

VYSOKÁ ŠKOLA BÁŇSKÁ – TECHNICKÁ UNIVERZITA OSTRAVA

FAKULTA STAVEBNÍ

# INŽENÝRSKÉ STATICKÉ VÝPOČTY

Deformační metoda: prutové konstrukce zatížené  
předepsanými deformacemi, konstrukce na pružném podloží

Jiří Brožovský

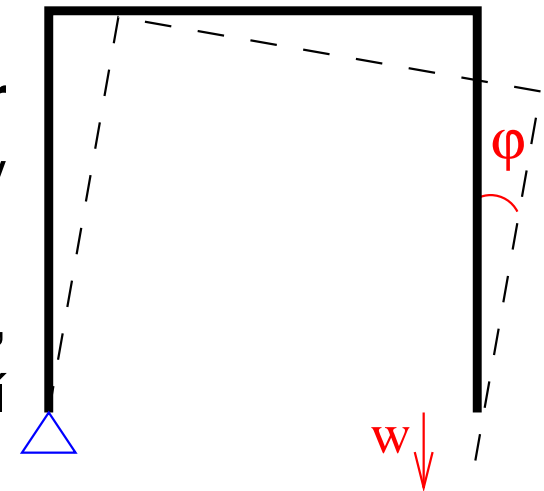
Kancelář: LP – H 406/3

Telefon: 597 321 321

E-mail: [jiri.brozovsky@vsb.cz](mailto:jiri.brozovsky@vsb.cz)

# Podloží stavebních konstrukcí

- **Není dokonale tuhé**, jak se předpokládá v nejjednodušších statických modelech podepření (vetknutí, pevný a posuvný kloub).
- Může se deformovat v důsledku zatížení od konstrukce nebo od vnějších vlivů.
- Je nutno uvážit zejména tyto jevy:
  - **Pokles nebo posun/pootočení podpor** v důsledku **změn v okolním prostředí** (sesuvy půdy aj.).
  - **Deformace** (vodorovné nebo svislé posunutí, pootočení podpor) v důsledku zatížení podloží konstrukcí.
- Při všech těchto jevech se samozřejmě deformuje (v souladu se svojí maticí tuhosti  $\mathbf{K}$ ) i samotná konstrukce!
- **Staticky určité konstrukce** se zdeformují, ale jejich **vnitřní síly se nezmění**.



# Zatížení předepsanou deformací v podporách (1)

- V některých případech je možné stanovit (změřit) deformaci podpor a zahrnout ji do výpočtu.
- Zpravidla jde o případy působení vnějších vlivů:
  - **Sesuvy půdy** (často mj. Jeseníky, Beskydy a okolí). Sesuvy jsou také následným jevem po **zemětřesení**.
  - Poklesy povrchu v důsledku poddolování nebo při zahlazování hornické činnosti (mj. Ostravsko, Karvinsko)
  - Poklesy půdy v důsledku **výstavby tunelů**, kolektorů aj.
  - **Podemletí** (okolí řek – mosty) nebo **odplavení** podloží (podzemní voda).
  - Poklesy v důsledku **okolní výstavby**.
  - Posuny v důsledku nadvýšení (někde poklesne, jinde se půda „vytlačí“, dále např. bobtnání podloží – struska pod FAST apod.)
- Pozor, vždy je přítomno i **pootočení**, nejen posunutí!

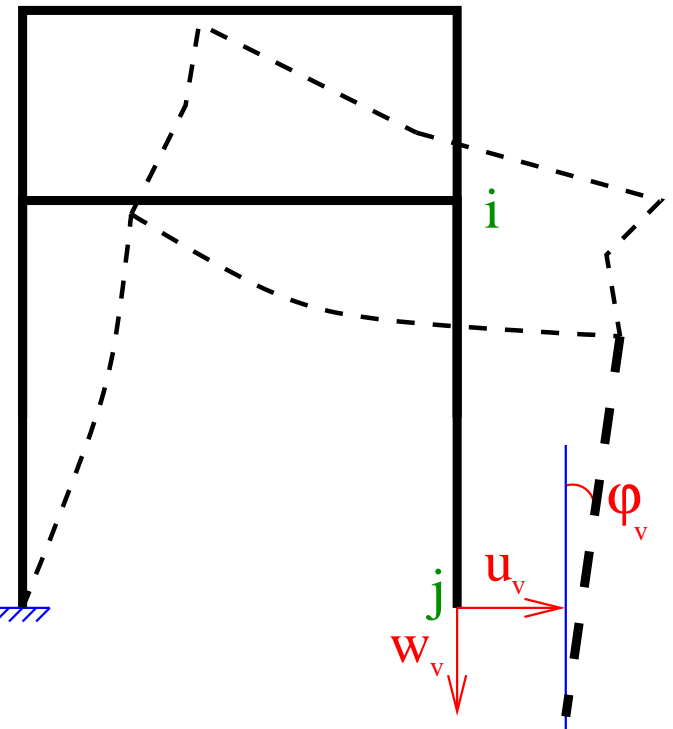
# Zatížení předepsanou deformací v podporách (2)

- „Popuštění podpor“ (posunutí, pootočení) staticky neurčitě konstrukce v ní vyvolá vnitřní síly.
- Možnosti řešení:
  - Výpočet primárních koncových sil prutů ( $F_i^*$ ) a zavedením do vektoru zatížení konstrukce ( $F$ ) (stejně jako u zatížení změnou teploty):

$$F_i^* = K_i \times u_i,$$

kde  $u_i$  obsahuje předepsané deformace.

- Zavedením deformací přímo do vektoru deformací konstrukce ( $u$ ) a **úpravou soustavy rovnic** (část neznámých známe, a proto příslušné členy převedeme na druhou stranu soustavy).



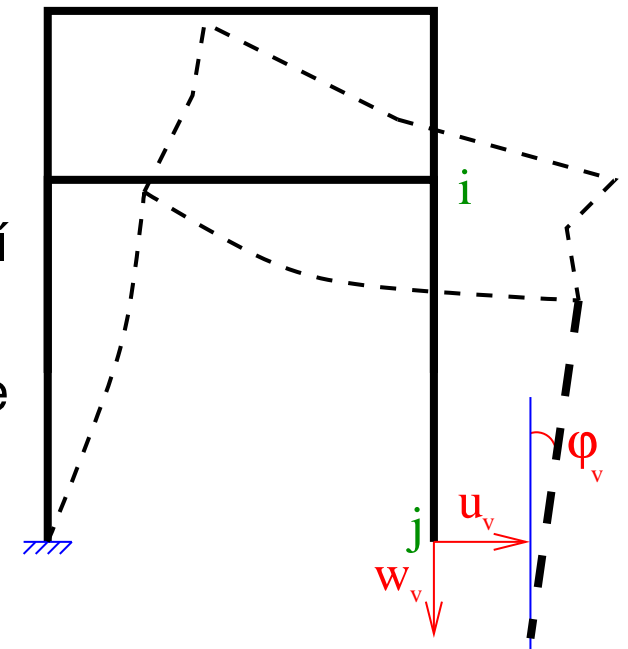
# Zatížení předepsanou deformací v podporách (3)

## Výpočet pomocí primárních vektorů na prutech

- Provedeme na všech prutech, které sousedí s „popuštěným“ styčником (zde jen prut  $i - j$ ).
- Matici tuhosti a vektor deformací použijeme v **globálních souřadnicích**:
  - matice tuhosti prutu  $i - j$ :

$$\mathbf{K}_{ij} = \mathbf{T}_{ij}^T \times \mathbf{K}_{ij}^* \times \mathbf{T}_{ij}$$

- vektor deformací prutu obsahující zadané hodnoty popuštění podpory  $j$  ( $u_v, w_v, \varphi$ ) rovnou sestavíme v globálních souřadnicích:



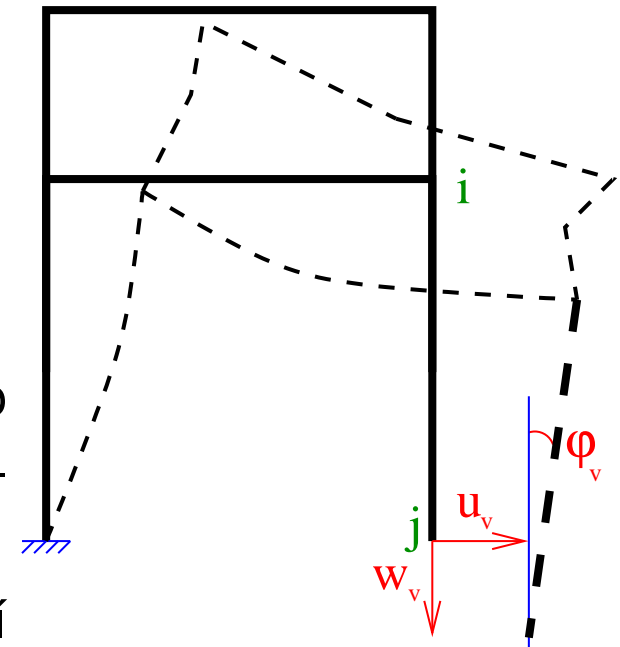
$$\mathbf{u}_{ij} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ u_v \\ w_v \\ \varphi_v \end{Bmatrix}$$

# Zatížení předepsanou deformací v podporách (4)

- Výpočet vektoru koncových sil prutu  $i - j$ :

$$\mathbf{F}_{ij} = \mathbf{K}_{ij} \times \mathbf{u}_{ij}$$

- Lokalizace (přičtení) členů vektoru  $\mathbf{F}_{ij}$  do příslušných míst matice uzlových zatížení konstrukce  $\mathbf{F}$ .
- Po vyřešení úlohy  $\mathbf{K} \times \mathbf{u} = \mathbf{F}$  stanovíme vnitřní síly na všech prutech konstrukce.
- U prutů, kde jsme počítali primární účinky  $\mathbf{F}_{ij}$  nezapomeneme tyto účinky započíst při výpočtu vnitřních sil!



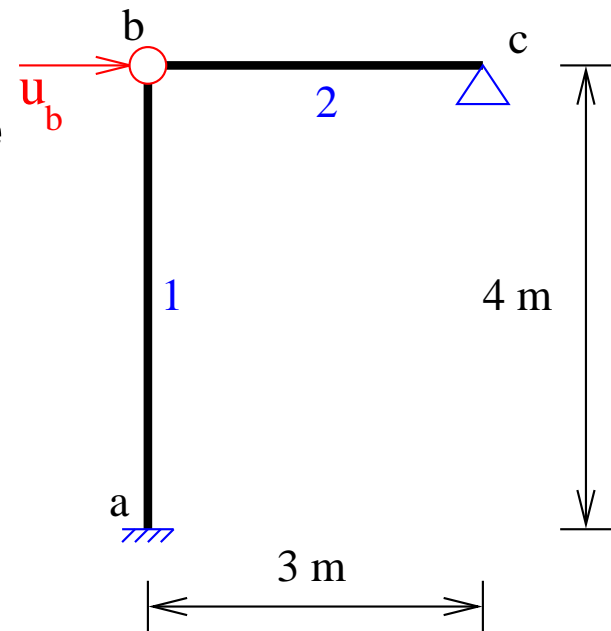
# Příklad 4: rám s popuštěním podpory (1)

**Zadání:** Prut 2 ( $b - c$ ) rámu z **příkladu 1** byl v důsledku nesprávné manipulace s další konstrukcí posunut o 5 mm doprava.

