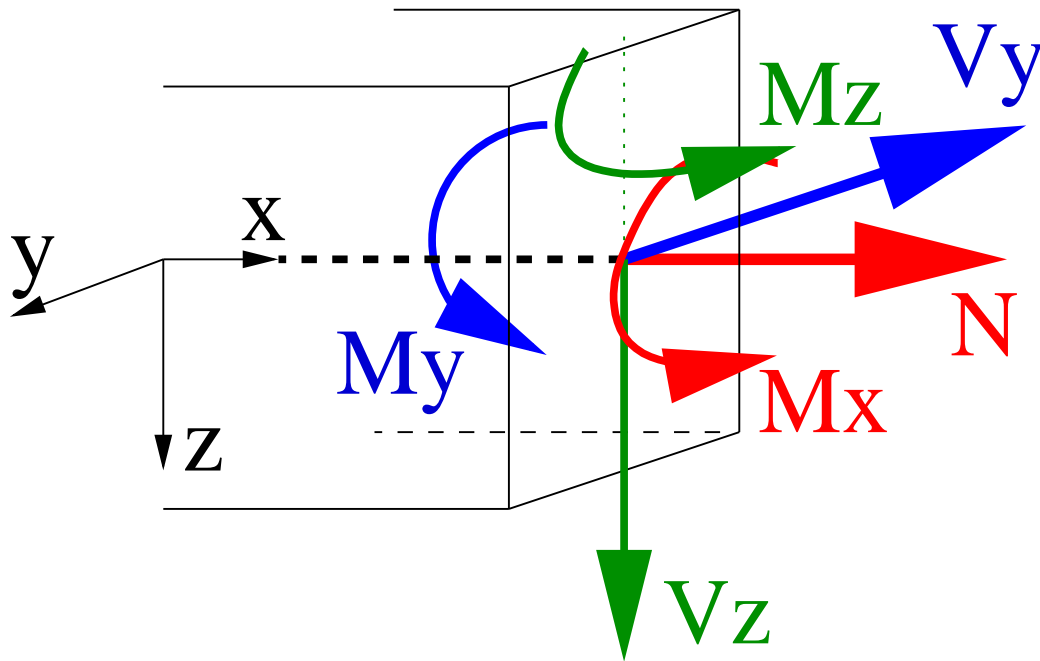
6 ... počet podmínek rovnováhy **v prostoru**

u ... počet uzavřených částí

k ... počet stupňů volnosti přidaných klouby



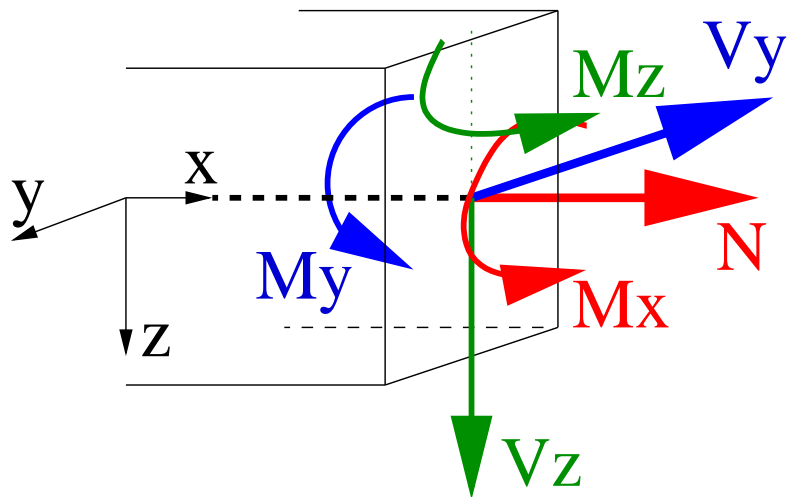
Prostorový nosník – vnitřní síly



- N ... normálová síla
- V_y, V_z ... posouvající síly
- M_x ... krouticí moment
- M_y, M_z ... ohybové momenty

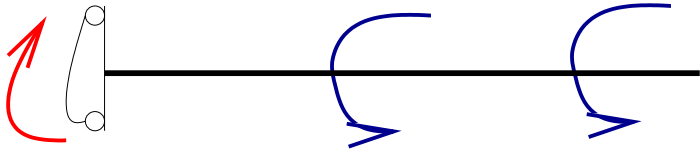
Celkem 3 síly a 3 momenty.

Prostorový nosník – výpočet vnitřních sil



- Normálové účinky vyřešíme jako u nosníku v rovině
- Příčné zatížení rozložíme do rovin xy , xz
- V_z , M_y vyřešíme v rovině xz
- V_y , M_z vyřešíme v rovině xy
- M_x (krouticí momenty) vyřešíme samostatně

Kroucení nosníku



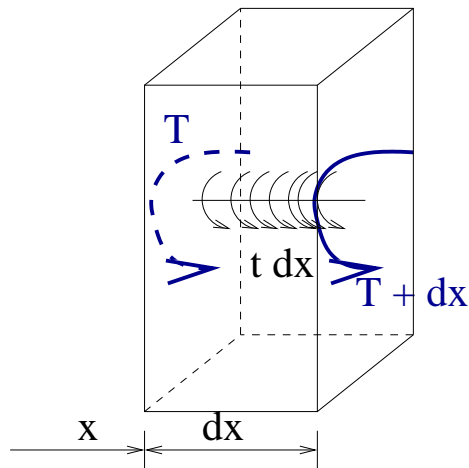
- vnitřní síla – krouticí moment T
- výpočet reakce z podmínky:

$$\sum_{i=1}^n T_i = 0$$

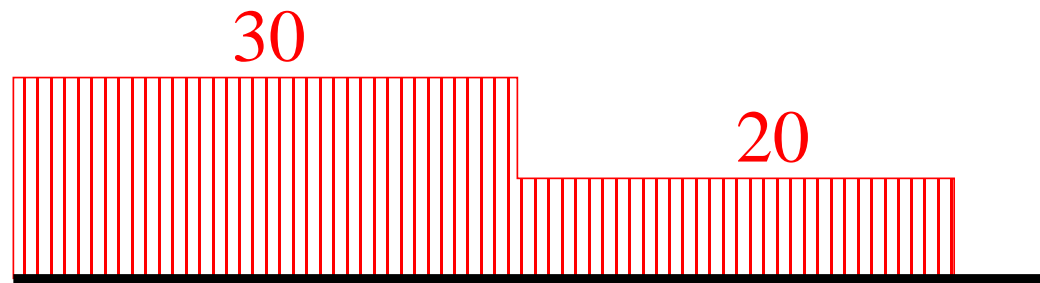
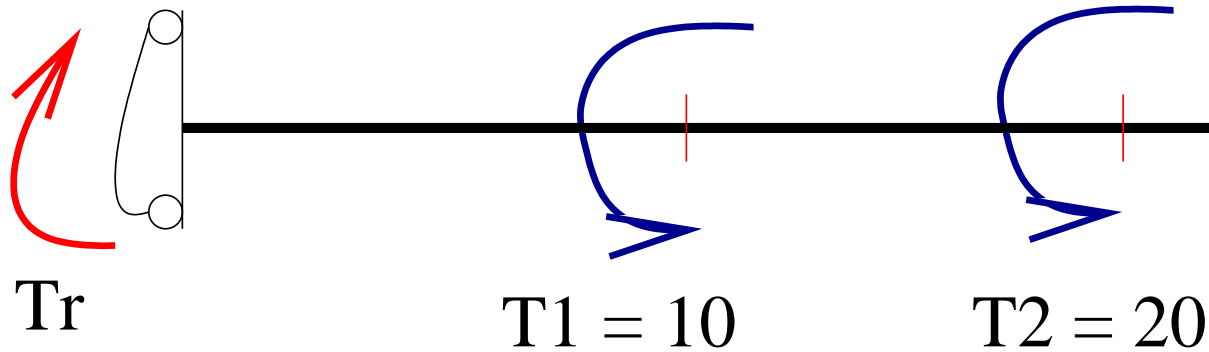
- diferenciální podmínka rovnováhy:

$$-T + (T + dT) + t dt = 0$$

$$\frac{dT}{dx} = -t$$

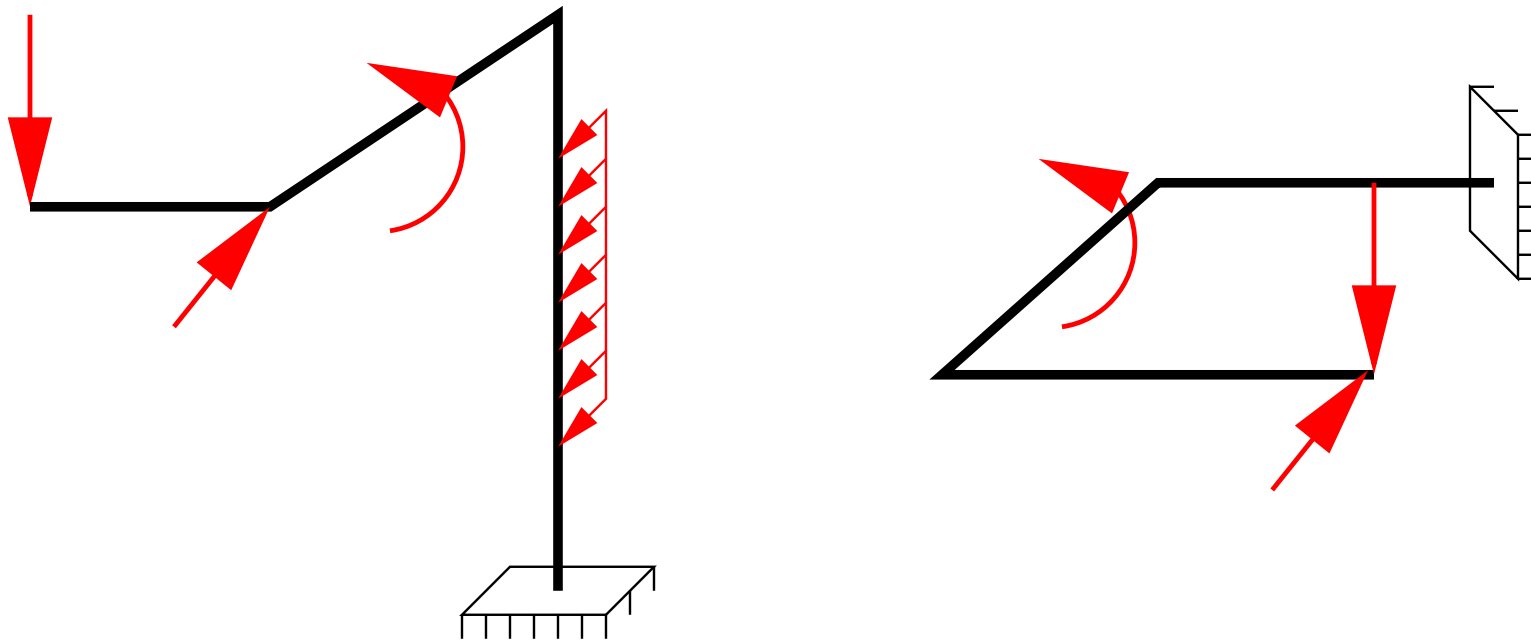


Kroucení nosníku – příklad



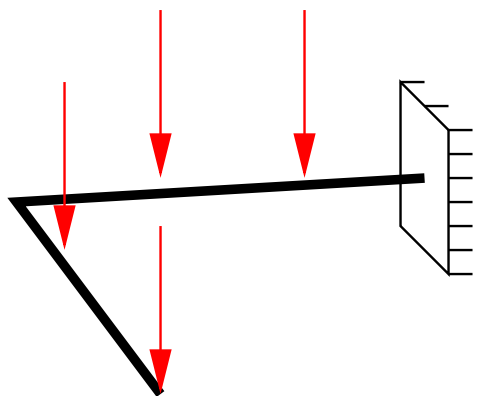
$$\sum T = T_r - 10 - 20 = 0 \Rightarrow T_r = 30 \text{ kN m}$$