Stanovte vektory primárních sil prutů a vypočítejte vnitřní síly konstrukce od tohoto účinku.

Je zadáno:

- $u_b = 0.005 \text{ m}$
- $E = 20 \text{ GPa}$
- $A_1 = 0.02 \text{ m}^2$
  
- $A_2 = 0.01 \text{ m}^2$
- $I_{z1} = 16.7 \times 10^{-6} \text{ m}^4$
- $I_{z2} = 8,3 \times 10^{-6} \text{ m}^4$



Poznámka: i takové situace nastávají a je nutno je počítat...

# Příklad 4: rám s popuštěním podpory (2)

Vektor předepsaných deformací prutu  $a - b$  v **globálních** souřadnicích:

$$u_{ab} = \left\{ \begin{array}{c|c} u_a & 0 \\ w_a & 0 \\ \varphi_a & 0 \\ u_b & 0.005 \\ w_b & 0 \\ \varphi_b & 0 \end{array} \right\}$$

Matici tuhosti prutu  $a - b$  musíme transformovat do globálních souřadnic:

$$\mathbf{K}_{ab} = \mathbf{T}_{ab}^T \times \mathbf{K}_{ab}^* \times \mathbf{T}_{ab}$$

Použijeme výsledek z příkladu 1.

Následně vypočítáme vektor primárních koncových sil od popuštění podpor v globálních souřadnicích:

$$\mathbf{F}_{ab} = \mathbf{K}_{ab} \times \mathbf{u}_{ab}$$



# Příklad 4: rám s popuštěním podpory (3)

Vektor koncových primárních sil prutu  $a - b$  v **globálních** souřadnicích:

$$F_{ab,p} = \left\{ \begin{array}{l|l} N_a & -1.2525e + 03 \\ V_a & 0 \\ M_a & 6.2625e + 02 \\ N_b & 3.1312e + 02 \\ V_b & 0 \\ M_b & 6.2625e + 02 \end{array} \right\}$$

Lokalizujeme do vektoru uzlových sil **konstrukce**;

$$F = \left\{ \begin{array}{l|l} N_b & 3.1312e + 02 \\ V_b & 0 \end{array} \right\}$$

# Příklad 4: rám s popuštěním podpory (4)

Vektor předepsaných deformací prutu  $c - b$  v **globálních** souřadnicích:

$$u_{bc} = \left\{ \begin{array}{l|l} u_b & 0.005 \\ w_b & 0 \\ \varphi_b & 0 \\ u_c & 0 \\ w_c & 0 \\ \varphi_c & 0 \end{array} \right\}$$

Matici tuhosti prutu  $a - b$  bychom měli transformovat do globálních souřadnic. Použijeme výsledek z příkladu 1 (transformací se matice nezmění, protože leží v ose  $x$ ).

Následně vypočítáme vektor primárních koncových sil od popuštění podpor v globálních souřadnicích:

$$\mathbf{F}_{bc} = \mathbf{K}_{bc} \times \mathbf{u}_{bc}$$

# Příklad 4: rám s popuštěním podpory (5)

Vektor koncových primárních sil prutu  $b - c$  v **globálních** souřadnicích:

$$F_{bc,p} = \left\{ \begin{array}{l|l} N_b & 3.3333e + 05 \\ V_b & 0 \\ M_b & 0 \\ N_c & 3.3333e + 05 \\ V_c & 0 \\ M_c & 0 \end{array} \right\}$$

Lokalizujeme (přičteme!) do vektoru uzlových sil **konstrukce**;

$$F = \left\{ \begin{array}{l|l} N_b & 3.3365e + 05 \\ V_b & 0 \end{array} \right\}$$

# Příklad 4: rám s popuštěním podpory (6)

Soustava lineárních rovnic pro zadanou konstrukci (matice tuhosti je převzata z **příkladu 1**):

$$\begin{bmatrix} 6.273e7 & 0 \\ 0 & -9.986e7 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} u_b \\ w_b \end{bmatrix} = \begin{Bmatrix} 3.3365e + 05 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Získáme deformace:

$$\mathbf{u} = \begin{Bmatrix} 5.0000e - 03 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Konstrukce se tedy posune **doprava** o  $0,003 \text{ mm}$ . (Překvapuje to někoho?)

Dále bude nutno stanovit koncové síly v prutech  $a - b$  a  $b - c$  včetně započtení primárních účinků.

**Poznámka:** Vzhledem k jednoduchosti konstrukce vyšlo  $w_b = 0$ . V obecném případě tomu pak být nemusí a deformovaný tvar může být i velmi složitý!

# Příklad 4: rám s popuštěním podpory (7)

Vektor koncových sil prutu  $a - b$  v **lokálních** souřadnicích:

$$\mathbf{F}_{ab} = \mathbf{K}_{ab} \times \mathbf{u}_{ab}$$

$$\mathbf{F}_{ab}^* = \mathbf{T}_{ab} \times \mathbf{F}_{ab}$$

$$F_{ab}^* = \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ -1.2525e + 03 \\ 6.2625e + 02 \\ 0 \\ 3.1312e + 02 \\ 6.2625e + 02 \end{array} \right\}$$

# Příklad 4: rám s popuštěním podpory (8)

Vektor koncových sil prutu  $b - c$  v **lokálních** souřadnicích:

$$\mathbf{F}_{bc} = \mathbf{K}_{bc} \times \mathbf{u}_{bc}$$

$$\mathbf{F}_{bc}^* = \mathbf{T}_{bc} \times \mathbf{F}_{bc}$$

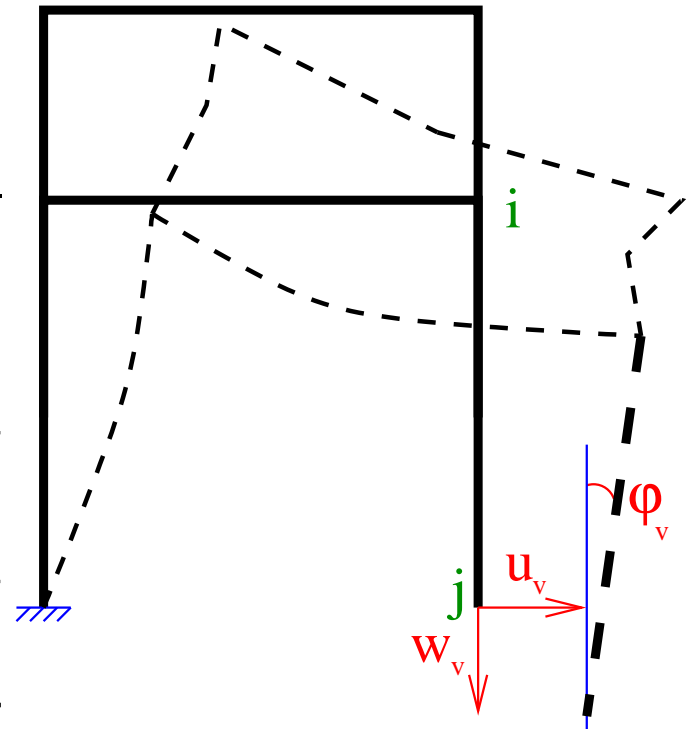
$$F_{bc}^* = \left\{ \begin{array}{c} 3.3333e + 05 \\ 0 \\ 0 \\ -3.3333e + 05 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right\}$$

# Zatížení předepsanou deformací v podporách – alternativně

Zavedením deformací přímo do vektoru deformací konstrukce ( $\mathbf{u}$ ) a **úpravou soustavy rovnic**:

- Předepsané hodnoty posunutí vložíme přímo do vektoru  $\mathbf{u}$ .
- Musíme upravit pravou stranu protože předepsané hodnoty jsou nyní **známé** – příslušné členy musíme převést na pravou stranu.
- Tím se nám „vynulují“ příslušné **sloupce** a **řádky** matice  $\mathbf{K}$ .
- Musíme zajistit platnost příslušných rovnic: na diagonálu v nich umístíme hodnotu 1 a odpovídající člen pravé strany upravíme na tvar  $1 \times u_i$ , abychom dostali rovnici ve tvaru:

$$1 \times u_i = u_i$$



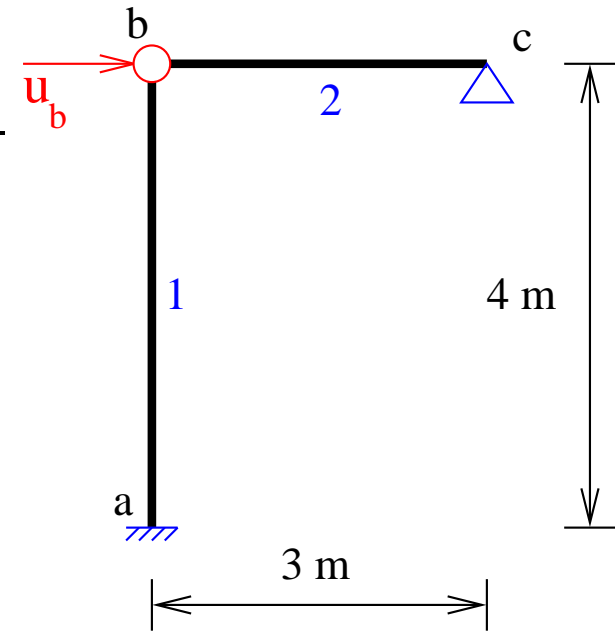
# Příklad 5: rám s popuštěním podpory (1)

**Zadání:** Prut 2 ( $b - c$ ) rámu z **příkladu 1** byl v důsledku nesprávné manipulace s další konstrukcí posunut o 5 mm doprava.

Počítejte pomocí úpravy vektoru deformací konstrukce.

Je zadáno:

- $u_b = 0.005 \text{ m}$
- $E = 20 \text{ GPa}$
- $A_1 = 0.02 \text{ m}^2$
  
- $A_2 = 0.01 \text{ m}^2$
- $I_{z1} = 16.7 \times 10^{-6} \text{ m}^4$
- $I_{z2} = 8,3 \times 10^{-6} \text{ m}^4$





# Příklad 5: rám s popuštěním podpory (2)

Soustava lineárních rovnic pro zadanou konstrukci (matice tuhosti je převzata z **příkladu 1**):

$$\begin{bmatrix} 6.273e7 & 0 \\ 0 & -9.986e7 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} u_b \\ w_b \end{bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Dosadíme za  $u_b = 0.005 \text{ m}$ :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0.005 \times 0 & -9.986e7 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0.005 \\ w_b \end{bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \times 0.005 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Hodnotu  $0.005 \times 0$  bychom měli převést na druhou stranu:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -9.986e7 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0.005 \\ w_b \end{bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \times 0.005 \\ 0 - (0.005 \times 0) \end{Bmatrix}$$

Dále vyřešíme deformace ( $\mathbf{K} \times \mathbf{u} = \mathbf{F}$ ) a vypočítáme koncové (a vnitřní síly) jako vždy... (vyjde  $u_b = 0.005 \text{ m}$ ,  $w_b = 0 \text{ m}$ ).