Prostorový nosník



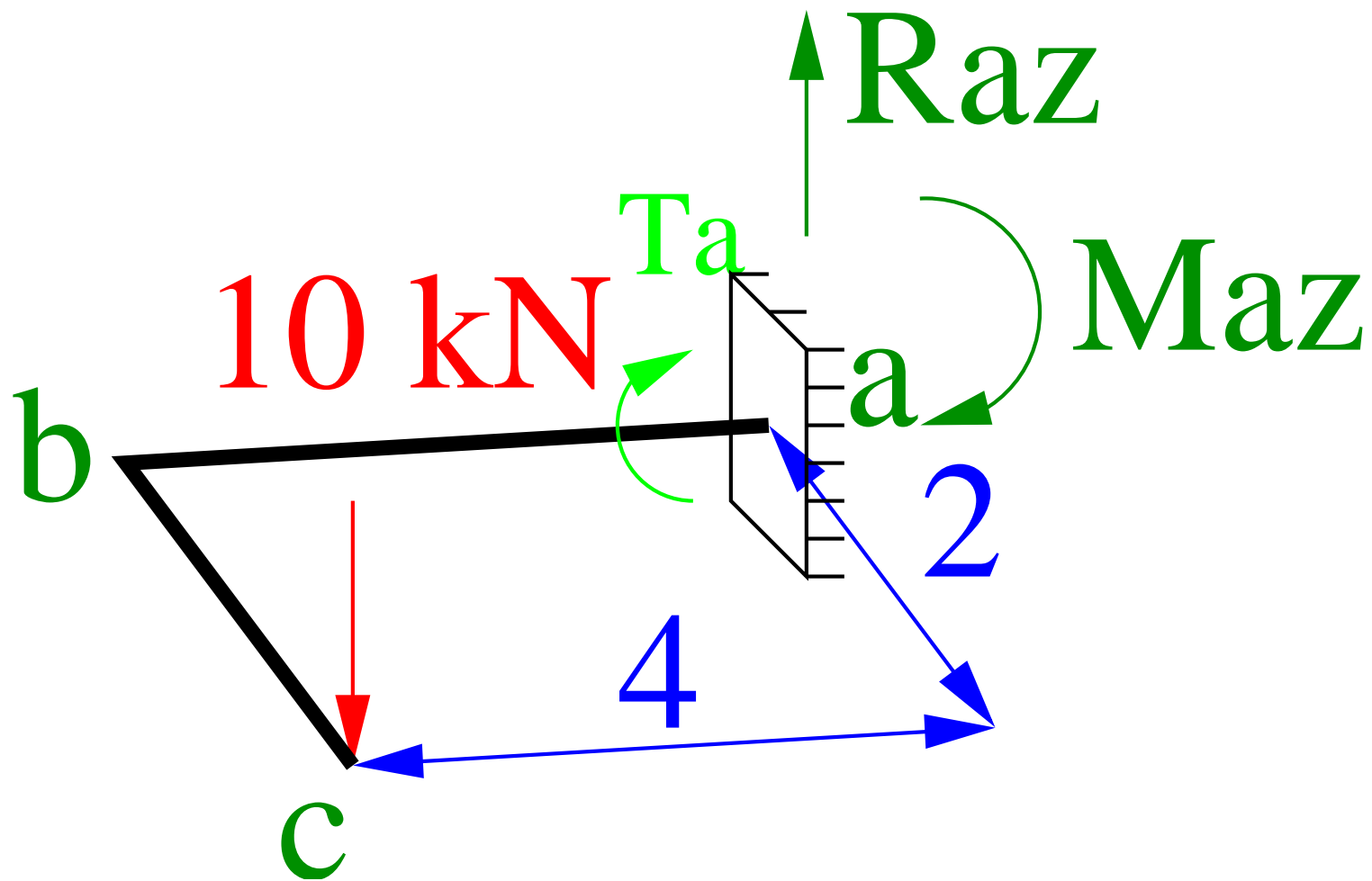
Vnitřní síly: N , V_y , V_z , M_x , M_y , M_z