# Modely podloží

- Skutečné podloží (zeminy, horniny) nahrazujeme *idealizovanými* modely, často **lineárními**. To neodpovídá skutečnosti a může jít o velké zjednodušení (u uváděných modelů chyba ve vnitřních silách zpravidla kolem 30%, u deformací ještě mnohem větší).
- Deformace lineárního modelu podloží je zpravidla **větší** než skutečného podloží, geotechnické modely proto zavádí různé korekce (např. model poloprostoru s tzv. strukturální pevností zemin).
- Skutečná **konstrukce je s podložím v interakci** (vzájemně se ovlivňují) – *nelineární* úloha, kterou bychom měli řešit **iteračně**.

## Nejčastější modely podloží:

- pružný poloprostor (polorovina) – v geotechnice se používá k výpočtu sedání,
- kontaktní modely (Winklerův jednoparametrický model, kontaktní modely s více parametry – Kolář, Pasternak aj.).

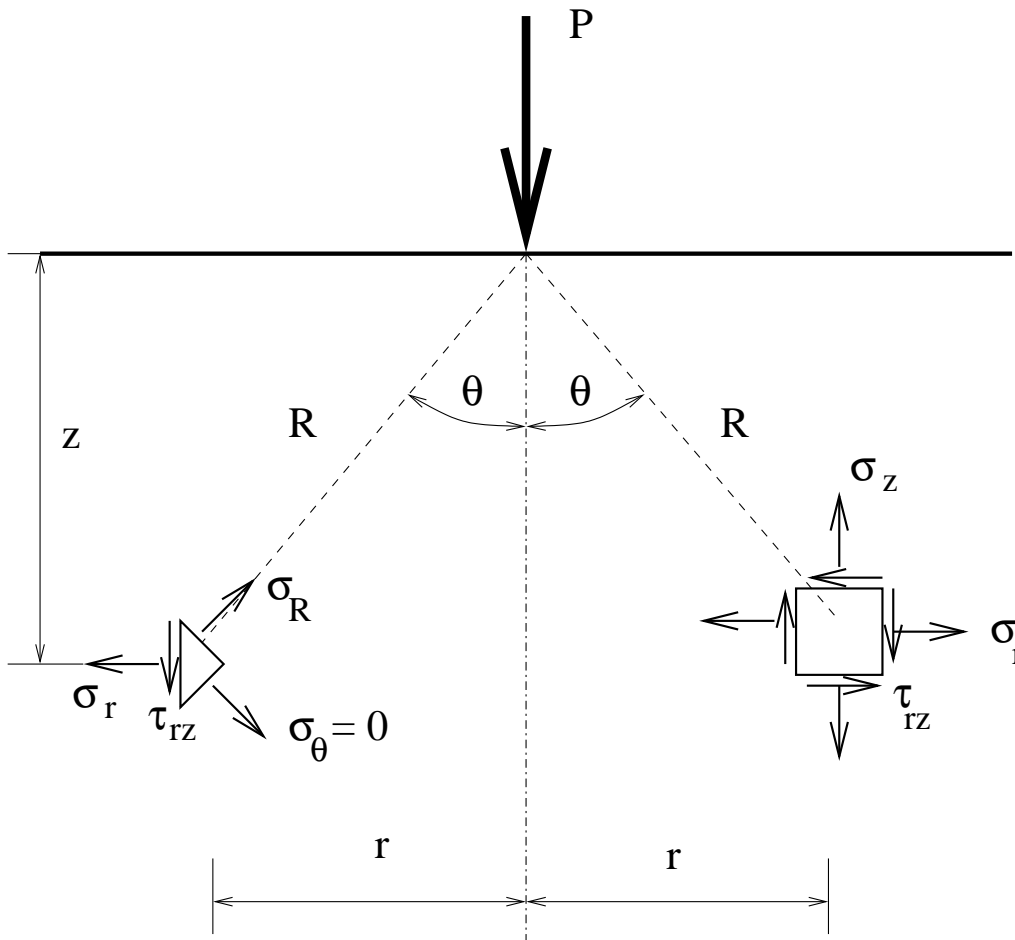
# Pružný poloprostor

(1)

- vychází z předpokladů teorie pružnosti,
- „nekonečná“ pružná oblast ohraničená jen z jedné strany („povrch poloprostoru“),
- homogenní, obvykle izotropní materiál:  $E$ ,  $\nu$ ,
- často se používá ve 2D (pružná polorovina),
- pro jednoduché případy zatížení existují analytická řešení.

# Pružný poloprostor (2)

(2)



Válcový souřadný systém  
( $r, \varphi, z$ ):

$$\cos(\theta) = \frac{z}{R} \quad (1)$$

$$\sin(\theta) = \frac{r}{R} \quad (2)$$

$$r^2 = x^2 + y^2 \quad (3)$$

$$R^2 = r^2 + z^2 \quad (4)$$

$$R^2 = x^2 + y^2 + z^2 \quad (5)$$

# Pružný poloprostor

(3)

Pro zatížení osamělým břemenem (J. Boussinesque):

$$\sigma_z = -\frac{2}{3} \frac{P}{\pi} \frac{z^3}{R^5} \quad (6)$$

$$\sigma_r = \frac{P}{2\pi} \left[ \frac{1 - 2\mu}{R(R+z)} - \frac{3zr^2}{R^5} \right] \quad (7)$$

$$\sigma_\theta = \frac{P}{2\pi} (1 - \mu) \left[ \frac{z}{R^3} - \frac{1}{R(R+z)} \right] \quad (8)$$

$$\tau_{rz} = -\frac{3}{2} \frac{P}{\pi} \frac{z^2 r}{R^5} \quad (9)$$

# Pružný poloprostor

(4)

Pro zatížení osamělým břemenem (J. Boussinesque):

$$u = \frac{P(1 + \mu)}{2 \pi E} \left[ \frac{r z}{R^3} - (1 - 2 \mu) \frac{r}{R(R + z)} \right] \quad (10)$$

$$w = \frac{P(1 + \mu)}{2 \pi E} \left[ \frac{2(1 - \mu)}{R} + \frac{z^2}{R^3} \right] \quad (11)$$

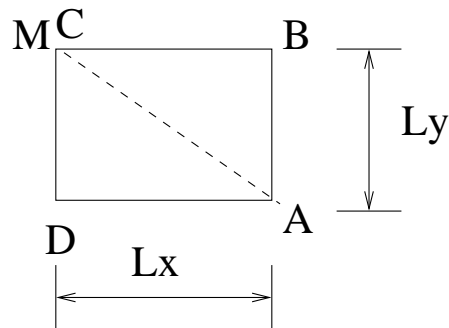
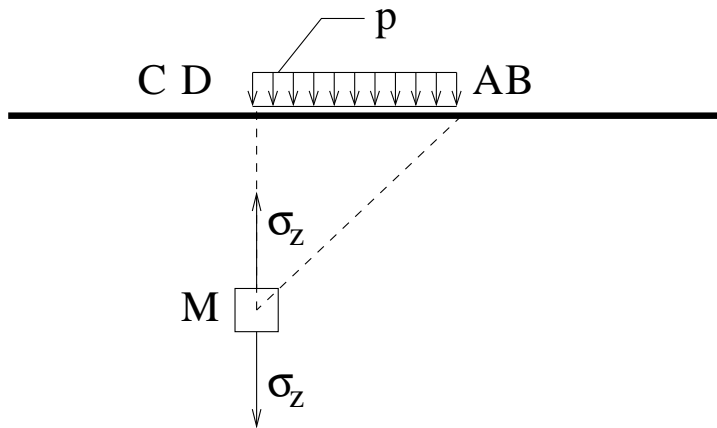
(12)

Pro povrch poloprostoru ( $z = 0$ ):

$$w_{pp} = \frac{R (1 - \mu)^2}{\pi E r} \quad (13)$$

# Pružný poloprostor (5)

Zatížení na ploše obdélníka:



Označme:

$$s = \sqrt{L_x^2 + L_y^2} \quad (14)$$

$$L = \sqrt{s^2 + z^2} \quad (15)$$

# Pružný poloprostor (6)

Zatížení na ploše obdélníka:

$$\begin{aligned}\sigma_z &= -\frac{p}{2\pi} \left[ \frac{L_x L_y z}{L} \left( \frac{1}{L_x^2 + z^2} + \frac{1}{L_y^2 + z^2} \right) + \arctan \left( \frac{L_x + L_y}{z L} \right) \right] \\ w &= \frac{(1 - \mu^2)p}{\pi E} \left( L_x \ln \left( \frac{L_y + s}{L_x} \right) + L_y \ln \left( \frac{L_x + s}{L_y} \right) \right) \quad (16)\end{aligned}$$



# Pružný poloprostor

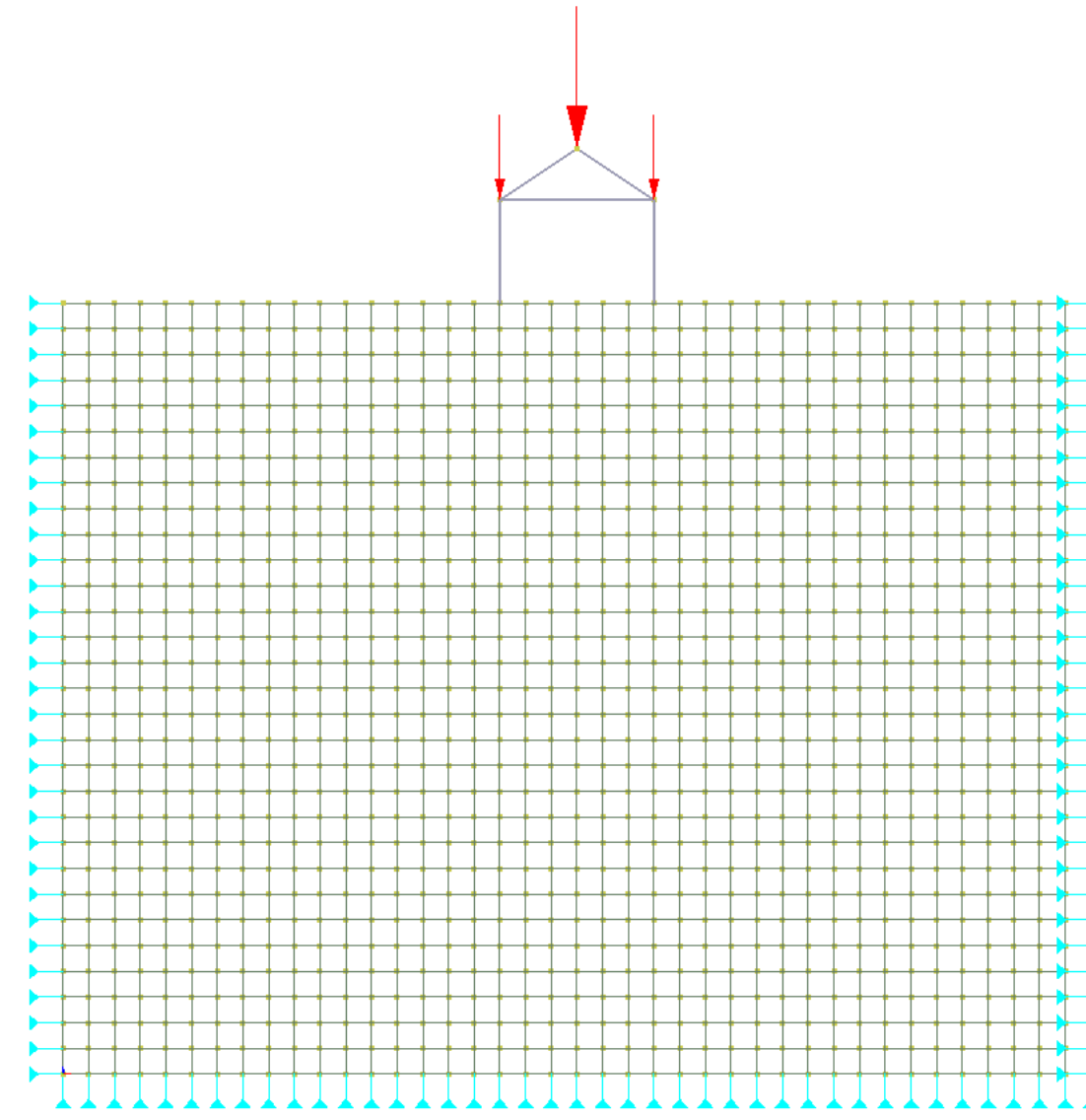
(7)

## Nevýhody, problémy :

- Silně zjednodušuje realitu (v podloží se vždy nachází více vrstev materiálu s různými vlastnostmi).
- Materiál je *lineárně pružný*, což neodpovídá skutečným zeminám a horninám (sypké hmoty, jíly,...)
- Přesnější je náhrada **vrstevnatým poloprostorem** s nelineárními chováním materiálu (např. pružně–plastické podle modelů Mohr–Coulomb, Drucker–Prager a dalších):
  - analytické řešení (velmi obtížné, jen pro jednoduchou geometrii vrstev a pro lineárně pružné chování),
  - modelování **výseku poloprostoru** numericky, například **metodou konečných prvků** – náročné na výpočetní čas, **vstupní data** a vyhodnocení.
- V praxi se takto numericky modeluje hlavně v podzemním stavitelství nebo hornictví.

# Pružný poloprostor

(8)



```
uFEM 0.2.92
CS: CART
Time: 1

ETyps:      3
RSets:      3
Mats:       2

KPs:        5
GEnts:      1

Nodes:      1274
Elems:      1206
Disps:      103
Loads:       3

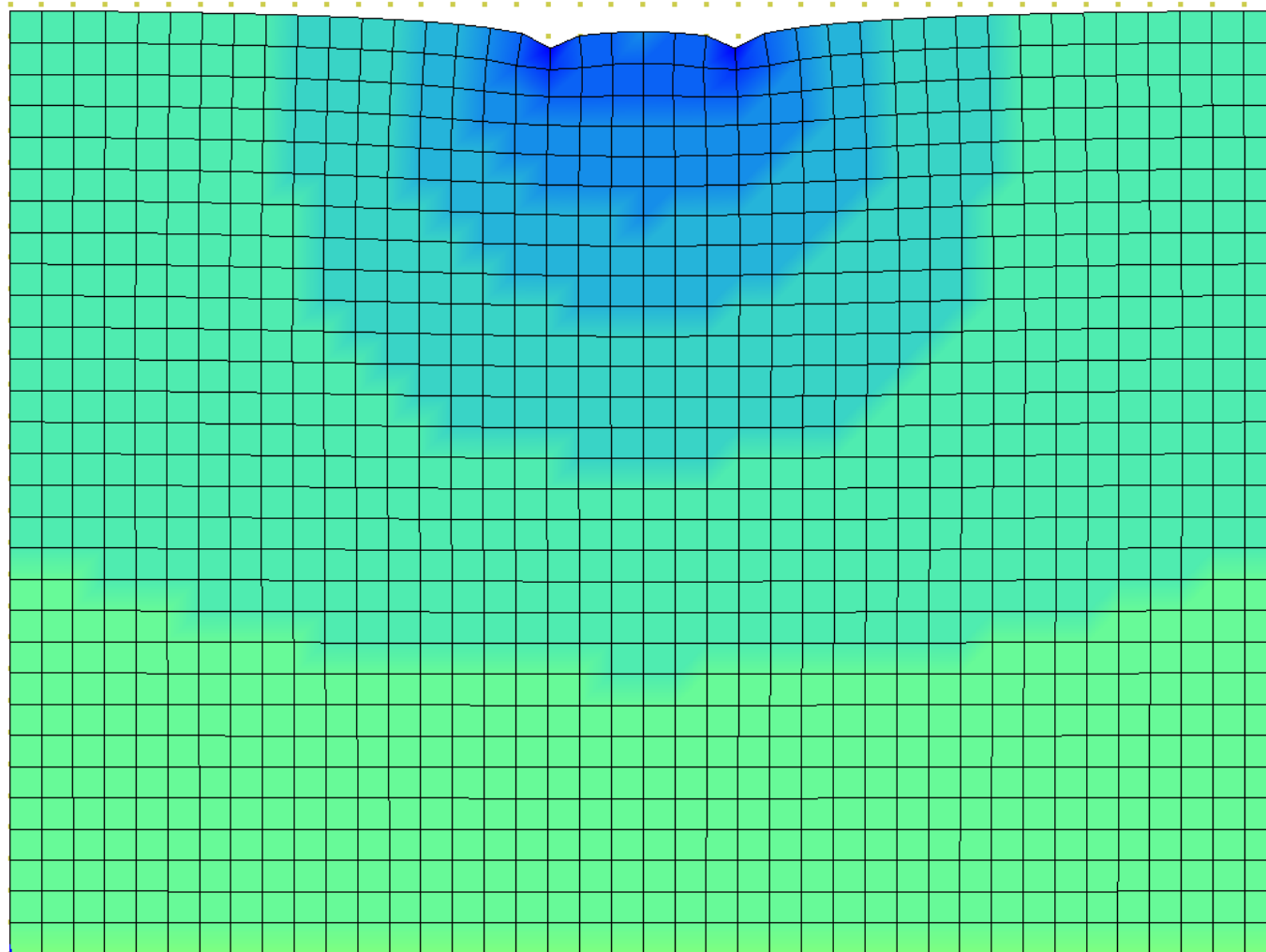
ActET:      2
ActRS:      2
ActM:       2
Dius:       10
```

y  
x

30. 09. 2022

# Pružný poloprostor

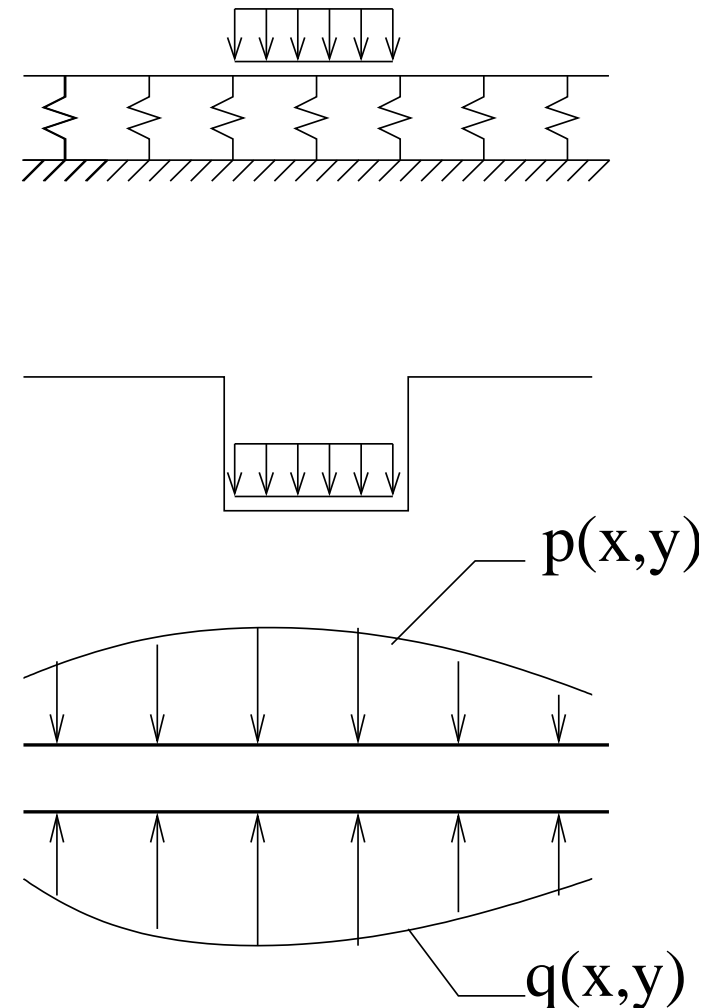
(9)



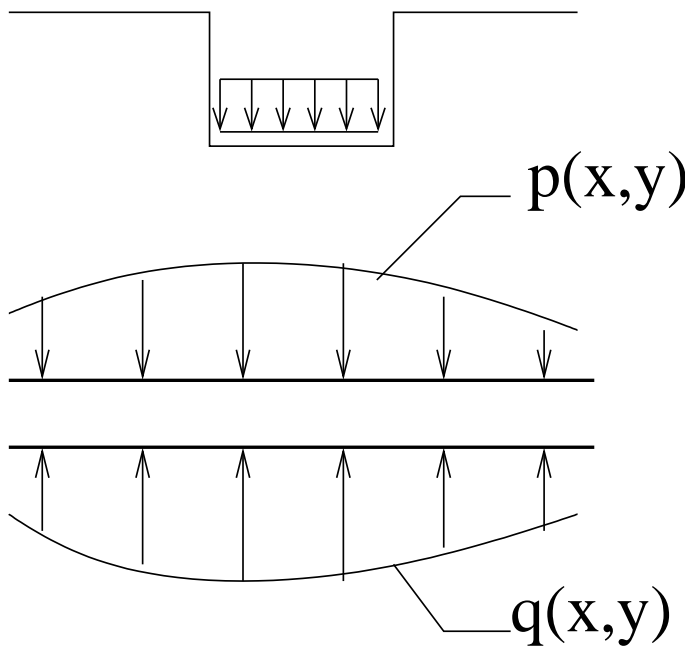
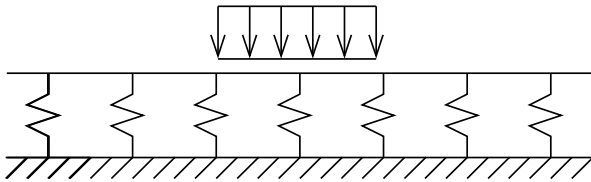
30. 09. 2022

# Kontaktní modely podloží

- Zjednodušené modely, kde celé podloží je nahrazeno modelem styčné spáry s definovanou tuhostí.
- Výhody: (relativně) jednoduché výpočty, možnost používání v numerických modelech.
- Nevýhody: ještě nižší přesnost než modely pružného poloprostoru.
- Typičtí zástupci:
  - Winklerův model (jednparametrický),
  - víceparametrické modely: Pasternakův (2 parametry), Kolářův – SCIA, 5 a více parametrů.