Rovinně lomený a zatížený nosník („balkonový nosník“)

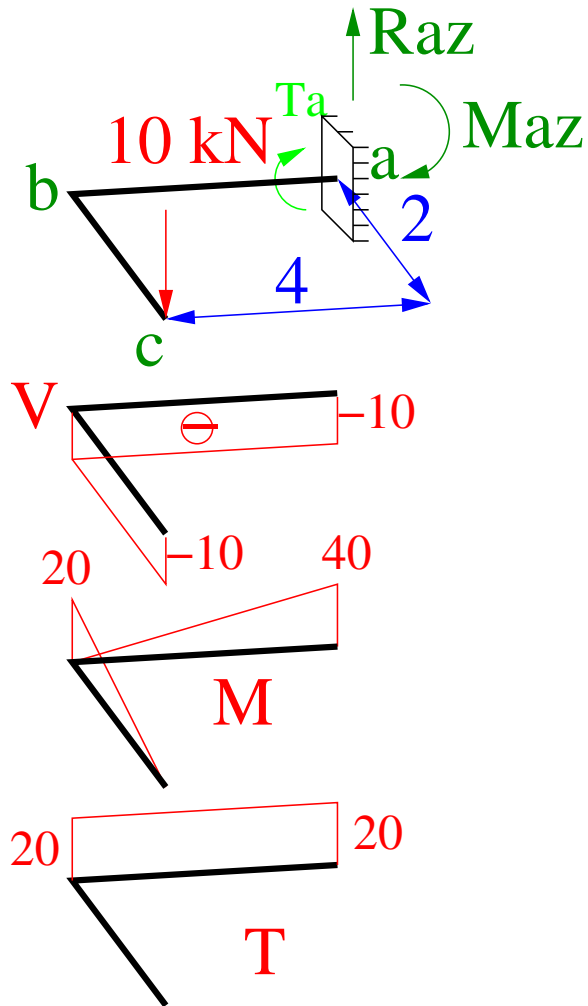


- zvláštní případ prostorově zatíženého nosníku
- vnitřní síly: V , M , T ($= M_x$)

Balkonový nosník – příklad (1)



Balkonový nosník – příklad (2)



$$R_{a,z} = 10kN(\uparrow)$$

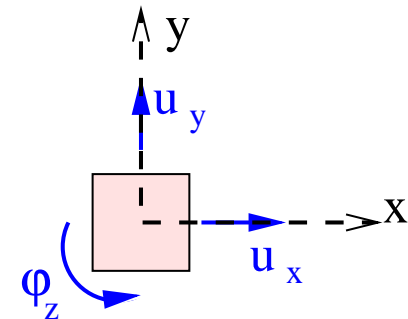
$$T_a = 10 \times 2 = 20kNm$$

$$M_a = 10 \times 4 = 40kNm$$

Přetvárná neurčitost (1)

Přetvárná neurčitost: počet neznámých deformací ve styčnicích, které je třeba stanovit...

- Styčník **v rovině** má 3 možnosti pohybu (deformace): 2 posunutí, 1 pootočení (u_x, u_y, φ_z) = u, v, φ .
- Styčník **v prostoru** má 6 možností pohybu (deformace): 3 posunutí, 3 pootočení $u_x, u_y, u_z, \varphi_x, \varphi_y, \varphi_z$.
- Platí pro každý styčník, nicméně ve **specifických případech** (příhradová konstrukce,...) nemusíme chtít počítat všechny neznámé.

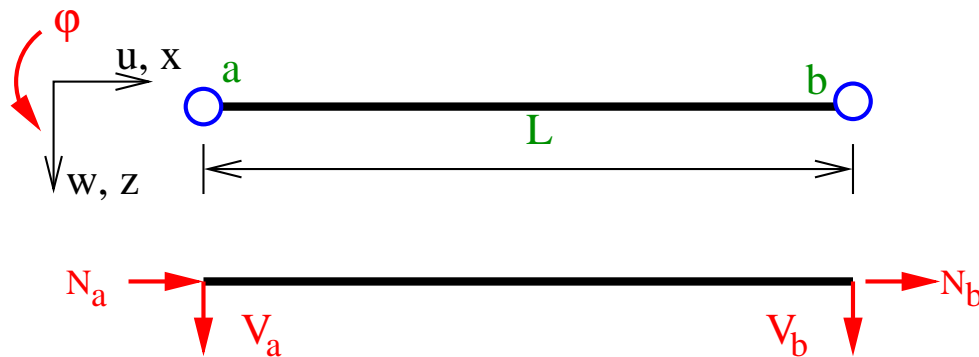


Deformace **konců prutů** připojených ke styčníku jsou **obvykle** shodné s deformacemi styčníku (záleží na druhu připojení – viz klouby).

Příhradový prut v prostoru (1)

Oboustranně kloubově připojený prut („příhradový“) přenáší pouze normálové síly. Matice tuhosti má tedy nenulové členy jen v rovnicích odpovídajících osovým deformacím:

$$\mathbf{K}_{ab}^* = \begin{bmatrix} \frac{E A}{L} & 0 & 0 & -\frac{E A}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{E A}{L} & 0 & 0 & \frac{E A}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



Příhradový prut v prostoru (2)

Matici je nutné transformovat do **globálního systému souřadnic** pomocí transformační matice ve tvaru:

$$\mathbf{T}_{ab} = \begin{bmatrix} \frac{x_b - x_a}{L} & \frac{y_b - y_a}{L} & \frac{z_b - z_a}{L} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{x_b - x_a}{L} & \frac{y_b - y_a}{L} & \frac{z_b - z_a}{L} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Poznámka: V případě příhradové konstrukce je transformace velmi jednoduchá, protože jedinou průřezovou charakteristikou je plocha A – nezáleží tedy na pootočení průřezu prutu kolem jeho osy (na orientaci lokálních os y a z).

Příhradový prut v prostoru (2)

Matici je nutné transformovat do **globálního systému souřadnic** pomocí transformační matice ve tvaru:

$$\mathbf{T}_{ab} = \begin{bmatrix} \frac{x_b - x_a}{L} & \frac{y_b - y_a}{L} & \frac{z_b - z_a}{L} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{x_b - x_a}{L} & \frac{y_b - y_a}{L} & \frac{z_b - z_a}{L} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Poznámka: V případě příhradové konstrukce je transformace velmi jednoduchá, protože jedinou průřezovou charakteristikou je plocha A – nezáleží tedy na pootočení průřezu prutu kolem jeho osy (na orientaci lokálních os y a z).

Oboustranně pružně upnutý prut v prostoru

Matici tuhosti \mathbf{K}_{ab}^* můžeme odvodit podobně jako ve 2D:

$$\begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI_z}{L^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_z}{L^2} & 0 & -\frac{12EI_z}{L^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_z}{L^2} \\ 0 & 0 & \frac{12EI_y}{L^3} & 0 & -\frac{6EI_y}{L^2} & 0 & 0 & 0 & -\frac{12EI_y}{L^3} & 0 & -\frac{6EI_y}{L^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{GI_t}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{GI_t}{L^3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{4EI_y}{L} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_y}{L^2} & 0 & \frac{2EI_y}{L} & 0 \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{4EI_z}{L} & 0 & -\frac{6EI_z}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{2EI_z}{L} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI_z}{L^3} & 0 & 0 & 0 & -\frac{6EI_z}{L^2} & 0 & \frac{12EI_z}{L^3} & 0 & 0 & 0 & -\frac{6EI_z}{L^2} \\ 0 & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & 0 & \frac{6EI}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{12EI}{L^3} & 0 & \frac{6EI}{L^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{GI_t}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{GI_t}{L^3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{2EI_y}{L} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_y}{L^2} & 0 & \frac{4EI_y}{L} & 0 \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{2EI_z}{L} & 0 & -\frac{6EI_z}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{4EI_z}{L} \end{bmatrix}$$

Příhradový prut v prostoru

Matici tuhosti \mathbf{K}_{ab}^* můžeme odvodit podobně jako ve 2D:

$$\begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Transformace v prostoru (1)

Prut odvozený v lokálních souřadnicích musíme transformovat do globálního systému souřadnic (a naopak).