# Winklerův model podloží (1)



- Zavádí lineární závislost mezi napětím v podloží  $q$  a průhybem  $w$ :

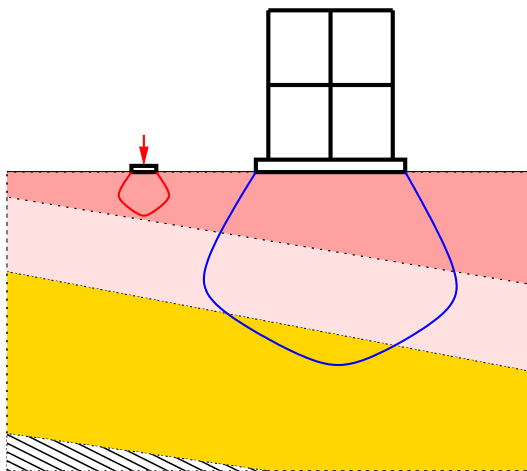
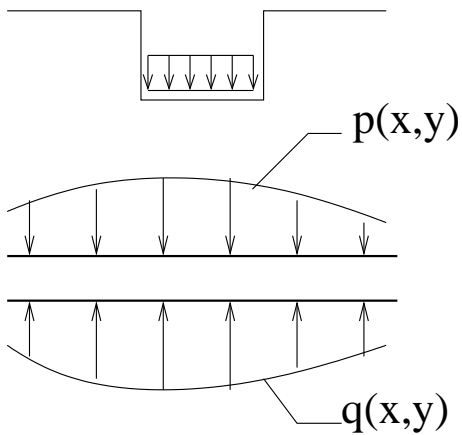
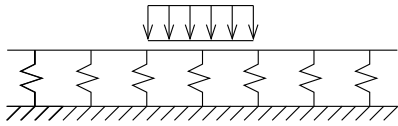
$$q(x, y) = C \times w(x, y)$$

$C$  ... součinitel stlačitelnosti podkladu [ $\frac{N}{m^3}$ ].

- Respektuje **pouze svislou složku** deformace  $\Rightarrow$  v nezátížených místech je průhyb nulový (v podloží chybí smykové spolupůsobení materiálu).
- Lineární vztah je popsán Winklerovou konstantou („tuhost podkladu“, „součinitel stlačitelnosti podkladu“, „koeficient ložnosti“) – pozor, nejde o „součinitel“, má jednotku  $\frac{N}{m^3}$ .

# Winklerův model podloží (2)

(2)

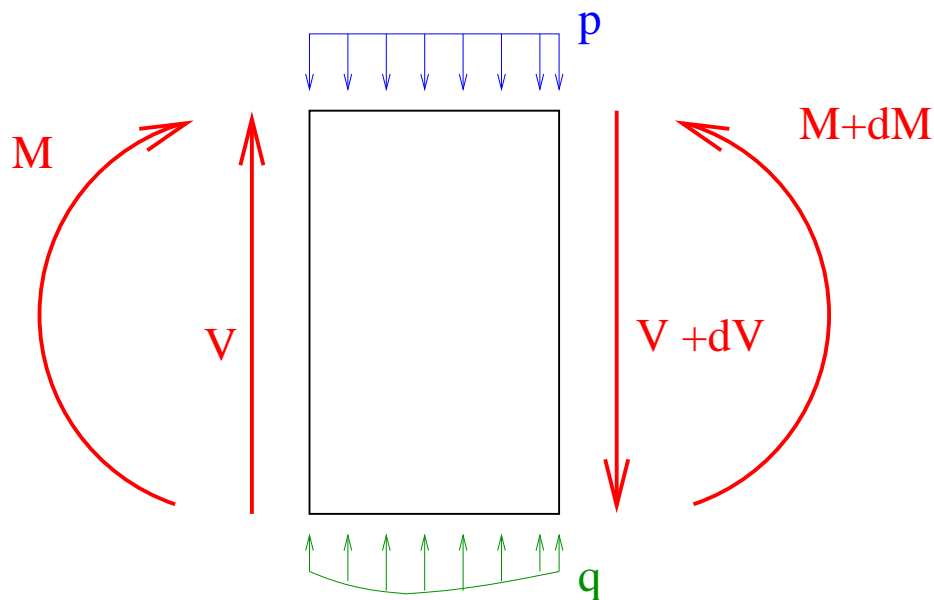


## Winklerova konstanta $C$ :

- Lze si představit jako: „síla nutná k zatlačení desky o ploše  $1 \text{ m}^2$  do hloubky  $1 \text{ m}$ “.
- Orientační hodnoty bývají uvedeny v geotechnických tabulkách, zjišťuje se polní zkouškou pomocí zatěžovací desky.
- Pozor: zatěžovací deska má průměr okolo  $0.6 \text{ m}$  (byly původně navržena pro dopravní stavby) a je zatlačována omezenou silou – skutečná konstrukce je zpravidla mnohem větší a těžší, působí tedy na více geologických vrstev než deska, tedy  $C$  zjištěné deskou nemusí být vypovídající!
- Typické hodnoty: písky  $4000 - 12500 \frac{\text{kN}}{\text{m}^3}$ , štěrky  $12500 - 150000 \frac{\text{kN}}{\text{m}^3}$ , hlinité půdy  $20000 - 100000 \frac{\text{kN}}{\text{m}^3}$ .

# Nosník na Winklerově podkladu (1)

Odvození ohybové čáry nosníku na Winklerově podkladu:



Rovnováha na elementu prutu:

$$V - (V + dV) + q dx - p dx = 0, \quad (17)$$

tedy:

$$V = \frac{dV}{dx} = q - p. \quad (18)$$

Dle Winklera platí:

$$q = C w. \quad (19)$$

$$[C] = \frac{kN}{m^3} \quad (20)$$

# Nosník na Winklerově podkladu (2)

Ze Schwedlerovy věty plyne:

$$V = \frac{dM}{dx}, \quad (21)$$

kombinací (18) a (21):

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{dM}{dx} \right) = p - q, \quad (22)$$

tedy dostaneme:

$$\frac{d^2 M}{dx^2} = q - p. \quad (23)$$



# Nosník na Winklerově podkladu (3)

Vztah mezi momentem a průhybem nosníku:

$$M = -EI \frac{d^2 w}{dx^2}, \quad (24)$$

kombinací (23) a (24):

$$-\frac{d^2}{dx^2} \left( \frac{d^2 w}{dx^2} \right) EI = q - p, \quad (25)$$

a po úpravě a uvážení, že  $q = C w$  (19) :

$$EI \frac{d^4 w}{dx^4} + C w = p, \quad (26)$$

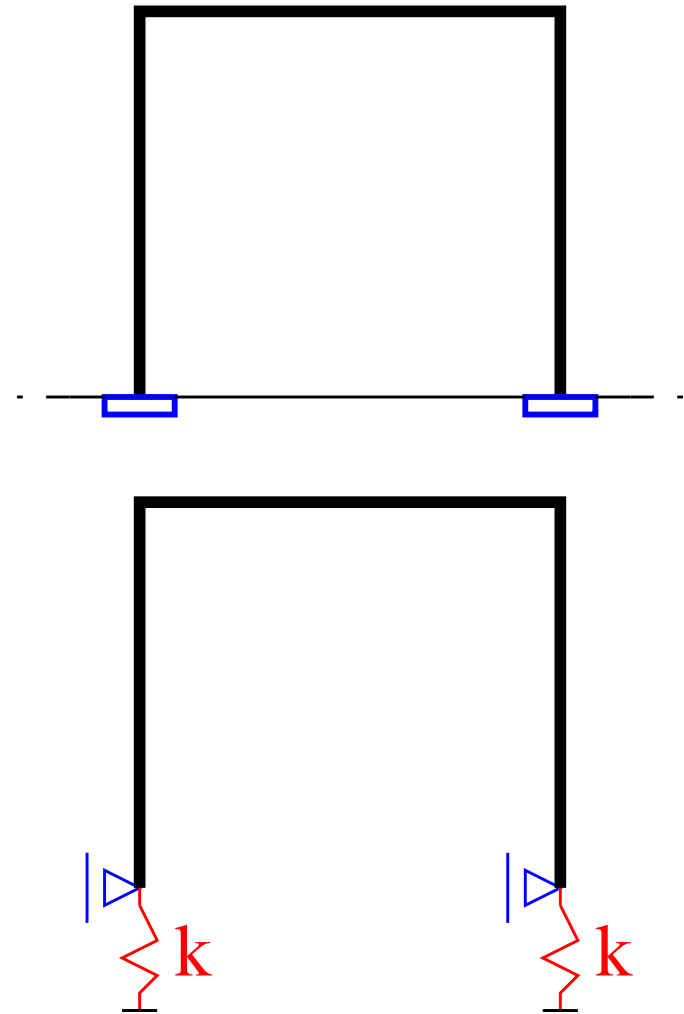
Což je **rovnice ohybové čáry nosníku** na pružném podkladu.

# Použití Winklerova modelu v obecné deformační metodě

Máme několik možností:

- Zavedení pomocí tuhostí („pružinek“) o tuhosti  $k$   $[\frac{N}{m}]$  v místech podpor.
- Vložení prutů o definované tuhosti na místa „pružinek“.

Náhrada podpor svislými pružinkami s tuhostí  $k$  je zakreslena červeně. Pozor, je třeba nezapomenout na vodorovné podepření!



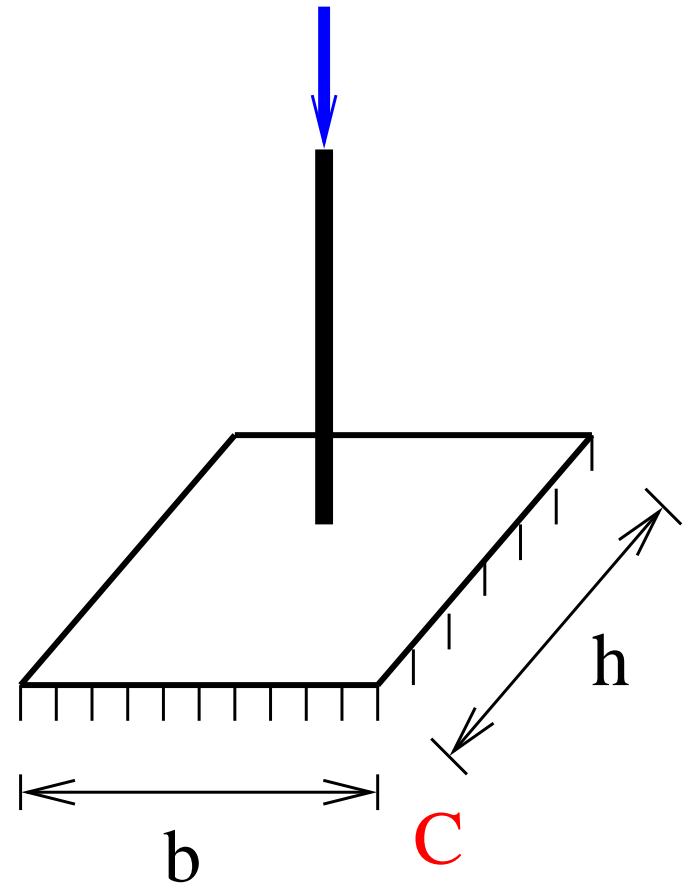
# Zavedení tuhosti (pružiny) ve styčnicku do řešení

- Stanovíme tuhost pružiny  $k$ , zpravidla podle vztahu:

$$k = C \times b \times h.$$

kde  $C$  je Winklerova konstanta a  $b$  a  $h$  jsou rozměry konstrukce, která na podloží tlačí (obvykle základové patky).

- Hodnotu  $k$  **přidáme** do matice tuhosti konstrukce  $\mathbf{K}$  na **hlavní diagonálu** do řádku (a sloupce), který odpovídá směru deformace, ve kterém pružina působí.



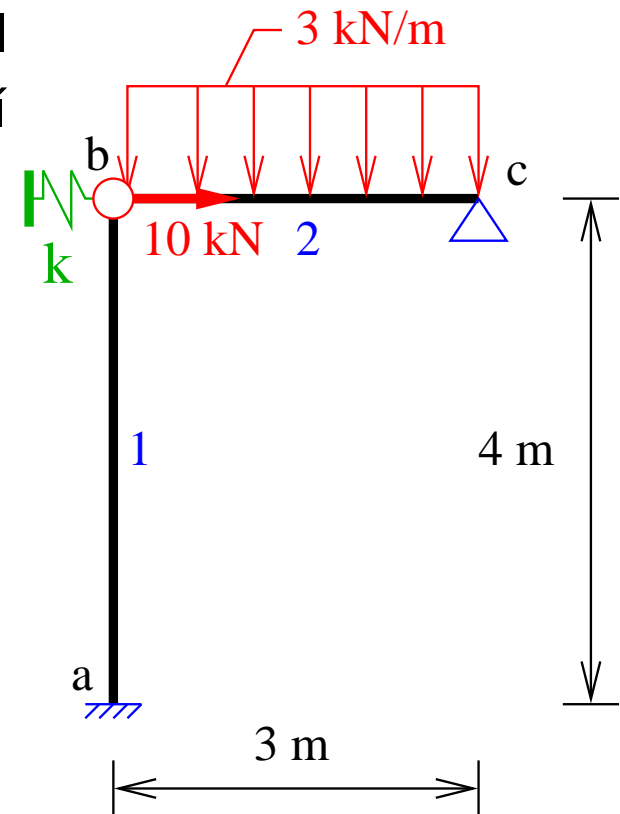
# Příklad 6: rám s pružným podepřením (1)

**Zadání:** Prut 2 ( $b - c$ ) rámu z **příkladu 1** byl podepřen pružinou ve směru osy  $x$  s tuhostí  $200000 \frac{kN}{m}$ , a to v bodě  $b$ .

Stanovte deformace rámu od zatížení z příkladu 1.

Je zadáno:

- $u_b = 0.005 \text{ m}$
- $E = 20 \text{ GPa}$
- $A_1 = 0.02 \text{ m}^2$
- $A_2 = 0.01 \text{ m}^2$
- $I_{z1} = 16.7 \times 10^{-6} \text{ m}^4$
- $I_{z2} = 8,3 \times 10^{-6} \text{ m}^4$



# Příklad 6: rám s pružným podepřením (2)

Soustava lineárních rovnic pro zadanou konstrukci (matice tuhosti je převzata z **příkladu 1**):

$$\begin{bmatrix} 6.273e7 & 0 \\ 0 & -9.986e7 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} u_b \\ w_b \end{bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Tuhost ( $k = 2e8 \frac{N}{m}$ ) působí ve směru  $u_b$ , tedy ji přidáme na hlavní diagonálu do prvního řádku:

$$\begin{bmatrix} 6.273e7 + 2e8 & 0 \\ 0 & -9.986e7 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} u_b \\ w_b \end{bmatrix} = \begin{Bmatrix} 10000 \\ 4500 \end{Bmatrix}$$

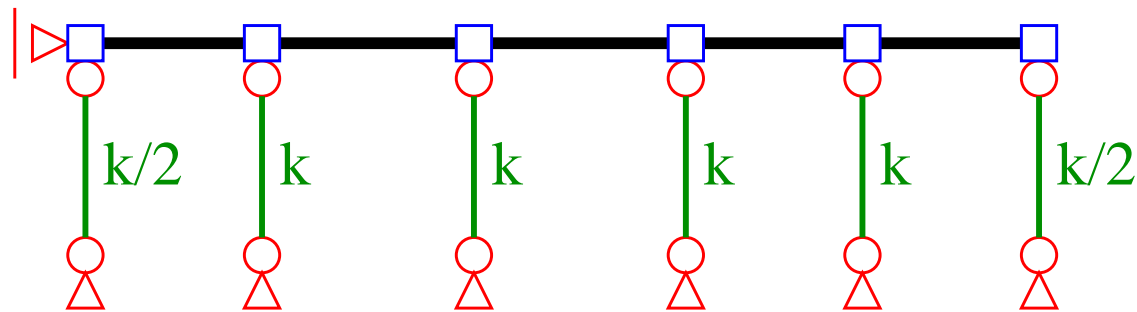
Dále vyřešíme deformace ( $\mathbf{K} \times \mathbf{u} = \mathbf{F}$ ):

$$\mathbf{u} = \begin{Bmatrix} 0.000037 \\ 0.000045 \end{Bmatrix} [m]$$

Mimoходом, v **příkladu 1** vyšla  $u_b = 0.000150 \text{ m}$ .

# Modelování Winklerova podloží pomocí náhradních prutů (1)

- Pokud nemáme možnost vkládat pružinky, je možnou cestou simulace chování Winklerova podloží pomocí svislých **náhradních** prutů s definovanou tuhostí.
- Náhradní pruty jsou:
  - kloubově připojeny ke konstrukci.
  - na spodní straně uloženy pomocí pevného kloubu.
- Lze použít i v programech, kde nejsou modely podloží jinak k dispozici.
- Nutnou podmínkou je znalost hodnoty Winklerovy konstanty  $C$ .
- Při sestavování pozor na tvarovou určitost (viz vodorovná vazba v obrázku).



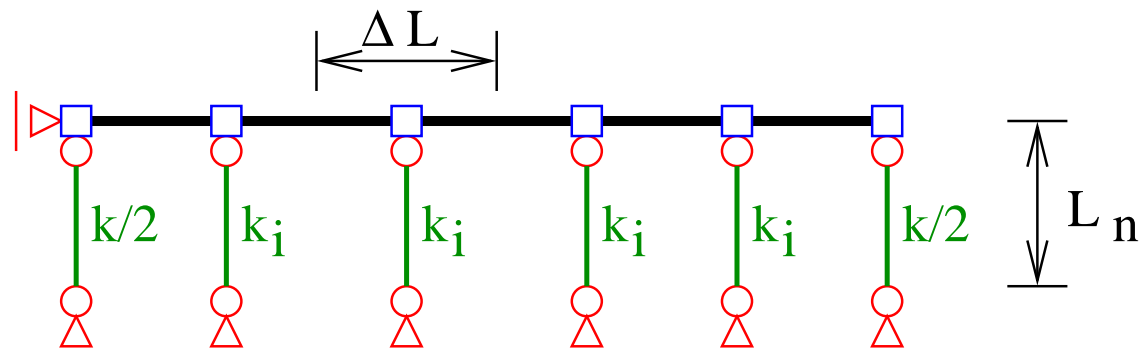
# Modelování Winklerova podloží pomocí náhradních prutů (2)

Výpočet tuhosti náhradního nosníku:

- Prut s klouby na obou koncích („příhradový“) – působí jen v osovém namáhání.
- Z matice tuhosti takového prutu – osová tuhost:  $k_z = \frac{E_n A_n}{L_n}$
- Potřebujeme zajistit tuhost odpovídající příslušné části základové konstrukce:

$$k_i = C \times \Delta L \times b,$$

kde  $C$  ... Winklerova konstanta,  $\Delta L$  ... délka příslušné části základu,  $b$  ... šířka základu (prutu na podloží).



# Modelování Winlerova podloží pomocí náhradních prutů (3)

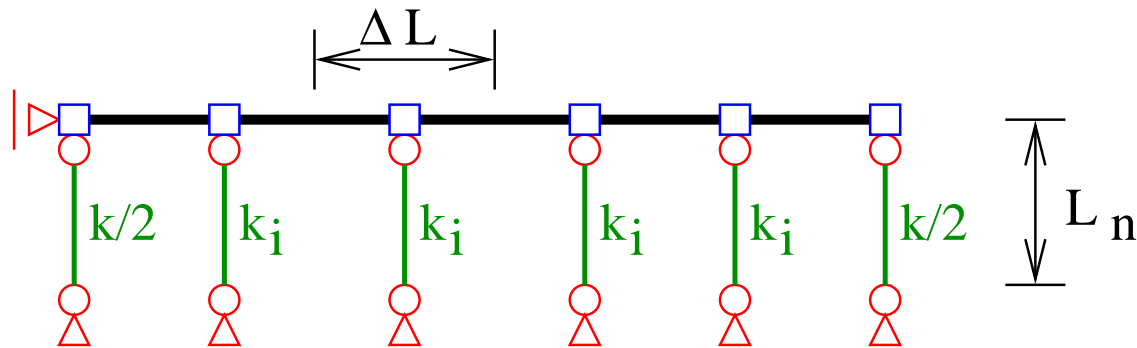
- Délku náhradního prutu zvolíme nejlépe  $L_n = 1 \text{ m}$  a jeho plochu také  $A_n = 1 \text{ m}^2$ .
- Modul pružnosti náhradního prutu pak spočteme z podmínky:

$$k_z = k_i = C \times \Delta L \times b = \frac{E_n \cdot 1}{1}$$

**Tedy:**

$$E_n = C \times \Delta L \times b.$$

- Náhradní pruty pak nezapomeneme zadávat s délkou  $1 \text{ m}$  a plochou  $1 \text{ m}^2$ !