Postupně sestavíme 3 matice pro 3 kroky transformace:

- Sklopení do roviny XY (kolem osy Z) $\Rightarrow \mathbf{T}_z$
- Sklopení do roviny YZ (kolem osy Y) $\Rightarrow \mathbf{T}_y$
- Pootočení průřezu kolem jeho osy $\Rightarrow \mathbf{T}_x$

Operace se provádějí postupně, získané matice tedy vynásobíme:

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = \mathbf{T}_x \times \mathbf{T}_y \times \mathbf{T}_z \times \begin{Bmatrix} x^* \\ y^* \\ z^* \end{Bmatrix}$$

Matice \mathbf{T}_{ab} pro celý prut $a - b$:

$$\mathbf{u}_{ab} = \begin{bmatrix} \mathbf{T} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{T} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{T} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{T} \end{bmatrix} \times \mathbf{u}_{ab}^*$$

Tranformace v prostoru (2)

Sklopení do roviny XZ (kolem osy Z) $\Rightarrow T_z$:

$$T_z = \begin{Bmatrix} \cos(\gamma_z) & \sin(\gamma_z) & 0 \\ -\sin(\gamma_z) & \cos(\gamma_z) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Bmatrix},$$

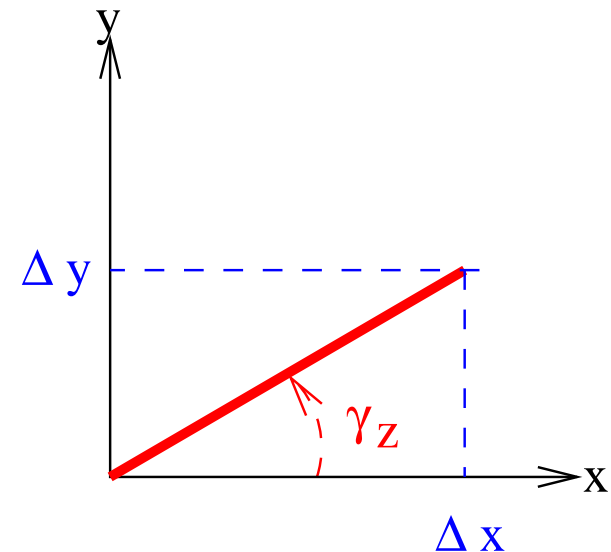
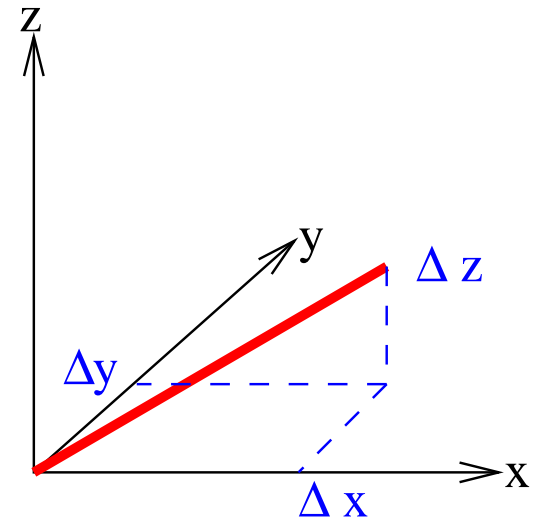
kde:

$$\cos \gamma_z = \frac{\Delta x}{L_{XY}},$$

$$\sin \gamma_z = \frac{\Delta y}{L_{XY}},$$

a L_{XY} je délka průmětu v ose X:

$$L_{XY} = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$$



Pokud by $L_{XY} = 0$, pak T_z nahradíme jednotkovou maticí.