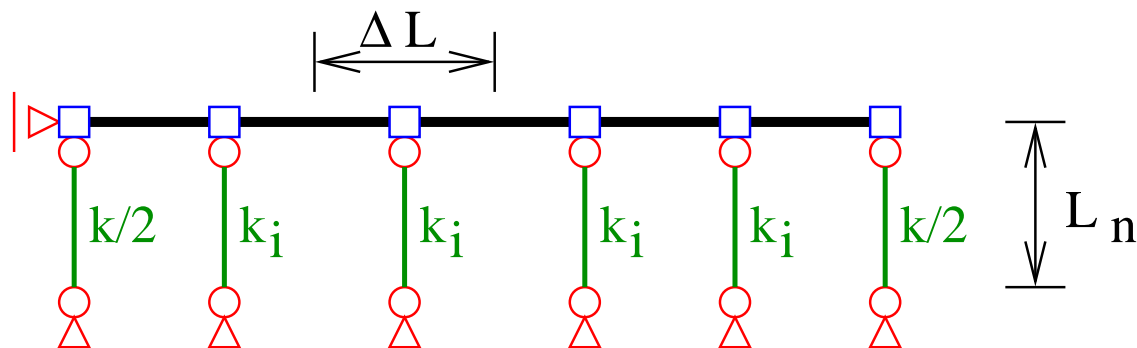




# Modelování Winlerova podloží pomocí náhradních prutů (4)

Poznámky k náhradním prutům:

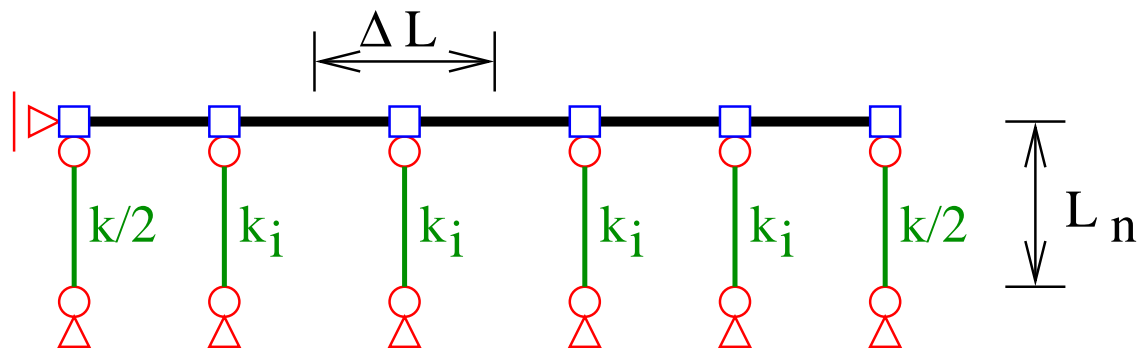
- Pokud nejsou náhradní pruty od sebe stejně vzdáleny, je vždy nutné počítat  $E_n$  pro každý prut.
- Krajní pruty zpravidla odpovídají kratší ploše, na které působí podloží, typicky  $\frac{\Delta L}{2} \times b$ , jejich tuhost (a  $E_n$ ) je tedy menší (typicky poloviční)!



# Modelování Winlerova podloží pomocí náhradních prutů (5)

Další „komplikace“:

- V případě, že konstrukce na podloží tlačí (v náhradním prutu je tlaková síla), je možné postupovat výše uvedeným způsobem.
- Pokud se stane, že v některém náhradním prutu vyjde **tahová síla**, pak řešení **není korektní**, protože tento stav **nemůže** u skutečné konstrukce **nastat** (pokud základová konstrukce není přikotvena k podloží – zemními kotvami, pilotami).
- Tažený náhradní prut je nutno z konstrukce „**odstranit**“ (nastavit jeho  $E_n = 1 \frac{kN}{m}$  nebo na jinou velmi malou hodnotu).
- Výpočet a kontrolu, zda některý prut není tažený je obvykle nutné opakovat.

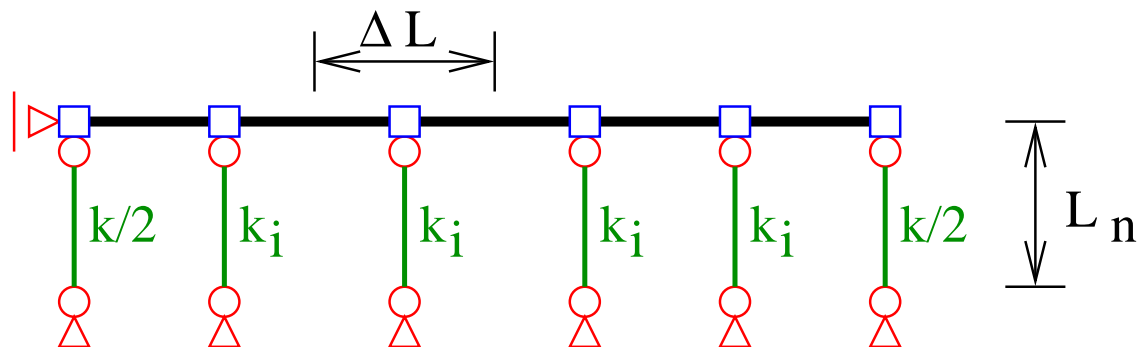


# Modelování Winlerova podloží pomocí náhradních prutů (6)

Postup výpočtu:

1. Určíme tuhosti náhradních prutů a sestavíme model.
2. Provedeme výpočet.
3. Provedeme kontrolu, zda některý náhradní prut není **tažen**.
4. Pokud je, pak snížíme jeho tuhost („v tahu nepůsobí“).
5. Opakujeme výpočet na takto upravené konstrukci.
6. Kroky 3–5 opakujeme dokud nepřestanou přibývat další tažené pruty.

Pozn: jde o **nelineární výpočet**, kdy se v každém kroku mění matice tuhosti konstrukce  $K$ .



# Ukázka rámu na podloží (1)

**Zadání:** Uvažujte rám na pružném Winklerově podloží s modulem ložnosti  $C = 20 \times 10^6 \frac{N}{m^3}$ . Rám má rozpětí  $5 m$  a výšku  $4 m$ , délka základového pasu je  $7 m$  a šířka  $0.8 m$ . Studovaný zatěžovací stav je představován spojitým rovnoměrným zatížením o velikosti  $5 \times 10^4 \frac{N}{m}$  na příčli.

Průřezové charakteristiky prvků rámu jsou:

- $A = 0.01 m^2$
- $I = 0.00083 m^4$

Průřezové charakteristiky základové konstrukce jsou:

- $A = 0.02 m^2$
- $I = 0.00007 m^4$

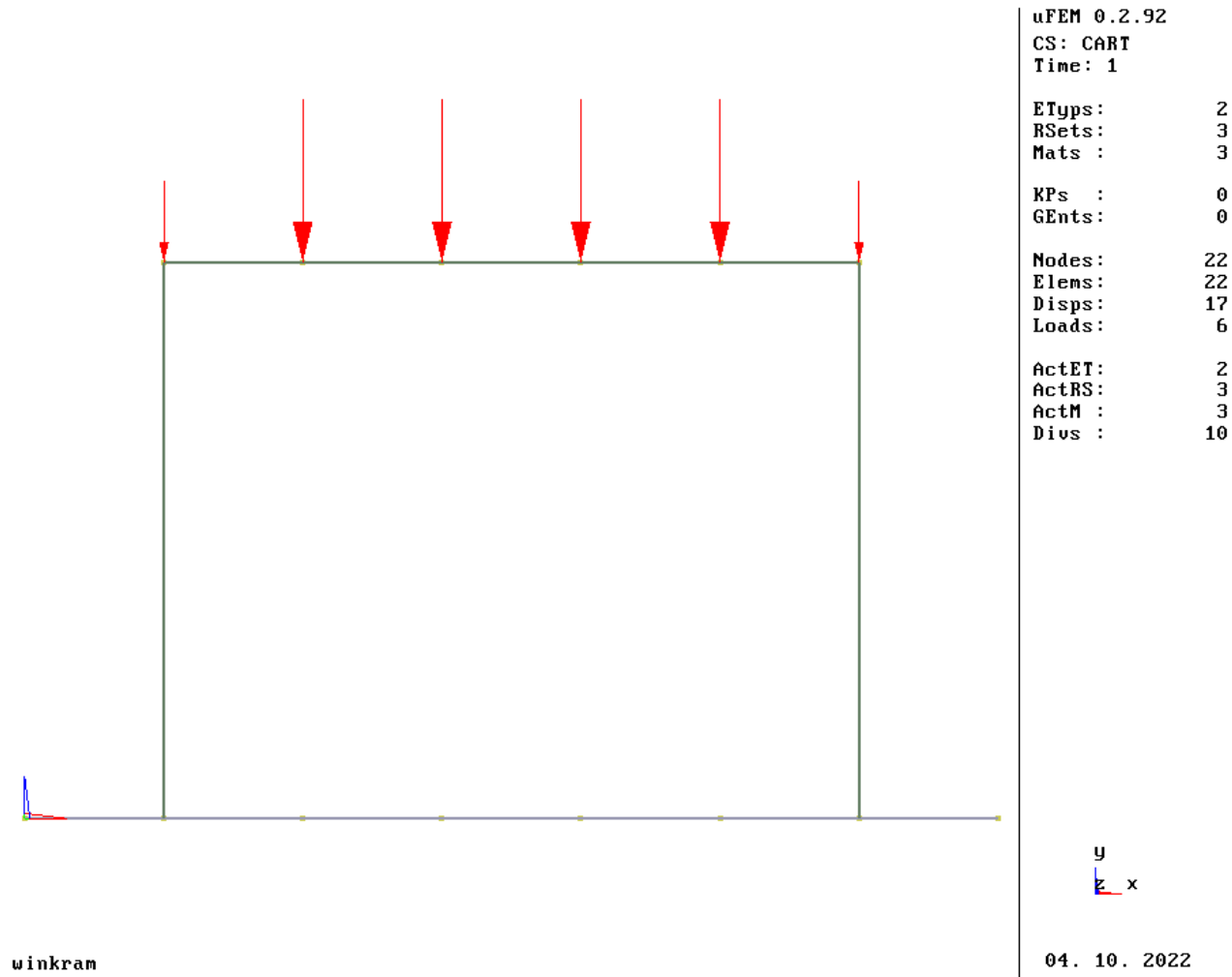
Materiál konstrukce má vlastnosti:

- $E = 20 GPa$
- $\nu = 0.02$

# Ukázka rámu na podloží

(2)

Model konstrukce dle zadání (spojité zatížení je rozloženo do styčnicků):



Délka prutů příčle a základu je zvolena po 1 *m*.