Tranformace v prostoru (3)

Sklopení do roviny YZ (kolem osy X) $\Rightarrow T_y$

$$T_Y = \begin{Bmatrix} \cos(\gamma_y) & 0 & \sin(\gamma_y) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\gamma_y) & 0 & \cos(\gamma_y) \end{Bmatrix},$$

kde:

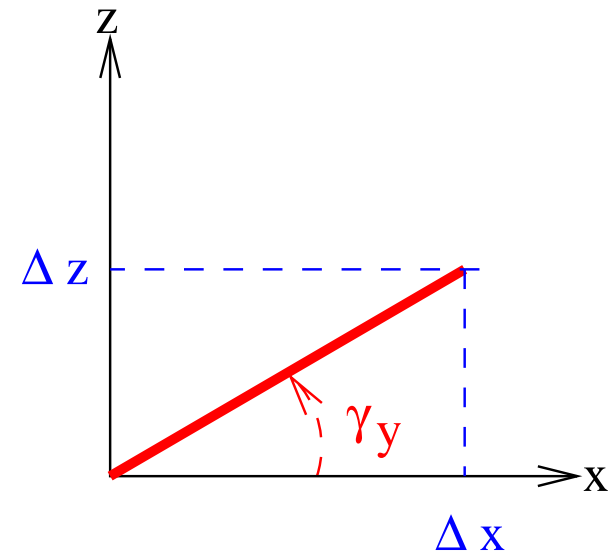
$$\cos \gamma_y = \frac{L_{XY}}{L_{XYZ}},$$

$$\sin \gamma_y = \frac{\Delta z}{L_{XYZ}},$$

a L_{XYZ} je délka:

$$L_{XYZ} = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}$$

Pokud by $L_{XYZ} = 0$, pak je „něco“ špatně...



Tranformace v prostoru (4)

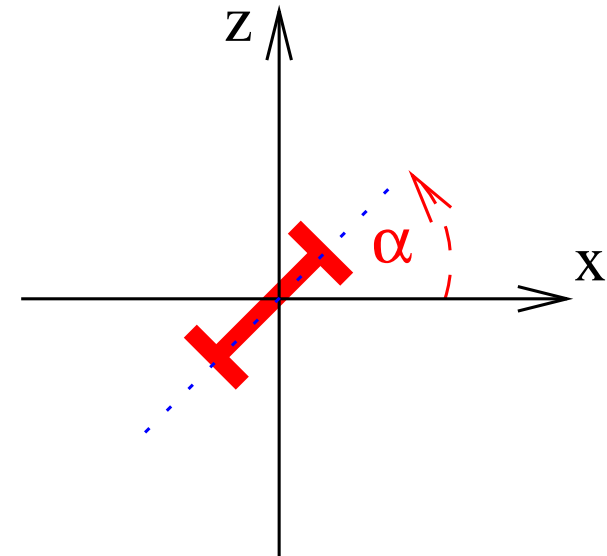
Pootočení průřezu kolem jeho osy $\Rightarrow \mathbf{T}_x$

$$\mathbf{T}_X = \begin{Bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ 0 & -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{Bmatrix},$$

kde: α je úhel potočení průřezu.

Dále matice vynásobíme a sestavíme \mathbf{T}_{ab} , kde

- $\Delta x = x_b - x_a$,
- $\Delta y = y_b - y_a$,
- $\Delta z = z_b - z_a$.



Další postup

Další řešení obecnou deformační metodou je obdobné jako v rovině (s více podporami a více neznámými...).

Musíme dávat pozor na tyto skutečnosti:

- U kloubově uložených prutů dbáme na to, aby v uzlen nezůstaly žádné „volné“ deformace (nepřipojené k alespoň jednomu prutu).
- U příhradových konstrukcí ve styčnicích nepočítámě žádná pootočení (ani kolem osy prutu!) – viz stupeň přetvárné neurčitosti.
- Pozor na orientaci kloubů na pootočených prutech!