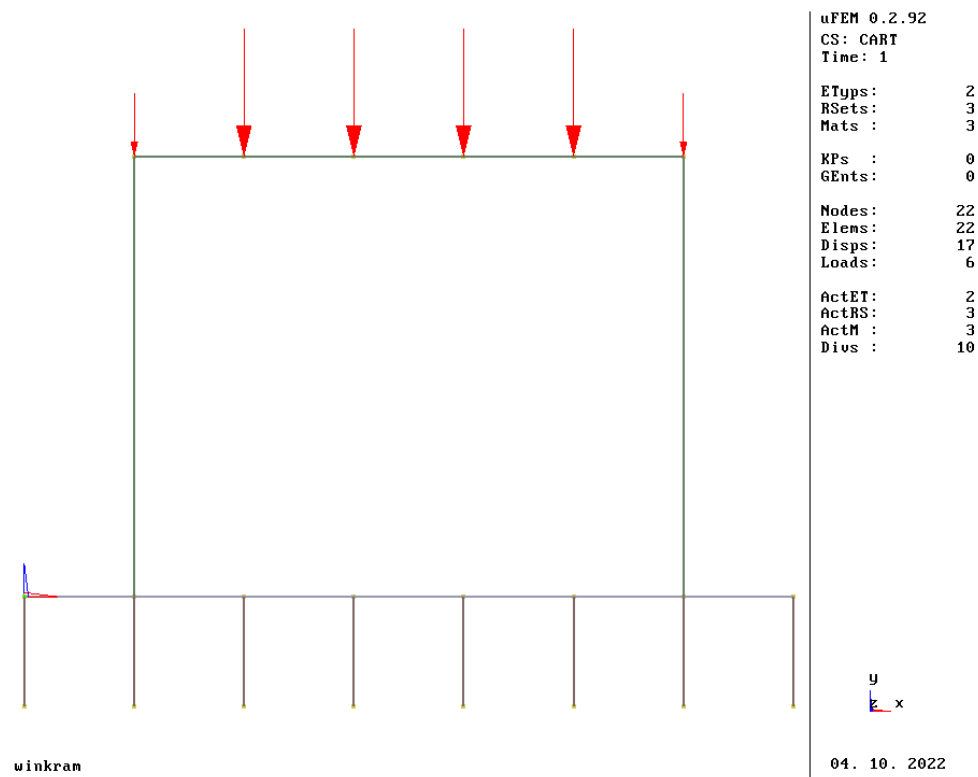
# Ukázka rámu na podloží (3)

(3)

Výpočet vlastností prutů nahrazujících Winklerovo podloží:

- Předpokládáme, že mají  $L = 1 \text{ m}$ ,  $A = 1 \text{ m}^2$ .
- Modul pružnosti náhradních prutů:

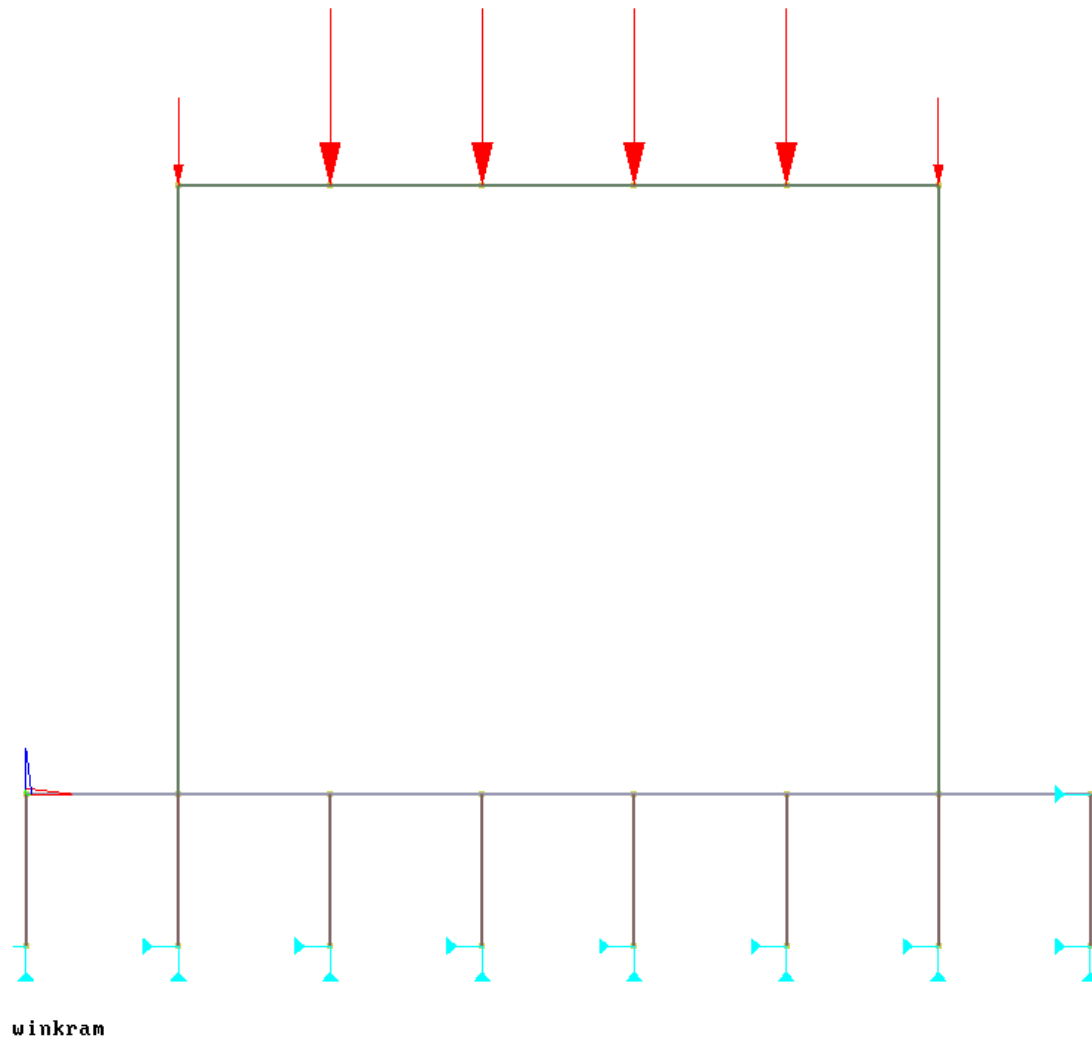
$$E_n = C \times \Delta L \times b = 20 \times 10^6 \times 1 \times 0.8 = 1.6 \times 10^6 \frac{N}{m}.$$



# Ukázka rámu na podloží

(4)

Kompletní model včetně podpor:



```
uFEM 0.2.92
CS: CART
Time: 1

ETyps:      2
RSets:      3
Mats :      3

KPs :       0
GEnts:      0

Nodes:      22
Elems:      22
Disps:      17
Loads:       6

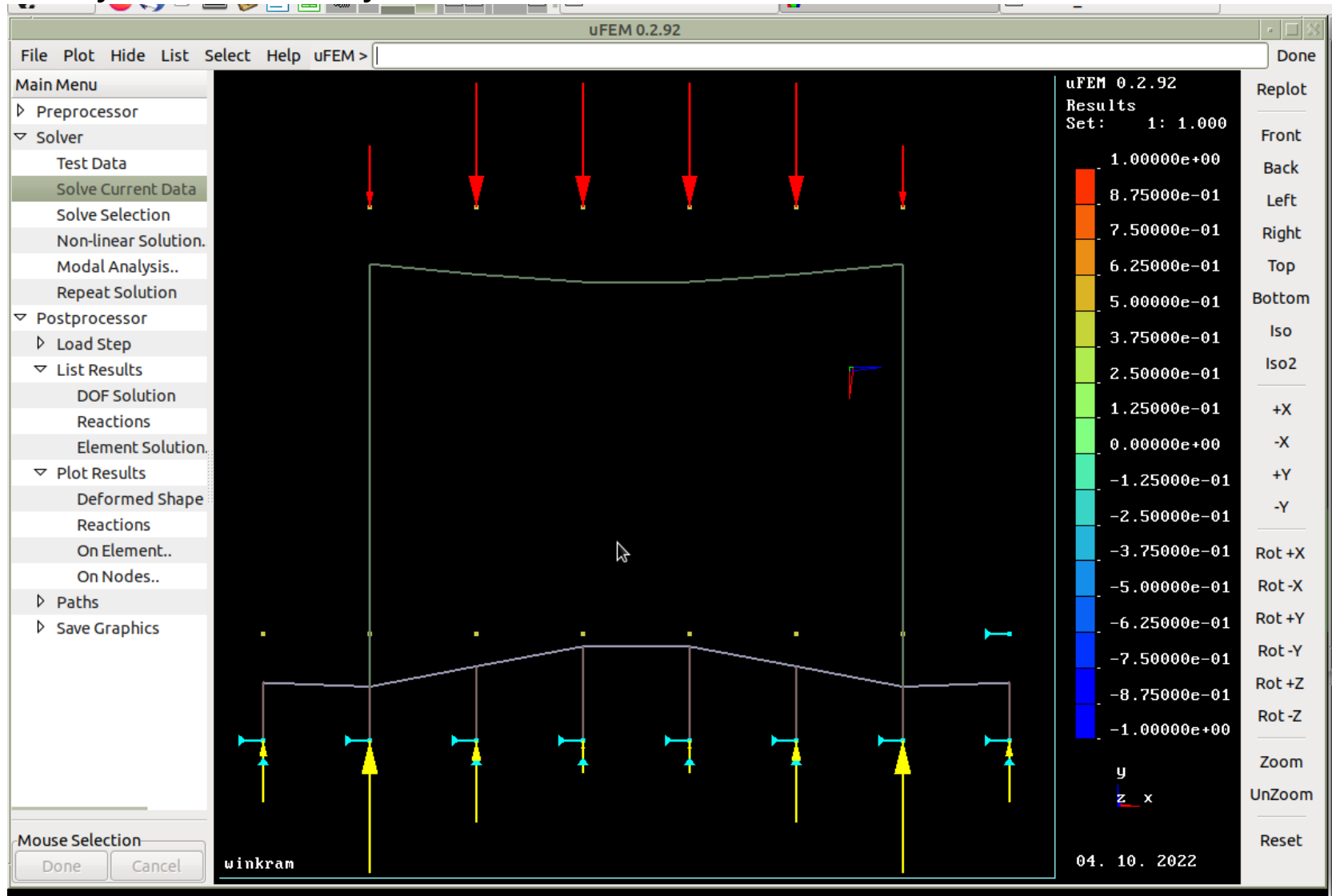
ActET:      2
ActRS:      3
ActM :      3
Dius :      10
```

04. 10. 2022

# Ukázka rámu na podloží

(5)

Výsledky: deformovaný tvar a reakce:





# Ukázka rámu na podloží

(6)

Výsledky: deformovaný tvar a reakce:

